ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1997, том 352, № 3, с. 298–300

МАТЕМАТИКА

УДК 519.2

АЛГОРИТМ ФИЛЬТРАЦИИ И ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ СПЛАЙНАМИ

© 1997 г. В. А. Винокуров

Представлено академиком В.А. Ильиным 23.01.95 г.

Поступило 08.02.95 г.

Во многих областях научно-технического и социально-экономического применения математических методов мы имеем дело с данными, измеренными в дискретные моменты времени – так называемыми временными рядами. Для обработки информации, заданной в виде временного ряда, предлагается новый алгоритм фильтрации и экстраполяции, в котором априорные предположения о решении сводятся к существованию и интегрируемости в квадрате m-й обобщенной производной.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $x(t)$ – числовая функция, заданная на отрезке $[a; b]$ и имеющая обобщенную производную порядка m, интегрируемую в квадрате, т.е. $x(t)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^m[a; b]$. В точках $t_0, t_1, \ldots, t_n$ интервала $(a; b)$ проводятся измерения функции $x(t)$ с погрешностью, т.е. заданы величины $y_i = x(t_i) + \varepsilon_i$, $i = 0, \ldots, n$, где ε_i – независимые случайные величины с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией $\sigma_i^2 > 0$. Требуется по заданным величинам y_i построить функцию $x_\alpha(t)$, являющуюся "достаточно хорошим" приближением к функции $x(t)$.

В данной работе в качестве приближенного решения предлагается брать функцию $x_\alpha(t)$, минимизирующую функционал

$$L(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(y_i - x(t_i))^2}{\sigma_i^2} + \alpha\int_a^b (x^{(m)}(t))^2 dt. \quad (1)$$

Функционал (1) будем рассматривать при условиях:

$$\alpha > 0, \quad m > 0, \quad n \ge m - 1. \quad (2)$$

Российский государственный социальный институт, Москва

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ФУНКЦИИ $x_\alpha(t)$ И ЕЕ АНАЛИЗ

Функционалы вида (1) рассмотрены в [1]. Там доказано, что при выполнении условий (2) функционал (1) является положительно-определенным и имеет единственный минимум при любом $y \in \mathbb{R}^{n+1}$. Целью данной работы являются получение и обоснование уравнения Эйлера (4) для решения вариационной задачи (1), а также построение и обоснование алгоритма вычисления функции $x_\alpha(t)$, сводящегося к решению системы m линейных уравнений с m неизвестными.

Введем в рассмотрение линейный по второму аргументу функционал

$$N(x, \Delta x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x(t_i) - y_i)\Delta x(t_i)}{\sigma_i^2} +$$

$$+ \alpha\int_a^b x^{(m)}(t)\Delta x^{(m)}(t)dt, \quad x(t), \Delta x(t) \in W_2^m[a; b]. \quad (3)$$

Свойства функционала $L(x, y)$ и функции $x_\alpha(t)$ характеризуются следующими утверждениями.

Лемма 1. *Функционал $L(x, y)$ имеет минимум при $x(t) = x_\alpha(t)$ тогда и только тогда, когда $N(x_\alpha(t), \Delta x(t)) = 0$ для любого элемента $\Delta x \in W_2^m[a; b]$.*

Лемма 2. *Функция $x_\alpha(t) \in W_2^m[a; b]$, удовлетворяющая соотношению $N(x_\alpha(t), \Delta x(t)) = 0$ при всех $\Delta x(t) \in W_2^m[a; b]$, обладает следующими свойствами:*

1) *функция $x_\alpha(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$(-1)^m \alpha x_\alpha^{(2m)}(t) - \sum_{i=0}^{n} \frac{(y_i - x_\alpha(t))\delta(t - t_i)}{\sigma_i^2} = 0, \quad (4)$$

где $\delta(t)$ – δ-функция Дирака с носителем в нуле и уравнение (4) *понимается в смысле обобщенных функций;*

2) *функция* $x_\alpha(t)$ *удовлетворяет следующим краевым условиям*:

$$x_\alpha^{(k)}(a) = x_\alpha^{(k)}(b) = 0, \quad k = m, \ldots, 2m-1; \tag{5}$$

3) *на каждом участке* $(t_i; t_{i+1})$, $i = 0, \ldots, n-1$, *функция* $x_\alpha(t)$ *является полиномом степени* $2m-1$;

4) *на интервалах* $(a; t_0)$ *и* $(t_n; b)$ *функция* $x_\alpha(t)$ *является полиномом степени* $m-1$;

5) *функция* $x_\alpha(t)$ *имеет на* $[a; b]$ *непрерывную производную порядка* $2m-2$;

6) *производная* $x_\alpha^{(2m-1)}(t)$ *испытывает в точках* $t = t_i$ *скачок, величина которого равна*

$$x_\alpha^{(2m-1)}(t_i+0) - x_\alpha^{(2m-1)}(t_i-0) = (-1)^m \frac{(y_i - x_\alpha(t_i))}{\alpha\sigma_i^2}.$$

Теорема 1. *Краевая задача* (4), (5) *при любом* $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ *имеет единственное решение в классе* $W_2^m[a; b]$, *совпадающее с точкой минимума функционала* (1).

3. СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ $x_\alpha(t)$

Функция $x_\alpha(t)$ обладает свойствами, сформулированными в лемме 2. На каждом участке $(t_i; t_{i+1})$ функцию $x_\alpha(t)$ будем искать в виде полинома

$$x_i(t) = \sum_{j=0}^{2m-1} a_{ij}(t-t_i)^j, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

На участке $(a; t_0)$ положим

$$x_{-1}(t) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{-1j}(t-t_0)^j.$$

На участке $(t_n; b)$ положим

$$x_n(t) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{nj}(t-t_n)^j.$$

Для определения коэффициентов a_{ij} воспользуемся условиями непрерывности функций $x_\alpha^{(k)}(t)$, $k = 0, \ldots, 2m-2$, в точках $t = t_{i+1}$ и свойством 6) из леммы 2, записанным для точки $t = t_{i+1}$.

Введем векторы размерности $2m$:

$$a_i = [a_{i0}, a_{i1}, \ldots, a_{i2m-1}]^{\mathrm{T}}, \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

$$a_{-1} = [a_{-10}, a_{-11}, \ldots, a_{-1m-1}, 0, \ldots, 0]^{\mathrm{T}},$$

$$a_n = [a_{n0}, a_{n1}, \ldots, a_{nm-1}, 0, \ldots, 0]^{\mathrm{T}},$$

$$w = [0, \ldots, 0, 1]^{\mathrm{T}}.$$

Введем числа:

$$h_i = t_{i+1} - t_i, \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

$$\beta_i = \frac{(-1)^{m+1}}{\alpha\sigma_i^2(2m-1)!}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Введем матрицу $A_{-1} = \{A_{-1,kj}\}$ размерности $2m \times 2m$ с элементами

$$A_{-1,kj} = 0 \text{ при } k = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, k-1;$$

$$A_{-1,kj} = 1 \text{ при } k = 1, \ldots, m, \quad j = k;$$

$$A_{-1,kj} = 0 \text{ при } k = 1, \ldots, m, \quad j = k+1, \ldots, 2m;$$

$$A_{-1,kj} = 0 \text{ при } k = m+1, \ldots, 2m-1, \quad j = 1, \ldots, 2m;$$

$$A_{-1,kj} = \beta_0 \text{ при } k = 2m, \quad j = 1;$$

$$A_{-1,kj} = 0 \text{ при } k = 2m, \quad j = 2, \ldots, 2m.$$

Введем матрицы $A_i = \{A_{i,kj}\}$, $i = 0, \ldots, n-1$, размерности $2m \times 2m$ с элементами

$$A_{i,kj} = h_i^{j-1} \text{ при } k = 1, \quad j = 1, \ldots, 2m;$$

$$A_{i,kj} = 0 \text{ при } k = 2, \ldots, 2m-1, \quad j = 1, \ldots, k-1;$$

$$A_{i,kj} = C_{k-1}^{j-1} h_i^{j-k} \text{ при } k = 2, \ldots, 2m-1, \quad j = k, \ldots, 2m;$$

$$A_{i,kj} = \beta_{i+1} h_i^{j-1} \text{ при } k = 2m, \quad j = 1, \ldots, 2m-1;$$

$$A_{i,kj} = 1 + \beta_{i+1} h_i^{2m-1} \text{ при } k = 2m, \quad j = 2m.$$

Из леммы 2 вытекает следующая связь между введенными векторами a_{i+1} и a_i:

$$a_{i+1} = A_i a_i - \beta_{i+1} y_{i+1} w, \quad i = -1, \ldots, n-1.$$

Воспользуемся условием $a_{nj} = 0$, $j = m, \ldots, 2m-1$, вытекающим из краевых уравнений (5). Тогда мы получим систему m линейных алгебраических уравнений для m коэффициентов a_{-1j}; $j = 0, \ldots, m-1$. Из теоремы 1 следует, что полученная система линейных уравнений имеет единственное решение при любом $y \in \mathbb{R}^{n+1}$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИИ $x_\alpha(t)$ И АЛГОРИТМА ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Рассмотрим, какой вид будет иметь функция $x_\alpha(t)$ в двух предельных случаях: при $\alpha \to 0$ и при $\alpha \to \infty$.

При $\alpha \to \infty$ функция $x_\alpha(t)$, минимизирующая функционал (1), имеет своим пределом полином степени $m-1$, построенный по методу наименьших квадратов.

При $\alpha \to 0$ функция $x_\alpha(t)$, минимизирующая функционал (1), будет иметь своим пределом сплайн, проходящий через точки (t_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$.

Использованный нами вид стабилизирующего функционала $\int_a^b (x^{(m)}(t))^2 dt$, $m > 0$, входящего в $L(x, y)$, определил полиномиальный вид функции $x_\alpha(t)$, являющейся точкой минимума функционала $L(x, y)$. При этом функция $x_\alpha(t)$ может быть вычислена в любой точке t отрезка $[a; b]$ с минимальным числом арифметических действий. Кроме того, в этом случае минимум функционала (1) не зависит от положения точек $a < t_0$ и $b > t_n$ и при изменении положения точек a и b коэффициенты полиномов, составляющих функцию $x_\alpha(t)$, не изменяются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Василенко В.А.* Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск: Наука, 1983.