Вычислимое и невычислимое

в вычислительной математике

В. А. ВИНОКУРОВ

Сегодня является общепризнанной та роль, которую математика играет в естествознании и технике. Их огромные успехи в познании и преобразовании природы были бы невозможны без широкого и многообразного использования математических методов. Начиная с Галилея, провозгласившего, что “книга природы написана языком математики”, и вплоть до сегодняшнего дня математика завоевывала все более прочные позиции в естественных науках и технике, составляя неотъемлемую органическую часть их содержания (прежде всего в различных разделах физики, астрономии, техники). Проникновение математики в естественные науки, ее “непостижимая эффективность” в этих науках поставили целый ряд методологических, философских проблем. Это прежде всего вопросы о причинах и границах эффективности математических методов в естествознании и технике, о возможностях и перспективах математизации гуманитарного знания. Ответ на эти вопросы неотделим от более глубокого понимания специфики объектов математики, тех допущений и идеализации, которые в ней применяются, а также характерных для математики способов обоснования и доказательства ее утверждений.

Современный этап взаимодействия математики с естественными и техническими науками характеризуется не только использованием все более сложных и абстрактных математических теорий, но и все более интенсивным применением вычислительных методов в связи с быстрым развитием ЭВМ. Это привело к появлению ряда новых проблем, многие из которых обсуждаются в философской литературе. (Круглый стол: “Социально-философские проблемы “человеко-машинных систем”. “Вопросы философии”, 1979, №№ 2, 3, 4.)

Отметим, что некоторые специалисты-математики высказывают опасение в связи с возрастающим, по их мнению, обособлением и даже разрывом между традиционным “ядром” теоретической математики, ее наиболее абстрактными разделами и практикой вычислений. Эта точка зрения действительно имеет определенные основания, поскольку сегодня в вычислительной математике занято немало специалистов, основная задача которых — применение стандартных математических конструкций для решения многообразных практических задач. При этом, как правило, используется лишь понятийный аппарат элементарных разделов теоретической математики. По этой причине некоторые математики-теоретики “старой закалки” продолжают несколько свысока относиться к вычислительной математике, тем более, что они помнят время ее зарождения, когда использовавшиеся в ней методы действительно были достаточно элементарными. Однако втой части вычислительной математики, которая сегодня занимается созданием новых алгоритмов для решения принципиально более сложных типов задач, а также вопросами обоснования применимости вычислительных методов в соответствующих областях, использование самых современных результатов теоретической математики является необходимым. Поэтому мы считаем условным деление математики на “чистую” и “прикладную”. Прикладные идеи часто порождают “чистые” направления и, наоборот, “чистая” математика нередко приобретает важное прикладное значение. Как отмечал академик Н. Н. Яненко, (Н. Н. Яненко. Методологические проблемы современной математики. “Вопросы философии”, 1981, №8) сегодня зачастую даже сама вычислительная практика, на первый взгляд не представляющая, казалось бы, особого интереса с точки зрения теоретической математики, порождает множество чисто математических проблем.

Поучительно в этом плане проследить эволюцию используемых для подготовки математиков-вычислителей учебных пособий. Если в 50—60-е годы теоретический аппарат в этих пособиях ограничивался в основном системами линейных уравнений и дифференцированием, то за 70-е годы произошло значительное усложнение его. прежде всего за счет введения языка теории операторов, банаховых пространств и других понятий функционального анализа. Вот почему в развитии вычислительной математики правомерно, на наш взгляд, выделить две взаимосвязанные тенденции: с одной стороны, происходит все более широкое и массовое использование опирающихся на относительно простой теоретический аппарат вычислительных методов; с другой стороны, по мере развития вычислительной математики в целом, усложнения решаемых ею задач для нее становится все более необходимым наиболее сложный и абстрактный аппарат современной теоретической математики. В дальнейшем изложении эта вторая тенденция будет показана более конкретно. Мы будем опираться при этом на анализ одной из принципиальных проблем вычислительной математики — проблемы приближенной вычислимости. Она возникает именно в вычислительной математике в связи с неустранимостью погрешности исходных данных и конечной точностью машинного счета.

1. Принципиальное значение отсутствия абсолютной точности в вычислительной математике

Классическая математика основывалась на концепции абсолютной точности исходных данных и проводимых на их основе вычислений, а следовательно, и абсолютной точности результата. В течение долгого времени предполагалось, что переход к решению практических задач при наличии сколь угодно высокой (конечной) точности данных и вычислений принципиально не меняет сути дела и не ведет к возникновению новых проблем в постановке и решении задачи. Это в целом неверное предположение считалось справедливым, хотя математикам были известны конкретные примеры задач, в которых очень малая погрешность в исходных данных может играть принципиальную роль (так, например, сколь угодно малая ошибка в коэффициентах системы линейных уравнений может превратить ее из разрешимой в неразрешимую).

Для того чтобы более детально разъяснить суть трудностей, возникающих в вычислительной математике в связи с неустранимостью погрешности исходных данных и конечной точностью машинного счета, напомним вначале некоторые факты из истории развития вычислительных методов. Появление интереса к применению численных методов в математике было связано с возникновением дифференциального и интегрального исчисления и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. На языке последних еще в физике XVIII века удалось точно выразить законы классической механики и решить многообразные конкретные задачи, связанные с механическим движением и взаимодействием тел. При этом принципиальное значение имело то обстоятельство, что все задачи динамики, выраженные на языке обыкновенных дифференциальных уравнений с учетом необходимых начальных условий (положения и скорости движущихся тел) и значений параметров (массы и силы взаимодействия), оказались имеющими единственное решение. Именно это общее свойство математического аппарата классической механики, перенесенное на отражаемую этим аппаратом действительность, позволило Лапласу выдвинуть идею всемирного разума, которому на основе лишь знания положений и скоростей тел в некоторый момент времени и неограниченных вычислительных способностей открылось бы во всех деталях как прошлое, так и будущее мира.

С точки зрения успешного практического применения классической механики принципиальное значение имело и такое свойство ее математического аппарата, казавшееся совершенно естественным, как непрерывная зависимость решения от исходных данных (начальные положения и скорости тел, их массы, силы взаимодействия между ними). Это означало, что при достаточно малом изменении этих данных будущее (и прошлое) поведение системы также изменяется незначительно. Именно это свойство аппарата классической механики позволило с высокой точностью производить расчеты в астрономии и физике на основе известных с некоторой погрешностью исходных данных.

В XIX веке прежде всего в связи с описанием движения сплошных сред (гидро-и аэродинамика, теория упругости, электромагнитная теория Максвелла) стал интенсивно применяться более сложный математический аппарат, а именно дифференциальные уравнения в частных производных. Эти уравнения (хотя они и отличались от обыкновенных дифференциальных уравнений тем, что исходные данные, необходимые для их решения, включали дополнительные, так называемые граничные, условия) считались аналогичными обыкновенным дифференциальным уравнениям' в смысле непрерывной зависимости решения от исходных данных. Однако в 1923 году известный французский математик Ж. Адамар в монографии, посвященной проблемам математической физики, рассмотрел задачу, формулируемую с помощью одного из видов уравнений в частных производных (краевая задача для гравитационного потенциала), обладавшую следующей особенностью: сколь угодно малые вариации граничных условий приводили к сколь угодно большим изменениям решения. Позднее, в 1932 году, Ж. Адамар специально указал на отличие задач такого типа от так называемых “корректно поставленных” задач для уравнений в частных производных с дополнительными условиями на границе, то есть задач, которые характеризуются не только наличием решения (в определенном математическом множестве) и его единственностью, но и непрерывной зависимостью решения от исходных данных. Принимая во внимание тот факт, что в конкретных приложениях исходная информация всегда дана с некоторой погрешностью, Ж. Адамар сделал вывод, что лишь математически корректно поставленные задачи могут иметь физическую интерпретацию. Те же задачи, которые не удовлетворяли условию корректной постановки, не могли, по его мнению, иметь физической интерпретации, а поэтому, естественно, не представляли практического интереса (См. J. H a d a m a r d. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles Uneaires hyperboliques. Paris, 1932.).

Действительно, лишь для корректно поставленных задач представляется на первый взгляд достаточно обоснованным и практически значимым понятие “приближенное решение” на основе заданных с некоторой погрешностью исходных данных. В случае же некорректно поставленных задач (в дальнейшем изложении мы их именуем “некорректными задачами”) понятие “приближенное решение” практически теряет смысл, поскольку одно “приближенное решение” может очень сильно отличаться от другого при незначительном изменении исходных данных. Это происходит потому, что при решении некорректных задач классическими методами отсутствует сходимость приближенных решений к точному решению.

Отказ Ж. Адамара признать “законность” и правомерность некорректных задач является конкретным примером влияния определенной философской позиции на научное творчество в математике. Французский математик отказался признать законными те задачи, которые, претендуя на описание некоторого физически реального явления, приводят при их приближенном решении к результатам, каковыми практически невозможно воспользоваться. На первый взгляд такая позиция вполне обоснованна, поскольку, некорректность задачи может быть истолкована как результат определенной дефектности математической модели, на основе которой она сформулирована. Авторитет Ж. Адамара в кругах специалистов был настолько велик, что на физическую интерпретацию некорректных задач был наложен своеобразный запрет, и в течение двадцати лет они не привлекали внимания математиков.

История науки знает немало примеров плодотворных “запретов”, связанных с открытием новых законов и принципов. Достаточно напомнить “запрет” на проекты вечного двигателя в связи с установлением закона сохранения и превращения энергии или запрет на доказательство пятого постулата Евклида вследствие открытия неевклидовых геометрий. Однако “запрет” Ж. Адамара не относится к их числу. Как впоследствии выяснилось, его отказ от физической интерпретации некорректных задач был ошибочным. Ж. Адамар не учел того обстоятельства, что отношение математической модели к описываемому ею реальному явлению опосредуется, в частности, существующими в данное время методами расчета, т. е. методами извлечения практически применимой числовой информации из этой модели. Эти методы могут быть несовершенными и не позволять выявить всей информации, потенциально содержащейся в модели, или даже создавать впечатление неполноценности модели. “Незаконность” физической интерпретации некорректных задач и оказалась обусловленной ограниченностью классических методов их приближенного решения, а отнюдь не дефектами математической модели соответствующего явления.

2. Многообразие практически важных некорректных задач

Однако потребности практики заставили математиков вновь обратиться к поиску методов решения некорректных задач. Особенно часто такие задачи возникали в геофизике и геологоразведке. Не случайно поэтому советский математик А. Н. Тихонов, сделавший в 1943 году важный шаг в разработке методов решения некорректных задач, решал именно так называемую обратную задачу гравиметрии. Эта задача заключается в нахождении формы и плотности рудного тела (или запасов жидких, газообразных ископаемых) по известным аномалиям напряженности гравитационного поля у поверхности земли. К ее решению сводится в конечном итоге математическая обработка измерений, осуществляемых при наземной или воздушной геологоразведке. Для этой задачи А. Н. Тихоновым был предложен новый алгоритм, основанный на сужении класса возможных решений путем использования дополнительной априорной информации о решении и получивший название метода сведения к условно корректной задаче.

Обратная задача гравиметрии принадлежит к широкому классу обратных задач, в которых требуется определить количественные характеристики какого-либо объекта или явления по результатам измерений вызываемых ими следствий и которые, как правило, являются некорректными. Такие задачи весьма часто возникают при математическом моделировании процессов, развивающихся во времени и сопровождающихся диссипацией энергии и возрастанием энтропии системы. При этом время выполняет как бы сглаживающую функцию: сильно различающиеся исходные состояния могут приводить к мало отличным последующим, что вызывает большие трудности в определении действительного начального состояния. Наличием необратимых во времени процессов и определяется некорректность таких задач. В частности, сегодня представляют большой теоретический и практический интерес две задачи этого типа: формирование и развитие Солнечной системы и тепловая история Земли. Возможность математического моделирования развития Солнечной системы связана в первую очередь с тем обстоятельством, что в результате космических исследований накоплена значительная информация о ее нынешнем состоянии, о физических и иных характеристиках ряда планет. А от полноты информации о нынешнем состоянии системы существенно зависит объем и точность информации, которую можно получить о ее прошлом.

Изучение тепловой истории Земли (связанное с решением обратной задачи теплопроводности) очень важно для понимания истории формирования и относительного движения различных химических веществ внутри Земли, а следовательно, и закономерностей их нынешнего распределения в земной коре.

Характерно, что изучение тепловой истории Земли будет тем надежнее и полнее, чем полнее будет информация о развитии Солнечной системы в целом. Поэтому изучение прошлого и настоящего нашей планеты сегодня прямо зависит от нашего знания характеристик других космических тел. В этой зависимости находит, на наш взгляд, одно из своих конкретных выражений диалектическая взаимосвязь системы и элементов, а именно в данном случае полнота и надежность информации об одном из элементов системы будут тем выше, чем полнее будут наши знания о системе как целом.

Очень важным, практически единственным источником экспериментальной информации о структуре Земли на достаточно больших глубинах (более 10 км) является решение обратной кинематической задачи сейсмики. Оно производится на основе информации, получаемой сейсмическими датчиками о проходящих в коре Земли волнах, вызванных землетрясениями, взрывами и т. п.

Исключительное значение для биологии и медицины имеет созданный недавно компьютерный рентгеновский томограф, за разработку которого английский инженер Г. Н. Хаунсфилд и американский ученый А. М. Кормак были в 1979 году удостоены Нобелевской премии по медицине. Активные исследования в области рентгеновской томографии ведутся и в нашей стране. Томограф позволяет получать детальную информацию о трехмерной структуре и состоянии внутренних органов человека на основе их рентгеновского просвечивания и знаменует качественно новый этап в диагностике многих заболеваний. Хотя основная идея томографии была известна давно, но практически реализоваться она смогла лишь в последние два десятилетия, когда были преодолены трудности, связанные с математической обработкой (решением некорректной задачи) получаемой информации. Томограф является в полном смысле слова синтезом математики и техники, направленным на решение биологических и медицинских проблем,— синтезом, где математика играет ведущую роль. Последнее выражается, в частности, в том, что основную часть стоимости томографов составляет именно их математическое обеспечение.

В современных экспериментальных исследованиях часто приходится многократно повторять единичный эксперимент и регистрировать огромный объем информации (снимки, осциллограммы, показания детекторов и т. п.) с тем, чтобы иметь более надежную информацию о редко наблюдаемых или “слабых” эффектах. Поэтому весьма актуальна задача создания систем автоматической обработки результатов естественнонаучного (прежде всего физического) эксперимента, одним из важных этапов которой является решение некорректных обратных задач. Поскольку объем информации здесь очень велик, важно создавать такие алгоритмы, с помощью которых эта обработка осуществлялась бы достаточно быстро и экономично, т. е. в данном случае математическая эффективность тесно связана с экономической.

Некорректные задачи довольно часто возникают и в самой экономике в связи с проблемами оптимального планирования, расчетом сложных и разветвленных взаимодействий между различными отраслями. Весьма интересны также некорректные задачи в астрофизике, радиолокации и в ряде других областей (Подробнее см. А. Н. Тихонов, В. А. Арсенин. Методы решения некорректных задач. М.,1979.).

Таким образом, выявилось большое число важных задач из различных областей науки и практической деятельности, которые в принципе находились в пределах вычислительных возможностей ЭВМ, и в то же время их некорректность существенно затрудняла, а иногда делала практически невозможным их решение известными методами. В преодолении этих трудностей принципиальную роль сыграл предложенный академиком А. Н. Тихоновым в 1963 году общий метод нахождения приближенного решения некорректных задач, получивший название метода регуляризации (См. А. Н. Тихонов. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. “Доклады АН СССР”, 1963, т. 151, № 3; А. Н. Тихонов. О регуляризации некорректно поставленных задач. “Доклады АН СССР”, 1963, т. 153, № 1.). Этот метод позволил строить некоторый алгоритм, дающий возможность вычислять приближенное решение некорректной задачи с любой заданной точностью.

За этим последовало быстрое развитие теории некорректных задач и многочисленных приложений. Многие специалисты считали, что все основные вопросы в этой области теперь решены и поэтому не существует никаких принципиальных препятствий для построения вычислительных алгоритмов, позволяющих находить приближенное решение настолько широкого класса задач. что он охватывает фактически все задачи, представляющие практический интерес. Успехи, достигнутые в решении многих конкретных задач, вселяли уверенность, что это всегда возможно. Казалось, что имеются все основания для своеобразного “вычислительного оптимизма”.

3. Теорема о приближенной вычислимости

Однако вскоре выяснилось, что в действительности дело обстоит сложнее. Вначале вопрос о том, все ли некорректные задачи регуляризуемы, то есть для всех ли задач этого класса можно построить эффективный алгоритм нахождения приближенного решения, детально не изучался. Математики были уверены, что при должной изобретательности такой алгоритм для любой некорректной задачи может быть построен. Более глубокое изучение вопроса показало, однако, что эта уверенность была необоснованной. Класс регуляризуемых некорректных задач был точно описан одним из авторов этой статьи в 1971 году. Прежде чем обсудить содержание этого результата, кратко изложим основную идею, на которую опирается метод регуляризации.

Отметим прежде всего, что, абстрагируясь от несущественных деталей, решение всякой некорректной задачи можно представить как приближенное вычисление некоторой разрывной (скачкообразно меняющей свое значение) функции, и поэтому возникающие при этом принципиальные вопросы совпадают.

В постановке задачи, характерной для классической математики, предполагалось, что аргумент функции задается абсолютно точно и ему соответствует единственное абсолютно точное значение функции. Однако в реальных вычислениях с помощью ЭВМ величины всегда известны с погрешностью, то есть вместо их точного значения задается некоторое множество, к которому принадлежит и интересующее нас точное значение. Соответственно вместо точного значения функции мы должны найти множество ее приближенных значений, близкое (с точки зрения определенных критериев) к точному.

Для того чтобы приближенные вычисления имели практический смысл, то есть давали результаты, все меньше отличающиеся от точного значения, необходимо выполнение требования сходимости. Оно заключается в том, что если множество приближенных значений аргумента сходится к его точному значению, то множество приближенных значений функции также должно сходиться к ее точному значению.

Процедура сопоставления каждому множеству приближенных значений аргумента некоторого множества приближенных значений функции называется алгоритмом приближенного вычисления функции. Если этот алгоритм удовлетворяет требованию сходимости, то он называется регуляризующим, а функция (или некорректная задача, приближенное решение которой надо найти), для которой существует хотя бы один регуляризующий алгоритм, называется регуляризуемой. До 60-х годов в математике, как правило, применялись так называемые тривиальные алгоритмы, когда каждому множеству приближенных значений аргумента сопоставлялось множество соответствующих им значений функций. Принципиальный недостаток тривиального алгоритма заключается в том, что он является регуляризующим только для непрерывных функций, тогда как практические задачи часто приводят к необходимости приближенного вычисления разрывных функций. Однако для широкого класса разрывных функций оказалось возможным сконструировать нетривиальный вычислительный алгоритм, что потребовало развития принципиально новых математических методов.

Напомним теперь о выводе, сделанном Ж. Адамаром, о невозможности приближенного решения некорректных задач. Ошибочность его рассуждении, обосновывавших этот вывод, заключалась в том, что Ж. Адамар рассматривал только тривиальный алгоритм н не допускал возможности использования более сложных вычислительных алгоритмов. В связи с изложенным мы можем сделать два замечания методологического характера. Во-первых, переход от вычисления функции с точно заданным аргументом к приближенному вычислению функции по заданному с ограниченной точностью аргументу означает переход от сопоставления точечных элементов к сопоставлению множеств, то есть существенно изменяется (обобщается) понятие вычисления функции (решения задачи). Во-вторых, пока в математике применялись непрерывные функции, всегда пригодным оказывался тривиальный алгоритм приближенного вычисления и поэтому никакого более подробного анализа не требовалось. Поскольку тривиальный алгоритм всегда "работал", не возникало и самой проблемы его возможного обобщения и необходимости перехода к нетривиальным алгоритмам. Усложнение задач, поставленных перед математикой различными областями науки и техники, потребовало применения более сложных математических моделей, использования более сложных видов функций. Все это сделало необходимым более точный анализ и обоснование самой постановки задачи приближенного вычисления функции (или вопроса о приближенном решении некорректной математической задачи).

Вернемся теперь к изложению результатов. дающих точное описание класса регуляризуемых функций и поэтому определяющих точные границы возможностей приближенного вычисления. Такое описание было проведено на языке одной из наиболее абстрактных веткой современной математики—дескриптивной теории функций, созданной в начале XX века французскими математиками Р. Бэром. А. Лебегом, Э. Борелем и основателем московской математической школы Н. Н. Лузиным.

Для того чтобы понять содержание результатов, точно описывающих класс регуляризуемых функций, необходимо обратиться к основным идеям дескриптивной теории функций. Известно, что операция перехода к пределу, известная математикам с XVII века и строго обоснованная в XIX веке, является одной из основных и часто применяемых в математике XIX — XX столетий операций, а вопрос о свойствах возникающих при ее применении математических объектов — одной из основных проблем математики. Дескриптивная теория функций возникла из ответа на поставленный впервые Р. Бэром естественный вопрос: какими свойствами обладает класс функций, являющихся пределом последовательности непрерывных функций. Оказалось, что пределом последовательности непрерывных функций является в общем случае функция разрывная, то есть при каком-то значении аргумента скачкообразно меняющая свое значение.

Примером такой функции может служить ступенчатая функция, которая при значениях аргумента, скажем, меньше единицы имеет одно значение, а при значениях аргумента, равных или больших единицы,— другое. Р. Бэр впервые сумел дать точную классификацию разрывных функций, говоря нестрого, по степени их "разрывности". Эта классификация и была основана на описании структуры, которой обладают множества точек разрыва функций. Функции, являющиеся пределом последовательности непрерывных функций, он назвал аналитически представимыми функциями 1-го класса. Эти функции хотя и являются, вообще говоря, разрывными, но имеют относительно "мало" точек разрыва. Процедуру предельного перехода можно далее применять к сходящимся последовательностям функций 1-го класса, тогда мы получим аналитически представимые функции 2-го класса и т. д. Каждый последующий класс приводит при этом к росту степени "разрывности" относящихся к нему функций. Эти результаты дескриптивной теории функций оказались тесно связанными с проблемой 'регуляризации. А именно было показано, что в случае банаховых пространств (в задачах прикладной математики это условие, как правило, выполняется) множество регуляризуемых функций совпадает со множеством аналитически представимых функций 1-го класса. (См. В. А. Винокуров. О понятии ре-гуляризуемости разрывных отображений. “Журнал вычислительной математики и математической физики”, 1971, т. 11, № 5; В. А. Вино к у р о в. Регуляризуемость и аналитическая представимость. “Доклады АН СССР”, 1975, т. 220, № 2.)

Функции, относящиеся к классам выше 1-го. то есть имеющие “слишком много” точек разрыва, следовательно, в принципе не могут быть регуляризованы. Это означает, что приближенное вычисление таких функций практически неосуществимо, поскольку их значение слишком резко и часто меняется (этот результат мы будем называть в дальнейшем теоремой о приближенной вычислимости).

А. Лебег, также исследовавший проблему описания классов разрывных функций, разработал классификацию этих функций, более удобную, чем бэровская, при решении многих математических вопросов. Он опирался на тот факт, что с теоретико-множественной точки зрения функции осуществляют отображение одних множеств в другие, и разработал классификацию, основанную на топологической структуре тех множеств, которые являются результатом отображения.

Весьма важным с общетеоретической точки зрения, а также для решения ряда конкретных проблем был вопрос о соотношении этих двух классификаций разрывных функций. Исследования, проведенные Р. Бэром и А. Лебегом, показали, что для числовых пространств классификации по Бэру и по Лебегу совпадают. Однако для более общего случая, а именно для более общих типов математических пространств вопрос о совпадении или несовпадении этих двух классификаций оставался открытым. Этот вопрос, точно сформулированный в 1931 году польским математиком С. Банахом, был известен в математике как проблема аналитической представимости С. Банаха. Решение этой проблемы позволило бы, в частности, дать более простое описание класса регуляризуемых функций. В вышеупомянутой работе В. А. Винокурова (1971 г.) проблема Банаха была решена положительно при дополнительном условии сепарабельности, накладываемом на соответствующие банаховы пространства (сепарабельность означает возможность топологической характеристики пространства с помощью некоторого счетного подмножества его элементов).

В общем же случае проблема Банаха оставалась открытой. Однако в 1971 году важные результаты, относящиеся к этой проблеме, были получены в исследованиях по математической логике и основаниям математики, то есть в разделах математики. на первый взгляд весьма далеких от вычислительной практики. В том же году была опубликована статья Р. Соловей и С. Тенненбаума по применению в дескриптивной теории функций метода форсинга, разработанного известным математиком П. Коэном (R. M. Solovay, C. Tennenbaum. Iterated Cohen Extensions and Souslin’s Problem “Annals of Mathematics”, 1971, vol. 94, № 2, pp. 201—245.). Из результатов этих авторов (предложивших пример множества с достаточно необычной структурой) следует, что в системе аксиом *ZFC+CH+AM* теории множеств (система аксиом Цермело — Френкеля с аксиомой выбора, отрицанием континуум-гипотезы и аксиомой Мартина) решение проблемы Банаха является отрицательным. В 1979 году американский математик Дж. Рид сообщил о построении им модели для системы аксиом *ZFC+CH* (система аксиом Цермело — Френкеля с аксиомой выбора и континуум-гипотезой), в которой проблема Банаха также решается отрицательно. Таким образом, положительное решение проблемы Банаха в системе *ZFC* (аксиомы Цермело — Френкеля с аксиомой выбора), то есть доказательство совпадения в общем случае классификации функций по Бэру и по Лебегу, является невозможным. Открытым остается лишь вопрос о том, нельзя ли доказать в системе *ZFC* противоположное утверждение, то есть несовпадение этих классификаций. Трудности, с которыми сталкиваются попытки такого доказательства, позволяют считать достаточно вероятным, что положительное или отрицательное решение проблемы Банаха может иметь статус независимой аксиомы (типа континуум-гипотезы). Следовательно, и решение проблемы приближенной вычислимости в общем случае связано с аксиоматикой теории множеств.

4. О взаимосвязи теоретической и вычислительной математики

Попытаемся более детально сформулировать и обосновать некоторые выводы, следующие из вышеизложенного. Прежде всего это вывод о глубоком внутреннем единстве математического знания, о взаимосвязи весьма далеко друг от друга отстоящих на первый взгляд областей математики. Действительно, естественная проблема вычислительной математики, а именно обоснование возможности построения сходящегося алгоритма приближенного решения задачи (вычисления функции), потребовала применения и развития одной из абстрактных областей современной математики — дескриптивной теории функций, а окончательное ее решение оказалось связанным с основаниями математики. Таким образом, процесс развития, усложнения методов вычислительной математики, вызвавший необходимость их более строгого обоснования, привел к тому, что в ее орбиту оказались вовлеченными весьма абстрактные разделы теоретической математики. Ситуация здесь оказывается в известной мере аналогичной той, которая существует во взаимоотношениях математики и физики, когда некоторые ранее созданные абстрактные математические теории (теория групп, тензорный анализ и др.) неожиданно оказываются чрезвычайно эффективными в новых разделах физики. Отметим, что при этом “попутно” могут решаться некоторые теоретические проблемы, имеющие достаточно длительную историю, как это случилось с проблемой аналитической представимости Банаха. Заслуживает внимания и тот факт, что в положительном решении этой проблемы для случая сепарабельных пространств существенную роль сыграли методы, разработанные в теории регуляризации. Иначе говоря, методы, разработанные в вычислительной математике, оказались эффективными и при решении одной из проблем теоретической математики.

Таким образом, развитие современной вычислительной математики свидетельствует о единстве математического знания, взаимодействии и взаимопроникновении различных его уровней, об известной условности и относительности деления математики на теоретическую и прикладную. Наиболее общим объективным основанием этого единства (как и интеграционных тенденций в науке в целом) является материальное единство мира.

Далее, развитие вычислительной математики, обоснование применяемых ею методов приводит к уменьшению степени ее наглядности. Постановка первоначальной задачи (приближенное решение уравнения или вычисление функции), с которой мы начали изложение, представляется достаточно наглядной и интуитивно ясной. Однако более подробный ее анализ привел к использованию весьма абстрактных методов и понятий, иногда прямо противоречащих наглядности. (Так, в упоминавшейся выше статье Р. Соловей и С. Тенненбаума авторами было сконструировано на оси действительных чисел множество с весьма необычной и труднопредставимой структурой.)

В то же время неправомерным было бы, на наш взгляд, и утверждение о том, что математическая интуиция, и в том числе те ее компоненты, которые связаны с наглядностью, утратили всякое значение в современной математике и способны приводить лишь к заблуждениям и ошибкам.

Указанные факторы продолжают выполнять существенные функции в деятельности ученогоматематика. Эти функции могут быть двоякого характера: во-первых, наглядные представления способствуют кристаллизации и развитию абстрактных понятий и теорий на ранней стадии их становления, формулировке (в предварительном виде) некоторых важных утверждений, обоснование и точное доказательство которых с помощью формальных методов будет осуществлено позднее. (В этом отношении характерен пример А. Лебега, развитие идей которого при введении им в математику весьма абстрактного интеграла, носящего его имя, существенно направлялось наглядными образами.) Во-вторых, эти представления выполняют важную роль при доказательстве теорем, относящихся к самым абстрактным разделам математики, поскольку способствуют одновременному мысленному охвату всех элементов доказательства я его структуры, без чего невозможна реальная деятельность математика. В частности, ход решения проблемы приближенной вычислимости подтверждает этот вывод.

Обратимся теперь к анализу тех методологических следствий, которые вытекают из приведенной выше теоремы о приближенной вычислимости. Напомним, что в соответствии с этой теоремой весьма широкий класс функций (а именно, все аналитически представимые функции класса выше, чем 1-й) принципиально нерегуляризуем. Таким образом, проблема приближенной вычислимости для весьма широкого класса функций (включающего в том числе не столь уж “экзотические” по своим свойствам с точки зрения современной математики функции) оказывается неразрешимой. Это означает, что для достаточно широкого класса математических задач справедливо следующее: с какой бы высокой (конечной) точностью мы ни задавали исходную информацию, отклонение от точного решения (ошибка), не может быть меньше некоторой фиксированной величины. Поскольку при вычислениях с помощью ЭВМ исходные числовые данные всегда задаются с некоторой конечной точностью (округляются), это может приводить к неустранимой погрешности решения, которая может быть значительной, со сколь бы высокой точностью ни проводились вычисления.

Принципиальная ограниченность методов вычислительной математики (в отношении широкого класса задач), следующая из теоремы о приближенной вычислимости, ведет на первый взгляд к некоему “математическому агностицизму”. Действительно, определенный класс математических задач, точное решение которых существует я единственно, характеризуется тем, что со сколь бы большой (конечной) точностью нам ни были известны исходные данные и сколь бы точно мы ни проводили вычисления, приближенное решение всегда будет существенно отличаться от точного. Поскольку во многих задачах в исходных данных содержится именно информация о некоторых проявлениях интересующего нас объекта, то принципиальная невозможность приблизиться к нахождению точных характеристик этого объекта на основе знания его проявлений и может быть истолкована как математическое обоснование агностицизма. Однако подобная интерпретация является, на наш взгляд, чрезмерно прямолинейной и не отражает должным образом существа дела. Более правильной нам представляется следующая оценка этого результата. При решении всякой математической задачи. относящейся к некоторой научной или технической проблеме, мы имеем дело непосредственно не с интересующим нас реальным объектом, а с некоторой его идеализированной моделью. Способ задания исходных данных, также являющийся одной из характеристик этой модели, определяет тот тип информации, который в этих данных содержится. Теорему о приближенной вычислимости поэтому следует, на наш взгляд, понимать в том плане, что информация не любого, а лишь определенного типа может быть получена из решения некорректной задачи при определенном способе задания исходных данных.

Этот вывод подтверждается и тем вытекающим из данной теоремы результатом, что само понятие регуляризуемости не имеет абсолютного характера и что в одних типах математических пространств задача может быть нерегуляризуемой, а в других — регуляризуемой. Это происходит потому, что переход от одних типов пространств к другим приводит к изменению тех требований, которые налагаются на информацию, содержащуюся в приближенных исходных данных и приближенном результате решения. Иными словами, само понятие “приближенное” применительно к исходным данным и конечному результату может иметь различный смысл, а его уточнение зависит от типа применяемых математических критериев. Таким образом, теорему о приближенной вычислимости можно рассматривать как конструктивное описание той информации, которую можно извлечь в процессе решения задачи из информации, содержащейся в приближенных исходных данных.

Следовательно, конкретная проблема вычислительной математики оказывается тесно связанной с философской проблемой отношения явлений реального мира и тех идеализированных моделей, которые создаются в процессе научного исследования. Упрощенное понимание этого отношения неизбежно ведет к философским и методологическим ошибкам. Однако не менее ошибочным является и наивное отождествление научных моделей, их свойств и отношений со свойствами и отношениями реальных объектов. Последнее следует особенно учитывать в математике, теоретической физике и других науках, в которых играют принципиальную роль высокоабстрактные математические понятия.

Развитие математики в целом и вычислительной математики в частности в полной мере подтверждает ленинскую мысль о сложности и непрямолинейности процесса познания, механизмов отражения объективной действительности человеческим мышлением, о многообразии формируемых им научных абстракций.

Если вернуться теперь к вопросу о том, накладывает ли приведенная выше теорема какие-либо ограничения на сферу применимости ЭВМ, то правильным ответом, на наш взгляд, будет следующий: она не ограничивает саму эту сферу, но сужает свободу выбора (построения) математической модели изучаемого явления; а именно, этот выбор должен удовлетворять требованию приближенной вычислимости, поскольку в случае невыполнения этого требования из модели не удастся извлечь практически полезной информации. То есть данное требование выступает в качестве определенного ограничения свободы построения математической модели, вытекающего из необходимости практического применения результатов решения задачи.

Напомним в заключение, что постановка и решение одной из принципиальных для вычислительной математики проблем — проблемы приближенной вычислимости — за полвека прошли ряд качественно различных этапов (“запрет” Ж. Адамара, теория регуляризации А. Н. Тихонова, теорема о приближенной вычислимости). Ход и результаты этого развития еще раз свидетельствуют об относительности деления математики на теоретическую и прикладную, о многообразии используемых в ней абстракций и идеализации, о сложном характере взаимодействия математического знания и отражаемой им действительности.