Доклады Академии наук СССР
1991. Том 319, № 5

УДК 517.9 МАТЕМАТИКА

© В.А. ВИНОКУРОВ

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ И УМНОЖЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В.С. Владимировым 30 X 1991)

Созданная Л. Шварцем в 1950 г. теория обобщенных функций [1] стала сегодня важнейшим инструментом математики и теоретической физики. Эта теория позволила распространить операции классического анализа: дифференцирование, интегрирование, взятие преобразования Фурье — на существенно более широкий класс объектов, чем гладкие функции. При построении теории обобщенных функций рассматривается двойственность, определенная интегральной формулой

$$(1)\qquad (f,\varphi)=\int\limits_Y f(y)\varphi(y)\,dy,$$

где $Y\subset\mathbf{R}^n$ открытое множество, $\varphi\in D(Y)$ — бесконечно дифференцируемая функция с носителем в Y, $f\in L_{\text{loc}}(Y)$ — локально суммируемая на множестве Y функция, и затем ее свойства распространяются по непрерывности на обобщенные функции $f\in D'(Y)$. Однако в классическом анализе при решении дифференциальных уравнений, вычислении интегралов и т.д. одной из важнейших и полезнейших операций является операция замены переменных, которая отсутствовала в исходной теории Л. Шварца. Более точно была определена самим Л. Шварцем лишь линейная замена переменных. В работе И.М. Гельфанда и З.Я. Шапиро [2] проведено построение δ-функции, сосредоточенной на поверхности, и для этого случая приведен некоторый вариант формулы замены переменных и формулы дифференцирования сложной функции. Как мы покажем в п. 7, это построение громоздко и далеко от сути дела, но тем не менее оно было воспроизведено в последующем издании "Теории распределений" Л. Шварца 1978 г. [3].

В настоящей работе мы определим замену переменных в обобщенных функциях и покажем, что эта операция позволяет строить произведения обобщенных функций.

Вернемся к формуле (1). Пусть $g\colon X\to Y$ — диффеоморфизм класса $C^{(\infty)}$ открытых множеств $X\subset\mathbf{R}^n$ и $Y\subset\mathbf{R}^n$; тогда по формуле замены переменных в интеграле Лебега [4, с. 746]

$$(2)\qquad \int\limits_Y f(y)\varphi(y)\,dy=\int\limits_X f(g(x))\left|\det\frac{\partial g}{\partial x}(x)\right|\varphi(g(x))\,dx,$$

или в терминах двойственности

$$(3)\qquad (f(y),\varphi(y))=\left(f(g(x)),\ \left|\det\frac{\partial g}{\partial x}(x)\right|\varphi(g(x))\right).$$

Последнюю формулу мы и принимаем за определение обобщенной функции $f(g(x))\in D'(X)$ в общем случае.

Перейдем к формальным построениям. В терминологии и обозначениях мы в основном следуем [5].

1. В наших построениях мы будем действовать в основном на языке операторов, а не на языке функций и устанавливать основные формулы с операторами в пространствах основных функций, перенося их на пространства обобщенных функций с помощью перехода к сопряженным операторам. Наши построения опираются на следующее утверждение, вытекающее из предложения 7.4 из [6, с. 201].

Утверждение 1. *Пусть X, Y — локально-выпуклые линейные топологические пространства, X^*, Y^* — сопряженные локально-выпуклые линейные топологические пространства. Если A: $X \to Y$ — линейное непрерывное отображение, то сопряженное линейное отображение A^*: $Y^* \to X^*$ определено на всем Y^* и непрерывно. В частности, если A: $X \to Y$ — линейный топологический изоморфизм, то и A^* — линейный топологический изоморфизм.*

Мы будем применять утверждение 1 в случаях $X = D(G_1)$, $Y = D(G_2)$ и $X = S(\mathbf{R}^m)$, $Y = S(\mathbf{R}^n)$, где $G_1 \subset \mathbf{R}^m$, $G_2 \subset \mathbf{R}^n$ — открытые подмножества. Тогда $X^* = D'(G_1)$, $Y^* = D'(G_2)$ и $X^* = S'(\mathbf{R}^m)$, $Y^* = S'(\mathbf{R}^n)$ соответственно.

Пусть G, G_1, G_2, G_3 — открытые подмножества $\mathbf{R}^n$. Через $C^{(\infty)}(G)$ обозначим множество бесконечно дифференцируемых отображений a: $G \to \mathbf{C}$, через $C_+^{(\infty)}(G)$ — множество бесконечно дифференцируемых отображений a: $G \to \mathbf{R}_+$. Введем линейный оператор умножения $\mathfrak{M}_a^*$: $D(G) \to D(G)$ вида $(\mathfrak{M}_a^* \varphi)(x) \equiv$ $\equiv a(x)\varphi(x)$ для $\varphi \in D(G)$. При $a \in C^{(\infty)}(G)$ оператор умножения непрерывен, при $a \in C_+^{(\infty)}(G)$ является оператором изоморфизма ("изоморфизм" здесь есть линейный топологический изоморфизм локально-выпуклых линейных топологических пространств). Операторы умножения коммутируют

$$(4)\qquad \forall a_1 \in C^{(\infty)}(G)\ \forall a_2 \in C^{(\infty)}(G)\quad \mathfrak{M}_{a_1}^* \mathfrak{M}_{a_2}^* = \mathfrak{M}_{a_2}^* \mathfrak{M}_{a_1}^*.$$

Обозначим через $\mathrm{Diff}(G_1, G_2)$ множество всех диффеоморфизмов g: $G_1 \to G_2$ класса $C^{(\infty)}$ открытых множеств G_1 и G_2 из R^n. Пусть $g \in \mathrm{Diff}(G_1, G_2)$. Введем линейный оператор g^*: $D(G_2) \to D(G_1)$ по правилу: для $\psi \in D(G_2)$

$$(5)\qquad (g^*\psi)(x) \equiv \psi(g(x)).$$

Линейный оператор g^* является оператором изоморфизма. Тождественному отображению g: $G \to G$ соответствует тождественное отображение g^*: $D(G) \to D(G)$. Если $g_1 \in \mathrm{Diff}(G_1, G_2)$, $g_2 \in \mathrm{Diff}(G_2, G_3)$, то определена суперпозиция диффеоморфизмов $g_3 \equiv g_2 \circ g_1$, $g_3 \in \mathrm{Diff}(G_1, G_3)$ и

$$(6)\qquad (g_2 \circ g_1)^* = g_1^* g_2^*.$$

Операторы $\mathfrak{M}_a^*$ и g^* удовлетворяют соотношению

$$(7)\qquad \forall a \in C^{(\infty)}(G_2)\ \forall g \in \mathrm{Diff}(G_1, G_2)\quad g^* \mathfrak{M}_a^* = \mathfrak{M}^*_{g^*(a)} g^*.$$

Введем отображение p: $\mathrm{Diff}(G_1, G_2) \to C_+^{(\infty)}(G_1)$ по правилу

$$(8)\qquad p(g)(x) \equiv \left| \det \frac{\partial g}{\partial x}(x) \right|^{-1}$$

и введем оператор изоморфизма для каждого $g \in \mathrm{Diff}(G_1, G_2)$

$$(9)\qquad S_g^* \equiv g^{-1*} \mathfrak{M}^*_{p(g)}.$$

Оператор изоморфизма S_g^*: $D(G_1) \to D(G_2)$, $g \in \mathrm{Diff}(G_1, G_2)$ обладает следующими свойствами:

$$(10)\qquad \forall g_1 \in \mathrm{Diff}(G_1, G_2)\ \forall g_2 \in \mathrm{Diff}(G_2, G_3)\quad S^*_{g_2 \circ g_1} = S^*_{g_2} S^*_{g_1};$$

$$(11)\qquad \forall a \in C^{(\infty)}(G_1)\ \forall g \in \mathrm{Diff}(G_1, G_2)\quad S_g^* \mathfrak{M}_a^* = \mathfrak{M}^*_{g^{-1*}(a)} S_g^*.$$

Пусть $f \in D'(G_2)$ — регулярная обобщенная функция, представимая с помощью локально суммируемой функции $f \in L_{\text{loc}}(G_2)$ и $g \in \operatorname{Diff}(G_1, G_2)$, и $(S_g^*)^* = S_g^{**}$ — линейный оператор, сопряженный к оператору S_g^*. Найдем вид обобщенной функции $S_g^{**}f \in D'(G_1)$. Для $\varphi \in D(G_1)$ имеем

$$(S_g^{**}f, \varphi) = (f, S_g^*\varphi) = \int_{G_2} f(y)\varphi(g^{-1}(y)) \left| \det \frac{\partial g}{\partial x}(x) \right|^{-1} \Bigg|_{x=g^{-1}(y)} dy =$$

$$= \int_{G_2} f(y)\varphi(x(y)) \left| \det \frac{\partial x}{\partial y}(y) \right| dy = \int_{G_1} f(y(x))\varphi(x)\,dx.$$

Итак, $S_g^{**}(f)(x) = f(g(x))$, т.е. обобщенная функция $S_g^{**}f$ также регулярна и представима локально суммируемой функцией $f(g(x)) \in L_{\text{loc}}(G_1)$. Для регулярной обобщенной функции f оператор S_g^{**}, таким образом, есть оператор з а м е н ы п е р е м е н н ы х. Поэтому по определению оператор S_g^{**} назовем о п е р а т о р о м з а м е н ы п е р е м е н н ы х в о б о б щ е н н о й ф у н к ц и и.

Оператор замены переменных следующим образом преобразует носители обобщенных функций.

У т в е р ж д е н и е 2. *Если* $g \in \operatorname{Diff}(G_1, G_2)$, $f \in D'(G_2)$, *то*

(12) $\quad \operatorname{supp}(S_g^{**}f) = g^{-1}(\operatorname{supp}(f)).$

2. Ф о р м у л а д и ф ф е р е н ц и р о в а н и я с л о ж н о й ф у н к ц и и. Пусть X, Y — открытые подмножества $\mathbf{R}^n$. Введем операторы $\dfrac{\partial^*}{\partial x_i} : D(X) \to D(X)$, $i \in 1, \ldots, n$, взятия частной производной основной функции по переменной x_i, т.е. $\left(\dfrac{\partial^*}{\partial x_i}\varphi\right)(x) \equiv \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$. Оператор $\dfrac{\partial^*}{\partial x_i}$ линейный и непрерывный. При этом

(13) $$\forall i \in 1, \ldots, n \quad \forall j \in 1, \ldots, n \quad \frac{\partial^*}{\partial x_i}\frac{\partial^*}{\partial x_j} = \frac{\partial^*}{\partial x_j}\frac{\partial^*}{\partial x_i},$$

т.е. операторы $\dfrac{\partial^*}{\partial x_i}$, $i \in 1, \ldots, n$, коммутируют между собой. Сопряженный оператор $\left(\dfrac{\partial^*}{\partial x_i}\right)^* : D'(X) \to D'(X)$ также по утверждению 1 линейный и непрерывный. По определению оператор $\dfrac{\partial}{\partial x_i} \equiv -\left(\dfrac{\partial^*}{\partial x_i}\right)^*$ называется оператором взятия i-й частной производной обобщенной функции.

Пусть $g \in \operatorname{Diff}(X, Y)$. Будем обозначать отображение $y = g(x)$ как $y = y(x)$, а обратное отображение $x = g^{-1}(y)$ как $x = x(y)$. Справедлива следующая формула.

Л е м м а 1. *Для* $g \in \operatorname{Diff}(X, Y)$, $i \in 1, \ldots, n$, *верно*

(14) $$S_g^* \frac{\partial^*}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^*}{\partial y_j} S_g^* \mathfrak{M}^*_{\partial y_j/\partial x_i}.$$

С л е д с т в и е 1 (формула дифференцирования сложной функции). *В условиях леммы* 1

(15) $$\frac{\partial^{**}}{\partial x_i} S_g^{**} = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{M}^{**}_{\partial y_j/\partial x_i} S_g^{**} \frac{\partial^{**}}{\partial y_j}.$$

Формула (15) получается из формулы (14) переходом к сопряженным операторам.

Формула (14) в силу обратимости оператора S_g^* и свойства (11) эквивалентна формуле

$$(16)\qquad \frac{\partial^*}{\partial x_i} = S_g^{*\,-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^*}{\partial v_j} \mathfrak{M}^*{}_{g^{-1}*(\partial y_j/\partial x_i)}\right) S_g^*,$$

из которой вместо (15) получается формула

$$(17)\qquad \frac{\partial^{**}}{\partial x_i} = S_g^{**}\Big(\sum_{j=1}^{n} \mathfrak{M}^{**}_{g^{-1}*(\partial y_j/\partial x_i)} \frac{\partial^{**}}{\partial y_j}\Big) S_g^{-1**},$$

удобная при вычислении кратных производных.

З а м е ч а н и е 1. Имея в руках операцию замены переменных в обобщенных функциях и формулу дифференцирования сложной функции, можно построить теорию обобщенных функций на многообразиях.

3. О п е р а т о р з а м е н ы п е р е м е н н ы х д л я с л у ч а я д и ф ф е о м о р ф н о г о в л о ж е н и я. Распространим часть построений пунктов 1 и 2 на случай, когда $g\colon G_1 \to G_2$ есть диффеоморфное вложение открытого множества $G_1 \subset \mathbf{R}^n$ в открытое множество $G_2 \subset \mathbf{R}^n$.

Через $\operatorname{Diffin}(G_1, G_2)$ обозначим множество диффеоморфных вложений $g\colon G_1 \to G_2$, т.е. отображений класса $C^{(\infty)}$, что: 1) множество $g(G_1) \subset G_2$ открыто, 2) отображение g есть диффеоморфизм открытых множеств G_1 и $g(G_1)$ класса $C^{(\infty)}$. Далее в этом пункте для диффеоморфного вложения $g \in \operatorname{Diffin}(G_1, G_2)$ через $g' \in \operatorname{Diffin}(G_1, g(G_1))$ будем обозначать соответствующий диффеоморфизм $g'\colon G_1 \to g(G_1)$.

Для $g \in \operatorname{Diffin}(G_1, G_2)$ определено линейное непрерывное отображение локально-выпуклых линейных топологических пространств $g^*\colon D(G_2) \to D(G_1)$ по правилу: если $\varphi \in D(G_2)$, то $(g^*\varphi)(x) \equiv \varphi(g(x))$. Справедливо по-прежнему свойство, аналогичное свойству (6):

$$(18)\qquad \forall g_1 \in \operatorname{Diffin}(G_1, G_2)\ \forall g_2 \in \operatorname{Diffin}(G_2, G_3)\quad (g_2 \circ g_1)^* = g_1^* g_2^*.$$

Если $g \in \operatorname{Diffin}(G_1, G_2)$, то $g' \in \operatorname{Diff}(G_1, g(G_2))$, и поэтому определена функция $p(g) \in C_+^{(\infty)}(G_1)$ вида

$$(19)\qquad p(g)(x) \equiv p(g')(x) = \left|\det \frac{\partial g}{\partial x}(x)\right|^{-1}.$$

В отличие от случая $g \in \operatorname{Diff}(G_1, G_2)$ для случая $g \in \operatorname{Diffin}(G_1, G_2)$ отображение g^{-1} уже может не быть из класса $\operatorname{Diffin}(G_2, G_1)$ и возникает трудность в непосредственном перенесении формулы (9) для оператора S_g^*. Тем не менее мы определим линейное непрерывное отображение $S_g^*\colon D(G_1) \to D(G_2)$ для $g \in \operatorname{Diffin}(G_1, G_2)$ по правилу: если $\varphi \in D(G_1)$, то $\psi = S_g^*(\varphi) \in D(G_2)$

$$(20)\qquad \psi(y) = \begin{cases} S_{g'}^*(\varphi)(y), & y \in g(G_1); \\ 0, & y \in G_2 \setminus g(G_1). \end{cases}$$

Таким образом, определено и сопряженное линейное непрерывное отображение $S_g^{**}\colon D'(G_2) \to D'(G_1)$.

Рассмотрим случай, когда множество G_1 есть подмножество G_2, $G_1 \subset G_2$, и диффеоморфное вложение $i\colon G_1 \to G_2$ есть тождественное вложение. Тогда отображение $S_i^*\colon D(G_1) \to D(G_2)$, есть просто продолжение нулем каждой основной функции $\varphi \in D(G_1)$ на множество $G_2 \setminus G_1$, а отображение $S_i^{**}: D'(G_2) \to D'(G_1)$ сопоставляет каждой обобщенной функции $f \in D'(G_2)$ ее сужение $f|_{G_1} = S_i^{**} f$ на множество G_1. Для любого отображения $g \in \mathrm{Diffin}(G_1, G_2)$ имеем $g = i \circ g'$, где $g' \in \mathrm{Diff}(G_1, g(G_1))$, а $i: g(G_1) \to G_2$ – тождественное вложение. Для соответствующих операторов справедливо равенство

$$(21)\qquad S_g^* = S_{i \circ g'}^* = S_i^* S_{g'}^*.$$

Для диффеоморфных вложений справедливо и утверждение, аналогичное утверждению 2.

Утверждение 3. *Если* $g \in \mathrm{Diffin}(G_1, G_2)$, $\varphi \in D(G_1)$, $f \in D'(G_2)$, *то верно*

$$(22)\qquad \mathrm{supp}(S_g^*(\varphi)) = g(\mathrm{supp}(\varphi)),$$

$$(23)\qquad \mathrm{supp}(S_g^{**}(f)) = g^{-1}(\mathrm{supp}(f)).$$

Справедливы и свойства, аналогичные свойствам (7), (10), (11) для диффеоморфизмов.

Утверждение 4. *Верны утверждения*

$$(24)\qquad \forall a \in C^{(\infty)}(G_2)\ \forall g \in \mathrm{Diffin}(G_1, G_2)\quad g^* \mathfrak{M}_a^* = \mathfrak{M}_{g^*(a)}^* g^*;$$

$$(25)\qquad \forall a \in C^{(\infty)}(G_2)\ \forall g \in \mathrm{Diffin}(G_1, G_2)\quad \mathfrak{M}_a^* S_g^* = S_g^* \mathfrak{M}_{g^*(a)}^*;$$

$$(26)\qquad \forall g_1 \in \mathrm{Diffin}(G_1, G_2)\ \forall g_2 \in \mathrm{Diffin}(G_2, G_3)\quad S_{g_2 \circ g_1}^* = S_{g_2}^* S_{g_1}^*.$$

Сохраняется и формула дифференцирования сложной функции в следующем виде.

Утверждение 5. *Если* $g \in \mathrm{Diffin}(X, Y)$, $i = 1, \ldots, n$, *то*

$$(27)\qquad S_g^* \frac{\partial^*}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^*}{\partial y_j} S_g^* \mathfrak{M}_{\partial y_j / \partial x_i}^*.$$

4. Построение обобщенной функции высшей размерности из обобщенной функции низшей размерности. Пусть $\delta(y_1) \in D'(\mathbf{R})$ – одномерная δ-функция Дирака и $g_1: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ – отображение класса $C^{(\infty)}(\mathbf{R}^3)$. Интуитивно естественным представляется, что выражение $\delta(g_1(x))$ должно представлять обобщенную функцию из $D'(\mathbf{R}^3)$, "сосредоточенную на поверхности" $S \equiv \{ x \in \mathbf{R}^3 |\ g_1(x) = 0\}$. Задача данного пункта – придать точный смысл этим представлениям.

Предварительно заметим, что если $g_1: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ есть диффеоморфное вложение пространства $\mathbf{R}$ той же размерности 1 в $\mathbf{R}$, то определение $\delta(g_1(x))$ уже построено в пунктах 1 и 3, а именно $\delta(g_1(x)) \equiv (S_{g_1}^{**}\delta)(x)$. Чтобы свести рассматриваемый случай к случаю равных размерностей, мы будем рассматривать обобщенную функцию $\delta(y_1) 1(y_2, y_3) \in D'(\mathbf{R}^3)$, достроим отображение $g_1: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ до диффеоморфного вложения $g: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ вспомогательным отображением $g_2: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ и положим

$$v(x) \equiv \delta(g_1(x)) \equiv (S_g^{**}(\delta(y_1) 1(y_2, y_3)))(x).$$

Однако в этом определении имеется произвол, ибо, кроме заданного отображения g_1, мы произвольно ввели вспомогательное отображение g_2. Оказывается, полученная обобщенная функция $v \in D'(\mathbf{R}^3)$ не зависит от выбора вспомогательного отображения g_2.

Перейдем к строгому изложению. Пусть $k(1) \in \mathbf{N}$, $k(2) \in \mathbf{N}$, $n \equiv k(1) + k(2)$, $Y_1 \subset \mathbf{R}^{k(1)}$ – непустое открытое множество, $Y_2 \equiv \mathbf{R}^{k(2)}$, $Y \equiv Y_1 \times Y_2$,

Y – непустое открытое подмножество $\mathbf{R}^n$, $X \subset \mathbf{R}^n$ – непустое открытое множество, $g \in \operatorname{Diffin}(X, Y)$. Пусть $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$, где $g_1 : X \to Y_1$, $g_2 : X \to Y_2$ – составляющие отображения. Каждой обобщенной функции $f \in D'(Y_1)$ сопоставим обобщенную функцию $v \in D'(X)$ по правилу

(28) $v \equiv S_g^{**}(f(y_1)1(y_2))$,

которую обозначим

(29) $v(x) \equiv f(g_1(x))$.

В обозначение (29) не входит функция $g_2(x)$, а в определение (28) – входит. Однако обобщенная функция $v \in D'(X)$ не зависит от выбора отображения g_2 в силу леммы.

Лемма 2. *Пусть $g \in \operatorname{Diffin}(X, Y)$, $h \in \operatorname{Diffin}(X, Y)$ и проекции на Y_1 отображений g и h совпадают*: $g_1 = h_1$. *Тогда для* $f \in D'(Y_1)$

(30) $S_g^{**}(f(y_1)1(y_2)) = S_h^{**}(f(y_1)1(y_2))$.

Сопоставляя обобщенной функции $f \in D'(Y_1)$ прямое произведение обобщенных функций $f(y_1)1(y_2) \in D'(Y_1 \times Y_2)$, мы получаем непрерывное линейное отображение $D'(Y_1) \to D'(Y_1 \times Y_2)$ [5, с. 55]. Отображение $S_g^{**}: D'(Y) \to$ $\to D'(X)$ также линейно и непрерывно. Итак, сопоставление $f \to v$ обобщенной функции $f \in D'(Y_1)$ обобщенной функции $f(g_1(x)) = v(x) \in D'(X)$ при фиксированном отображении $g_1 : X \to Y_1$ задает непрерывное отображение $D'(Y_1) \to$ $\to D'(X)$.

5. Построение обобщенной функции высшей размерности из обобщенной функции низшей размерности. Глобальный случай. Для построения обобщенной функции на открытом множестве $X \subset \mathbf{R}^n$ достаточно ее определить локально в некоторой окрестности U_a каждой точки $a \in X$ согласованным образом. Построения предыдущего пункта определяют обобщенную функцию $v(x) = f(g_1(x))$ на всем открытом множестве X, но при ограничениях на отображение g_1, которые можно ослабить. В этом пункте мы будем применять построения предыдущего пункта локально, тогда вне носителя функции $v(x)$ нет необходимости накладывать сильные ограничения на отображение g_1.

В этом пункте мы позволим величине $k(2)$ принимать значение 0, кроме натуральных значений. Если $k(2) = 0$, то $k(1) = n$ и мы полагаем $Y_1 \equiv Y$, $g_1 \equiv g$. Множество Y_2 в этом случае отсутствует.

Итак, пусть $X \subset \mathbf{R}^n$ – непустое открытое множество. Сохраняя обозначения предыдущего пункта, сформулируем следующие условия на обобщенную функцию $f \in D'(Y_1)$ и отображение $g_1 : X \to Y_1$.

Условия А. 1) Множество $S \equiv g_1^{-1}(\operatorname{supp}(f))$ – замкнутое подмножество X.

2) Существует открытое множество $US \subset X$, $US \supset S$, что сужение $g_1|_{US}$ – отображение класса $C^{(\infty)}$.

3) Во всех точках $x \in S$ верно $\operatorname{rank} \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x) = k(1)$, т.е. отображение g_1 полного ранга.

Замечание 2. Для замкнутости множества $S \subset X$ достаточно непрерывности на X отображения g_1.

Определим при выполнении условий А обобщенную функцию $v(x) =$ $= f(g_1(x))$, $v \in D'(X)$. Определение проведем локально, т.е. для каждой точки $a \in X$ возьмем некоторую ее окрестность $U_a \subset X$ (в этой заметке "окрестность" $\equiv$ $\equiv$ открытая окрестность) и определим сужение $v|_{U_a}$.

Если $a \in X \setminus S$, то существует окрестность U_a, находящаяся на положительном расстоянии от замкнутого множества S. Выберем такую окрестность и положим $v|_{U_a} \equiv 0$. Если $a \in S$, то выберем окрестность U_a, в которой существует диффеоморфное вложение g: $U_a \to Y$, $g \in \mathrm{Diff\,in}(U_a, Y)$, с заданным составляющим отображением g_1, и положим $U|_{U_a} \equiv S_g^{**}(f(y_1)1(y_2))$.

В силу леммы 2 и утверждения 3 определенные локальные элементы $v|_{U_a}$ согласованы и определяют обобщенную функцию $v \in D'(X)$ со следующим носителем.

Утверждение 6. *Если выполнены условия* А, *то*

(31) $\quad \mathrm{supp}(v) = S = g_1^{-1}(\mathrm{supp}(f))$.

6. Определение произведения обобщенных функций. В пунктах 4 и 5 мы придали смысл выражению $v(x) = f(g_1(x))$ как обобщенной функции $v \in D'(X)$, где $f(y_1) \in D'(Y_1)$ – $k(1)$-мерная обобщенная функция. Построения пунктов 4 и 5 дают нам возможность определить и произведение таких обобщенных функций.

Проведем переобозначение по сравнению с пунктами 4 и 5. Обозначим $\overline{Y}$ вместо Y_1, Y_0 вместо Y_2, $\overline{n}$ вместо $k(1)$, $k(0)$ вместо $k(2)$, $\overline{g}$ вместо g_1, g_0 вместо g_2. Как и в п. 5, допускается случай $k(0) = 0$, тогда $\overline{Y} \equiv Y$, $\overline{g} \equiv g$. Пусть $\overline{Y} = \prod_{i=1}^{m} Y_i$, где $Y_i \subset \mathbf{R}^{k(i)}$, $i \in 1, \ldots, m$, – открытые подмножества и $\overline{n} = \sum_{i=1}^{m} k(i)$. Пусть $f_i \in D'(Y_i)$, $i \in 1, \ldots, m$, $f \in D'(\overline{Y})$ есть прямое произведение обобщенных функций

$$f(\overline{y}) = f_1(y_1) f_2(y_2) \ldots f_m(y_m), \quad \overline{y} \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

Пусть для обобщенной функции f и отображения $\overline{g}$: $X \to \overline{Y}$ выполнены условия А. Тогда согласно п. 5 определена обобщенная функция $v(x) = f(\overline{g}(x))$. Если ввести составляющие отображения g_i: $X \to Y_i$, $i \in 1, \ldots, m$, $\overline{g}(x) \equiv (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x))$, то

(32) $\quad v(x) = f_1(g_1(x)) f_2(x)) \ldots f_m(g_m(x))$.

Формула (32) определяет произведение обобщенных функций $f_i(g_i(x))$, $i \in 1, \ldots$ $\ldots, m$. При этом количество сомножителей подчиняется условию

$$\sum_{i=1}^{m} k(i) \leqslant n.$$

7. Пример. Произведение одномерных δ-функций. Пусть $\delta(y) \in D'(\mathbf{R})$ – одномерная δ-функция Дирака. Полагаем $X = \mathbf{R}^n$ и определим обобщенную функцию $v(x) \in D'(\mathbf{R}^n)$:

(33) $\quad v(x) = \delta(g_1(x))\delta(g_2(x)) \ldots \delta(g_m(x))$,

где $\overline{n} = m \leqslant n$, g_i: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i \in 1, \ldots, m$, $S = \bigcap_{i=1}^{m} g_i^{-1}(0)$ и выполнены условия А. В силу условий А множество $S \subset \mathbf{R}^n$ будет замкнутой регулярной поверхностью класса $C^{(\infty)}$ в $\mathbf{R}^n$ коразмерности m. Действие обобщенной функции v на основную функцию $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ выражается следующим интегралом по площади поверхности S:

(34) $\quad (v, \varphi) = \int_S \varphi(x) \rho(x) d\sigma(x)$,

где весовая функция $\rho(x) > 0$ равна

$$(35) \quad \rho(x) \equiv \det_{1 \leqslant i,j \leqslant m} \left\langle \frac{\partial g_i}{\partial x}(x), \frac{\partial g_j}{\partial x}(x) \right\rangle^{-1/2}.$$

В частном случае $m = 1$ получаем простейшую формулу

$$(36) \quad (\delta(g_1(x)), \varphi(x)) = \int_S \frac{\varphi(x)}{\left| \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x) \right|} d\sigma(x).$$

Последняя формула позволяет естественно определить обобщенную функцию $\delta(g_1(x))$ и в случае, когда производная $\dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x)$ обращается в нуль в некоторых точках поверхности S, например когда $g_1(x)$ – квадратичная форма.

Отдел вычислительной математики
Академии наук СССР, Москва

Поступило
29 V 1991

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schwartz L.* Théorie des distributions. Paris. 1950–1951. vol. 1–2. 2. *Гельфанд И.М., Шапиро З.Я.* – УМН, 1955, т. 10, № 3, с. 3–70. 3. *Schwartz L.* Théorie des distributions. Paris: Hermann, 1978. 4. *Шварц Л.* Анализ. М.: Мир, 1972, т. 1. 824 с. 5. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с. 6. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. 359 с.