Ограниченная лицензия

на использование файла и текста статьи
"Винокуров В.А. Два закона сопромата. —
"http://vinokur.narod.ru/findef.pdf". Интернет. 2008."
именуемой далее "Статья", пользователем (далее по тексту "Пользователь").

Два закона сопромата

Винокуров В.А.[*] [†]

§1 Введение

Сопротивление материалов (сопромат) — дисциплина, изучаемая в технических высших учебных заведениях. Её основная цель — научить инженеров рассчитывать механические свойства машин и сооружений. Сопромат должен, во-первых, описывать механические свойства материалов, а во-вторых, давать "правила сборки", по которым механические свойства сложных конструкций рассчитываются, исходя из механических свойств отдельных элементов и материалов, из которых они сделаны. Существует много учебников по курсу "Сопротивление материалов". Например, одним из наиболее авторитетных учебников в России и США является двухтомник С.П. Тимошенко [1, 2]. Однако, открыв учебник по сопромату, Вы обнаружите, что он содержит рецепты расчёта отдельных задач: изгиб балки, кручение стержня и т.д., — на базе решения систем уравнений в частных производных математической физики. Где же собственные законы сопромата?

Негоже, что фундаментальная техническая дисциплина, изучаемая тысячами инженеров, остаётся без своих законов. Я решил заполнить этот пробел и предложить вниманию читателя два простейших закона сопромата. А именно, я предлагаю закон последовательного соединения механических систем — утверждение 1 и закон параллельного соединения механических систем — утверждение 3, аналогичные законам последовательного и параллельного соединения проводников в электротехнике. Эти законы выражают механические свойства сложной системы через механические свойства отдельных систем, её составляющих. Поскольку это первая попытка формулирования общих законов сопромата, она ограничена случаем одномерных деформаций. Тем не менее, законы формулируются в точном виде для конечных деформаций и обобщают закон Гука на нелинейный случай.

Я пришёл к необходимости изучения поведения сложных механических систем при конечных деформациях при расчёте подошв современной спортивной обуви из пластиков и резин, где относительные деформации в рабочем диапазоне составляют десятки процентов.

§2 К истории вопроса

Изучение функции нагружения материала, т.е. зависимости напряжения σ от относительной деформации ε в образце восходит ещё к Г.В. Лейбницу (см. письмо Г.В. Лейбница к Я. Бернулли 1690 года [3]). Со времён работы Р. Гука 1687 года [4] материалы, используемые в промышленности и строительстве, в диапазоне малых деформаций характеризуются линейной функцией нагружения

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{1}$$

[*]Электронная почта автора: "vinokur@narod.ru", сайт автора: "http://vinokur.narod.ru".

называемой законом Гука, где E — константа, характеризующая материал и называемая *модуль нормальной упругости* или *модуль Юнга*. Большое количество экспериментальных работ (см. [5, 6]) посвящено изучению диапазона применимости закона Гука и определению реальной функции нагружения различных материалов. При этом, как правило, начиная с Г.В. Лейбница [3], предложившего использовать гиперболическую зависимость ε от σ, изучение функции нагружения проводилось при малых деформациях и сводилось к построению функции нагружения известного вида, зависящей от нескольких числовых параметров, подлежащих определению в эксперименте.

С XIX века в машинах начинают применяться сильно деформируемые материалы, такие как резина, и соответственно возникают экспериментальные и теоретические исследования функции нагружения для конечных деформаций, т.е. в диапазоне величины относительной деформации ε, сравнимой с единицей. Однако, при этом сохраняется тенденция сводить определение функции деформации к определению нескольких числовых параметров, характеризующих кривую из заданного параметрического семейства.

На сегодня установлено (см. [7]), что в стационарном состоянии однородная изотропная среда характеризуется лагранжианом, определённым с точностью до произвольной числовой функции трёх переменных, вид которой конкретизируется по экспериментальным данным. В настоящей работе мы по существу ограничимся моделью одномерных деформаций. Мы применим современный подход функционального анализа. А именно, всю функцию нагружения мы будем рассматривать как один объект, характеризующий материал, т.е. как функциональный параметр – характеристику, вообще говоря, не сводящийся к набору нескольких чисел. Мы покажем, что на этом языке легко ставятся и решаются задачи анализа и синтеза механических систем. Кроме того, мы увидим принципиальную недостаточность линейного подхода (закона Гука) для решения этого класса задач.

§3 Описание схемы эксперимента

Мы рассматриваем две плоские, бесконечно тонкие, абсолютно твёрдые, параллельные пластины, расположенные на расстоянии l друг от друга. Ось x декартовой ортогональной системы координат направлена по нормали к поверхности пластины, оси y и z — перпендикулярно. Первая пластина находится в плоскости $x = 0$, вторая пластина — в плоскости $x = l$. Предполагается, что поперечные размеры пластин много больше расстояния l между ними. Т.е. если, например, пластины имеют форму прямоугольника со сторонами l_y и l_z по осям y и z соответственно, то верны соотношения

$$\frac{l}{l_y} \ll 1,\ \frac{l}{l_z} \ll 1. \tag{2}$$

Между пластинами помещается исследуемая механическая система A. Первая пластина совершает движение по оси x в интервале перемещений $[0, l[$. Механическая система A деформируется под действием силы F со стороны первой пластины. Среднее давление на поверхности первой пластины

$$\sigma = \frac{F}{S}, \tag{3}$$

где S — площадь пластины. Введём величину относительной деформации механической системы A по оси x:

$$\varepsilon = \frac{x}{l}. \tag{4}$$

Определение 1. *Функцией нагружения механической системы A называется функция $\sigma = f(\varepsilon)$, определённая на $[0, 1[$, и сопоставляющая каждому значению относительной деформации ε соответствующее значение давления σ.*

Мы будем далее предполагать, что в начальном положении при $x = 0$ механическая система не деформирована, т.е. при этом $F = 0$ и $\sigma = 0$. Это означает, что для функции нагружения f предполагается выполненным условие

$$f(0) = 0. \tag{5}$$

В случае, если функция нагружения непрерывна и строго монотонно возрастает, существует обратная функция f^{-1}, которую мы будем обозначать $g \equiv f^{-1}$. Функцию f мы будем называть далее *прямой функцией нагружения* или просто *функцией нагружения*, а обратную функцию g — *обратной функцией нагружения*.

Основной целью нашего рассмотрения является исследование деформации сжатия. Поэтому мы здесь ограничиваемся рассмотрением величины относительной деформации $\varepsilon \in [0, 1[$ и $\sigma \geq 0$. Однако, далее можно также считать, что $\varepsilon \in]-\infty, 1[$ и $\sigma \in \mathbf{R}$, т.е. рассматривать одновременно деформации сжатия и растяжения. Все основные утверждения параграфов 4-7 останутся при этом справедливыми. С математической точки зрения при математических выводах мы опираемся лишь на одномерный характер деформации, т.е. предполагаем, что каждая точка системы смещается лишь вдоль оси x. При сжатии многослойных деформируемых механических систем это условие не трудно технологически реализовать. При растяжении многослойной системы возникает вопрос о склеивании слоёв, как в смысле технологической возможности такового соединения, так и в смысле влияния этой операции на механические свойства системы. Поэтому случай $\varepsilon < 0$ для многослойных механических систем менее практически значим.

§4 Функция нагружения как характеристика однородного материала

Пусть пластины 1 и 2 являются одинаковыми прямоугольниками со сторонами l_y и l_z и пространство между ними заполнено однородным материалом. Вид функциональной зависимости величины силы F от величины деформации x зависит от всех размеров l, l_y, l_z образца. Покажем однако, что вид функциональной зависимости давления σ от относительного удлинения ε не зависит от геометрических величин l, l_y, l_z при выполнении условий (2).

4.1 Независимость величины давления от площади пластин

Рассмотрим два экземпляра вышеописанной системы, занумерованные индексами α и β, с одним и тем же материалом между пластинами, с одинаковым расстояниями между пластинами l, но с разными геометрическими размерами $l_{y,\alpha}, l_{z,\alpha}$ и $l_{y,\beta}, l_{z,\beta}$ пластин. Предположим, что длины $l_{y,\alpha}$ и $l_{y,\beta}$ соизмеримы и длины $l_{z,\alpha}$ и $l_{z,\beta}$ соизмеримы. В силу соизмеримости мы можем разбить пластину 1_α на $N_\alpha \in \mathbf{N}$ одинаковых прямоугольников и пластину 1_β на N_β таких же одинаковых прямоугольников с площадью S_s. Рассматривая эти прямоугольники как основания цилиндров, разобьём тело A_α между пластинами системы α на N_α одинаковых параллелепипедов, а тело A_β между пластинами системы β на N_β таких же одинаковых малых параллелепипедов P. Пусть смещения x одинаковы в системах α и β. Тогда для каждого малого параллелепипеда P сила F_s, действующая со стороны первой пластины, будет одинакова и давление в системе α равно

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha F_s}{N_\alpha S_s} = \frac{F_s}{S_s}, \tag{6}$$

а давление в системе β равно

$$\sigma_\beta = \frac{N_\beta F_s}{N_\beta S_s} = \frac{F_s}{S_s}, \tag{7}$$

Итак,

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta. \tag{8}$$

Вывод 1. *Если есть две системы α и β с разными площадями пластин, но с одинаковым начальным расстоянием l между пластинами и с одинаковым однородным материалом между пластинами, то при любой величине деформации $x \in [0, l[$ соответствующие нагружения σ_α и σ_β равны.*

4.2 Независимость давления от толщины l образца

Рассмотрим снова два экземпляра α и β вышеописанной системы с одинаковыми пластинами и одинаковым материалом, но с разными расстояниями между пластинами l_α и l_β. Предположим, что геометрические величины l_α и l_β соизмеримы. Предположим, что абсолютные удлинения x_α и x_β в системах таковы, что

$$\frac{x_\alpha}{l_\alpha} = \frac{x_\beta}{l_\beta} = \varepsilon. \tag{9}$$

Покажем, что тогда давления равны, т.е. верно равенство (8).

В самом деле, по условию соизмеримости существуют натуральные числа $N_\alpha \in \mathbf{N}$ и $N_\beta \in \mathbf{N}$ такие, что

$$\frac{l_\alpha}{N_\alpha} = \frac{l_\beta}{N_\beta} = h. \tag{10}$$

Тогда система α разбивается на N_α одинаковых слоёв толщиной h, а система β — на N_β таких же одинаковых слоёв толщиной h. Абсолютное удлинение одного слоя в системе α равно

$$x_{s,\alpha} = \frac{x_\alpha}{N_\alpha}. \tag{11}$$

Абсолютное удлинение одного слоя в системе β равно

$$x_{s,\beta} = \frac{x_\beta}{N_\beta}. \tag{12}$$

В силу (9,10)

$$x_{s,\alpha} = \frac{x_\alpha}{N_\alpha} = \frac{\varepsilon l_\alpha}{N_\alpha} = \varepsilon h. \tag{13}$$

и

$$x_{s,\beta} = \frac{x_\beta}{N_\beta} = \frac{\varepsilon l_\beta}{N_\beta} = \varepsilon h. \tag{14}$$

Итак, удлинения одинаковых слоёв одинаковы, следовательно одинаковы и нагружения, т.е. верно равенство (8).

Вывод 2. *При одинаковой площади пластин в двух системах с одинаковым однородным материалом нагружение σ зависит лишь от величины относительной деформации ε.*

4.3 Инвариантность функции нагружения

Выводы 1 и 2 показывают независимость функции нагружения от геометрических параметров системы, удовлетворяющей условиям (2).

Вывод 3. *Для любых двух систем α и β, удовлетворяющих условиям (2), с одинаковым материалом между пластинами их функции нагружения $\sigma = f_\alpha(\varepsilon)$ и $\sigma = f_\beta(\varepsilon)$ совпадают.*

Итак, функция нагружения однородного материала является характеристикой материала, не зависящей от геометрических размеров образца. Далее мы будем предполагать, что функция нагружения является непрерывной и строго монотонно возрастающей функцией на интервале $[0, 1[$ изменения переменной ε, причём

$$\lim_{\varepsilon \to 1-0} \sigma(\varepsilon) = +\infty. \tag{15}$$

В этих предположениях существует обратное отображение $f^{-1} : [0, +\infty[\to [0, 1[$ также непрерывное и строго возрастающее, которое мы будем обозначать $g \equiv f^{-1}$.

Если функция нагружения f дифференцируема в точке $\varepsilon \in [0, 1[$, то её производная $\frac{df}{d\varepsilon}(\varepsilon)$ в этой точке называется *дифференциальным модулем нормальной упругости*. Производная в точке $\varepsilon = 0$ называется *модулем нормальной упругости* или *модулем Юнга*

$$E \equiv \frac{df}{d\varepsilon}(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}. \tag{16}$$

Далее мы рассмотрим две задачи об определении функции нагружения сложной системы, составленной из нескольких подсистем с известными свойствами.

§5 Функция нагружения слоистой системы

Пусть пространство двумя между пластинами заполнено k параллельными пластинам слоями толщинами $l_1, l_2, \ldots l_k$, $l_1 + l_2 + \ldots l_k = l$. Известны обратные функции нагружения $g_1, g_2, \ldots g_k$ этих слоёв. Требуется определить обратную функцию нагружения g всей системы.

В каждой точке области между пластинами нагружение σ одинаково. Поэтому относительное удлинение i-того слоя равно $\varepsilon_i = g_i(\sigma)$, а его абсолютное удлинение — $x_i = \varepsilon_i l_i$. Общее смещение первой пластины равно

$$x = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i l_i = \sum_{i=1}^{k} g_i(\sigma) l_i. \tag{17}$$

Относительное удлинение системы равно

$$\varepsilon = \frac{x}{l} = \sum_{i=1}^{k} g_i(\sigma)\frac{l_i}{l} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g_i(\sigma). \tag{18}$$

Итак, для обратной функции нагружения системы g справедливо равенство

$$g = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g_i, \tag{19}$$

где

$$\alpha_i = \frac{l_i}{l},\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1. \tag{20}$$

Доказано утверждение 1.

Утверждение 1. *Обратная функция нагружения слоистой системы является выпуклой комбинацией обратных функций нагружения слоёв вида (19, 20).*

Дифференцируя равенство (19) в нуле, получаем следствие 1.

Следствие 1. *Модуль Юнга E слоистой системы выражается через модули Юнга слоёв E_i, $i \in \overline{1,k}$, по формуле*

$$\frac{1}{E} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{1}{E_i}. \tag{21}$$

Замечание 1. *Простейшим важным частным случаем слоистой системы является система, каждый слой которой состоит из одного материала с известными свойствами, т.е. с известной функцией нагружения материала.*

5.1 Задача о восстановлении толщины слоёв по известной функции абсолютного смещения системы

Пусть нам известна функция абсолютного смещения всей системы $x = \varphi(\sigma)$, $\sigma \in [0, \sigma_0]$, $\sigma_0 \in \mathbf{R}_+$. Из формулы (17) следует равенство

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} l_i g_i. \tag{22}$$

в линейном пространстве непрерывных функций $C([0,\sigma_0], \mathbf{R})$. Равенство (22) означает, что функция φ является линейной комбинацией функций $g_1, g_2, \ldots g_k$ с неотрицательными коэффициентами l_i, имеющими физический смысл толщины слоя. Из линейной алгебры известно, что коэффициенты $l_1, l_2, \ldots l_k$ в формуле (22) однозначно определены тогда и только тогда, когда функции $g_1, g_2, \ldots g_k$ линейно независимы. Доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. *Толщины слоёв слоистой структуры восстанавливаются по известной функциональной зависимости $x = \varphi(\sigma)$, $\sigma \in [0, \sigma_0]$, величины абсолютной деформации системы x от нагружения σ тогда и только тогда, когда обратные функции нагружения слоёв линейно независимы.*

Замечание 2. *В силу коммутативности операции сложения скалярных функций из представления (22) вытекает, что по одной лишь известной функции $x = \varphi(\sigma)$ системы не может быть восстановлен порядок следования слоёв, ибо равенство (22) сохраняется при любой перестановке функций $g_1, g_2, \dots g_k$.*

§6 Функция нагружения цилиндрической системы

Пусть пластина 1 разбита на k подобластей $G_1, G_2, \dots G_k$, на каждой из которых, как на основании, построен цилиндр с образующей вдоль оси x до пластины 2. i-тый цилиндр является подсистемой с прямой функцией нагружения f_i, $i \in \overline{1,k}$. Требуется определить прямую функцию нагружения всей системы.

Пусть ε — относительная деформация всей системы. В силу геометрии системы относительные деформации всех k цилиндров равны между собой и равны ε:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_k = \varepsilon. \tag{23}$$

Давление на поверхности i-того цилиндра равно

$$\sigma_i = f_i(\varepsilon). \tag{24}$$

Сила, действующая со стороны i-того цилиндра на пластину 1 равна

$$F_i = S_i f_i(\varepsilon), \tag{25}$$

где S_i — площадь i-той подобласти G_i на пластине 1. Общая сила, действующая на пластину 1, есть

$$F = \sum_{i=1}^{k} S_i f_i(\varepsilon), \tag{26}$$

а среднее давление

$$\sigma = \frac{F}{S} = \sum_{i=1}^{k} \frac{S_i}{S} f_i(\varepsilon), \tag{27}$$

где $S = \sum_{i=1}^{k} S_i$ — площадь пластины 1. Итак, формулу (27) можно переписать в виде

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i \tag{28}$$

где

$$\alpha_i = \frac{S_i}{S},\ i \in \overline{1,k},\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1. \tag{29}$$

Доказано следующее утверждение.

Утверждение 3. *Прямая функция нагружения цилиндрической системы является выпуклой комбинацией прямых функций нагружения цилиндров-подсистем вида (28,29).*

Дифференцируя равенство (28) в нуле, получаем следствие.

Следствие 2. *Модуль Юнга E цилиндрической системы выражается через модули Юнга цилиндров-подсистем E_i, $i \in \overline{1,k}$, по формуле*

$$E = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i E_i. \tag{30}$$

Замечание 3. *Простейшим важным частным случаем цилиндрической системы является система, каждый цилиндр-подсистема которой состоит из одного материала с известными свойствами, т.е. с известной функцией нагружения материала.*

6.1 Задача о восстановлении площадей сечений цилиндров по известной функции нагружения

Пусть в цилиндрической системе при каждой величине относительной деформации системы $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \in]0,1[$, задана величина полной силы F, действующей со стороны пластины 1, т.е. задана функция $F = \psi(\varepsilon)$ класса $C([0, \varepsilon_0], \mathbf{R})$. Равенство (26) тогда записывается как линейная зависимость функций из линейного пространства $C([0, \varepsilon_0], \mathbf{R})$ вида

$$\psi = \sum_{i=1}^{k} S_i f_i. \tag{31}$$

Итак, справедливо утверждение.

Утверждение 4. *Площади сечений цилиндров цилиндрической системы однозначно восстанавливаются по известной зависимости $F = \psi(\varepsilon)$ силы F, действующей на систему, от относительной деформации системы ε, тогда и только тогда, когда прямые функции нагружения цилиндров-подсистем линейно не зависимы.*

§7 Линейные среды

Рассмотрим среду, подчиняющуюся закону Гука, т.е. для которой прямая функция нагружения линейна вида (1) на рассматриваемом интервале $[0, \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 < 1$, относительных деформаций. Тогда обратная функция нагружения $\varepsilon = g(\sigma)$ также линейна и имеет вид

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma,\ \sigma \in [0, \sigma_0],\ \sigma_0 = E\varepsilon_0. \tag{32}$$

Для любых k линейных материалов линейное пространство, натянутое на их k функций нагружения, одномерно, что влечёт при $k > 2$ невозможность однозначного восстановления как слоистой структуры (см. утверждение 2), так и цилиндрической структуры (см. утверждение 4).

Для слоистой структуры известная функция абсолютной деформации системы $x = \varphi(\sigma)$ из п. 5.1 имеет вид

$$x = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{l_i}{E_i}\right)\sigma,\ \sigma \in [0, \sigma_0].$$

Т.е. вся экспериментальная информация сводится к одному числовому соотношению

$$C_\varphi = \sum_{i=1}^{k} \frac{l_i}{E_i}, \tag{33}$$

в котором известна числовая величина $C_\varphi \equiv \frac{d\varphi}{d\sigma}(\sigma)|_{\sigma=0}$ — производная абсолютной деформации системы x по напряжению σ, и известны модули Юнга E_i, $i \in \overline{1,k}$, слоёв.

Для цилиндрической системы равенство функций (28) сводится к одному числовому равенству (30), с известными величинами модулей нормальной упругости $E_1, E_2, \ldots E_k, E$. Из соотношения (30) величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ могут быть однозначно определены, в силу дополнительного условия (29), лишь при $k = 1, 2$. При $k \geq 3$ без дополнительной информации относительные площади сечений цилиндров α_i, $i \in \overline{1,k}$, не восстанавливаются однозначно.

§8 Использование полученных теоретических результатов

Полученные результаты о механических свойствах сложных систем могут быть использованы для двух основных целей: для задач синтеза сложной механической системы с заданными механическими свойствами и для задачи идентификации сложной механической системы по её механическим свойствам.

Для слоистой структуры мы показали, что обратная функция нагружения системы является выпуклой комбинацией вида (19,20) обратных функций нагружения её слоёв. Обратная величина модуля Юнга системы в этом случае является выпуклой комбинацией вида (21,20) обратных величин модулей Юнга слоёв.

Для цилиндрической системы прямая функция нагружения системы является выпуклой комбинацией вида (28,29) функций нагружения цилиндров-подсистем и модуль Юнга системы есть выпуклая комбинация вида (30,29) модулей Юнга цилиндров-подсистем.

В задачах идентификации оказался выделенным случай линейных сред, т.е. малых деформаций. Оказалось, что для любого набора линейных сред линейное пространство, натянутое на набор их функций нагружения, одномерно, что приводит к невозможности однозначного восстановления параметров сложной линейной слоистой системы при количестве слоёв более единицы или сложной линейной цилиндрической системы при количестве цилиндров более двух. Утверждения 2 и 4 доказывают, что для однозначной идентификации сложной механической системы требуется исследование её поведения при больших деформациях, когда относительная деформация системы ε сравнима с единицей и функция нагружения в силу соотношения (15) является нелинейной.

Литература

[1] Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т.1. Элементарная теория и задачи. — М.: Наука, 1965.

[2] Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т.2. Более сложные вопросы теории и задачи. — М.: Наука, 1965.

[3] Leibniz, Gottfried Wilhelm: Letter to Jacobus Bernoulli. Опубликовано в G. W. Leibniz, Mathematische Schriften (Red. G. E. Gerhardt), Vol. III, Abt. 1, S. 13-20. Heidelsheim: Georg Olms Verlangsbuchhandlung 1855 (переиздано в 1962 г.).

[4] Hooke, Robert: Lectures De Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies. London: John Martyn. Переиздано в Early Science in Oxford (ed. R. T. Gunther), Vol. VIII, pp. 331-356. Oxford: R. T. Gunther, 1931.

[5] Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть 1. Малые деформации. — Москва: "Наука", Главная редакция физико-математической литературы. 1984.

[6] Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть 2. Конечные деформации. — Москва: "Наука", Главная редакция физико-математической литературы. 1984.

[7] Винокуров В.А. Частицы из среды. Математические методы и модели. — "http://vinokurov.tut.su/vinbook.pdf". Интернет. 2002.