

Профессор, д.ф.-м.н.
Винокуров В.А.

Изучение магнитного поля соленоида

Методические указания к выполнению лабораторной
работы № 92

<http://sho.narod.ru/lab92.pdf>

Москва 2007
Версия 1.000

Винокуров В.А.

Изучение магнитного поля соленоида

Методические указания к выполнению лабораторной работы № 92. Москва. 2007.

В методическом пособии излагаются основные свойства магнитного поля конечного соленоида и теоретические основы эффекта Холла. Выполнение лабораторной работы разбито на два задания. В первом задании проводится градуировка датчика Холла. Во втором задании проводится измерение индукции магнитного поля на оси конечного соленоида. В пособии излагаются современные методы компьютерной обработки данных эксперимента. Кратко описано применение метода наименьших квадратов для восстановления параметров функций по данным эксперимента.

Методические указания предназначены для студентов университетов, выполняющих лабораторные работы по общему курсу физики.

©Винокуров В.А. 2007

Лабораторная работа № 92
Изучение магнитного поля соленоида

Содержание

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 1 | Теоретическое введение | 2 |
| 1.1 | Магнитное поле постоянного электрического тока и его силовая характеристика — вектор индукции магнитного поля | 2 |
| 1.2 | Магнитное поле соленоида | 2 |
| 1.3 | Методы измерения индукции магнитного поля | 4 |
| 1.3.1 | Описание эффекта Холла | 4 |
| 1.3.2 | Учёт контактной разности потенциалов и магнитного поля Земли | 6 |
| 2 | Описание экспериментальной установки | 7 |
| 3 | Порядок выполнения измерений | 7 |
| 3.1 | Подготовка лабораторной установки к работе | 7 |
| 3.2 | Задание 1. Калибровка датчика Холла | 8 |
| 3.3 | Задание 2. Измерение магнитного поля на оси конечного соленоида . . | 8 |
| 4 | Обработка измерений и представление результатов | 9 |
| 5 | Компьютерная обработка измерений | 10 |
| 6 | Вопросы для допуска к работе | 10 |
| 7 | Вопросы для сдачи работы | 11 |
| 8 | Приложение 1. Расчёт индукции магнитного поля на оси конечного соленоида | 12 |
| 9 | Приложение 2. Восстановление параметров функциональной зависимости методом наименьших квадратов | 13 |
| 10 | Литература | 15 |

Лабораторная работа № 92

Изучение магнитного поля соленоида

Цель работы: Изучение магнитного поля конечного соленоида, знакомство с методом измерения индукции магнитного поля с помощью датчика Холла.

Приборы и принадлежности: Соленоид и датчик Холла (модуль ФПЭ 04), источник постоянного тока (модуль ИП), вольтметр.

Основная формула работы: На оси конечного соленоида (см. рисунок 1) зависимость величины вектора индукции магнитного поля B от координаты x задаётся формулой

$$B = \mu\mu_0 n I \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{l}{2} - x}{\sqrt{(\frac{l}{2} - x)^2 + R^2}} + \frac{\frac{l}{2} + x}{\sqrt{(\frac{l}{2} + x)^2 + R^2}} \right). \quad (1)$$

Здесь:

x — координата вдоль оси конечного соленоида, причём начало координат находится в центре соленоида;

μ — магнитная проницаемость вещества сердечника соленоида (в случае воздуха $\mu = 1$);

μ_0 — магнитная постоянная;

l — длина соленоида;

R — радиус соленоида;

N — общее число витков соленоида;

$n = \frac{N}{l}$ — плотность намотки;

I — сила тока в одном витке.

Через величины двух углов, изображённых на рисунке 1 та же формула (1) записывается в виде

$$B = \mu\mu_0 n I \cdot \frac{1}{2} (\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)). \quad (2)$$

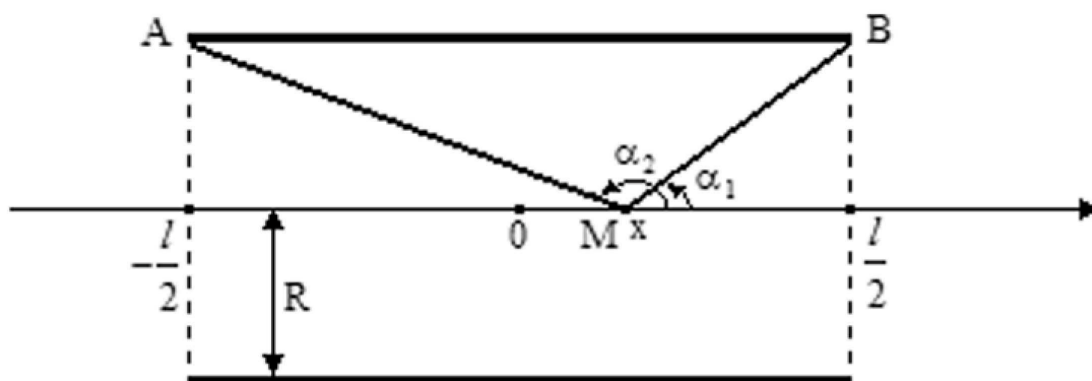


Рис. 1: Магнитное поле конечного соленоида

1 Теоретическое введение

1.1 Магнитное поле постоянного электрического тока и его силовая характеристика — вектор индукции магнитного поля По современным физическим представлениям постоянные электрические токи создают вокруг себя магнитное поле. Существование магнитного поля проявляется в силовом воздействии на постоянный магнит или на движущийся в этом поле электрический заряд. Силовой характеристикой магнитного поля в данной точке пространства является вектор индукции магнитного поля \vec{B} . Магнитная сила, действующая на точечную заряженную частицу, выражается через вектор индукции магнитного поля \vec{B} в данной точке пространства следующей формулой

$$\vec{F}_m = q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (3)$$

Здесь q — величина заряда частицы, \vec{v} — вектор скорости частицы. Таким образом, в простейшей ситуации описание магнитного поля сводится к заданию вектора индукции магнитного поля \vec{B} во всех точках пространства. При известном распределении зарядов и токов вычисление вектора индукции магнитного поля \vec{B} в общем случае проводится путём решения системы уравнений Максвелла электромагнитного поля (см. [1, §62]). В случае системы постоянных электрических токов вычисление вектора индукции магнитного поля \vec{B} проводится применением закона Био-Савара-Лапласа (см. [1, §36]). Для простейших конфигураций электрических токов: бесконечного прямолинейного тока и кругового витка с током такой расчёт проведен (см. [1, §36]). В частности, рассчитана индукция магнитного поля на оси кольцевого витка

$$B = \frac{\mu\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4)$$

Здесь I — сила тока в витке, R — радиус витка, x — координата точки на оси витка.

1.2 Магнитное поле соленоида Одним из основных физических приборов для изучения магнитного поля и хранения магнитной энергии является соленоид — цилиндр радиуса R и длины l , на поверхность которого намотаны N витков провода диаметром d , по которому пущен постоянный электрический ток силой I . Соленоид, который мы описали, называется *конечным* соленоидом, ибо он имеет конечную длину l . Однако в теоретических рассуждениях используется идеализация, называемая *бесконечным* соленоидом или просто соленоидом, когда цилиндр идёт бесконечно в обе стороны, причём предполагается дополнительно, что диаметр провода d много меньше диаметра цилиндра $D = 2R$, т.е.

$$\frac{d}{D} \ll 1. \quad (5)$$

Бесконечный соленоид получается предельным переходом при $l \rightarrow \infty$ из конечного соленоида.

Магнитное поле бесконечного соленоида имеет простую структуру. Внутри соленоида магнитное поле однородно, т.е. во всех точках внутри соленоида вектор индукции магнитного поля \vec{B} постоянен, направлен по оси соленоида и имеет величину

$$B \equiv B_\infty = \mu\mu_0 n I \quad (6)$$

(см. [1, §39]). Во всех точках вне соленоида вектор индукции магнитного поля равен нулю.

Естественный вопрос, который возникает, — насколько магнитное поле конечного соленоида похоже на магнитное поле бесконечного соленоида? Отметим, что во-первых, вектор индукции магнитного поля \vec{B} конечного соленоида нигде не обращается в нуль — магнитное поле существует всюду вокруг соленоида. Магнитное поле теряет также и свойство однородности. Но однако, при условии, что диаметр конечного соленоида D много меньше его длины l , т.е.

$$\frac{D}{l} \ll 1, \quad (7)$$

в центральной части соленоида вектор индукции магнитного поля \vec{B} конечного соленоида близок к вектору индукции магнитного поля \vec{B} бесконечного соленоида.

График функциональной зависимости (1) $B = B(x)$ индукции магнитного поля B от координаты x на оси конечного соленоида изображён на рисунке 2. Функция (1) — чётная функция аргумента x , которая имеет максимальное значение в точке $x = 0$ и далее монотонно убывает к нулю при $x \rightarrow \infty$. Максимальное значение магнитной индукции B достигается в центре конечного соленоида при $x = 0$ и согласно формуле (1) равно

$$B_c = \alpha \mu \mu_0 n I, \quad (8)$$

где

$$\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{D}{l}\right)^2}}. \quad (9)$$

Отношение

$$\frac{B_c}{B_\infty} = \alpha. \quad (10)$$

Для данной лабораторной установки (см. пункт 2) $D = 62 \text{ mm}$, $l = 167 \text{ mm}$ и величина

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{62}{167}\right)^2}} \simeq 0,9375. \quad (11)$$

Разность $B_\infty - B_c = (1 - \alpha) \cdot B_\infty$ и относительная величина

$$\frac{B_\infty - B_c}{B_\infty} = 1 - \alpha \simeq 0,0625 \simeq 6\%.$$

Итак, в центре данного конечного соленоида величина индукции магнитного поля на 6% менее величины индукции магнитного поля соответствующего бесконечного соленоида с теми же диаметром D , плотностью намотки n и силой тока I .

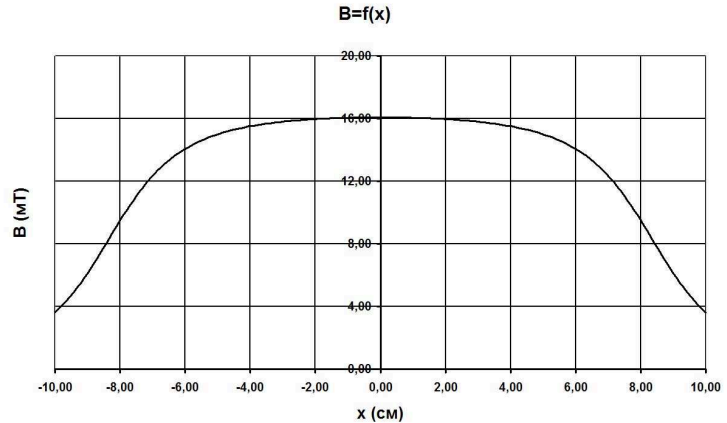


Рис. 2: График зависимости $B = B(x)$ на оси конечного соленоида

В данной лабораторной работе мы измеряем величину индукции магнитного поля B на оси конечного соленоида и проводим количественное сравнение с величиной индукции магнитного поля бесконечного соленоида B_∞ , даваемой формулой (6). Теоретическая зависимость величины индукции магнитного поля B на оси конечного соленоида от координаты x даётся формулой (1). В n точках на оси соленоида с координатами x_1, x_2, \dots, x_n мы с помощью датчика Холла измеряем соответствующие значения величины индукции магнитного поля B_1, B_2, \dots, B_n и сравниваем эти n экспериментальных точек на графике зависимости $B = B(x)$ с непрерывной кривой $B = B(x)$, построенной по теоретической формуле (1).

1.3 Методы измерения индукции магнитного поля Для измерения индукции магнитного поля B на сегодня используются два основных метода: 1) метод измерения, основанный на применении закона электромагнитной индукции, 2) метод измерения с помощью датчика Холла, основанный на использовании эффекта Холла. Метод измерения магнитного поля с помощью катушки изучается в лабораторной работе № 86 (см. соответствующее методическое пособие [2]). Он обладает тем недостатком, что измеряется магнитный поток при изменении магнитного поля и, соответственно, требует включения или выключения магнитного поля в процессе измерений. Датчик Холла не обладает этим недостатком — он показывает индукцию магнитного поля B в той точке пространства, где он находится в данный момент времени. Перейдём к описанию эффекта Холла.

1.3.1 Описание эффекта Холла Эффект Холла заключается в том, что, если через проводник проходит постоянный электрический ток в направлении оси x декартовой ортогональной системы координат, то при действии на проводник магнитного поля с вектором индукции магнитного поля \vec{B} , направленным вдоль оси y между границами проводника вдоль оси z возникает электродвижущая сила (Э.Д.С.), пропорциональная величине индукции магнитного поля B . Рассмотрим более подробно объяснение этого явления.

На рисунке 3 изображён параллелепипед из проводящего материала (металл или полупроводник). По направлению оси x идёт постоянный электрический ток с плотностью тока \vec{j} и силой тока I . По оси y направлен вектор индукции магнитного поля \vec{B} . Электрический ток образован движением заряженных частиц с величиной заряда q и вектором скорости \vec{v} .

Пусть $n = \frac{\Delta N}{\Delta V}$ — объёмная плотность носителей заряда. Тогда за время dt через грань $ABCD$ параллелепипеда выйдут $dN = nbcv dt$ зарядов и вынесут заряд $dQ = qnbcv dt$. Следовательно, сила тока

$$I = \frac{dQ}{dt} = qnbcv, \quad (12)$$

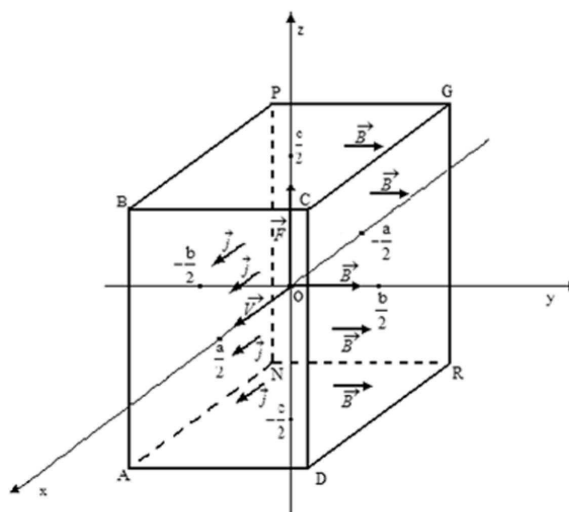


Рис. 3: К объяснению эффекта Холла

а величина плотности тока

$$j = \frac{I}{bc} = qnv. \quad (13)$$

На движущуюся с вектором скорости \vec{v} заряженную частицу со стороны магнитного поля действует магнитная сила согласно формуле (3), направленная по оси z величиной

$$F_z = qvB. \quad (14)$$

При перемещении заряда с нижней грани $ANRD$ на верхнюю грань $BPQC$ эта сила совершает работу

$$A = F_z \cdot c = qvBc. \quad (15)$$

Следовательно, величина соответствующей Э.Д.С.

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q} = vBc. \quad (16)$$

Выразим теперь величину Э.Д.С. (16) через силу тока I . Для этого из формулы (12) найдём скорость носителей заряда

$$v = \frac{I}{qnb} \quad (17)$$

и подставим величину (17) в формулу (16). Получим формулу

$$\mathcal{E} = \frac{I}{qnb} \cdot Bc = \frac{IB}{qnb}$$

или эквивалентно

$$\mathcal{E} = \frac{1}{qn} \cdot \frac{IB}{b}. \quad (18)$$

В этой формуле величина

$$R \equiv \frac{1}{qn}, \quad (19)$$

зависящая только от материала проводника, называется *постоянной Холла*, а величина b — толщина проводника в направлении магнитного поля. Используя обозначение (19), формулу (18) для Э.Д.С. Холла запишем в виде

$$\mathcal{E} = R \frac{IB}{b}. \quad (20)$$

Формула (20) описывает эффект Холла. Она показывает, что при фиксированных параметрах датчика Холла, Э.Д.С. Холла \mathcal{E} является линейной функцией индукции магнитного поля B , т.е. верно равенство

$$\mathcal{E} = kB, \quad (21)$$

где константа

$$k = \frac{1}{qn} \cdot \frac{I}{b}. \quad (22)$$

Равенство (21) и является теоретической основой измерения индукции магнитного поля с помощью датчика Холла. Константа k , входящая в равенство (21), содержит такие параметры как заряд носителей q и концентрация носителей n , которые сами требуют определения. Однако, на практике важно само равенство (21), а константа k определяется с помощью градуировки прибора в магнитном поле с известной индукцией B . Таким образом, перед использованием датчика Холла проводится его градуировка (см. задание 1 данной лабораторной работы).

1.3.2 Учёт контактной разности потенциалов и магнитного поля Земли При практическом использовании датчика Холла, как правило, обнаруживается, что простое соотношение пропорциональности (21) для замкнутой электрической цепи, в которую включён датчик Холла, не выполняется. Дело в том, что при подсоединении металлических контактов к полупроводниковому материалу датчика Холла в местах соединения возникают контактные разности потенциалов, суммарная величина которых \mathcal{E}_c может быть не равна нулю в силу особенностей соединения. В таком случае вместо равенства (21) система описывается равенством

$$\mathcal{E} = kB + \mathcal{E}_c. \quad (23)$$

Если же учесть, что в данной точке земной поверхности существует ещё магнитное поле Земли, с компонентой вектора индукции магнитного поля B_g вдоль оси соленоида, то от равенства (23) мы приходим к равенству

$$\mathcal{E} = k(B + B_g) + \mathcal{E}_c, \quad (24)$$

описывающему функциональную зависимость измеряемой в цепи датчика Холла Э.Д.С. \mathcal{E} от индукции приложенного магнитного поля соленоида B . Перепишем равенство (24) в виде

$$\mathcal{E} = kB + \mathcal{E}_s, \quad (25)$$

где константа

$$\mathcal{E}_s = kB_g + \mathcal{E}_c, \quad (26)$$

и сделаем равенство (25) теоретической основой измерения индукции магнитного поля данным датчиком Холла в данной точке земной поверхности.

При проведении калибровки датчика Холла теперь согласно равенству (25) требуется определить две константы k и \mathcal{E}_s характеризующие данный прибор, для чего требуется, как минимум, два измерения Э.Д.С. \mathcal{E} при двух известных значениях индукции магнитного поля B . Однако, из теории восстановления параметров функциональных зависимостей по методу наименьших квадратов (см. приложение 2) следует, что, чем больше независимых измерений величин \mathcal{E} и B мы проведём, тем более точно сможем восстановить параметры k и \mathcal{E}_s связывающей их функциональной зависимости (25). Поэтому в задании 1 при калибровке датчика Холла мы проводим около 11 измерений величин \mathcal{E} и B .

После проведения калибровки датчика Холла мы будем определять индукцию магнитного поля B через измеренное значение Э.Д.С. \mathcal{E} в цепи датчика Холла по формуле

$$B = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_s}{k}, \quad (27)$$

полученной из формулы (25).

2 Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка к данной лабораторной работе содержит

три модуля (см. фотографию на рисунке 4): соленоид и датчик Холла (модуль ФЭП 04), источник питания (модуль ИП), и вольтметр. Источник питания и вольтметр подключаются к розеткам внешней сети. Э.Д.С. датчика Холла с модуля ФЭП 04 подаётся на вход вольтметра.

При использовании модуля ИП (см. фотографию на рисунке 5) студент использует лишь кнопку "Сеть" для включения и выключения модуля и ручку "контроль тока 5 - 25 В" для изменения силы тока i_c в обмотке соленоида в пределах от 0,5 А до 1,5 А. Величина силы тока i_c измеряется амперметром на лицевой панели ИП.

Конечный соленоид модуля ФЭП 04 имеет следующие параметры: длина соленоида $l = 167\text{мм}$, диаметр соленоида $D = 62\text{мм}$, число витков катушки соленоида $N = 2230$.



Рис. 4: Фотография экспериментальной установки



Рис. 5: Фотография двух модулей экспериментальной установки

3 Порядок выполнения измерений

3.1 Подготовка лабораторной установки к работе

1. Подключить к сети модуль ИП.
2. Подключить к сети вольтметр.
3. Включить кнопку "Сеть" модуля ИП.
4. Включить тумблер "Сеть" вольтметра.
5. Установить на вольтметре режимы измерения постоянного напряжения ($U-$) и автоматического выбора пределов измерений (АВП).

Таблица 1: Калибровка датчика Холла

| № | i_c (А) | \mathcal{E} (мВ) | B (мТ) |
|----|-----------|--------------------|----------|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6 | | | |
| 7 | | | |
| 8 | | | |
| 9 | | | |
| 10 | | | |
| 11 | | | |

6. Проверить работоспособность лабораторной установки — для этого, поворачивая на модуле ИП ручку контроля тока для изменения силы тока в обмотке соленоида в пределах от 0,5 А до 1,5 А, проверить соответствующее возрастание Э.Д.С. датчика Холла.

3.2 Задание 1. Калибровка датчика Холла

1. Установить датчик Холла модуля ФЭП 04 в центре соленоида - координата $x = 0$ мм.
2. При $n = 11$ значениях силы тока в диапазоне от 0,5 А до 1,5 А провести измерения двух величин: силы тока в обмотке соленоида i_c и соответствующего значения Э.Д.С. датчика Холла \mathcal{E} и записать их в два соответствующих столбца таблицы 1.

3.3 Задание 2. Измерение магнитного поля на оси конечного соленоида

1. Установить силу тока в обмотке соленоида $i_c = 1,0$ А.
2. При $m = 21$ значениях координаты x датчика Холла в диапазоне от -10 см до +10 см с шагом 1 см провести измерения соответствующего значения Э.Д.С. датчика Холла \mathcal{E} и записать в соответствующий столбец таблицы 2.
3. Установить силу тока в обмотке соленоида $i_c = 1,4$ А.
4. При $m = 21$ значениях координаты x датчика Холла в диапазоне от -10 см до +10 см с шагом 1 см провести измерения соответствующего значения Э.Д.С. датчика Холла \mathcal{E} и записать в другой соответствующий столбец таблицы 2.

Таблица 2: Измерение магнитного поля на оси конечного соленоида

| № | x (см) | $i_c = 1,0$ (А) | | $i_c = 1,4$ (А) | |
|----|----------|--------------------|----------|--------------------|----------|
| | | \mathcal{E} (мВ) | B (мТ) | \mathcal{E} (мВ) | B (мТ) |
| 1 | -10,0 | | | | |
| 2 | -9,0 | | | | |
| 3 | -8,0 | | | | |
| 4 | -7,0 | | | | |
| 5 | -6,0 | | | | |
| 6 | -5,0 | | | | |
| 7 | -4,0 | | | | |
| 8 | -3,0 | | | | |
| 9 | -2,0 | | | | |
| 10 | -1,0 | | | | |
| 11 | 0,0 | | | | |
| 12 | 1,0 | | | | |
| 13 | 2,0 | | | | |
| 14 | 3,0 | | | | |
| 15 | 4,0 | | | | |
| 16 | 5,0 | | | | |
| 17 | 6,0 | | | | |
| 18 | 7,0 | | | | |
| 19 | 8,0 | | | | |
| 20 | 9,0 | | | | |
| 21 | 10,0 | | | | |

4 Обработка измерений и представление результатов

1. Рассчитать коэффициент пропорциональности $k_{ib} \equiv \alpha \mu \mu_0 n$ между силой тока и величиной индукции магнитного поля в центре конечного соленоида. Согласно данным о параметрах лабораторной установки со страницы 7

$$n = \frac{N}{l} = \frac{2230}{0,167\text{м}} = 13353\text{м}^{-1}.$$

Согласно странице 1 и формуле (11)

$$k_{bi} = 0,9375 \cdot 1 \cdot 4\pi 10^{-7} \cdot 13353\text{Т/А} = 1,5731 \cdot 10^{-2} \text{Т/А}.$$

2. По формуле $B = k_{ib} \cdot i_c$, вытекающей из формулы (8), по известным значениям силы тока i_c из второго столбца таблицы 1 рассчитать соответствующие значения индукции магнитного поля B и занести их в четвёртый столбец таблицы 1.
3. В двумерной декартовой системе координат с осью абсцисс — осью B и осью ординат — осью \mathcal{E} построить $n = 11$ экспериментальных точек (B_i, \mathcal{E}_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ согласно столбцам 3 и 4 таблицы 1.

4. Через построенные $n = 11$ экспериментальных точек (B_i, \mathcal{E}_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ провести прямую по методу наименьших квадратов (см. приложение 2) и определить параметры k и \mathcal{E}_s в формуле (25).
5. По формуле (27) для каждого значения Э.Д.С. \mathcal{E} в таблице 2 рассчитать соответствующее значение индукции магнитного поля B в данной точке x на оси конечного соленоида и занести их в таблицу 2.
6. Для значения силы тока $i_c = 1,0$ (А) В двумерной декартовой системе координат с осью абсцисс — осью x и осью ординат — осью B построить $m = 21$ экспериментальных точек (x_i, B_i) , $i = 1, 2, \dots, m$ согласно столбцам 3 и 4 таблицы 2 и построить непрерывную кривую теоретической зависимости $B = B(x)$ на оси конечного соленоида по формуле (1). Найти максимальное отклонение экспериментальных точек от теоретической кривой и указать максимальную относительную ошибку в процентах.
7. На том же графике для значения силы тока $i_c = 1,4$ (А) провести построения, аналогичные предыдущему пункту.

5 Компьютерная обработка измерений

Обработку данных и представление результатов измерений настоящей лабораторной работы по пункту 4 рекомендуется проводить на компьютере с помощью программы «lab92n.xls», установленной на компьютерах лаборатории электричества. Сначала следует открыть программой «Word» и прочесть файл «lab92n.doc» с инструкцией по использованию программы «lab92n.xls», а затем запустить на выполнение файл «lab92n.xls» и действовать по инструкции.

В компьютерном классе библиотеки МГУДТ и на персональном сайте для студентов профессора Винокурова В.А. «<http://sho.narod.ru>» можно взять следующие файлы: файл методического пособия к данной лабораторной работе «lab92.pdf» в формате PDF, файл обработки данных «lab92n.xls» в формате электронных таблиц «Excel» и файл с инструкциями «lab92n.doc» в формате «Word».

6 Вопросы для допуска к работе

1. Описать магнитное поле идеального бесконечного соленоида.
2. Описать магнитное поле конечного соленоида.
3. Дать физическую интерпретацию основной формулы данной лабораторной работы.
4. Описать отличия магнитного поля конечного соленоида от магнитного поля идеального бесконечного соленоида.
5. В какой области пространства магнитное поле конечного соленоида наиболее близко к магнитному полю соответствующего идеального бесконечного соленоида?
6. Что такое эффект Холла?

7. На каких принципах основаны методы измерения индукции магнитного поля?
8. Как устроен датчик Холла?
9. Как связана величина Э.Д.С. \mathcal{E} датчика Холла с величиной индукции магнитного поля?
10. Почему индукция магнитного поля является силовой характеристикой магнитного поля? Написать выражение для магнитной силы, действующей на заряженную частицу.
11. Какова траектория заряженной частицы в однородном магнитном поле?

7 Вопросы для сдачи работы

1. Рассчитать разность индукции магнитного поля в центре конечного соленоида и индукции магнитного поля аналогичного бесконечного соленоида.
2. Рассчитать отношение индукции магнитного поля на краю конечного соленоида к индукции магнитного поля в центре конечного соленоида.
3. Написать формулу для индукции магнитного поля на оси кругового витка с током и дать её физическую интерпретацию.
4. Написать формулу для индукции магнитного поля идеального бесконечного соленоида и дать её физическую интерпретацию.
5. Написать формулу для индукции магнитного поля на оси конечного соленоида и дать её физическую интерпретацию.
6. При каких предположениях выводится формула для индукции магнитного поля идеального бесконечного соленоида?
7. При каких предположениях выводится формула для индукции магнитного поля конечного соленоида?
8. Провести вывод формулы для Э.Д.С. эффекта Холла.
9. В чём преимущество измерения индукции магнитного поля с помощью датчика Холла?
10. Физический смысл постоянной Холла, её связь со свойствами полупроводника.
11. Написать и объяснить физический смысл формулы для магнитной силы, действующей на заряженную частицу.
12. Рассчитать радиус орбиты электрона с кинетической энергией 2 эВ, вращающегося по окружности в центре соленоида при силе тока в обмотке $I = 1$ А.

8 Приложение 1. Расчёт индукции магнитного поля на оси конечного соленоида

В этом приложении мы проводим математический вывод формулы (1) для индукции магнитного поля на оси конечного соленоида из формулы (4) для индукции магнитного поля на оси кольцевого витка с током.

Рассмотрим рисунок 6, на котором изображено сечение конечного соленоида плоскостью, проходящей через его ось вращения. Здесь ось x декартовой ортогональной системы координат проходит через ось вращения и отрезки AB и CD — сечения тонкого цилиндра плоскостью разреза. Пусть P_1 и P_2 — плоскости, перпендикулярные оси x и пересекающие ось x в точках x_1 и $x_1 + dx_1$ соответственно. Эти две параллельные плоскости вырезают на поверхности цилиндра цилиндр высотой dx_1 , на котором лежит $dN = ndx_1$ витков, по которым течёт кольцевой ток силой

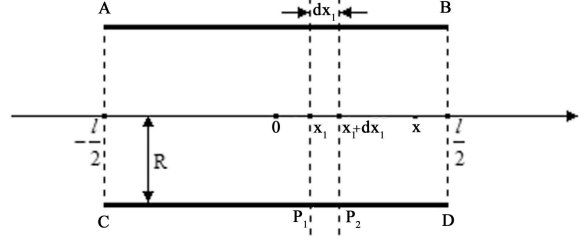


Рис. 6: К объяснению эффекта Холла

$$dI = Indx_1. \quad (28)$$

Этот кольцевой ток с центром в точке x_1 на оси x создаёт в точке с координатой x оси x согласно формуле (4) индукцию магнитного поля

$$dB = \frac{\mu\mu_0 IR^2 ndx_1}{2(R^2 + (x - x_1)^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (29)$$

Интегрируя равенство (29) по координате $x_1 \in [-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$, мы получаем суммарную индукцию магнитного поля, создаваемую всеми витками конечного соленоида в точке на его оси с координатой x

$$B = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\mu\mu_0 IR^2 n}{2(R^2 + (x - x_1)^2)^{\frac{3}{2}}} dx_1. \quad (30)$$

Для вычисления интеграла (30) проведём замену переменных

$$\xi = \frac{x_1 - x}{R} \quad (31)$$

и приведём равенство (30) к виду

$$B = \mu\mu_0 nI \cdot J, \quad (32)$$

где

$$J = \frac{1}{2} \int_{\frac{-\frac{l}{2}-x}{R}}^{\frac{\frac{l}{2}-x}{R}} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (33)$$

Для вычисления интеграла (33) используем замену переменных

$$\xi = \text{sh}(\eta) = \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{2}. \quad (34)$$

Тогда верны равенства

$$\eta = \text{arcsch}(\xi), \quad (35)$$

$$d\xi = \text{ch}(\eta) d\eta, \quad (36)$$

$$1 + \xi^2 = 1 + \text{sh}^2(\eta) = \text{ch}^2(\eta). \quad (37)$$

Подставляя равенства (36 - 37) в интеграл (33), получаем

$$J = \frac{1}{2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\text{ch}(\eta)}{\text{ch}^3(\eta)} d\eta = \frac{1}{2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{1}{\text{ch}^2(\eta)} d\eta = \frac{1}{2} \text{th}(\eta) \Big|_{\eta_1}^{\eta_2} = \frac{1}{2} (\text{th}(\eta_2) - \text{th}(\eta_1)), \quad (38)$$

где

$$\eta_1 = \text{arcsch} \left(\frac{-\frac{l}{2} - x}{R} \right), \eta_2 = \text{arcsch} \left(\frac{\frac{l}{2} - x}{R} \right). \quad (39)$$

Для любого вещественного числа x верно равенство

$$\text{th}(\text{arcsch}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (40)$$

В самом деле, если $y = \text{arcsch}(x)$, то

$$\text{sh}(y) = x \quad (41)$$

и в силу равенства (37) верно равенство

$$\text{ch}(y) = \sqrt{1+x^2}. \quad (42)$$

Из равенств (41, 42) вытекает равенство (40).

Используем равенство (40) для вычисления величины J в равенстве (38):

$$J = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{l}{2} - x}{\sqrt{R^2 + (\frac{l}{2} - x)^2}} + \frac{\frac{l}{2} + x}{\sqrt{R^2 + (\frac{l}{2} + x)^2}} \right). \quad (43)$$

Равенства (32) и (43) доказывают справедливость равенства (1).

9 Приложение 2. Восстановление параметров функциональной зависимости методом наименьших квадратов

Вернёмся к поставленной в разделе 1.3.2 задаче об определении неизвестных параметров a и b известной функции $y = f(x, a, b)$ по приближённым измерениям её

значений y_i при n значениях аргумента x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Нас в первую очередь интересует случай, когда функция

$$y = f(x, a, b) = ax + b, \quad (44)$$

т.е. когда функция $y = f(x, a, b)$ — полином первой степени по своему аргументу x . В этом случае график функции (44) на плоскости (x, y) является прямой линией. Параметр a — тангенс угла наклона прямой, а параметр b — ордината точки пересечения прямой с осью ординат.

Данная задача допускает простую геометрическую интерпретацию (см. рисунок 7). В случае $n = 2$, когда число неизвестных параметров равно числу измерений, на плоскости (x, y) задано 2 разные экспериментальные точки $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$ и требуется найти параметры прямой, которая через них проходит. Поскольку через любые две точки плоскости можно провести единственную прямую, эта задача имеет очевидное единственное решение.

Однако, уже в случае $n = 3$ мы сталкиваемся со следующей трудностью. При фиксированных значениях параметров a и b все точки графика функции (44) лежат на одной прямой. Поэтому все экспериментальные точки $M_i = (x_i, y_i)$ должны были бы лежать на одной прямой. Однако наши измерения проводятся с некоторой погрешностью, поэтому реальные экспериментально измеренные точки $M_i = (x_i, y_i)$ уже не удовлетворяют соотношению (44) с настоящими точными значениями параметров a и b и вообще могут не лежать на одной прямой.

Итак, в случае $n = 3$ и более, вообще говоря, не существует прямой, проходящей через экспериментальные точки $M_1 = (x_1, y_1), M_2 = (x_2, y_2), \dots, M_n = (x_n, y_n)$. Таким образом, наличие погрешности измерений заставляет нас изменить постановку задачи. Мы должны принять во внимание, что если данные измерений известны с погрешностью, то и интересующие нас значения параметров a и b могут быть найдены лишь с некоторой погрешностью. Т.е. по приближённо заданным значениям функции в n точках нам следует искать приближённые значения параметров a и b . Эти приближённые значения мы будем искать, используя метод наименьших квадратов. А именно, если y_i — измеренное с ошибкой в точке $x = x_i$ значение функции $f(x, a, b)$, то вообще говоря, $y_i \neq f(x_i, a, b)$. Составим сумму квадратов разностей отклонений по всем измеренным точкам

$$L(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, a, b))^2 \quad (45)$$

и выберем искомые значения параметров a и b из условия, чтобы сумма (45) была минимальна

$$L(a, b) \rightarrow \min. \quad (46)$$

В случае, когда $n \geq 2$ и функция $f(x, a, b)$ — полином первой степени вида (44), существует единственное значение параметров (a, b) , при котором достигается минимум функции $L(a, b)$. Это значение находится из необходимого условия экстремума

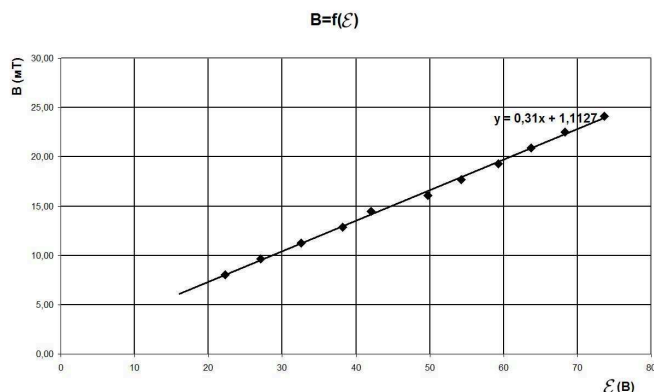


Рис. 7: Построение прямой по методу наименьших квадратов

функции $L(a, b)$. Приравнявая нулю частные производные

$$\frac{\partial L}{\partial a}(a, b) = 0 \quad (47)$$

и

$$\frac{\partial L}{\partial b}(a, b) = 0, \quad (48)$$

мы получаем следующую систему двух линейных уравнений относительно двух неизвестных a и b :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (49)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \quad (50)$$

Решение этой системы имеет следующий вид

$$a = \frac{n \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad (51)$$

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)}{n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \quad (52)$$

Прямая с параметрами a и b , вычисленными по формулам (51, 52) через измеренные значения y_i и x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, называется *прямой, построенной по методу наименьших квадратов*. Формулы (51, 52) мы и будем использовать для обработки наблюдений в данной работе.

Текст данного методического пособия доступен в Интернете на персональной странице профессора Винокурова В.А. для студентов (см. [3]).

10 Литература

- [1] Савельев И.В. Курс физики. Т. 2. М.: "Наука", 1989, глава 6, §§ 35-39, 45,46.
- [2] Методические указания к лабораторным работам по разделу физики "Электромагнетизм II часть". М.: МГАЛП, 1999, стр. 52-59, 68-76.
- [3] Винокуров В.А. Методические указания к лабораторной работе № 92 "Изучение магнитного поля соленоида". Москва. 2007. "<http://sho.narod.ru/lab92.pdf>".