Доклады Академии наук СССР
1991. Том 319, № 4

УДК 518:517.92 **МАТЕМАТИКА**

© В.А. ВИНОКУРОВ

# ЛОГАРИФМ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ФОРМУЛА ХАУСДОРФА И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

*(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 29 V 1991)*

Теория непрерывных групп преобразований — групп Ли является сегодня одним из основных инструментов теоретической и математической физики и механики и активно развивающейся ветвью алгебры. Центральной формулой этой теории является формула Хаусдорфа, устанавливающая связь между группой и алгеброй Ли. Мы предлагаем новый подход к построению теории групп Ли. В данной заметке устанавливается новая простая связь между группами Ли и линейными дифференциальными уравнениями и как следствие получается формула Хаусдорфа в новой форме с простым и явным выражением для членов ряда Хаусдорфа, в то время как ранее известный ряд Хаусдорфа в форме Дынкина "... неудобен для вычислений, поскольку он содержит много неприводимых подобных членов" [1, с. 119]. Каждому линейному обыкновенному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами мы сопоставим некоторую группу Ли, так что законы сохранения у них будут совпадать.

**1.** Построение решения задачи Коши для линейного однородного дифференциального уравнения в $\mathbf{\Lambda}^n$ ($\mathbf{\Lambda} = \mathbf{R}$ или $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}$) вида

$$(1) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

где $t \in [0,T]$, $x(t) \in \mathbf{\Lambda}^n$, $A(t) \in M(n,\mathbf{\Lambda})$ — алгебре квадратных матриц $n \times n$ с элементами из поля $\mathbf{\Lambda}$, сводится к построению решения линейного однородного дифференциального уравнения в алгебре матриц $M(n,\mathbf{\Lambda})$ с единичным начальным условием

$$(2) \quad \dot{X}(t) = A(t)X(t),$$

$$(3) \quad X(0) = E,$$

$X(t) \in M(n,\mathbf{\Lambda})$, ибо $x(t) = X(t)x(0)$. В случае $A(t) = const = A$ решение системы (2), (3) является экспонентой $X(t) = \exp(tA)$, т.е. существует логарифм $\ln(X(t)) = tA$. Вопрос, интересующий нас в этом пункте, — построение $\ln(X(t))$ в общем случае переменной матрицы $A(t)$.

Перейдем к общей постановке задачи. Пусть $\mathbf{A}$ — банахова алгебра над полем $\mathbf{\Lambda}$, где $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{R}$ или $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}$, т.е. $\mathbf{A}$ есть: 1) унитальная алгебра, 2) банахово пространство, 3) норма элемента $\|A\|$, где $A \in \mathbf{A}$ удовлетворяет условиям: $\|E\| = 1$ и $\|A_1A_2\| \le \|A_1\| \cdot \|A_2\|$ при любых $A_1, A_2 \in \mathbf{A}$.

Рассматривается задача Коши (2), (3), где $X(t)$ — неизвестная, а $A(t)$ — заданная функция числового аргумента $t$ со значениями в банаховой алгебре $\mathbf{A}$. Функция $A(t)$ предполагается суммируемой по Бохнеру на $[0,T]$. Поскольку мы не требуем непрерывности функции $A(t)$, то решение системы (2), (3) понимается в интегральном смысле:

$$(4) \quad X(t) = E + \int\limits_0^t A(\tau)X(\tau)\,d\tau, \quad t \in [0,T].$$

Для формулировки результатов введем числа

$$(5)\quad V(n,k)\equiv(-1)^{n-k-1}\frac{(n-k-1)!k!}{n!},$$

определенные при $n\in\mathbf{N},\ k\in\{0,\dots,n-1\}$.

Пусть $\xi\in\mathbf{N}^n,\ \xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$. При данном индексе $i\in\{0,\dots,n-1\}$ говорим, что имеет место *подъём*, если $\xi_{i+1}>\xi_i$, *застой*, если $\xi_{i+1}=\xi_i$, и *спад*, если $\xi_{i+1}<\xi_i$. Введем число подъёмов $u(\xi)$, застоев $\operatorname{rav}(\xi)$ и спадов $h(\xi)$ в данном наборе $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$. По определению это неотрицательные целые числа и при любом $\xi\in\mathbf{N}^n$ верно

$$(6)\quad u(\xi)+\operatorname{rav}(\xi)+h(\xi)=n-1.$$

При каждом натуральном $n\in\mathbf{N}$ определим отображение $\operatorname{val} n:\mathbf{N}^n\to\mathbf{N}$ правилом $\operatorname{val} n(\xi)\equiv V(n,u(\xi))$.

Введём интегральный функционал

$$(7)\quad J_n(t)=\int_0^t\dots\int_0^t \operatorname{val} n(\xi)A(\xi_n)\dots A(\xi_3)A(\xi_2)A(\xi_1)\,d\xi_1d\xi_2\dots d\xi_n,\quad n\in\mathbf{N}.$$

Он равен функционалу

$$(8)\quad J_n(t)=\frac{1}{n}\int_0^t\dots\int_0^t \operatorname{val} n(\xi)[A(\xi_n),\dots[A(\xi_3),[A(\xi_2),A(\xi_1)]]\dots]\,d\xi_1d\xi_2\dots d\xi_n,$$

где $[B,D]=BD-DB$ — коммутатор элементов $B,D\in\mathbf{A}$.

**Теорема 1** *Если* $\int_0^T|A(t)|dt<1$, *то существует единственное непрерывное решение* $X(t)$ *интегрального уравнения (4) и дается формулой*

$$(9)\quad X(t)=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}J_n(t)\right),$$

*где ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}J_n(t)$ *абсолютно суммируем в банаховой алгебре* $\mathbf{A}$, *сходится равномерно по* $t\in[0,T]$ *и величины* $J_n(t)$ *непрерывно зависят от* $t\in[0,T]$.

Итак, в условиях теоремы 1 справедлива *формула**

$$(10)\quad X(t)=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^t\dots\int_0^t \operatorname{val} n(\xi)[A(\xi_n),\dots[A(\xi_3),[A(\xi_2),A(\xi_1)]]\dots]\,d\xi_1d\xi_2\dots d\xi_n\right)$$

для решения задачи Коши (2), (3).

**2.** Получим теперь формулу Хаусдорфа из формулы (10). Для этого возьмем $m$ элементов $A(1),A(2),\dots,A(m)$ банаховой алгебры $\mathbf{A}$ таких, что

$$(11)\quad |A(1)|+|A(2)|+\dots+|A(m)|<1$$

и определим на $[0,m]$ кусочно-постоянную функцию $A(t)\equiv A(i)$ при $t\in]i-1,i]$, где $i\in\{1,\dots,m\}$ и $A(0)\equiv A(1)$. Тогда $X(m)$ по построению равно

$$(12)\quad X(m)=\exp(A(m))\dots\exp(A(2))\exp(A(1)).$$

*Как автору стало известно после представления настоящей статьи, эквивалентная формула получена ранее в статье [3] с другим доказательством.

С другой стороны, применим теорему 1 и получим

(13) $\exp(A(m))\ldots\exp(A(2))\exp(A(1)) = \exp(H(A(1),A(2),\ldots A(m)))$,

где величина $H(A(1),A(2),\ldots A(m))$ есть сумма абсолютно суммируемого в банаховой алгебре $\mathbf{A}$ ряда

(14) $$H(A(1),A(2),\ldots A(m)) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(A(1),A(2),\ldots A(m))$$

с членами

(15) $$H_n(A(1),A(2),\ldots A(m)) \equiv \frac{1}{n}\sum_{i\in(1,\ldots,m)^n} \operatorname{kap} n(i)A[i].$$

Для $i\in(1,\ldots,m)^n,\ i=(i_1,i_2,\ldots i_n)$ полагается

(16) $$\operatorname{kap} n(i) \equiv \int\limits_0^1 \operatorname{val} n(i+\xi)\,d\xi_1 d\xi_2\ldots d\xi_n,$$

$$A[i] \equiv [A(i_n),\ldots[A(i_3),[A(i_2),A(i_1)]]\ldots].$$

Справедливо также равенство

$$H_n(A(1),A(2),\ldots A(m)) \equiv \sum_{i\in(1,\ldots,m)^n} \operatorname{kap} n(i)A(i).$$

где для $i\in(1,\ldots,m)^n$ положено

(17) $A(i)\equiv A(i_n)\ldots A(i_3)A(i_2)A(i_1)$.

Ряд (14) называется *рядом Хаусдорфа.*

Для коэффициентов $\operatorname{kap} n(i)$ при любом $n\in\mathbf{N}$ и любом $i\in(1,\ldots,m)^n$ справедлива оценка

(18) $$|\operatorname{kap} n(i)| \le \frac{1}{n}.$$

Возникает вопрос: какой информации о наборе $i=(i_1,i_2,\ldots i_n)\in\mathbf{N}^n$ достаточно для вычисления коэффициента $\operatorname{kap} n(i)$? Знания одного лишь функционала $u(i)$ — числа подъемов, вообще говоря, недостаточно, а именно требуется, кроме функционала $u(i)$, знание описи. Введём это новое понятие.

**Определение 1** *Описью* $F\equiv((k_1,r_1),(k_2,r_2),\ldots(k_s,r_s))$ *будем называть конечный набор пар натуральных чисел* $(k_\alpha,r_\alpha),\ \alpha\in\{1,\ldots,s\}$, *такой, что* $k_1<k_2<\ldots<k_s$. *Ценой описи* $F=((k_1,r_1),(k_2,r_2),\ldots(k_s,r_s))$ *называется число*

(19) $$\operatorname{pr}(F)\equiv\sum_{\alpha=1}^{s} k_\alpha r_\alpha.$$

Включим во множество описей пустое множество $F=\emptyset$, назвав его пустой описью и положив его цену $\operatorname{pr}(\emptyset)\equiv 0$. По каждой описи $F=((k_1,r_1),(k_2,r_2),\ldots(k_s,r_s))$ построим веерный многочлен по переменной $x$:

(20) $$\operatorname{wer}(F;x)\equiv\prod_{\alpha=1}^{s}(w(x,k_\alpha+1))^{r_\alpha},$$

где многочлен

(21) $$w(x,k)\equiv\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(k-n)!}{k!}S(k,k-n)x^n$$

при $k\in\mathbf{N}$, а $S(k,p)$ — числа Стирлинга второго рода (см. [2, с. 43]). Степень веерного многочлена равна цене описи.

Сопоставим теперь каждому вектору $i\in\mathbf{N}^n$ опись $\operatorname{rer}(i)=((k_1,r_1),(k_2,r_2),\ldots$ $\ldots(k_s,r_s))$ цены, равной числу застоев $\operatorname{rav}(i)$, следующим образом. Выпишем максимальные длины участков застоя в наборе $(i_1,i_2,\ldots i_n)$, т.е. когда $i_\beta=$

$= i_{\beta+1} = \ldots = i_{\beta+p_\beta}$. Получим набор чисел $p_1, p_2, \ldots p_v$, среди которых могут быть совпадающие. Далее возьмем наименьшее из чисел $p_1, p_2, \ldots p_v$ и назовем его $k_1$. Сосчитаем, сколько раз встречается $k_1$ в наборе $p_1, p_2, \ldots p_v$ и назовем это число $r_1$. Далее среди чисел, больших $k_1$, в наборе $p_1, p_2, \ldots p_v$ выберем наименьшее число $k_2$ и сосчитаем, сколько раз оно встречается в наборе $p_1, p_2, \ldots p_v$; получим число $r_2$ и т.д. Получаем опись $\mathrm{rer}\,(i) = ((k_1, r_1), (k_2, r_2), \ldots\ldots (k_s, r_s))$. По построению верно

$$\forall i \in \mathbf{N}^n \quad \mathrm{pr}\,(\,\mathrm{rer}\,(i)) = \mathrm{rav}\,(i).$$

Если $\mathrm{rav}\,(i) = 0$, то $\mathrm{rer}\,(i) = \emptyset$ по определению.

Коэффициенты $\mathrm{kap}\; n(i)$ можно вычислять следующим образом.

**Лемма 1** *Для любого натурального числа $n$ и любого $i \in \mathbf{N}^n$ число $\mathrm{kap}\; n(i)$ равно $n$-му коэффициенту ряда Тейлора аналитической функции $f(x) = (1+x)^{u(i)}\,\mathrm{wer}\,(\,\mathrm{rer}\,(i); x) \ln(1+x)$ с центром в точке $x = 0$.*

В случае умножения двух экспонент $m = 2$ и первые пять членов ряда Хаусдорфа равны соответственно

$$H_1(A(1), A(2)) = A(1) + A(2); \tag{22}$$

$$H_2(A(1), A(2)) = \frac{1}{2}[A(2), A(1)]; \tag{23}$$

$$H_3(A(1), A(2)) = \frac{1}{12}(A[1,2,2] + A[2,1,1]); \tag{24}$$

$$H_4(A(1), A(2)) = -\frac{1}{24}A[1,2,1,2]; \tag{25}$$

$$H_5(A(1), A(2)) = \frac{1}{120}\left(-\frac{1}{6}A[1,2,2,2,2] - A[2,1,1,1,1] + \right. \tag{26}$$

$$\left. + \frac{1}{3}A[1,2,2,2,1] + \frac{1}{3}A[2,1,1,1,2] + A[1,2,2,1,1] + A[2,1,1,2,2]\right).$$

Ряд Хаусдорфа в силу теоремы 1 абсолютно суммируем в области

$$\{(A(1), A(2), \ldots A(m)) \in \mathbf{A}^m \;\Big|\; |A(1)| + |A(2)| + \ldots |A(m)| < 1\} \in \mathbf{A}^m.$$

Для оценки области сходимости сверху заметим, что при $A = M(2, \Lambda)$ ряд Хаусдорфа расходится в точке $A(1) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A(2) = \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$, так, что последовательность $\{H_n(A(1), A(2))\}_{n \in \mathbf{N}}$ его членов не ограничена в $\mathbf{A}$ при $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ и $\lambda_1 \neq 0, |\lambda_2| > 1$.

**3.** Вернёмся к рассмотрению линейного обыкновенного дифференциального уравнения вида (1) в банаховом пространстве $X$ с $t \in J$, где $J \subset \mathbf{R}$— связное подмножество прямой, $x(t) \in X$, $A(t) \in L(X, X)$ — элемент банаховой алгебры линейных непрерывных операторов, отображающих банахово пространство $X$ в себя. Уравнение (1) мы связываем с группами Ли путем рассмотрения уравнения для операторов $W(t,t_1)$, удовлетворяющих уравнению

$$(27)\quad \frac{d}{dt}W(t,t_1) = A(t)W(t,t_1)$$

с начальным условием $W(t_1,t_1) = E$ на замкнутом отрезке, соединяющем точки $t$ и $t_1$ в $J$. Далее для краткости линейное обыкновенное дифференциальное уравнение в банаховой алгебре вида (2) мы называем *лоду.* Предполагается, что функция $A \in L_{loc}(J)$, т.е. локально суммируема на множестве $J$.

Хотя мы рассматриваем одновременно случаи $\Lambda = \mathbf{R}$ и $\Lambda = \mathbf{C}$, алгеброй Ли мы называем подмножество $L \subset \mathbf{A}$ такое, что: 1) $L$ — линейное подпространство над полем $\mathbf{R}$; 2) для любых двух элементов $B, D \in L$ коммутатор $[B,D] \in L$.

Пусть $L \subset \mathbf{A}$ — замкнутая алгебра Ли и $\mathrm{Expm}\,(L)$ — соответствующая ей группа Ли. Нас интересует вопрос: когда все операторы $W(t,t_1) \in \mathrm{Expm}\,(L)$. Оказывается, для получения ответа нужно проверить включения $A(t) \in L$.

**Определение 2** *Алгебра Ли $L \subset \mathbf{A}$ мажорирует функцию $A$, если алгебра Ли $L$ замкнута и $A(t) \in L$ при почти всех $t \in J$.*

Если функция $A$ из класса $L_{loc}(J)$, то существует *наименьшая алгебра Ли, её мажорирующая,* и строится она следующим образом. Будем говорить, что точка $t \in J$ — *точка интегральной гладкости функции* $A$, если

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{t_1}^{t} A(\tau)\,d\tau = A(t).$$

Множество всех точек интегральной гладкости функции $A$ обозначим $J_A \subset J$. Множество $J_A$ полной меры в $J$.

Обозначим $\overline{\mathrm{ali}}\,(A(J_A)) \equiv \overline{\mathrm{ali}}\,(A)$ наименьшую замкнутую алгебру Ли, содержащую множество $A(J_A) \subset \mathbf{A}$, и назовем *алгеброй Ли, порождённой функцией* $A$, или *алгеброй Ли данного лоду.* Соответственно группу Ли $\mathrm{Expm}\,(\overline{\mathrm{ali}}\,(A))$ назовем *группой Ли данного лоду.*

Следующая теорема отвечает на поставленный ранее вопрос о принадлежности $W(t,t_1) \subset \mathrm{Expm}\,(L)$.

**Теорема 2** *Следующие утверждения эквивалентны:*

*(I) Алгебра Ли $L$ мажорирует функцию $A$.*

*(II) Функция $W(t_2,t_1)$ задаёт непрерывное отображение $W : J \times J \to \mathrm{Expm}\,(L)$.*

**4.** Пусть $X, Y$ — банаховы пространства и $\mathbf{A} \subset L(X,X)$ — банахова алгебра, являющаяся подалгеброй банаховой алгебры $L(X,X)$ линейных непрерывных операторов на $X$. Через $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ обозначим группу по умножению обратимых элементов банаховой алгебры $\mathbf{A}$. Если отображение $A : J \to \mathbf{A}$ локально суммируемо, то согласно предыдущему $W(J,J) \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ и $\mathrm{Expm}\,(\overline{\mathrm{ali}}\,(A)) \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$.

**Определение 3** *Функция, действующая из банахова пространства $X$ в банахово пространство $Y$, — закон сохранения для множества $S \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$, если для всякого элемента $x \in D(f)$ и всякого элемента $a \in S$ выполнены требования:*

*1) $ax \in D(f)$;*

*2) $f(ax) = f(x)$.*

Функция $f$ называется *законом сохранения для лоду,* если она — закон сохранения для множества $W(J, J)$. Функция $f$ называется *законом сохранения для группы Ли* $\mathrm{Expm}\,(L)$, если она закон сохранения для множества $\mathrm{Expm}\,(L) \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$.

**Теорема 3** *Пусть функция $f$ имеет открытую или замкнутую область определения и непрерывна на ней, тогда функция $f$ — закон сохранения для лоду тогда и только тогда, когда она закон сохранения для группы Ли данного лоду.*

Итак, построение законов сохранения для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами сводится к построению законов сохранения для групп Ли.

Отдел вычислительной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
29 V 1991

ЛИТЕРАТУРА

1.*Кириллов А.А.* Элементы теории представлений. М.: Наука, 1972. 336 с. 2.*Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963. 287 с. 3.*Strichartz R.S.* — J. of Functional Analysis, 1987, vol. 72, p. 320-345.

## Список литературы


[1] Кириллов А.А. Элементы теории представлений. М.: Наука, 1972. 336с.

[2] Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963. 287 с.

[3] Strichartz R.S. — J. of Functional Analysis, 1987, vol. 72, p. 320-345.