3 Пример с δ-функцией

Пусть $q(x) = c\delta(x - x_0)$, $c \in \mathbf{R}$, $x_0 \in]0, \ell[$, т.е. $\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0, \\ c, & x \geq x_0. \end{cases}$ Тогда интегралы (14) и (15) легко вычисляются и формула (18) принимает вид

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 - c\, y_{n,0}^2(x_0) - \frac{c^2}{n\pi^2}\sin(2\mu_n x_0)\theta\left(\frac{2\pi x_0}{\ell}\right)(1-\cos(2\mu_n x_0)) + \nu'_{n,2}(\sigma), \tag{25}$$

где

$$|\nu'_{n,2}(\sigma)| \leq \frac{c^2(4{,}4 + 467|c|\ell + 2c^2\ell^2)}{(n\pi - \frac{1}{4})^2}. \tag{26}$$

В частном случае $x_0 = \frac{\ell}{2}$ формула (25) принимает вид

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 - c\,\frac{2}{\ell}\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \nu'_{n,2}(\sigma). \tag{27}$$

Нормированная собственная функция $y_n(x)$ имеет вид (21), где

$$y_{n,1,0} = c\sqrt{\frac{2}{\ell}}\{-x\cos(\mu_n x)(1-\cos(2\mu_n x_0)) + \sin(\mu_n x)(\ell - x_0)\sin(2\mu_n x_0) -$$

$$2\ell\eta(x - x_0)\sin(\mu_n(x - x_0))\sin(\mu_n x_0)\},$$

а функция скачка $\eta(x - x_0) \equiv \begin{cases} 0, & x < x_0, \\ 1, & x \geq x_0. \end{cases}$ Итак, верно представление

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + \frac{c}{2n\pi}\sqrt{\frac{2}{\ell}}((\ell - x_0)\sin(2\mu_n x_0)\sin(\mu_n x) - \tag{28}$$

$$(1-\cos(2\mu_n x_0))x\cos(\mu_n x) - 2\ell\sin(\mu_n x_0)\eta(x - x_0)\sin(\mu_n(x - x_0))) +$$

$$\Delta y_n(x),$$

где

$$|\Delta y_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\ell}}\frac{(4{,}1|c|\ell + 256{,}5c^2\ell^2)}{(n\pi - \frac{1}{4})^2}. \tag{29}$$

А в частном случае $x_0 = \frac{\ell}{2}$ верно представление

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) - \frac{c}{2n\pi}\sqrt{\frac{2}{\ell}}((1-\cos(n\pi))x\cos(\mu_n x) + \tag{30}$$

$$2\ell\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\eta\left(x - \frac{\ell}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x - \frac{n\pi}{2}\right)) + \Delta y_n(x).$$