Ограниченная лицензия

на использование файла и текста книги
"Винокуров В.А. Частицы из среды. Москва. 2008."
именуемой далее "Книга", пользователем (далее по тексту "Пользователь").

1. Все авторские права на Книгу принадлежат автору Винокурову В.А. (далее по тексту "Автор").
2. Данная ограниченная лицензия сопровождает каждый законно используемый экземпляр Книги.
3. Данная ограниченная лицензия даёт право на ограниченное использование Книги одновременно одним человеком на одном компьютере.
4. В рамках данной ограниченной лицензии Пользователь имеет право на неограниченное распространение и копирование настоящего файла "vinbook.pdf" Книги. Ни Пользователь, ни какое либо юридическое или физическое лицо не имеют права брать плату за распространение или передачу Книги в любой форме без письменного разрешения автора.
5. В рамках данной ограниченной лицензии не разрешается: проводить копирование и извлечение содержимого, печать Книги целиком или частично, изменять файл или текст.
6. Для других видов использования: на бумажных носителях, на нескольких компьютерах, сетевого, библиотечного, коллективного и т.д. — должна быть получена у Автора особая лицензия.
7. Текст и файлы Книги не могут копироваться, храниться в памяти компьютерных систем или воспроизводиться без лицензии, предоставленной Автором.
8. Допускаются ссылки на формулы, теоремы, леммы и т.д. из Книги вида: "формула (10.4.32) книги "Винокуров В.А. Частицы из среды. Москва. 2008." "
9. Формулы в тексте следует рассматривать как отдельные законченные произведения, авторские права на которые принадлежат Автору. Любые их записи на любых носителях в любых форматах на любых языках следует рассматривать как перевод, если сохраняется функциональная зависимость и физический смысл. Права Автора распространяются и на все производные формулы, полученные из них математическими операциями. Коммерческое использование или воспроизведение указанных формул в текстах, изображениях, компьютерных программах и т.д. возможно только с разрешения Автора.

Винокуров В.А.

В.А.Винокуров

Частицы из среды

Математические методы и модели

Москва
http://vinokurov.tut.su/vinbook.pdf

2008
Версия 3.001

Винокуров В.А.

Частицы из среды. Москва. 2008.

В монографии излагается схема построения динамики частиц и взаимодействий для данной сплошной среды. В предлагаемой модели частицы и их взаимодействия рассматриваются лишь как способ асимптотического описания сплошной среды в ситуации островного типа, когда имеются "островки" возмущений сплошной среды на большом расстоянии друг от друга. Основным результатом является построение электродинамики поля и частиц из одного функционала действия сплошной среды. Основным постулируемым понятием теории является плотность лагранжиана среды. Все остальные физические понятия: массы, энергии, заряда, тока, спина и т.д. — строго определены в данной модели. Получены новые физические эффекты, порождающие принципиально новые технологии получения энергии и перемещения тел в пространстве.

Излагаются новые математические методы, развитые автором для проведения данной схемы.

Книга предназначена для физиков, математиков и инженеров.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга содержит подробное изложение принадлежащей автору теории — *теории конденсации.* Термином "теория конденсации" я назвал схему извлечения дальнодействия точечных частиц из близкодействия сплошной среды. Излагаемый материал по существу следует рассматривать как математическую электродинамику. Автор полностью принимает на себя ответственность за излагаемые результаты и методы, что подчёркивается изложением от первого лица.

Данная книга предлагает читателю:

1) Построение электродинамики точечных частиц как аппроксимации динамики некоторой идеальной сплошной среды.

2) Построение основ теории сплошной среды.

3) Математическую технику. В частности, новое построение теории групп Ли, инвариантов и симметрии. Теорию замены переменных в обобщённых функциях и её применение для вычисления трансформаций Фурье и интегралов и в теории симметрии.

4) Формулы для расчёта движения частиц в электромагнитных полях.

5) Теоретическую схему извлечения свойств точечных частиц и их взаимодействий из свойств сплошной среды.

Структура книги такова. Книга состоит их трёх частей. И хотя отделить физику от математики в данном изложении затруднительно, тем не менее, можно указать разделы, носящие чисто математический характер. Математическими являются часть II и главы 15, 16 из части III.

Часть II посвящена построению групп Ли, инвариантов и симметрии, а главы 15, 16 из части III — замене переменных в обобщённых функциях, повторным обобщённым функциям и симметрии обобщённых функций.

Части I и III являются, в основном, физическими. При этом глава 1 из части I содержит построение основ теории сплошной среды. Формулы электродинамики точечных частиц для расчёта их движения содержатся в главах 17, 18 части III, причём пользователь, заинтересованный только в практическом расчёте траекторий, может ограничиться параграфами 17.2,17.3,18.3,18.7,18.8. Общая схема конденсации изложена кратко в § 0.2 и подробно в главах 3 и 12, общая теория законов сохранения — в главе 14.

Данная книга предназначена, во-первых, для создателей новой техники и технологии. Они найдут в ней:

1) Принципы действия и методы расчёта устройств с использованием электромагнитных полей и динамики частиц, движущихся со скоростями, сравнимыми со скоростью света, т.е. таких устройств как ускорители, излучатели электромагнитных волн и частиц, электронные микроскопы, системы передачи энергии на расстояние и т.д.

2) Новые принципы движения с досветовыми, световыми и сверхсветовыми скоростями, основанные, в частности, на управлении величиной и знаком массы.

3) Новые принципы извлечения энергии, открывающие источники энергии более мощные, чем ядерные.

Данная книга предназначена: для физиков всех уровней, для специалистов по механике сплошных сред, для математиков и специалистов по математической физике, а также для философов, интересующихся естественно-научной картиной мира.

Требуемый уровень подготовки читателя варьируется в зависимости от степени полноты прочтения книги. Для полного прочтения и понимания требуется подготовка на уровне специалиста, ибо автор использует без пояснений математическую технику, которая сегодня не входит в обязательный университетский курс. Однако, для прочтения на уровне пользователя требуется лишь умение разобраться в смысле полученных математических формул.

При чтении рекомендуется сначала ознакомиться с главами 0 – "Введение" и 19 – "Заключение", содержащими изложение сути основной конструкции и её философских и технологических следствий.

Книга разбита на 3 части и 20 глав. Главы разбиты на параграфы. Параграфы разбиты на пункты. В книге используется следующая система нумерации. Главы имеют сплошную нумерацию — с 0 до 19. Параграфы имеют двойную нумерацию —, например, запись "параграф 4.3" означает параграф 3 из главы 4. Пункты имеют тройную нумерацию —, например, запись "п. 4.3.1" означает пункт 1 из параграфа 3 главы 4. Формулы имеют тройную нумерацию —, например, запись "формула 4.3.5" означает формула 5 из параграфа 3 главы 4. Теоремы, леммы, выводы и т.п. имеют тройную нумерацию —, например, запись "лемма 4.3.2" означает лемма 2 из параграфа 3 главы 4.

Оглавление

Глава 0

Введение

§0.1 Континуальные модели

0.1.1 Мир дискретен или непрерывен?

Как одно из ярких впечатлений моего детства помню открытие, что пустота между моим телом и окружающими предметами — стеной, столом, книгой — на самом деле не пустота, а заполнена чем-то материальным — воздухом. Оказалось, что воздух можно почувствовать, когда дует сильный ветер, что он становится твердым, если его накачать в велосипедную шину. Как я обнаружил в зрелом возрасте, это детское впечатление имеет прямое отношение к одной из самых старых физических проблем, а именно к проблеме дискретности или непрерывности мироздания.

В истории науки с древности прослеживаются две метафизические концепции объяснения физического мира: дискретная и непрерывная. В поэме древнеримского поэта Лукреция "О природе вещей" [45], в которой излагаются основные научные представления, распространенные в Римской империи 1 века до нашей эры, говорится о дискретной концепции Эпикура и непрерывной концепции Гераклита. Эпикур полагал, что мир состоит из твердых частичек, между которыми находится пустое пространство. Твердые частички, собираясь вместе, образуют материальные тела. Гераклит полагал, что мир заполнен некой непрерывной субстанцией, которая в некоторых областях сгущается и тем самым образует материальные тела. В семнадцатом веке сторонниками дискретной концепции были атомисты. Представителем непрерывной концепции был Р.Декарт, объяснявший мир взаимодействием вихрей в некоторой сплошной среде.

Во второй половине XIX века Максвелл исходил из представления о материальной среде, заполняющей все пространство и называемой эфиром, при выводе своей системы уравнений электродинамики. При этом он ввел понятие электромагнитного поля для описания деформаций и движений в этой сплошной среде производимых токами и зарядами. Концепции эфира придерживался и Г.Лоренц при объяснении основных электродинамических эффектов в начале двадцатого века.

Двадцатый век сделал теорию электромагнитного поля Максвелла одним из основных столпов науки и технологии, однако изъял из теории Максвелла механическое понимание поля как некой реальной материальной среды, в которой распространяются возмущения. Эфир Максвелла был заменен физическим вакуумом. К концу двадцатого века в целом восторжествовала концепция Эпикура в форме атомистики, хотя в теоретической физике широко используются модели теории поля, как некой непрерывности, соединяющей частицы, но не имеющей вещественного механического характера.

0.1.2 О научных моделях. С современной точки зрения ученый оперирует с моделями реального мира, т.е. используемые им понятия и формулы не есть сам реальный мир, а лишь некоторая его модель. Модель всегда ограничена и потому не совпадает с реальностью и в конечном итоге несовершенна, поскольку всегда существуют явления, которые она не объясняет. Поэтому естественный путь развития науки — усложнение моделей, усложнение их понятийного аппарата и расширение круга объясняемых явлений. Базой развития моделей является расширение человеческого опыта и развитие понятийного аппарата. Основной инструментарий для построения моделей в физике даёт математика. Именно математические модели обеспечивают концентрацию огромных объёмов конкретного научного знания в кратком виде нескольких уравнений и формул.

Таким образом, развитие физики, сложность используемого ей понятийного и аналитического аппарата во многом определяется состоянием математики данного времени, из которой берутся базовые конструкции для построения количественных физических теорий. В этом плане XVII век характеризуется в математике созданием дифференциального и интегрального исчислений функций одного переменного и именно этот математический аппарат стал основой классической механики. И хотя Декарт в эту же эпоху пытался объяснить взаимодействие тел с помощью вихрей в некоторой сплошной среде, его рассуждения не были реализованы в виде аналитических формул, допускающих практические расчеты, в частности, в силу отсутствия математического аппарата для описания сплошных сред. Таким образом, проблема дискретности или непрерывности мира была решена в пользу дискретности, в частности, в силу соответствующего развития математики своего времени. С этой точки зрения, рождение теории электромагнитного поля Максвелла кроме накопления экспериментальных фактов опиралось на развитие таких областей математики, как теория функций многих переменных и теория дифференциальных уравнений в частных производных, предоставивших понятийный и аналитический аппарат для новой модели электромагнетизма.

Математика двадцатого века в форме функционального анализа предоставила для построения физических теорий существенно более глубокий и гибкий аппарат, позволяющий характеризовать физический объект не набором чисел, а набором функций или операторов, что позволяет свободно оперировать континуальными моделями объектов, как это имеет место в квантовой механике.

Следует отметить, что различные модели физических явлений дают разные степени аппроксимации реальности. Развитие и усложнение моделей связано с повышением степени аппроксимации при описании физических явлений. При сравнении моделей одного уровня аппроксимации реальности, ценность модели определяется её простотой, логической стройностью и предсказательной силой.

Модели с разными понятийными системами могут давать правильное описание одного и того же круга явлений. Однако выбор из двух альтернативных моделей делается при встрече с экспериментом, объясняемым одной теорией и противоречащим другой. Модели могут дополнять и порождать друг друга. Например, дискретная атомистическая модель конструирует сплошную среду (газ, жидкость, твердое тело) предельным переходом из ансамбля молекул при увеличении их числа. Естественно поступить и обратным образом — конструировать отдельные частицы из сплошной среды, что и делается в теории конденсации.

Отметим, что в истории человечества одна научная модель нередко господствовала на протяжении столетий. Она пронизывала жизнь нескольких поколений людей, её понятия и термины, её описания мира окружали человека с рождения до смерти и настолько проникали в сознание, что уже не объясняли, а подменяли реальность. Смена моделей при этом происходила чрезвычайно болезненно и небезопасно для авторов новых моделей. В двадцатом столетии процесс смены моделей заметно ускорился, но остался по-прежнему болезненным и трудным для всех его участников. Это объясняется тем, что человек испытывает психологический дискомфорт в ситуациях не объяснимых и непонятных его сознанию, поэтому гносеологические лакуны заполняются мифами, модели ограниченного применения абсолютизируются.

§0.2 Теория конденсации

0.2.1 Частицы из сплошной среды. Теорией конденсации я назвал математическую модель построения дальнодействия точечных частиц из близкодействия сплошной среды. Краткое изложение этой теории опубликовано в брошюре [13]. Термин "конденсация" взят потому, что в данной модели частицы рассматриваются как области сгущения сплошной среды — как бы конденсируются из сплошной среды.

В своих основных физических предпосылках теория конденсации близка к воззрениям Гераклита и Декарта. Отличие заключается лишь в формировании математического аппарата, позволяющего строго определить основные понятия и характеристики частиц и количественно рассчитать их взаимодействие и динамику. Именно усовершенствованный аппарат математики двадцатого века, таких её разделов как обобщённые функции, группы Ли, функциональный анализ, позволил переложить древние философские представления в конкретные математические уравнения и формулы расчета реальных физических явлений.

Основную физическую идею моей теории поясню на примере лодки, находящейся на поверхности озера, на некотором расстоянии от которой прошел теплоход. Хотя теплоход непосредственно не коснулся лодки, созданная им волна через некоторое время толкнет лодку, так что взаимодействие теплохода и лодки осуществляется не непосредственно, а путем передачи возмущения через среду, в которую они погружены. Аналогичным образом воздушная волна, создаваемая одним летящим самолетом, воздействует на другой самолет, причём чем они ближе друг к другу, тем сильнее воздействие. Метеорологи знают, что циклоны и антициклоны в атмосфере Земли оказывают воздействие на движение друг друга и располагают некоторыми рецептами оценки этого воздействия. Заметим, что в последнем случае мы имеем дело с взаимодействием вихрей почти по Декарту.

0.2.2 Идеальная среда. В теории конденсации рассматривается некая сплошная среда, заполняющая бесконечное трехмерное евклидово пространство. Эволюция этой среды рассматривается в обычном времени $t \in \mathbf{R}$, которое одинаково для всех точек пространства. Начальное положение точки среды задаётся её декартовыми координатами — тремя числами $(x_1, x_2, x_3) = \vec{x}$, которые я называю *опорными координатами.* Каждая точка в каждый момент времени занимает некоторое новое положение, которое в декартовой системе координат задаётся тремя числами $(X_1, X_2, X_3) = \vec{X}$ — *текущими координатами* точки. Полное описание среды даётся вектором текущих координат как функции времени и опорных координат точки

$\vec{X} = \vec{X}(t, \vec{x})$, т.е. тремя числовыми функциями от четырех числовых аргументов (время и три пространственные координаты).

Предполагается, что у среды существует некоторое начальное физическое состояние $\vec{X}_0(t, \vec{x}) \equiv \vec{x}$ — состояние покоя всех её точек, которое я называю *опорным состоянием.* Смещения точек среды из опорного состояния характеризуются вектором смещений $\vec{U} \equiv \vec{X}(t, \vec{x}) - \vec{x}$.

Для описания эволюции среды используется лагранжев подход. А именно, для интервала времени $[a, b]$ и пространственного объема V вводится *действие* — интегральный функционал вида

$$L = \int_a^b \iiint_V \mathcal{L}\, dx_1 dx_2 dx_3\, dt, \tag{0.2.1}$$

где $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, \vec{x}, \vec{X}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}, \ldots)$ — функция от $t, \vec{x}, \vec{X}$ и частных производных функции $\vec{X}(t, \vec{x})$, называемая *плотностью функции Лагранжа* или *плотностью лагранжиана.* *Экстремалями* я называю такие функции $\vec{X}(t, \vec{x})$, на которых вариация действия обращается в нуль. Предполагается, что физические состояния среды есть экстремали действия L.

Далее я сужаю класс рассматриваемых моделей и перехожу к рассмотрению идеальной среды, удовлетворяющей трём аксиомам:

I. Плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ является достаточно гладкой числовой функцией $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, \vec{x}, \vec{X}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t})$ от $1 + 3 + 3 + 9 + 3 = 19$ числовых аргументов.

II. Среда стационарна.

III. Среда однородна и изотропна.

Используя технику групп Ли из работы [14], находится общий вид плотности лагранжиана $\mathcal{L}(t, \vec{x}, \vec{X}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t})$ идеальной среды в форме $\mathcal{L} = \varphi\left(g\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)\right)$, где φ — произвольная функция 6 переменных, а $g \equiv (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6)$ — 6 конкретных полиномов от переменных $\frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{x}}$ и $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$.

В рамках используемого лагранжевого подхода вид трёх неизвестных функций $(X_1(t, \vec{x}), X_2(t, \vec{x}), X_3(t, \vec{x})) \equiv \vec{X}(t, \vec{x})$ определяется из системы трёх нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (системы уравнений Эйлера для данной плотности лагранжиана).

Задав положения и начальные скорости всех точек среды в некоторый момент времени и решая систему дифференциальных уравнений динамики, мы однозначно определяем состояние среды в любой последующий момент, т.е. реализуем старый механистический идеал о расчете истории реального мира по его известному начальному состоянию. Указанный прямой способ определения динамики среды сопряжен с двумя трудностями: во-первых, требуется полная информация о функциональных свойствах среды, которая представлена в теории конденсации некоторой числовой функцией от шести числовых переменных — плотностью лагранжиана специального вида; во-вторых, решение нелинейной системы уравнений в частных производных является трудной задачей при современном уровне компьютерной техники.

Здесь следует вспомнить, что, как уже говорилось ранее, мы имеем дело с моделью реального мира определенного уровня точности, а не с его "абсолютно точным" представлением, поэтому и решения уравнений динамики модели требуются нам аппроксимативные, приближающие точные решения с ошибкой такого же порядка величины, с которой мы рассматриваем нашу всегда неточную модель. Вся человеческая деятельность основана на использовании измерений и вычислений конечной точности, с которой согласуется точность используемой модели и точность вычислений при её анализе. Кроме того, при использовании математической модели для анализа физических явлений нам в практических приложениях часто и не требуется полная информация о модели, а достаточно знать лишь некоторые её числовые характеристики, например, интегральные величины энергий, импульсов и зарядов. И здесь мы приходим к понятию частиц, как способа приближенного описания динамики сплошной среды.

0.2.3 Что такое частица в теории конденсации? Понятие частицы в теории конденсации не является первичным и абсолютным. Это вспомогательное понятие, используемое для приближенного асимптотического описания состояний "островного типа" идеальной среды, т.е. таких состояний, когда возмущение среды относительно опорного состояния распадается на конечное число отдельных возмущений, каждое из которых существенно лишь в некоторой ограниченной области. Т.е. в ситуации островного типа мы имеем конечное число "островов" — ограниченных областей пространства, где смещения точек из начальных положений $\vec{U}(t,\vec{x})$ существенны, а во всем остальном пространстве смещения точек малы. По определению, частицей называется такое физическое состояние среды, для которого смещения точек исчезают в пространственной бесконечности:

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \vec{U}(t,\vec{x}) = 0. \tag{0.2.2}$$

В ситуации островного типа мы аппроксимируем физическое состояние идеальной среды конечным числом частиц, соответствующих числу "островов" возмущений и сводим динамику среды к динамике конечного числа частиц.

Понятие частицы вводится в теории конденсации для решения двух задач: 1) для определения асимптотики поля смещений точек среды в пространственной бесконечности; 2) для определения асимптотики взаимодействия двух частиц, когда расстояние между их центрами стремится к бесконечности. Оказывается, при решении этих двух задач нет необходимости знать полную структуру поля смещений идеальной среды, а достаточно лишь знания нескольких числовых параметров кинематического плана — вектора координат центра частицы и вектора скорости частицы и нескольких интегральных числовых характеристик поля частицы. Таким образом, принципиальное математическое упрощение ситуации после аппроксимации поля идеальной среды полем конечного числа частиц заключается в переходе от континуального описания с помощью неизвестных функций к точечному описанию с помощью нескольких неизвестных чисел.

Принципиально важным является требование (0.2.2) исчезновения поля смещений частицы в пространственной бесконечности, понимаемое как стремление к нулю величин смещения, когда расстояние от центра частицы стремится к бесконечности. Данное требование позволяет для построения асимптотики поля в бесконечности и асимптотики взаимодействия двух частиц применить основную идею дифференциального исчисления об аппроксимации функции общего вида линейной функцией при малых изменениях аргумента. Поэтому в областях пространства, где смещения малы, я аппроксимирую уравнения Эйлера идеальной среды линейными уравнениями, что соответствует аппроксимации плотности лагранжиана квадратичным полиномом относительно смещений — квадратизации действия идеальной среды. Квадратизация действия, т.е. переход от действия идеальной среды к его квадратичной аппроксимации, называемой действием Максвелла, с точки зрения математики означает переход от описания свойств среды с помощью некоторой функции шести переменных $\varphi(g)$ к описанию с помощью двух числовых параметров ρ, μ, где ρ имеет смысл плотности массы, а μ — некоторой упругой константы среды. Тем не менее, этого столь радикально упрощенного действия оказывается достаточно для решения поставленных задач о построении асимптотики поля частиц в пространственной бесконечности и асимптотики взаимодействия двух частиц. Более того, полученные на этой основе формулы дают всю известную электродинамику Максвелла электромагнитного поля.

Более подробно аппроксимация действия проводится следующим образом.

0.2.4 Аппроксимация действия. Идеальная среда, вообще говоря, нелинейна. Для рассмотрения малых ее возмущений я аппроксимирую исходную нелинейную среду последовательно линейными средами (средами с линейным уравнением Эйлера) путем аппроксимации их плотности лагранжиана квадратичными плотностями лагранжиана в окрестности опорного состояния. Если $\vec{X}_0 \equiv \vec{x}$ есть опорное состояние, то квадратичное по $\vec{U}(t,\vec{x}) \equiv \vec{X}(t,\vec{x}) - \vec{x}$ приближение к функционалу $L(\vec{X}) - L(\vec{X}_0)$ есть

$$L_{ts}(\vec{U}) = \int\limits_a^b \iiint\limits_V \mathcal{L}_{ts}\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\right) dx_1 dx_2 dx_3\, dt,$$

где плотность лагранжиана

$$\mathcal{L}_{ts}\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\right)^2 - \left[(\mu+\nu)\, div\, \vec{U} + \frac{\mu}{2}\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{3}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}\right)^2 + \right.$$

$$\left. \frac{\chi}{2}(\,div\,\vec{U})^2 + \frac{\nu}{2}\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{3}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\beta} - \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}\right)\right]$$

задаётся четырьмя константами: плотностью среды ρ и упругими константами μ, ν, χ. Далее потребуем, чтобы уравнения Эйлера полученной линейной среды совпали с системой уравнений Максвелла электромагнитного поля и получим ограничения на константы: $\nu = -\mu, \chi = -\mu$. Для сокращения последующих выкладок введём константу $c \equiv \sqrt{\mu/\rho}$ и величину $x_0 \equiv ct$, нормируем действие на μ и получим следующую плотность лагранжиана:

$$\mathcal{M}\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0}\right)^2 - (\,rot\,\vec{U})^2\right) + \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{3}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\beta} - \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta},$$

которую я называю *плотностью лагранжиана Максвелла*, соответствующее действие — *действием Максвелла*, а саму сплошную среду — *средой Максвелла.*

Перед подробным изучением среды Максвелла делается два упрощающих шага. Во-первых, вводится *укороченный лагранжиан Максвелла* с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{M}s\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0}\right) \equiv \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0}\right)^2 - (\,rot\,\vec{U})^2\right)$$

и показывается, что для действия, рассматриваемого на всем пространстве $\mathbf{R}^3$, в классе функции $\vec{U}(t,\vec{x})$, удовлетворяющих условию убывания в пространственной бесконечности вида $|\vec{U}(x_0,\vec{x})| = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)$, действие Максвелла и укороченное действие Максвелла совпадают. Таким образом, изучение экстремалей действия Максвелла сведено к изучению экстремалей укороченного действия Максвелла. Во-вторых, вводится операторная замена переменных $\vec{U} = Bu$, т.е. 3-вектор-функция $\vec{U}(x_0,\vec{x})$ выражается через новую 4-вектор-функцию $u(x_0,\vec{x}) = (u_0(x_0,\vec{x}), u_1(x_0,\vec{x}), u_2(x_0,\vec{x}), u_3(x_0,\vec{x})) = (u_0(x_0,\vec{x}), \vec{u}(x_0,\vec{x}))$ по формуле

$$\vec{U}(x_0,\vec{x}) = \vec{u}(x_0,\vec{x}) - \mathit{grad} \int_{c_0}^{x_0} u_0(x_0,\vec{x})\, dx_0$$

Тогда

$$\mathcal{M}s(Bu) = \mathcal{N}(u),$$

где $\mathcal{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ — *плотность лагранжиана Лоренца*

$$\mathcal{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,\,j,\,r,\,l=0}^{3} \left(-\theta^{rl}\theta_{ij} + \theta^r_j \theta^l_i\right) \frac{\partial u_r}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j}$$

и

$$\theta^i_j \equiv \theta^{ij} \equiv \theta_{ij} \equiv \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j = 0, \\ -1, & i = j \neq 0. \end{cases} \tag{0.2.3}$$

Изучение действия Максвелла $M(\vec{U})$ сведено таким образом к изучению *действия Лоренца* $N(u)$.

В результате проведенных построений получена аппроксимация действия идеальной среды $L(\vec{X})$ действием Лоренца $N(u)$, где $\vec{X} = \vec{U} + \vec{X}_0$, $\vec{U} = Bu$, $\vec{X}_0 \equiv \vec{x}$. Она имеет вид

$$L\left(\vec{U} + \vec{X}_0\right) - L\left(\vec{X}_0\right) = \frac{\mu}{c} N(u) + W,$$

где

$$N(u) = \int_{ca}^{cb} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_0 \tag{0.2.4}$$

— квадратичный функционал, а W — функционал третьего порядка малости по u при $u \to 0$. (Здесь и далее $x \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3)$).

Итак, для достаточно малых смещений $\vec{U}$ изучение общего функционала действия $L(\vec{X})$ сведено к изучению квадратичного функционала действия $N(u)$ с ошибкой третьего порядка малости по смещениям.

0.2.5 Об основных свойствах частицы. С интуитивной точки зрения понятие частицы наделяется двумя свойствами: 1) локальностью, 2) стационарностью, т.е. сохранением свойств и формы во времени. И если первое из этих свойств зафиксировано в определении частицы как требование исчезновения смещений в пространственной бесконечности, то второе свойство вводится в виде некоторого дополнительного требования "агвидности" частицы. Требование агвидности выделяет волновые решения уравнений движения и аналогично квантовомеханическому рассмотрению частицы как волны. Введение агвидных частиц не является произволом автора, а получается из рассмотрения вопроса о том, как преобразуется стационарная покоящаяся частица, когда ей сообщается движение. Что в свою очередь, определяется группой инвариантных преобразований квадратичного действия (действия Максвелла).

Дело в том, что среда, описываемая действием Максвелла, обладает тем свойством, что если в ней существовала покоящаяся частица, т.е. система смещений и движений точек среды из положения покоя, центр которой покоится, то существует некоторое линейное преобразование — преобразование Пуанкаре, которое переводит эту частицу в другое состояние, в котором уже центр частицы движется прямолинейно и равномерно. При таком преобразовании изменяется характер движения точек среды, отклонения которых от равновесия и формирует частицу в нашем смысле.

С точки зрения наглядного представления при переходе частицы из состояния покоя в состояние движения происходит перестройка её структуры и характера движения точек. Частица сплющивается в направлении движения и замедляются скорости движения её точек относительно положения равновесия. Процесс перестройки структуры происходит и при изменении скорости частицы, что вполне аналогично перестройке волнового поля на поверхности воды при изменении скорости движения корабля, или перестройке поля деформаций окружающего воздуха при изменении скорости движения самолета. Соответствующие линейные преобразования поля смещений среды находятся из условия инвариантности квадратичного действия, т.е. из того условия, чтобы действие Максвелла, как интеграл, учитывающий смещения всех точек среды во все моменты времени, не изменило своей величины после замены исходного состояние на преобразованное. Оказывается, знания квадратизированного действия — действия Максвелла и его группы инвариантных преобразований достаточно для построения всей современной электродинамики частиц и их взаимодействий.

Перейдём к аналитическому изложению предыдущих соображений.

0.2.5.1 Свойства инвариантности действия Лоренца.

Действие Лоренца вида

$$N(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\, dx_1 dx_2 dx_3\, dx_0 \tag{0.2.5}$$

допускает 10-параметрическую группу преобразований вида

$$T_p(u) \equiv G^\top u(G(x-a)), \qquad G \in \Omega(\Theta), \qquad a \in \mathbf{R}^4,$$

переводящих функции $u(x)$, исчезающие в пространственной бесконечности, в функции, исчезающие в пространственной бесконечности, и оставляющих неизменным величину функционала (0.2.5). Здесь используются следующие обозначения: $\Omega(\Theta)$ — множество всех действительных матриц G размера 4×4, удовлетворяющих условию

$$G^\top \Theta G = \Theta$$

с матрицей Θ вида (0.2.3), p — элемент группы Пуанкаре преобразований пространства $\mathbf{R}^4$, задаваемый матрицей $G = G(p) \in \Omega(\Theta)$ и вектором $a = a(p) \in \mathbf{R}^4$. Т.е. преобразования T_p образуют линейное представление группы Пуанкаре P преобразований пространства $\mathbf{R}^4$. Уравнения Эйлера для действия Лоренца $N(u)$ имеют вид

$$Au = 0, \tag{0.2.6}$$

где A — линейный дифференциальный оператор второго порядка, переводящий 4-функции $u(x)$ в 4-функции $j(x)$ вида

$$(Au)_r \equiv \sum_{i,\,j,\,l=0}^{3} \left(\theta^{rl}\theta_{ij} - \theta_j^r\theta_i^l\right) \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad r \in \overline{0,3}. \tag{0.2.7}$$

Оператор A я называю *базовым оператором системы.*

Экстремали действия Лоренца являются решениями уравнения Эйлера (0.2.6), но не соответствуют, вообще говоря, физическим состояниям среды. 4-функции $u(x)$, соответствующие физическим состояниям среды таковы, что 3-функция $\vec{X}(t,\vec{x})$, построенная по функции смещения $\vec{U}(x_0,\vec{x}) = Bu$ является экстремалью исходного действия идеальной среды, но применяя к ним оператор A, я получаю 4-функцию $j \equiv Au$, вообще говоря, не равную нулю. 4 -функцию $u(x)$ я называю *4 -функцией (функцией) состояния*, а 4 -функцию $j(x)$ — *4 -функцией (функцией) тока.* Из вида (0.2.7) базового оператора A следует, что функция тока удовлетворяет уравнению

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial j_k}{\partial x_k}(x) = 0. \tag{0.2.8}$$

Я называю компоненту $j_0(x)$ *плотностью заряда*, а 3 -вектор $\vec{j} \equiv (j_1, j_2, j_3)$ — *плотностью тока.* Тогда соотношение (0.2.8) интерпретируется как уравнение непрерывности или как закон сохранения заряда в дифференциальной форме.

Замечание 0.2.1 *При данном выборе базового оператора и плотности заряда заряд электрона будет положительным.*

0.2.5.2 Состояния частицы.

Пусть u — функция состояния и $j = Au$ — соответствующая функция тока. Подвергнем функцию состояния u преобразованию T_p и получим новую функцию $\tilde{u} \equiv T_p u$. Возникает вопрос: как связаны соответствующие функции тока $j = Au$ и $\tilde{j} = A\tilde{u}$. Оказывается $\tilde{j} = \tilde{T}_p j$, где преобразование $\tilde{T}_p$ имеет вид

$$\left(\tilde{T}_p j\right)(x) = G^{-1} j\left(G(x-a)\right),$$

если преобразование Пуанкаре $p \in P$ задаётся парой $G \in \Omega(\Theta)$, $a \in \mathbf{R}^4$. Преобразования $\{\tilde{T}_p\}_p \in p$ также образуют группу преобразований, являющихся линейным представлением группы Пуанкаре P.

Пусть функция $u(x)$ соответствует некоторому физическому состоянию идеальной среды, т.е. $\vec{X} = Bu + \vec{x}$ есть с точностью до нормировки переменных экстремаль действия идеальной среды L. Тогда функция $\tilde{u} = T_p u$, вообще говоря, уже не будет соответствовать физическим состояниям идеальной среды, так как преобразование T_p оставляет инвариантным действие Лоренца, но, вообще говоря, не действие идеальной среды. Однако, с точки зрения аппроксимации, функция смещения $\tilde{\vec{U}} = B\tilde{u}$ остается достаточно хорошей аппроксимацией некоторого нового физического состояния, ибо новая 4-функция тока $\tilde{j} = A\tilde{u} = \tilde{T}_p j$ сохраняет те же свойства малости и убывания в пространственной бесконечности, что и исходная функция тока j. Поэтому функции $T_p u$ я называю соответствующими различным физическим состояниям частицы, когда p пробегает связную компоненту единицы P_e группы Пуанкаре P.

Я прихожу к квазистационарному описанию частицы, т.е. преполагаю, что её различные физические состояния хорошо аппроксимируются (и поэтому заменяются в модели) состояниями вида

$$\tilde{u} = T_p u, \tag{0.2.9}$$

$p \in P_e$ и вся эволюция частицы состоит лишь в изменении параметра p в представлении (0.2.9) как функции времени x_0. Итак, динамика частицы сводится к изучению зависимости параметра $p \in P_e$ от времени x_0. Т.е. я получаю динамику точки на связной компоненте единицы P_e группы Пуанкаре. Состояния частицы нумеруются элементами p группы Пуанкаре. Состояние, в котором элемент p равен единичному элементу e, я называю *стандартным.*

0.2.5.3 Агвиды.

Сузим класс функций состояния $u(x)$ следующим образом. Пусть функция $u(x)$ есть 4-функция от 4-вектора x, определенная на $\mathbf{R}^4$, т.е. отображение $u : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$. Если существуют отображение $uf : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ и вектор $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$, такие что

$$u(x) = uf(\vec{x} - \vec{l}x_0),$$

то отображение $u(x)$ я называю *агвидным.* Далее в этом параграфе рассматриваются лишь агвидные функции состояния и соответствующие частицы называются *агвидными.* Нетрудно видеть, что агвидная частица есть частица-волна, т.е. возмущение, распространяющееся с постоянной скоростью $\vec{l}$. Далее агвидную функцию состояния я буду записывать в виде

$$u(x) = uf(\vec{x} - \vec{b}(x_0)),$$

где $\vec{b}(x_0)$ — определенный некоторым образом центр частицы, например, зарядовый центр. При этом $\frac{d}{dx_0}\vec{b}(x_0) = \vec{l}$ и предполагается, что функция трёх переменных $uf(\vec{x})$ имеет центр в нуле. Аналогичное представление через функцию от трёх переменных будет верно и для соответствующей функции тока

$$j(x) = jf(\vec{x} - \vec{b}(x_0)).$$

Всюду далее для агвидных функций переход от функции четырех аргументов $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3$ к соответствующей функции трёх аргументов $x_1,\ x_2,\ x_3$ я обозначаю добавлением буквы f к символу функции.

Правила преобразования функций $u(x)$ и $j(x)$ влекут правила преобразования функций $uf(\vec{x})$ и $jf(\vec{x})$. Какой вид имеют эти последние правила?

Введём 4-вектор скорости частицы $l \equiv (\frac{1}{\vec{l}})$, добавляя к пространственным компонентам скорости единицу как нулевую компоненту. Для преобразования Пуанкаре $p \in P_e$ его действие на точку $x \in \mathbf{R}^4$ будет записываться в виде

$$p(x) = G(x - a), \qquad G \in \Omega_e(\Theta), \qquad a \in \mathbf{R}^4,$$

где $\Omega_e(\Theta)$ — связная компонента единицы группы Лоренца. Всякая матрица $G \in \Omega_e(\Theta)$ может быть записана с помощью вектора $\vec{\beta} \in \mathbf{R}^3$, такого, что $|\vec{\beta}| < 1$ и ортогональной матрицы $Q \in SO(3)$ в виде

$$G = G_t G_s, \tag{0.2.10}$$

где G_t, G_s — матрицы 4×4. Матрица

$$G_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \qquad (0.2.11)$$

Матрица

$$G_t = \begin{pmatrix} \xi_0 & -\vec{\xi}^\top \\ -\vec{\xi} & B \end{pmatrix}, \qquad (0.2.12)$$

где $\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\quad \vec{\xi} = \frac{\vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\quad \beta \equiv |\vec{\beta}|$, и B — матрица 3×3 с элементами

$$b_{\psi\alpha} = \delta_{\psi\alpha} + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \frac{\beta_\psi \beta_\alpha}{\beta^2}; \qquad \psi, \alpha \in \overline{1,3}.$$

Представление (0.2.10) я буду называь *левым представлением* матрицы Лоренца G.

Введём матрицу

$$R \equiv \left(E + \vec{l} \cdot \vec{\beta}^\top \right) BQ \qquad (0.2.13)$$

с определителем

$$\det(R) = \langle l, \xi \rangle \equiv \sum_{i=0}^{3} l_i \xi_i.$$

Тогда, если $\tilde{u} = T_p(u)$ и $\tilde{j} = \tilde{T}_p(j)$, то

$$\widetilde{uf}(\vec{x}) = G^\top uf(R\vec{x}),$$

$$\widetilde{jf}(\vec{x}) = G^{-1} jf(R\vec{x}).$$

4-вектор скорости преобразуется по правилу

$$\tilde{l} = \frac{1}{(G^{-1}l)_0} G^{-1} l,$$

откуда следует, что

$$\langle \xi, l \rangle^2 \left(1 - \tilde{\vec{l}}^2 \right) = 1 - \vec{l}^2$$

и, в частности, величина $1 - \vec{l}^2$ имеет один и тот же знак во всех состояниях частицы. Поэтому все частицы разбиваются на три класса: 1) *досветовые* — при $1 - \vec{l}^2 > 0$, 2) *световые* — при $1 - \vec{l}^2 = 0$, 3) *сверхсветовые* — при $1 - \vec{l}^2 < 0$.

Функцию состояния $u(x)$ я называю *лоренцевой*, если выполнено условие

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_0} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = 0.$$

Для лоренцевых агвидных частиц при соблюдении некоторых условий регулярности между функциями состояния $uf(\vec{x})$ и функциями тока $jf(\vec{x})$ имеет место взаимнооднозначное соответствие.

В каждом состоянии введём матрицу 4×4 вида

$$D \equiv \begin{pmatrix} 1 & -\vec{l}^\top \\ -\vec{l} & E_3 \end{pmatrix},$$

где $\vec{l}$ — скорость частицы в данном состоянии, E_3 — единичная матрица 3×3, и введём функцию *квазитока*

$$jt \equiv Dj. \tag{0.2.14}$$

При изменении состояния функция квазитока преобразуется по правилам

$$\widetilde{jtf}_0 = \det\left(R^{-1}\right) jtf_0(R\vec{x}), \tag{0.2.15}$$

$$\widetilde{\overrightarrow{jtf}}(\vec{x}) = R^{-1}\overrightarrow{jtf}(R\vec{x}). \tag{0.2.16}$$

Таким образом, плотности *квазизаряда* jtf_0 и 3-квазитока $\overrightarrow{jtf}$ преобразуются независимо. Кроме того, если в одном состоянии плотность квазиряда (3-квазитока) равна нулю, то она равна нулю во всех состояниях. Поэтому я ввожу понятие *квазикиперной* частицы, у которой плотность квазизаряда $jtf_0(\vec{x}) = 0$ и *скалярной* частицы, у которой плотность 3-квазитока $\overrightarrow{jtf}(\vec{x}) = 0$.

Закон сохранения заряда, справедливый для любой функции тока $j(x)$ влечет для 3-функции квазитока $\overrightarrow{jtf}(\vec{x})$ соотношение

$$div\,(\overrightarrow{jtf})(\vec{x}) = 0,$$

откуда следует существование *спиновой* функции $\overrightarrow{sf}(\vec{x})$, такой, что

$$\overrightarrow{jtf}(\vec{x}) = rot\,(\overrightarrow{sf})(\vec{x}). \tag{0.2.17}$$

Заряд частицы и *спин* в данном состоянии определяются соответственно формулами

$$e \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} j_0(x)\,dx_1dx_2dx_3, \tag{0.2.18}$$

$$\vec{S} \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \vec{s}(x)\,dx_1dx_2dx_3. \tag{0.2.19}$$

Заряд e агвидной частицы постоянен во времени и не зависит от состояния частицы, а спин $\vec{S}$ — постоянен во времени, но зависит от состояния частицы.

Каждая несветовая лоренцева агвидная частица однозначно разлагается на сумму скалярной и квазикиперной частиц.

Для досветовой частицы условие агвидности эквивалентно существованию *состояния покоя*, в котором 4-функция тока $j(x)$ не зависит от времени x_0.

Скалярность частицы означает, что функция тока имеет вид $j(x) = lj_0(x)$, где l — 4-вектор скорости.

Досветовая агвидная частица квазикиперна тогда и только тогда, когда у неё в состоянии покоя плотность заряда равна нулю, $j_0(x) = 0$.

Функция квазитока jt обладает тем преимуществом перед функцией тока j, что её временная и пространственные компоненты при изменении состояния преобразуются независимо согласно формулам (0.2.15), (0.2.16). Однако переход от функции тока к функции квазитока обладает тем недостатком, что при $|\vec{l}| = 1$ матрица D в формуле (0.2.14) вырождена, ибо $\det(D) = 1 - |\vec{l}|^2$, и величина j не выражается через величину jt. Поэтому я ввожу 4-функцию псевдотока js, состоящую из плотности заряда $js_0 \equiv j_0$ и 3-вектора квазитока $\overrightarrow{js} \equiv \overrightarrow{jt}$. Тогда

$$js = Aj,$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \quad 0 \quad 0 \\ -\vec{l} & E_3 \end{pmatrix},$$

и

$$j = A^{-1} js,$$

где

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \quad 0 \quad 0 \\ \vec{l} & E_3 \end{pmatrix}.$$

Преобразование функции псевдотока jsf происходит уже по правилам

$$\widetilde{jsf}_0 = (\det(R))\, jsf_0\,(R\vec{x}) + \langle \vec{\xi}, \overrightarrow{jsf}\,(R\vec{x})\rangle,$$

$$\widetilde{\overrightarrow{jsf}}(\vec{x}) = R^{-1}\overrightarrow{jsf}\,(R\vec{x})\,.$$

0.2.5.4 Об основных понятиях теории конденсации.

Действие, функция Лагранжа, масса. Первым и главным понятием теории конденсации является интегральный функционал действия (0.2.1). Величина действия имеет размерность энергии, умноженной на время. Для каждого состояния среды $\vec{X}(t,\vec{x})$ вычисляется одно число L, зависящее от положений, скоростей и относительных деформаций всех элементов среды во все моменты времени в виде интеграла от функции $\mathcal{L}(t,\vec{x},\vec{X},\frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{x}},\frac{\partial \vec{X}}{\partial t})$ (плотности лагранжиана), задающей свойства среды, по пространству и времени. Полученное сопоставление каждому состоянию среды $\vec{X}(t,\vec{x})$ определенного числа L — величины действия в этом состоянии — называется функционалом действия. Теория конденсации достигает идеала научной теории дедуктивным характером построения, ибо после введения и определения плотности лагранжиана и действия среды все остальные физические понятия и формулы теории извлекаются из функционала действия формальными математическими процедурами.

Важным теоретическим моментом данной математической модели является признание её аппроксимативного характера и сознательное введение последовательности величин, аппроксимирующих теоретические величины более высокого уровня. Так, наряду с действием идеальной среды L вводится его квадратичная аппроксимация M — действие Максвелла и вводится конденсированное действие, получаемое, в свою очередь, аппроксимацией действия Максвелла. Из действия Максвелла формальной математической процедурой построения уравнений Эйлера по данному функционалу получается система уравнений Максвелла электромагнитного поля. В качестве инвариантных преобразований действия Максвелла получаются преобразования Пуанкаре состояний среды.

По своему происхождению действие в теории конденсации является обобщением понятия действия для конденсированной, т.е. состоящей из материальных точек, классической механической системы. В последнем случае действие есть интеграл по времени

$$L = \int_a^b (n_k - n_p)\, dt$$

от разности кинетической n_k и потенциальной n_p энергий системы. При этом величина $n = n_k - n_p$, стоящая под знаком интеграла по времени, называется в физике *функцией Лагранжа* системы или лагранжианом. В теории конденсации функция Лагранжа имеет более сложный вид и не сводится к разности кинетической и потенциальной энергий. Величина функции Лагранжа принимается в моей теории за массу системы. Оказывается, так определенная величина массы в случае покоящейся частицы совпадает с её классическим значением. Кроме того, в случае системы из нескольких частиц, описывающей ситуацию островного типа, масса системы равна сумме масс частиц, к которой добавлены с определенным знаком члены, содержащие энергии парных взаимодействий частиц. Масса частицы или системы явно вычисляется в теории конденсации через смещения $\vec{U}(t, \vec{x})$ точек среды. Формула для прямого вычисления массы данного состояния среды через смещения её точек является принципиально новым результатом теории.

Здесь целесообразно напомнить, что масса тела является одним из первичных понятий классической механики, введенным в XVII веке как числовой коэффициент пропорциональности между вектором силы и вектором ускорения тела. Масса тела в классической механике есть его характеристическая числовая константа, не зависящая от скорости движения и вида действующих на тело сил. В конце XIX века использование классического понятия массы для описания движения заряженной частицы в электрическом и магнитных полях встретило трудности, для преодоления которых физики ввели зависимость массы частицы от её скорости, а также продольную и поперечную массы. Таким образом, из абсолютной числовой константы, характеризующей данную частицу, масса, во-первых, стала функцией скорости, а, во-вторых, из скаляра, не зависящего от направления, превратилась в систему числовых величин, зависящих от направления, или тензор на математическом языке. В моей теории масса снова становится скаляром или числовой величиной, хотя в отличие от классического понятия эта величина принципиально зависит от состояния системы и, в частности, от её скорости.

Заряды и токи. Следующий естественно возникающий вопрос: как в механической системе, состоящей из движущихся элементов среды, возникают заряды и токи, и что это такое? В данной модели заряды и токи возникают как следствие нелинейности среды или, точнее говоря, как следствие неквадратичности функционала действия идеальной среды. Здесь принципиально важно понимание аппроксимации, которую мы сделали, перейдя от исходного действия к его квадратичному приближению — действию Максвелла. Дело в том, что уравнения Эйлера — уравнения движения для действия Максвелла — являются системой линейных дифференциальных уравнений для вектора смещений точек среды. Но поскольку эти линейные уравнения движения построены не для исходного точного идеального действия L, а для его квадратичного приближения M, то они не будут, вообще говоря, выполняться для функций смещения точек идеальной среды. И вот, то насколько эти уравнения не выполняются, или, как говорят математики, "невязка" этих уравнений и даёт 4-мерный вектор плотности тока $j(x) = \begin{pmatrix} \rho(x) \\ \vec{j}(x) \end{pmatrix}$, состоящий из скалярной функции плотности заряда $\rho(x)$ и 3-вектора плотности тока $\vec{j}(x)$ системы.

Заряд, спин и другие характеристики частицы. При математическом описании, движения точек среды раскладываются на потенциальные и вихревые. Соответственно вектор невязок представляется как сумма потенциальной части, задаваемой плотностью зарядов, и вихревой части, задаваемой плотностью токов. Потенциальные движения точек среды связаны с электрическим, а вихревые — с магнитным полем.

Интегрируя плотность заряда частицы $\rho(x_0, \vec{x})$ по всему пространству $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$, мы получаем заряд частицы e — формула (0.2.18). Заряд частицы является константой, характеризующей её при взаимодействиях с другими частицами.

Вихревая составляющая плотности тока такова, что интеграл от неё по всему пространству равен нулю. Но она выражается через некоторую векторную функцию $\vec{s}(x)$, называемую спиновой функцией (см. формулу (0.2.17)). Интеграл же от спиновой функции по всему пространству даёт, вообще говоря, ненулевой вектор $\vec{S}$, а именно, вектор спина частицы, пропорциональный магнитному моменту вихревой составляющей тока частицы. Таким образом, каждая частица характеризуется кроме значения скалярной характеристики — заряда e — значением векторной характеристики — спина $\vec{S}$. Спин также характеризует взаимодействия частицы с другими частицами. Заряд и спин выражаются через интегралы специального вида или, как говорят математики, через моменты заряда и тока, соответственно нулевого и первого порядка. Аналогичным образом определяются дипольный момент частицы и другие моменты первого, второго и более высоких порядков, которые дают физические характеристики частицы, проявляющиеся в её взаимодействиях. Чем выше порядок момента, тем слабее его вклад во взаимодействие.

0.2.6 Процедура конденсации. Итак, для достаточно малых возмущений сплошной среды введены две аппроксимации: 1) исходное действие идеальной среды аппроксимировано квадратичным действием Лоренца; 2) физические состояния среды аппроксимированы с помощью 4-функций состояния вида $T_p(u)$, где u — 4-функция стандартного состояния, p — элемент связной компоненты единицы P_e группы Пуанкаре.

Пусть u' и u'' — две 4-функции состояния, соответствующие двум физическим состояниям идеальной среды. Тогда их сумма $u' + u''$, вообще говоря, уже не будет соответствовать физическому состоянию идеальной среды в силу, вообще говоря, неквадратичности действия идеальной среды L. Для действия же Лоренца N в силу его квадратичности сумма двух экстремалей — снова экстремаль. Я делаю следующее *предположение аппроксимации* — считаю, что сумма

$$u = T_{p'}(u') + T_{p''}(u'') \tag{0.2.20}$$

даёт аппроксимацию экстремали идеальной среды, если параметры p', $p'' \in P_e$ взяты из условия экстремальности действия Лоренца $N(u)$.

Рассмотрим действие Лоренца (0.2.4). Внутренний интеграл по пространству даёт функцию Лагранжа

$$n(u) \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx_1 dx_2 dx_3. \tag{0.2.21}$$

Введём билинейный функционал $\mathrm{ni}\,(u', u'')$ вида

$$\mathrm{ni}\,(u', u'') \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \sum_{i,\,j,\,r,\,l=0} (-\theta^{kl}\theta_{ij} + \theta^k_j \theta^l_i) \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u''_l}{\partial x_j}\, dx_1 dx_2 dx_3. \tag{0.2.22}$$

С его помощью для функции Лагранжа справедливо представление:

$$n(u' + u'') = \frac{1}{2}\ \mathrm{ni}\,(u', u') + \ \mathrm{ni}\,(u', u'') + \frac{1}{2}\ \mathrm{ni}\,(u'', u'').$$

Величину

$$m(u) \equiv \frac{1}{2}\ \mathrm{ni}\,(u,u) = n(u)$$

я называю *массой* частицы (системы) с функцией состояния u. Таким образом масса есть значение функции Лагранжа (0.2.21) в данном состоянии. Функционал $\mathrm{ni}\,(u', u'')$ я называю *функционалом взаимодействия.*

Взяв стандартные состояния двух частиц u' и u'' и вычисляя функцию Лагранжа $n(u)$ согласно (0.2.20, 0.2.21), получим функцию Лагранжа

$$n = m(x_0, p', u') + \ \mathrm{ni}\,(x_0, p', p'', u', u'') + m(x_0, p'', u'') \tag{0.2.23}$$

как функцию элементов p' и p'' группы P_e. Далее для векторов центров частиц $\vec{b}'(x_0)$ и $\vec{b}''(x_0)$ я рассматриваю вариационную задачу с закрепленными концами для функционала

$$L = \int_{ac}^{bc} (m(x_0, p') + \ \mathrm{ni}\,(x_0, p', p'') + m(x_0, p''))dx_0.$$

Выражая скорости частиц $\frac{d}{dx_0}\vec{b}'(x_0)$ и $\frac{d}{dx_0}\vec{b}''(x_0)$ через параметры p', p'' соответственно, я прихожу затем к системе уравнений Эйлера для построенной вариационной задачи.

Для агвидной части масса равна

$$m = m_0\sqrt{|1 - |\vec{l}|^2|},$$

где m_0 — константа, $\vec{l}$ — вектор скорости частицы.

Для агвидных лоренцевых частиц, обладающих некоторыми свойствами регулярности поведения функции $uf(\vec{x})$, — "натуральных" частиц в моей терминологии — функционал взаимодействия

$$\mathrm{ni}\,(u', u'') = \ \mathrm{nit}\,(\vec{b}'' - \vec{b}'), \tag{0.2.24}$$

где $\mathrm{nit}\,(\vec{y})$ — функция, определенная на $\mathbf{R}^3$, трансформация Фурье которой равна

$$\begin{aligned} \widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta}) = \Big((\vec{\eta}^2 - \langle \vec{l}', \vec{\eta}\rangle\langle \vec{l}'', \vec{\eta}\rangle)\langle \widehat{jf}'(\vec{\eta}), \Theta\widehat{jf}''(-\vec{\eta})\rangle - \\ - \langle \vec{l}'' - \vec{l}', \vec{\eta}\rangle^2 \widehat{jf}_0(\vec{\eta})\widehat{jf}''_0(-\vec{\eta}) \Big) \,/\, \Big((\vec{\eta}^2 - \langle \vec{l}', \vec{\eta}\rangle^2)(\vec{\eta}^2 - \langle \vec{l}'', \vec{\eta}\rangle^2) \Big)\,. \end{aligned} \tag{0.2.25}$$

Здесь $\vec{l}'$, $\vec{l}''$ — скорости частиц; $\widehat{jf'}(\vec{\eta}), \widehat{jf''}(\vec{\eta})$ — трансформации Фурье функций тока $jf'(\vec{x})$, $jf''(\vec{x})$.

Для случая k взаимодействующих частиц с функциями состояния $u^1, u^2, \ldots, u^k$ аналогично (0.2.23) я получаю функцию Лагранжа

$$n = \sum_{i=1}^{k} m_i(x_0, p^i, u^i) + \sum_{1\le i<j\le k} \mathrm{ni}\,(x_0, p^i, p^j, u^i, u^j).$$

Итак, в силу предыдущего для агвидных частиц получение функции Лагранжа сведено к вычислению функции $\mathrm{nit}\,(\vec{y})$ для попарных взаимодействий частиц.

0.2.7 Асимптотическое описание частиц и взаимодействий. *Ядром* частицы я называю пространственную область, где функция тока существенно отлична от нуля. При рассмотрении поля частицы на расстояниях от центра больших по сравнению с размером ядра частицы я аппроксимирую функцию тока $jf(\vec{x})$ соответствующей обобщённой функцией с точечным носителем в нуле. Полученную обобщённую частицу я называю *влавином.* Аппроксимация частицы влавином эквивалентна аппроксимации её трансформации Фурье $\widehat{jf}(\vec{\eta})$ полиномом Тейлора соответствующего порядка с центром в нуле.

Тот же прием я применяю при вычислении функции взаимодействия двух агвидных частиц $\operatorname{nit}(\vec{y})$. А именно, я подставляю вместо трансформаций Фурье функций тока $\widehat{jf'}(\vec{\eta})$ и $\widehat{jf''}(\vec{\eta})$ их полиномы Тейлора $t_m(\widehat{jf'})(\vec{\eta})$ и $t_k(\widehat{jf''})(\vec{\eta})$ с центром в нуле. Полученная приближенная обобщённая функция $\operatorname{nit}_a(\vec{y})$ даёт аппроксимацию функции $\operatorname{nit}(\vec{y})$ на расстояниях много больших размеров ядер частиц. Вычисление функции $\operatorname{nit}_a(\vec{y})$ производится с использованием техники замены переменных в обобщённых функциях, представленной в [15].

Каждый влавин можно сложить из конечного числа *элементарных влавинов*, а именно, таких обобщённых частиц, у которых трансформация Фурье — однородный полином степени m, называемой *порядком влавина.* Таким образом, я ввожу некоторый набор элементарных влавинов, из которых можно получить асимптотическую аппроксимацию как полей частиц (путем суммирования полей элементарных влавинов), так и их взаимодействий (путем суммирования попарных взаимодействий элементарных влавинов).

Трансформация Фурье функции псевдотока, дважды дифференцируемая в нуле, представляется в виде:

$$\widehat{jsf}_0(\vec{\eta}) = e + i\langle \vec{d}, \vec{\eta}\rangle - \langle\ Qv\vec{\eta}, \vec{\eta}\rangle + o(\vec{\eta}^2),$$

$$\widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta}) = i[\vec{S}, \vec{\eta}] - [F\vec{\eta}, \vec{\eta}] + o(\vec{\eta}^2),$$

где константы я называю следующим образом: $e \in \mathbf{R}$ — *заряд*, $\vec{d} \in \mathbf{R}^3$ — *дипольный момент*, Qv — симметричная вещественная матрица 3×3 — *квадр*, $\vec{S} \in \mathbf{R}^3$ — *спин*; F — вещественная матрица 3×3, след которой равен нулю, — *квин.* Величины e, $\vec{d}$, Qv, $\vec{S}$, F являются характеристиками частицы, при изменении состояния преобразующимися по следующим правилам:

$$\tilde{e} = e \tag{0.2.26}$$

$$\tilde{\vec{S}} = \frac{1}{(\det(R))^2} R^\top \vec{S}, \tag{0.2.27}$$

$$\tilde{\vec{d}} = R^{-1}\left(\vec{d} + \frac{1}{\det(R)}[\vec{\xi}, \vec{S}]\right), \tag{0.2.28}$$

$$\tilde{F} = \frac{1}{(\det(R))^2} R^\top F R^{-1\top}, \tag{0.2.29}$$

$$\widetilde{Qv} = R^{-1}\left(\ Qv + \frac{1}{2\det(R)}\left(S_w(\vec{\xi})F + \left(S_w(\vec{\xi})F\right)^\top\right)\right) R^{-1\top}, \tag{0.2.30}$$

где: R — матрица вида (0.2.13); $\vec{\xi}$ — вектор, введенный в представлении (0.2.12) матрицы G_t; $\mathrm{Sw}\,(\vec{\xi})$ — кососимметричная матрица вида

$$\mathrm{Sw}\,(\vec{\xi}) = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{0.2.31}$$

Я определяю элементарные влавины так, чтобы каждый из них представлял одну из введенных характеристик частицы. Название влавина начинается со слога "вла": власкайл, владип, влаквазикипер, власарм, вланюр, вламар. Для досветовых частиц их введённые выше характеристики: заряд, дипольный момент, спин, квадр, квин — могут принимать любые значения. Для того, чтобы иметь аппроксимацию с ошибкой второго порядка любой досветовой агвидной частицы достаточно трёх влавинов:
1) *власкайла* — скалярного влавина, представляющего заряд e с $\widehat{jf}_0(\vec{\eta}) = e$;
2) *владипа* — скалярного влавина,представляющего дипольный момент $\vec{d}$, с $\widehat{jf}_0(\vec{\eta}) = i\langle\vec{d},\vec{\eta}\rangle$;
3) *влаквазикипера* — квазикиперного влавина, представляющего спин $\vec{S}$, с $\widehat{\vec{jsf}}(\vec{\eta}) = i[\vec{S},\vec{\eta}]$.

Для световых и сверхсветовых частиц введённые характеристики уже не могут принимать произвольные значения, а удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям, следующим из условий конечности массы и энергии. Поэтому перейдем к рассмотрению законов сохранения.

0.2.8 Законы сохранения, энергия. Я ввел действие идеальной среды, которое по определению допускает 13-параметрическую группу инвариантных преобразований, порождаемую: 3-параметрической группой сдвигов опорного состояния, 3-параметрической группой ортогональных поворотов опорного состояния, 3-параметрической группой сдвигов текущего состояния, 3-параметрической группой ортогональных поворотов текущего состояния, 1-параметрической группой сдвигов по времени. По теореме Нётер вариационного исчисления каждое 1-параметрическое инвариантное преобразование порождает локальный закон сохранения, записываемый в дифференциальной форме как равенство нулю некоторой 4-дивергенции. Итак, исходное действие идеальной среды имеет 13 независимых локальных законов сохранения, допускающих простую физическую интерпретацию. Если я теперь хочу рассматривать решения — малые возмущения среды, исчезающие в бесконечности, то я должен ограничить группу преобразований решений условием, чтобы исчезающие в пространственной бесконечности решения оставались после преобразования исчезающими в пространственной бесконечности. Это условие запрещает сдвиги текущего состояния на постоянный вектор, согласует повороты в опорном и текущем состояниях и приводит к 7-параметрической группе инвариантных преобразований. Получившиеся 7 локальных законов сохранения имеют простой физический смысл: 3 закона сохранения импульса, 3 закона сохранения момента, 1 закон сохранения энергии.

При некоторых дополнительных условиях локальный закон сохранения, записанный в дифференциальной форме, порождает глобальный закон сохранения некоторой величины, записываемый в форме постоянства значений некоторого интеграла по всему пространству. При этом разные локальные законы сохранения могут давать одинаковые глобальные законы сохранения.

Действие идеальной среды в смещениях я аппроксимировал действием Максвелла, укороченным действием Максвелла, действием Лоренца, а затем перешел к конденсированному действию. При этом для агвидных частиц 7-параметрическая группа инвариантных преобразований сохраняется для всех этих действий с естественной физической интерпретацией соответствующих законов сохранения. Возникает вопрос: как соотносятся законы сохранения импульса, момента и энергии для всех этих пяти систем?

На примере закона сохранения энергии я устанавливаю следующее. Локальные законы сохранения энергии для действия идеальной среды, действия Максвелла, укороченного действия Максвелла, действия Лоренца — все различны. Глобальные законы сохранения энергии для действия Максвелла и укороченного действия Максвелла совпадают и являются аппроксимацией глобального закона сохранения энергии для идеальной среды. Глобальный закон сохранения энергии для действия Лоренца, глобальный закон сохранения энергии для укороченного действия Максвелла и закон сохранения энергии для конденсированного действия — все различны. Глобальный закон сохранения энергии для среды Лоренца не является аппроксимацией глобального закона сохранения энергии для идеальной среды.

Из сказанного следует неабсолютность понятия энергии, ибо при уточнении модели, повышении её степени аппроксимации изменяется и выражение для энергии. В этом смысле принятое сегодня выражение для энергии с точки зрения теории более высокого порядка аппроксимации является приближенным и не является сохраняющейся величиной. Теории более высокого порядка аппроксимации вносят изменения в выражение энергии, которые для описания процессов в рамках более грубой модели несущественны, но которые могут быть принципиально важны для описания новых явлений, для которых грубая модель неприменима. Таким образом, в силу аппроксимативного характера научных моделей научные запреты даже такого типа как закон сохранения энергии неабсолютны в силу приближенного характера конкретных понятий и формул их реализующих. В частности, в теории конденсации уточняются выражения для энергии взаимодействия движущихся частиц, что изменяет и выражения для энергии системы взаимодействующих заряженных частиц. При этом оказываются возможными такие процессы электромагнитного взаимодействия частиц, при которых выделяется энергия порядка их массы покоя, что в тысячи раз больше энергии, выделяемой при ядерных взаимодействиях.

В моей теории масса и энергия имеют одинаковую размерность, но являются существенно разными величинами. Если за массу принимается значение функции Лагранжа системы, что соответствует разнице кинетической и потенциальной энергий предшествующих механических теорий, то энергия соответствует сумме кинетической и потенциальной энергий предшествующих механических теорий. Таким образом, масса, вообще говоря, не равна и не пропорциональна энергии. Равенство массы и энергии может иметь место лишь в специальных случаях, например, для одиночной покоящейся частицы, поле смещений которой не содержит вихревой составляющей.

0.2.9 Характеристики световых и сверхсветовых частиц. Далее я называю величину энергии для укороченного действия Максвелла *физической энергией.* Требование конечности физической энергии агвидной частицы:
1) в досветовом случае не даёт дополнительных ограничений на характеристики частиц;
2) в световом случае влечет равенство нулю заряда $e = 0$, спина $\vec{S} = 0$ и ортогональность векторов дипольного момента $\vec{d}$ и скорости $\vec{l}$;
3) в сверхсветовом случае влечет равенства: $e = 0$, $\vec{d} = 0$, $\vec{S} = 0$ и специальный вид

квина и квадра.

Для аппроксимации световой частицы конечной физической энергии в главном порядке я ввожу *власарм* — скалярный влавин с трансформацией Фурье плотности псевдозаряда

$$\widehat{jsf}_0(\vec{\eta}) = i\langle \vec{d}, \vec{\eta}\rangle,$$

представляющий "в чистом виде" одну характеристику — дипольный момент $\vec{d}$, причём скалярное произведение $\langle \vec{d}, \vec{l}\rangle = 0$. Закон преобразования дипольного момента при изменении состояния частицы (формула (0.2.28)) в данном случае принимает вид:

$$\tilde{\vec{d}} = R^{-1}\vec{d}.$$

Для сверхсветовой агвидной частицы конечной физической энергии я ввожу новые характеристики: *сквадр* $c \in \mathbf{R}$ и *веквин* $\vec{h} \in \mathbf{R}^3$. Соответственно, для аппроксимации в главном порядке сверхсветовой агвидной частицы я ввожу *вланюр* — скалярный сверхсветовой влавин с трансформацией Фурье плотности псевдозаряда

$$\widehat{\overline{jsf}}_0(\vec{\eta}) = -\langle\, Qv\vec{\eta}, \vec{\eta}\rangle,$$

где $Qv = c\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})$ и $\mathrm{Ks}\,(\vec{l})$ — матрица 3×3 вида $\mathrm{Ks}\,(\vec{l}) \equiv E_3 - \vec{l}\vec{l}^\top$, и *вламар* — квазикиперный влавин с трансформацией Фурье 3-функции псевдотока

$$\widehat{\overline{\vec{jsf}}}(\vec{\eta}) = -[F\vec{\eta}, \vec{\eta}],$$

где матрица $F = \mathrm{Sw}\,(\vec{h})\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})$ — произведение матрицы $\mathrm{Ks}\,(\vec{l})$ и матрицы (0.2.31). Законы преобразования сквадра и веквина при изменении состояния имеют вид:

$$\tilde{c} = c,$$

$$\tilde{\vec{h}} = \frac{1}{\det(R)} R^{-1}\vec{h}.$$

0.2.10 О преобразованиях Пуанкаре. В теории конденсации существует выделенная система отсчета, связанная с исходным опорным состоянием идеальной среды, когда все её точки покоятся. Сложные формулы преобразования параметров, связанных с частицей, при изменении её состояния возникают как следствие конкретного координатного представления операции умножения элементов группы Пуанкаре. Мы уже говорили выше, что применением линейного преобразования Пуанкаре к функциям смещений, частица переводится из одного состояния в другое. Преобразование Пуанкаре задаётся десятью числовыми параметрами. Три из них имеют смысл сдвигов по пространственным осям координат, один — сдвига по времени, три параметра задают повороты вокруг трёх осей координат в пространстве, а оставшиеся три параметра задают собственное преобразование Лоренца и не имеют простого геометрического смысла. Однако, при применении преобразования Пуанкаре к покоящейся частице она переходит в состояние движения с вектором нормированной на скорость света скорости, состоящим из трёх параметров собственного преобразования Лоренца. Итак, при применении к покоящейся частице три параметра собственного преобразования Лоренца приобретают простой геометрический смысл. Если же мы теперь возьмём два преобразования Пуанкаре и перемножим, то параметры собственного преобразования Лоренца для произведения будут сложным нелинейным образом выражаться через параметры каждого из двух преобразований. Эту формулу для преобразования параметров элемента группы Пуанкаре уже нельзя интерпретировать кинематически наглядно как формулу сложения скоростей.

Следующая важная особенность моей теории — относительный, аппроксимативный характер самих преобразований Пуанкаре. Речь идет о том, что преобразования Пуанкаре были найдены из условия инвариантности квадратичной части действия — действия Максвелла, а не из условия инвариантности исходного точного действия идеальной среды. Поэтому, вообще говоря, точные решения для идеальной среды под действием преобразования Пуанкаре уже не переходят в точные же решения и все формулы, связанные с применением преобразования Пуанкаре и инвариантностью действия Максвелла, являются лишь формулами аппроксимативными, формулами квадратичного приближения по функционалу действия.

0.2.11 Скайлы и их взаимодействие.

0.2.11.1 О понятии скайла.

Оказывается, чтобы получить классическую электродинамику взаимодействия зарядов и токов достаточно использовать аппроксимацию досветовых агвидных частиц элементарными влавинами нулевого порядка, а именно, *власкайлами.* Власкайл имеет трансформацию Фурье функции тока

$$\widehat{jf}(\vec{\eta}) = el,$$

где e — заряд власкайла, l — 4-вектор скорости. Функционал взаимодействия двух власкайлов равен

$$\mathrm{ni}\,(u', u'') = e'e''\ \mathrm{vin}\,(\vec{\beta}', \vec{\beta}'', \vec{b}'' - \vec{b}'),$$

где $\mathrm{vin}\,(\vec{\beta}', \vec{\beta}'', \vec{y})$ — явно вычисленная функция трёх векторных аргументов, предъявленная в [22].

Я ввожу понятие *скайла* — досветовой скалярной сферически-симметричной агвидной частицы, для которой предписана аппроксимация взаимодействия её с другими частицами власкайлом. Таким образом, система двух взаимодействующих скайлов описывается функцией Лагранжа

$$n = m'\sqrt{1 - (\vec{\beta}')^2} + e'e''\ \mathrm{vin}\,(\vec{\beta}', \vec{\beta}'', \vec{b}'' - \vec{b}') + m''\sqrt{1 - (\vec{\beta}'')^2}. \tag{0.2.32}$$

Соответственно, система k взаимодействующих скайлов описывается функцией Лагранжа

$$n = \sum_{i=1}^{k} m_i\sqrt{1 - (\vec{\beta}_i)^2} + \sum_{1 \le i < j \le k} e_i e_j\ \mathrm{vin}\,(\vec{\beta}_i, \vec{\beta}_j, \vec{b}_j - \vec{b}_i). \tag{0.2.33}$$

Переходя к пределу по числу частиц $k \to \infty$, я получаю в пределе и лагранжиан взаимодействия скайла с внешним полем, созданным непрерывно распределенной системой зарядов и токов.

Функция $\mathrm{vin}\,(\vec{\beta}',\ \vec{\beta}'',\ \vec{y})$ обладает тем свойством, что если скорость $\vec{\beta}'' = 0$, то функция $\mathrm{vin}\,(\vec{\beta}',\ 0,\ \vec{y}) = 1/(4\pi|\vec{y}|)$, т.е. совпадает с кулоновским потенциалом. Таким образом, для движения заряда в электростатическом поле моя теория даёт описание, совпадающее с классическим описанием.

Аппроксимация функции $\operatorname{vin}(\vec{\beta}', \ \vec{\beta}'', \ \vec{y})$ полиномом Тейлора второго порядка по аргументам $\vec{\beta}', \ \vec{\beta}''$ с центром в нуле даёт функцию

$$\operatorname{vis}(\vec{\beta}', \ \vec{\beta}'', \ \vec{y}) = \frac{1}{4\pi|\vec{y}|}\left(1 - \langle\vec{\beta}', \vec{\beta}''\rangle + \frac{\langle[\vec{\beta}', \vec{y}], [\vec{\beta}'', \vec{y}]\rangle}{2|\vec{y}|^2}\right).$$

Поэтому аппроксимация второго порядка по скоростям даёт из функции Лагранжа (0.2.33) путем предельного перехода следующую функцию Лагранжа для скайла во внешнем поле, созданным стационарным распределением зарядов с плотностью $j_0(\vec{x})$ и токов с плотностью $\vec{j}(\vec{x})$

$$n_a = m\left(1 - \frac{\vec{\beta}^2}{2}\right) + e(\varphi - \langle\vec{\beta}, \vec{A}\rangle), \tag{0.2.34}$$

где φ — скалярный, $\vec{A}$ — векторный потенциал внешнего поля и

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{j_0(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|}\, dy_1 dy_2 dy_3, \tag{0.2.35}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\vec{j}(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|}\, dy_1 dy_2 dy_3. \tag{0.2.36}$$

Итак, с точки зрения моей теории, классическая релятивистская функция Лагранжа, описывающая движение заряженной частицы во внешнем поле,

$$n_c = m\sqrt{1 - (\vec{\beta})^2} + e(\varphi - \langle\vec{\beta}, \vec{A}\rangle) \tag{0.2.37}$$

является лишь аппроксимацией второго порядка по скоростям точного закона взаимодействия, хотя в случае $\vec{A} = 0$ (электростатическое поле) описание с помощью функции Лагранжа (0.2.37) является точным.

Однако, в общем случае динамика скайлов отличается от классической релятивистской динамики зарядов, что я продемонстрирую на двух примерах: на движении скайла в постоянном магнитном поле и на центрально-симметричном движении двух скайлов одинаковой массы.

0.2.11.2 Движение скайла в магнитостатическом поле.

Следуя введенной выше терминологии, *магнитостатическим полем* я называю поле покоящегося квазикиперного агвида. Вычисляя функцию взаимодействия власкайла и покоящегося квазикиперного агвида, получим следующую функцию Лагранжа для скайла в поле покоящегося квазикипеного агвида

$$n = m\sqrt{1 - (\vec{\beta})^2} - e\langle\vec{\beta}, \vec{A}\rangle, \tag{0.2.38}$$

где величина $\vec{A} = \vec{A}(\vec{\beta}, \vec{x}) \left(\vec{\beta} \equiv \frac{d\vec{x}}{dx_0}\right)$ выражается через 3-функцию тока $\vec{j}(x) = \overrightarrow{jf}(\vec{x})$ покоящейся частицы формулой

$$\vec{A}(\vec{\beta}, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\overrightarrow{jf}(\vec{y})}{\sqrt{(\vec{y} - \vec{x})^2 - [\vec{\beta}, \vec{y} - \vec{x}]^2}}\, dy_1 dy_2 dy_3. \tag{0.2.39}$$

Если в качестве второго агвида берется соленоид, обтекаемый по окружности током постоянной плотности, то аналогичные вычисления дают для функции Лагранжа (0.2.38) выражение

$$n = m\sqrt{1-\vec{\beta}^2} + e\frac{\langle\vec{\beta}, [\vec{H}, \vec{x}]\rangle}{1+\sqrt{1-\vec{\beta}_\perp^2}}, \tag{0.2.40}$$

т.е. в этом случае

$$\vec{A}(\vec{\beta}, \vec{x}) = \frac{[\vec{x}, \vec{H}]}{1+\sqrt{1-(\vec{\beta}_\perp)^2}},$$

где $\vec{H}$ — напряжённость магнитного поля внутри соленоида, $\vec{\beta}_\perp$ — проекция скорости скайла на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{H}$, и начало координат выбрано на оси соленоида с осью x_3 по направлению вектора $\vec{H}$.

Среди экстремалей функции Лагранжа (0.2.38) существуют винтовые траектории вокруг оси соленоида, на которых абсолютная величина скорости $\beta \equiv |\vec{\beta}|$ постоянна. Радиус такой винтовой линии

$$r = \frac{\beta_\perp m\sqrt{1-\beta_\perp^2}}{eH\sqrt{1-\beta^2}},$$

угловая скорость вращения

$$\omega = \frac{eH}{m}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta_\perp^2}},$$

где $\beta_\perp \equiv |\vec{\beta}_\perp|$. Однако существуют и траектории, не являющиеся винтовыми линиями.

В частном случае плоского движения с $\beta_\parallel = \beta_3 = 0$ кроме круговых траекторий с центром на оси соленоида существуют траектории более сложной природы, на которых абсолютная величина скорости β не постоянна. Причём существуют траектории, на которых частица за конечное время увеличивает скорость до скорости света.

Отметим для сравнения, что классическое релятивистское описание движения заряженной частицы, исходящее из функции Лагранжа (0.2.37), в данном случае постоянного однородного магнитного поля приводит к функции Лагранжа вида (0.2.38), где величина $\vec{A} = \vec{A}(0, \vec{x}) = \frac{1}{2}[\vec{x}, \vec{H}]$. При этом при любых начальных данных частица движется по винтовой линии с радиусом

$$r = \frac{\beta_\perp m}{eH\sqrt{1-\beta^2}}$$

и постоянной угловой скоростью

$$\omega = \frac{eH\sqrt{1-\beta^2}}{m}.$$

0.2.11.3 Центрально-симметричное движение двух скайлов одинаковой массы.

Для случая системы двух скайлов одинаковой массы покоя m_0 её функция Лагранжа (0.2.32) допускает центрально-симметричные движения с радиус-векторами частиц $\vec{b}'' = -\vec{b}'$ и векторами скорости $\vec{\beta}'' = -\vec{\beta}'$. В этом случае в полярных координатах (r, φ) в плоскости движения функция Лагранжа равна

$$\text{sim} = 2m_0\sqrt{1-(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)} + \frac{e'e''}{8\pi}\frac{l}{r}\cdot\left(1+\frac{\dot{r}^2}{1-r^2\dot{\varphi}^2}\right)\cdot(1-r^2\dot{\varphi}^2)^{-1/2}, \tag{0.2.41}$$

где точка сверху означает дифференцирование по нормированному времени x_0.

Функция Лагранжа (0.2.41) допускает вращательные орбиты с $r = Const$. На такой орбите радиус траектории r, момент системы M, энергия системы $\mathcal{H}$ и масса системы m_s следующим образом зависят от абсолютной величины скорости $\beta = |r\dot{\varphi}|$ на круговой траектории:

$$r = \frac{e'e''}{16\pi m_0} \cdot \frac{2\beta^2 - 1}{\beta^2(1-\beta^2)}; \tag{0.2.42}$$

$$M = -\frac{e'e''}{8\pi} \cdot \frac{1}{\beta\sqrt{1-\beta^2}}; \tag{0.2.43}$$

$$\mathcal{H} = 2m_0\sqrt{1-\beta^2}; \tag{0.2.44}$$

$$m_s = 2m_0 \frac{3\beta^2 - 1}{2\beta^2 - 1} \cdot \sqrt{1-\beta^2}. \tag{0.2.45}$$

Если заряды разного знака, $e'e'' < 0$, то из формулы (0.2.42) следует, что вращательные решения существуют при $\beta \in]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$. При этом, когда скорость β изменяется от 0 до $\frac{1}{\sqrt{2}}$, радиус r изменяется от $+\infty$ до 0, момент M — от $+\infty$ до $\frac{-e'e''}{4\pi}$, энергия системы $\mathcal{H}$ — от $2m_0$ до $m_0\sqrt{2}$. Масса системы m_s изменяется от $2m_0$ до 0, когда β пробегает значения от 0 до $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и от 0 до $-\infty$, когда β пробегает значения от $\frac{1}{\sqrt{3}}$ до $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Если заряды одного знака, $e'e'' > 0$, то из формулы (0.2.42) следует, что вращательные движения существуют, при $\beta \in]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[$. При этом, когда скорость β изменяется от $\frac{1}{\sqrt{2}}$ до 1, радиус r изменяется от 0 до $+\infty$, момент M — от $-\frac{e'e''}{4\pi}$ до $-\infty$, энергия $\mathcal{H}$ — от $m_0\sqrt{2}$ до 0, масса системы m_s — от $+\infty$ до 0.

Итак, при скоростях движения $\beta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ два одинаковых скайла могут образовывать стационарную вращательную систему. Таким образом, одних электромагнитных сил в принципе достаточно для удержания одинаково заряженных частиц в ядрах атомов. Кроме того, на данном примере мы видим как из досветовых агвидных частиц с положительной массой покоя могут образовываться системы, имеющие нулевую или отрицательную массу.

0.2.12 Аналогия с газодинамикой. Чтобы подчеркнуть естественность выводов теории конденсации с точки зрения здравого смысла, я напомню некоторые факты из газодинамики.

В газодинамике рассматривается сплошная среда, а именно, газ, в котором могут двигаться тела. При движении тонкого тела в газе возникает волна возмущений, форма которой определяется линеаризованными уравнениями газодинамики. При изменении скорости движения тела происходит перестройка волны возмущений. Перестройка формы волны возмущений в газе происходит по формулам, имеющим аналогию с преобразованием Пуанкаре в электродинамике. При этом, в частности, отдельно существуют и не переходят друг в друга в рамках линеаризованных уравнений движения дозвуковой, трансзвуковой и сверхзвуковой режимы. В тридцатых годах нашего века под влиянием серии конструкторских неудач даже возникло мнение, что самолет не может преодолеть скорость звука в воздухе. Этот вывод находил свое обоснование, в частности, в свойствах линеаризованных уравнений движения. Позднее настоятельная практическая потребность привела к созданию сверхзвуковых самолетов и разработке математической модели преодоления звукового барьера в газе с помощью системы нелинейных уравнений газовой динамики, существенно более сложных, чем использованная ранее линеаризованная модель. Последняя ситуация вполне аналогична ситуации с преодолением светового барьера скорости тела в электродинамике, для описания которого согласно вышесказанному уже недостаточно линейных уравнений динамики. Кроме того, при переходе через скорость звука современные самолеты нередко изменяют свою форму, например, стреловидность крыла, что аналогично рекомендациям теории конденсации об изменении структуры тела при прохождении скорости света так, чтобы некоторые моменты нулевого и первого порядка (заряд, спин) обратились в нуль.

Таким образом, явления, полученные путем математического моделирования в идеальной среде, имеют простую аналогию с газодинамическими явлениями.

Часть I

Идеальная среда, среда Максвелла и процедура конденсации

Глава 1. Физические основы получения лагранжиана

Глава 2. Переход к 4-функциям. Группы преобразований функций состояния и токов.

Глава 3. Преобразование характеристик частицы

Глава 1

Физические основы получения плотности лагранжиана

§ 1.1. Плотность лагранжиана и уравнения Эйлера сплошной среды

§ 1.2. Идеальная среда

§ 1.3. Простая среда. Среда Максвелла.

Рассматривается сплошная среда, заполняющая бесконечное евклидово пространство $\mathbf{R}^3$, $x \in \mathbf{R}^3$ — координата точки в момент времени $t \in \mathbf{R}$. Физические свойства среды задаются функционалом интегрального вида

$$L(X) = \int\limits_I \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{L}(x, X, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}) dx_1 dx_2 dx_3 dt.$$

Функционал $L(X)$ называется *действием*, а числовая функция $\mathcal{L}(x, X, A, b)$ аргументов $x \in \mathbf{R}^3$, $X \in \mathbf{R}^3$, $A \in M(3 \times 3, \mathbf{R})$, $b \in \mathbf{R}^3$ — *плотностью лагранжиана*. Здесь $M(3 \times 3, \mathbf{R})$ означает векторное пространство квадратных числовых матриц 3×3 с вещественными элементами, а $I = [a, b]$ или $I = \mathbf{R}$. Вводится аксиома, что физические состояния среды $X(t, x)$, — это те, для которых первая вариация действия $\delta L(X; h)$ обращается в нуль в задаче с закреплёнными концами по времени t.

В § 1.2 мы накладываем на сплошную среду требования стационарности, однородности и изотропности. Такую среду мы называем *идеальной* и определяем общий вид действия идеальной среды. Плотность лагранжиана идеальной среды имеет вид (1.2.28) и задаётся произвольной функцией шести переменных.

При достаточно малых деформациях и скоростях смещений мы аппроксимируем действие идеальной среды его полиномом Тейлора второго порядка (§ 1.3). Получившееся действие мы называем действием *простой* среды. Действие простой среды задаётся четырьмя числовыми параметрами: ρ, μ, χ, ν, — где ρ — плотность среды, μ — параметр Ламе, $\chi = \lambda + \mu$, где λ — второй параметр Ламе. Среда *консервативна*, если её опорное состояние является физическим состоянием. Критерий консервативности среды $\nu = -\mu$. Уравнения Эйлера среды приводятся к уравнениям Максвелла, если $\chi = -\mu$. *Средой Максвелла* мы называем простую среду с $\rho > 0$, $\mu > 0$, $\chi = -\mu$, $\nu = -\mu$. Среда Максвелла получена квадратизацией идеальной среды в окрестности опорного состояния. Лемма 1.3.1 даёт оценку ошибки при замене действия идеальной среды на соответствующее действие простой среды.

§1.1 Действие и уравнения Эйлера сплошной среды

1.1.1 Интегральное действие и частицы.

Рассматривается сплошная среда, заполняющая трёхмерное пространство. Пусть в некотором состоянии, которое мы назовём "опорным", точки среды имели декартовы координаты $(x_1, x_2, x_3) = x$. Декартовы координаты тех же точек в момент времени t обозначим

$$(X_1(t, x_1, x_2, x_3), X_2(t, x_1, x_2, x_3), X_3(t, x_1, x_2, x_3)) = X(t, x).$$

Предполагается, что сплошная среда характеризуется функцией $X(t, x)$ и все физические параметры среды однозначно определяются через функцию $X(t, x)$. Для определения вида функции $X(t, x)$ вводим функцию $\mathcal{L}$, зависящую от функции $X(t, x)$ и её частных производных по переменным t, x_1, x_2, x_3 первого порядка. Варьированием действия

$$L = \int\limits_{\mathbf{R}} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{L}\, dx_1 dx_2 dx_3 dt$$

получается система дифференциальных уравнений порядка 2, которой удовлетворяют функции $X_1(t, x), X_2(t, x), X_3(t, x)$. Интеграл по пространственным переменным

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{L}\, dx_1 dx_2 dx_3$$

называется "функцией Лагранжа" или "лагранжианом", а функция $\mathcal{L}$ — "плотностью лагранжиана".

Мы предполагаем, что плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ такова, что соответствующие уравнения Эйлера имеют ограниченное решение, непрерывно дифференцируемое до порядка 2. Далее мы рассматриваем решения типа возмущений сплошной среды, т.е. такие для которых отклонения $U(t, x) \equiv X(t, x) - x$ стремятся к нулю вместе с производными при $|x| \to \infty$. Поэтому на больших расстояниях от начала координат действие L будет близко с точностью до бесконечно малых третьего порядка по функции $U(t, x)$ и её производным к квадратичному действию, а поведение функции $U(t, x)$ на больших расстояниях с точностью до второго порядка будет описываться линейными уравнениями Эйлера, получающимися при линеаризации исходных нелинейных уравнений Эйлера в окрестности опорного состояния.

Частицей мы будем далее называть решение уравнений Эйлера типа возмущения, т.е. исчезающее на бесконечности. Так как исходное действие L, вообще говоря, неквадратично, то если имеются два решения уравнения Эйлера, записанные через смещения $W(t, x), V(t, x)$, то их сумма $W(t, x) + V(t, x) = U(t, x)$ не будет уже решением уравнения Эйлера для функции смещения $U(t, x)$. Однако, на больших расстояниях от центров первого и второго возмущений в силу асимптотической при $|x| \to \infty$

линейности уравнений Эйлера функция $W(t,x)+V(t,x)$ будет с точностью до следующих порядков малости удовлетворять уравнениям Эйлера.

Для описания взаимодействия частиц на больших расстояниях мы поступим следующим образом. Рассмотрим линейное уравнение Эйлера, получающееся из исходного линеаризацией в окрестности опорного решения. Назовём его базовым уравнением системы. Частицу будем описывать как решение базового уравнения, содержащего в правой части неоднородности, существенно отличные от нуля лишь в малой окрестности центра частицы. Неоднородности будут иметь смысл токов и зарядов частиц. Выписывая далее квадратичное действие, соответствующее базовому уравнению системы, и подставляя в него $U(t,x) = W(t,x) + V(t,x)$, мы получим асимптотическое описание взаимодействия частиц через их поля, токи и заряды.

В качестве примера рассмотрим модель адиабатического идеального газа.

1.1.2 Модель адиабатического идеального газа. Пусть в опорном состоянии идеальный газ имел плотность $\rho_0(X)$ и давление $p_0(x)$. Из сохранения массы при движении газа следует, что плотность газа в точке пространства $X(t,x)$, где находится элемент объема с опорной координатой x, равна

$$\rho = \rho_0(x)\left|\frac{\partial X}{\partial x}\right|^{-1}. \tag{1.1.1}$$

Здесь $\frac{\partial X}{\partial x}$ — матрица частных производных $\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta}$, $\left|\frac{\partial X}{\partial x}\right|$ — её определитель. Из уравнения адиабаты давление в точке $X(t,x)$ пространства равно

$$p = p_0(x)\left|\frac{\partial X}{\partial x}\right|^{-\frac{5}{3}}. \tag{1.1.2}$$

Скорость газа в точке пространства $X(t,x)$ есть $\frac{\partial X}{\partial t}$.

При адиабатическом движении газа происходит взаимодействие двух типов энергии: кинетической энергии движения элемента объема и потенциальной энергии — энергии сжатия элемента объема. Потенциальная энергия данного элемента объема задаётся формулой $E = \frac{3}{2}NkT$, а уравнение состояния для того же элемента объема $pV = NkT$, где V — объем, T — температура, N — число молекул в данном объеме, k — постоянная Больцмана (см. [74, с. 21,25]).

Для плотности потенциальной энергии относительно опорного состояния получаем:

$$\frac{E}{V_0} = \frac{3}{2}p\frac{V}{V_0} = \frac{3}{2}p\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{3}{2}p_0(x)\left|\frac{\partial X}{\partial x}\right|^{-\frac{2}{3}}. \tag{1.1.3}$$

Температура газа в точке $X(t,x)$ будет

$$T = T_0(x)\left|\frac{\partial X}{\partial x}\right|^{-\frac{2}{3}}, \tag{1.1.4}$$

где $T_0(x)$ — температура в точке x в опорном состоянии.

Итак, в предположении, что вся потенциальная энергия данного объема газа есть энергия сжатия, получаем следующее выражение для плотности функции Лагранжа относительно опорных координат

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho_0(x)\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^2 - \frac{3}{2}p_0(x)\left|\frac{\partial X}{\partial x}\right|^{-\frac{2}{3}}. \tag{1.1.5}$$

В случае, когда опорное состояние газа является равновесным состоянием с постоянным давлением $p_0(x) = p_0$ и плотностью $\rho_0(x) = \rho_0$, плотность функции Лагранжа после нормировки $\mathcal{L}' = \frac{\mathcal{L}}{p_0}$ и замены переменного $t' = at$, $a^2 = \frac{p_0}{\rho_0}$, опуская штрихи, запишем в виде:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^2 - \frac{3}{2}\left|\frac{\partial X}{\partial x}\right|^{-\frac{3}{2}}. \tag{1.1.6}$$

Здесь мы рассматриваем движение идеального газа во всем трёхмерном пространстве $\mathbf{R}^3$, поэтому опорное состояние газа будет иметь бесконечную потенциальную энергию. Для того, чтобы рассматривать возмущения опорного состояния с конечной энергией мы проведём замену переменных $X(t,x) = x + U(t,x)$, перейдя от координат $X(t,x)$ точек к их смещениям $U(t,x) = X(t,x) - x$ и Введём

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_t = \mathcal{L}_t\left(\tfrac{\partial U}{\partial x}, \tfrac{\partial U}{\partial t}\right) \equiv \mathcal{L}\left(\tfrac{\partial}{\partial x}(x + U(t,x)), \tfrac{\partial}{\partial t}(x + U(t,x))\right) - \mathcal{L}\left(\tfrac{\partial x}{\partial x}, \tfrac{\partial x}{\partial t}\right) = \\ \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \tfrac{3}{2}\left(\left|E + \tfrac{\partial U}{\partial x}\right|^{-\frac{3}{2}} - 1\right).\end{gathered} \tag{1.1.7}$$

При малых деформациях $\frac{\partial U}{\partial x}$ нетрудно провести выделение квадратичной части действия, что влечет линеаризацию уравнения Эйлера. Мы получим базовое действие и базовые уравнения среды. Вводя символ малости $\varepsilon \in \mathbf{R}$, получим из (1.1.7),

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_t = \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\left(\tfrac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \tfrac{3}{2}\left(\left|E + \varepsilon\tfrac{\partial U}{\partial x}\right|^{-\frac{2}{3}} - 1\right) = \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\left(\tfrac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \tfrac{3}{2}\Bigg(-\tfrac{2}{3}\varepsilon div\, U - \\ \tfrac{2}{3}\varepsilon^2\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial U_3}{\partial x_2} & \frac{\partial U_3}{\partial x_3}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_2}{\partial x_2}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1} & \frac{\partial U_3}{\partial x_3}\end{vmatrix}\right) + \tfrac{2}{3}\tfrac{5}{3}\tfrac{1}{2}\varepsilon^2(div\, U)^2\Bigg) + O(\varepsilon^3).\end{gathered} \tag{1.1.8}$$

Отбрасывая величины порядка $O(\varepsilon^3)$ получаем квадратичную плотность лагранжиана $\mathcal{L}_{ts}\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t}\right)$, которой соответствуют уравнения Эйлера

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{5}{3} grad\ div\, U = 0. \tag{1.1.9}$$

Это и есть базовое уравнение системы.

Настоящий пример взят из работы [3].

1.1.3 Переход от действия к уравнениям Эйлера и физическим состояниям среды. Сплошную среду мы характеризуем действием, т.е. функционалом $L(X)$, определенным на функциях состояния $X(t,x)$. Для отбора среды функций $X(t,x)$ тех, которые соответствуют физическим состояниям среды мы рассматриваем вариационную задачу с закрепленными по времени концами для действия $L(X)$. Таким образом, мы выделяем одну переменную — время, фиксируем $X(t,x)\mid_{t=a}$ и $X(t,x)\mid_{t=b}$ и рассматриваем функционал $L(X)$ только на функциях $X(t,x)$ с заданными граничными значениями при $t = a$ и $t = b$. Выделение времени означает, что нас интересует эволюция физического состояния системы во времени. Мы вводим аксиому, что физические состояния системы — это те, для которых первая вариация действия в задаче с закрепленными концами обращается в нуль.

Для интегрального функционала $L(X)$ вида

$$L(X) = \int\limits_a^b \iiint\limits_V \mathcal{L}(t, x, X, X^{(1)})\, dx_1 dx_2 dx_3 dt \tag{1.1.10}$$

при достаточно гладких функциях $\mathcal{L}$ и X получаем, что условие обращения в нуль первой вариации $\delta L(X) = 0$ в точке X эквивалентно двум условиям на X: 1) выполнению дифференциального уравнения в частных производных второго порядка в области $\mathcal{L}[X] = 0$ — уравнения Эйлера, 2) выполнению пространственных граничных условий. Дифференциальное уравнение второго порядка $\mathcal{L}[X] = 0$ вместе с пространственными условиями позволяет описывать динамику среды. А именно, задавая при $t = a$ функции $X(t,x)\mid_{t=a}$ и $\frac{\partial X}{\partial t}(t,x)\mid_{t=a}$ и решая дифференциальное уравнение Эйлера $\mathcal{L}[X] = 0$ совместно с граничными условиями, мы находим функцию $X(t,x)$ в любой момент времени t.

1.1.4 Интегральное действие с компактной пространственной областью.

Рассмотрим действие (1.1.10) в случае, когда $V \subset \mathbf{R}^3$ компактная область с кусочно гладкой границей. Пусть функция $\mathcal{L}$ принадлежит классу дважды непрерывно дифференцируемых функций $C^{(2)}(I \times V \times \mathbf{R}^3 \times M(3\times 4))$, где $I \equiv [a,b]$, $M(3\times 4)$ — множество вещественных матриц с 3 строками и 4 столбцами. Пусть функция X принадлежит классу $C_3^{(2)}(I\times V)$ — вектор-функций с тремя дважды непрерывно дифференцируемыми компонентами. Так как мы рассматриваем задачу с закрепленными концами, класс допустимых вариаций $H(I \times V)$ состоит из функции $h(t,x)$ класса $C_3^{(2)}(I \times V)$, обращающихся в нуль при $t = a$ и $t = b$.

Согласно [2, с. 115-116] первая вариация функционала $L(X)$ в точке X на допустимой вариации $h(t,x)$ равна

$$\delta L(X;h) = \int\limits_I \iiint\limits_V \langle \mathcal{L}[X], h\rangle \, dx_1 dx_2 dx_3 dt + \int\limits_I \iint\limits_S \langle p[X], h\rangle \, d\sigma dt, \tag{1.1.11}$$

где $\mathcal{L}[X]$ — трёхмерный вектор с компонентами

$$\mathcal{L}[X]_\alpha \equiv \mathcal{L}_{X_\alpha}(t,x,X,X^{(1)}) - \sum_{j=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}_{w_{\alpha j}}(t,x,X,X^{(1)}), \tag{1.1.12}$$

$(w_{\alpha j} \equiv \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_j},\ x_0 \equiv t)$, $p[X]$ — трёхмерный вектор с компонентами

$$p[X]_\alpha \equiv \sum_{\beta=1}^{3} \mathcal{L}_{w_{\alpha\beta}}(t,x,X,X^{(1)}) n_\beta \tag{1.1.13}$$

$\langle q,p\rangle \equiv \sum_{\alpha=1}^{3} q_\alpha p_\alpha$ — обозначает скалярное произведение векторов, S — граница области $V \subset \mathbf{R}^3$, $\vec{n}(x) = (n_1,n_2,n_3)$ — вектор внешней нормали к поверхности S.

Итак, обращение в нуль первой вариации $\delta L(X)$ в точке X эквивалентно в данном случае двум условиям на функцию X:
1) выполнение уравнения Эйлера

$$\mathcal{L}[X] = 0 \tag{1.1.14}$$

внутри области $I \times V \subset \mathbf{R}^4$;
2) выполнение условия

$$p[X]\mid_S = 0 \tag{1.1.15}$$

на пространственной границе области.

Если мы будем рассматривать движения среды с фиксированной границей, то условие $\delta L(X) = 0$ будет эквивалентно выполнению условия (1.1.14) и условия

$$X\mid_S = x \tag{1.1.16}$$

неподвижной границы.

1.1.5 Интегральное действие с неограниченной пространственной областью. Рассмотрим теперь действие вида (1.1.10) в случае $V = \mathbf{R}^3$ и $\mathcal{L} \in C^{(2)}(I \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times M(3 \times 4))$, $X \in C_3^{(2)}(I \times \mathbf{R}^3)$. В случае $V = \mathbf{R}^3$ интеграл (1.1.10) может не существовать для функции $X \in C_3^{(2)}(I \times \mathbf{R}^3)$ — это новая трудность по сравнению со случаем компактной области V (интеграл здесь понимается по Лебегу).

Чтобы избежать бесконечных значений действия мы сначала проведём "вычитание фона". А именно, фиксируем состояние $X_0(t,x) \in C_3^{(2)}(t,x)$, которое мы назовём *опорным*, проведём замену переменных

$$U(t,x) = X(t,x) - X_0(t,x) \tag{1.1.17}$$

и будем рассматривать действие $L_t(U) \equiv L(U + X_0) - L(X_0)$ с плотностью функции Лагранжа

$$\mathcal{L}_t(t,x,U,U^{(1)}) = \mathcal{L}(t,x,U + X_0, U^{(1)} + X_0^{(1)}) - \mathcal{L}(t,x,X_0,X_0^{(1)}). \tag{1.1.18}$$

Функция $\mathcal{L}_t \in C_3^{(2)}(I \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times M(3 \times 4))$ и обращается в нуль при $U = 0$

$$\forall (t,x) \in I \times \mathbf{R}^3 \mid \mathcal{L}_t(t,x,0,0) = 0 \tag{1.1.19}$$

Функция $U(t,x)$ имеет смысл смещений из опорного состояния. Нас далее будут интересовать функции $U(t,x)$ описывающие возмущения, исчезающие в бесконечности, т.е. мы будем рассматривать функции $U(t,x)$ дважды непрерывно дифференцируемые в области $I \times \mathbf{R}^3$ и такие, у которых предел в пространственной бесконечности у функции и её первых и вторых частных производных равен нулю равномерно по $t \in I$. Обозначим этот класс $\overline{C}_{3,0}^{(2)}(I \times \mathbf{R}^3)$. Соответственно вариации $h(t,x)$ мы будем рассматривать из класса $H(I \times \mathbf{R}^3)$ — функций из класса $\overline{C}_{3,0}^{(2)}(I \times \mathbf{R}^3)$ таких, что $h(a,x) = 0$ и $h(b,x) = 0$. Однако, не для всех функций $U \in \overline{C}_{3,0}^{(2)}(I \times \mathbf{R}^3)$ и вариаций $h \in H(I \times \mathbf{R}^3)$ будут определены значения $L_t(U)$, $L_t(U + h)$, ибо интеграл по всему пространству по-прежнему может расходиться.

Пусть $U \in \overline{C}_{3,0}^{(2)}(I \times \mathbf{R}^3)$ и существует интеграл

$$\mathcal{L}_t(U) = \int\limits_I \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{L}_t(t,x,U,U^{(1)})\, dx_1 dx_2 dx_3 dt. \tag{1.1.20}$$

Обозначим через $D_3(I \times \mathbf{R}^3)$ класс финитных бесконечно-дифференцируемых вектор-функций с носителем в открытом ядре множества $I \times \mathbf{R}^3$. Если $h \in D_3(I \times \mathbf{R}^3)$, то интеграл $L_t(U + h)$ также существует, ибо

$$\begin{gathered} L_t(U+h) = \int\limits_I \iiint\limits_V \mathcal{L}_t(t,x,U+h,U^{(1)} + h^{(1)})\, dx_1 dx_2 dx_3 dt + \\ \int\limits_I \iiint\limits_{\mathbf{R}^3 \setminus V} \mathcal{L}_t(t,x,U+h,U^{(1)} + h^{(1)})\, dx_1 dx_2 dx_3 dt, \end{gathered} \tag{1.1.21}$$

где $V \subset \mathbf{R}^3$ компактная область, такая что компакт $I \times V$ содержит носитель функции $h(t,x)$. Но первый интеграл в правой части существует как интеграл от непрерывной функции по компактному множеству, а второй интеграл существует по условию, ибо $h(t,x) = 0$ при $(t,x) \in I \times (\mathbf{R}^3 \setminus V)$.

Если функция $U \in \overline{C}^{(2)}_{3,0}(I \times \mathbf{R}^3)$ и определено действие $L_t(U)$, то действие определено и на всех функциях $U + D_3(I \times \mathbf{R}^3) \subset \overline{C}^{(2)}_{3,0}(I \times \mathbf{R}^3)$. Вариация функционала L_t в точке U в классе вариаций $D_3(I \times \mathbf{R}^3)$ будет согласно формуле (1.1.11) равна

$$\delta L_t(U;h) = \int\limits_I \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \langle \mathcal{L}_t[U], h \rangle \, dx_1 dx_2 dx_3 dt. \qquad (1.1.22)$$

Поэтому условие $\delta L_t(U) = 0$ влечет выполнение уравнения Эйлера

$$\mathcal{L}_t[U] = 0 \qquad (1.1.23)$$

внутри области $I \times \mathbf{R}^3$.

Замечание 1.1.1 *При доказательстве того, что физическое состояние среды $U(t,x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (1.1.23), достаточно требовать существования вторых непрерывных производных функции $\mathcal{L}_t(t,x,U,U^{(1)})$ не на всем множестве $I \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times M(3\times 4)$, а лишь в некоторой окрестности графика отображения $(t,x) \to (U, U^{(1)})$.*

Вид граничных условий в пространственной бесконечности, получающихся при рассмотрении более широкого класса вариаций, чем $D_3(I \times \mathbf{R}^3)$ мы здесь не обсуждаем, откладывая это до рассмотрения более узкого класса функционалов в § 1.3.

§1.2 Идеальная среда

1.2.1 Опорные и текущие координаты.

В этом параграфе наша задача — выделение простейших моделей сплошной среды. Простейших в смысле обладающих естественными свойствами симметрии. Симметрия играет важную роль в физическом мире и удалённых фундаментальные законы сохранения. Однородность времени, которую мы будем называть далее стационарностью среды, удалённых закон сохранения энергии, однородность пространства удалённых закон сохранения импульса, а изотропность пространства — закон сохранения момента. Эти свойства симметрии мы будем рассматривать как свойства реальной физической среды, заполняющей бесконечное трёхмерное пространство.

Свойство среды при нашем подходе зависят от опорного состояния и выбора системы координат в опорном и текущем состояниях. При изменении опорного состояния или системы координат свойства идеальности среды могут исчезать. Поэтому речь здесь идет о выборе среды и опорного состояния с естественными свойствами симметрии — однородностью времени и однородностью и изотропностью пространства. Данные требования, как мы покажем, определяют вид плотности лагранжиана среды $\mathcal{L}$ с точностью до произвольной функции 6 переменных, а в случае линейной среды — с точностью до 4 числовых констант. Кроме того, данные требования симметрии приводят к модели сплошной среды с законами сохранения энергии, импульса, момента.

Итак, определяем среду функцией состояния $X(t,x)$, принимающей значения в $\mathbf{R}^3$ и представляющей собой пространственные декартовы координаты в момент времени $t \in \mathbf{R}$ точки среды с опорной координатой $x \in \mathbf{R}$. Что такое опорное состояние и опорные координаты x? Возможны две интерпретации этого понятия. Первая —

конкретная — рассмотрение опорного состояние как реального физического состояния среды, в котором она находилась в некоторый момент времени $t_0 \in \mathbf{R}$. При этом $x \in \mathbf{R}^3$ есть декартовы координаты точки в опорном состоянии. Вторая — абстрактная интерпретация опорных координат $x \in \mathbf{R}^3$ и опорного пространства просто как способа нумерации точек среды величиной $x \in \mathbf{R}^3$. В данном параграфе мы используем лишь декартовы прямоугольные координаты для опорных координат $x \in \mathbf{R}^3$ и текущих координат $X \in \mathbf{R}^3$, что с точки зрения математической означает , что линейные пространства $\mathbf{R}^3$ для переменной x и $\mathbf{R}^3$ для переменной X мы рассматриваем как евклидовы с каноническим скалярным произведением.

Для перехода к другим координатам в данном лагранжевом подходе мы рассматриваем $X(t,x)$ как отображение $(t,x) \to X$ или как отображение $X : W \to \mathbf{R}^3$ некоторой области $W \subset \mathbf{R}^3$, т.е. как систему трёх функций от четырех независимых аргументов. Поэтому мы можем проводить как замену аргументов $(t,x) \to (t',x')$, так и замену искомых функций $X \to X'$ совершенно не связанным образом. Для опорного состояния в переменных X можно, таким образом, выбирать *различные* никак не связанные системы координат.

Перейдем к формулировке основных аксиом идеальной среды.

1.2.2 Основные аксиомы идеальной среды. Мы будем предполагать, что задана плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ и для любой опорной подобласти $V \subset \mathbf{R}^4$ и функции $X : V \to \mathbf{R}^3$ класса $C_3^{(1)}(V)$ определено действие $L_V(X)$ как функционал вида

$$L_V(X) = \iiiint\limits_V \mathcal{L}\, dx_1 dx_2 dx_3 dt. \tag{1.2.1}$$

Для любой опорной подобласти $V \subset \mathbf{R}^4$ потребуем выполнения трёх аксиом.

I. Плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ является достаточно гладкой числовой функцией $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(t, x, X, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right)$ от 1+3+3+9+3=19 числовых аргументов.

II. Среда стационарна.

III. Величина действия не изменяется при собственных движениях среды.

Перейдем к толкованию сформулированных аксиом и извлечению следствий из них.

1.2.3 Аксиома I сужает класс допустимых действий как функционалов $L_V(X)$ на функциях $X : V \to \mathbf{R}^3$ до представления (1.2.1) с функцией $\mathcal{L}$ от 19 числовых переменных. Аксиома I ограничивает наше рассмотрение плотностями лагранжиана $\mathcal{L}$, не зависящими от производных второго и более высоких порядков функции $X(t,x)$. Что касается степени гладкости плотности лагранжиана $\mathcal{L}$, то мы будем использовать в зависимости от обсуждаемых проблем различные степени гладкости от класса F всех числовых функций на данном множестве до классов $C^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots \infty$. В частности, далее в этом параграфе в пунктах 1.2.4,1.2.5,1.2.6 мы рассматриваем функции $\mathcal{L}$ класса $C^{(1)}$.

Согласно аксиоме I плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ может рассматриваться как функция от 5 аргументов : $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^3$, $X \in \mathbf{R}^3$, $\frac{\partial X}{\partial x} \in M(3)$, $\frac{\partial X}{\partial t} \in \mathbf{R}^3$, — т.е. как функция, заданная на некотором подмножестве произведения

$$\mathcal{Z} \equiv \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times M(3) \times \mathbf{R}^3. \tag{1.2.2}$$

По физическому смыслу определитель $\mid \frac{\partial X}{\partial x} \mid > 0$, ибо равен коэффициенту изменения опорного объема в точке x, поэтому матричный четвертый аргумент функции $\mathcal{L}$ не обязан пробегать все пространство $M(3)$ и функция $\mathcal{L}$ может быть не определена на вырожденных матрицах, как это имело место в примере параграфа 1.1 с идеальным газом.

Далее в пунктах 1.2.4–1.2.6, поскольку мы описываем локально инвариантную функцию $\mathcal{L}$, нам достаточно для получения представления (1.2.27) предполагать, что функция $\mathcal{L} \in C^{(1)}(W)$, где W — некоторое открытое подмножество произведения (1.2.2). Тем не менее далее в пп. 1.2.4–1.2.6 мы предполагаем, что $\mathcal{L} \in C^{(1)}(\mathcal{Z})$.

Перейдем к обсуждению аксиомы II — аксиомы стационарности.

1.2.4 Аксиома II — аксиома стационарности. Пусть компактная область $V \subset \mathbf{R}^4$ имеет вид $V = [a, b] \times Q$, где Q — компактная область в $\mathbf{R}^3$, а область $V' \subset \mathbf{R}^4$ имеет вид $V' = [a+c, b+c] \times Q$, где $c \in \mathbf{R}$ константа. Аксиому стационарности мы понимаем следующим образом. Пусть есть два процесса движения среды с пространственным опорным объемом Q: процесс $X(t, x)$ при $t \in [a, b]$ и процесс $X'(t, x)$ при $t \in [a + c, b + c]$ — такие что

$$\forall t \in [a, b]\ \forall x \in Q \mid X(t, x) = X'(t + c, x), \tag{1.2.3}$$

т.е отличающиеся лишь сдвигом отсчета времени, тогда значения действия на этих процессах должны совпадать

$$L_V(X) = L_{V'}(X'). \tag{1.2.4}$$

В силу интегрального вида (1.2.1) функционала $L_V(X)$ равенство (1.2.4) запишем в интегральной форме

$$\iiiint\limits_V \mathcal{L}\left(t, x, X, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right) dx_1 dx_2 dx_3 dt = \iiiint\limits_{V'} \mathcal{L}\left(t', x', X', \frac{\partial X'}{\partial x'}, \frac{\partial X'}{\partial t'}\right) dx'_1 dx'_2 dx'_3 dt'. \tag{1.2.5}$$

Полагаем $x' = x$, $t' = t + c$ и перепишем соотношение (1.2.3) в форме

$$X(t, x) = X'(t', x') \tag{1.2.6}$$

Из (1.2.6) следует, что

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X'}{\partial x'} \tag{1.2.7}$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial X'}{\partial t'} \tag{1.2.8}$$

поэтому

$$\mathcal{L}\left(t', x', X', \frac{\partial X'}{\partial x'}, \frac{\partial X'}{\partial t'}\right) = \mathcal{L}\left(t', x, X, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right) \tag{1.2.9}$$

С учётом (1.2.9) равенство интегралов (1.2.5) принимает вид

$$\begin{gathered}
\int\limits_a^b \left(\iiint\limits_Q \mathcal{L}\left(t, x, X, \tfrac{\partial X}{\partial x}, \tfrac{\partial X}{\partial t}\right) dx_1 dx_2 dx_3\right) dt = \\
\int\limits_{a+c}^{b+c} \left(\iiint\limits_Q \mathcal{L}\left(t', x, X, \tfrac{\partial X}{\partial x}, \tfrac{\partial X}{\partial t}\right) dx_1 dx_2 dx_3\right) dt' = \\
\int\limits_a^b \left(\iiint\limits_Q \mathcal{L}\left(t + c, x, X, \tfrac{\partial X}{\partial x}, \tfrac{\partial X}{\partial t}\right) dx_1 dx_2 dx_3\right) dt.
\end{gathered} \tag{1.2.10}$$

Теперь рассмотрим точку $(t_0, x^0) \in V$, в которой функция $X(t,x)$ имеет непрерывные производные, причём функция $\mathcal{L}$ в соответствующей точке $z^0 \in \mathcal{Z}$ непрерывна и воспользуемся произвольностью интервала $[a,b]$, стягивая его к точке t_0, и объема Q, стягивая его к точке x^0. В пределе получим равенство

$$\mathcal{L}\left(t, x, X, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right) = \mathcal{L}\left(t + c, x, X, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right). \tag{1.2.11}$$

В силу произвольности константы $c \in \mathbf{R}$ равенство (1.2.11) означает, что функция 19 числовых переменных $\mathcal{L}$ не зависит от переменной $t \in \mathbf{R}$ и является функцией лишь 18 числовых переменных

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(x, X, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right). \tag{1.2.12}$$

Перейдем к рассмотрению аксиомы III.

1.2.5 Аксиома III — аксиома сохранения действия при собственных изометрических движениях трёхмерного пространства. Аксиома III разбивается в силу сказанного в п. 1.2.1 на две подаксиомы.

III.1. Величина действия не изменяется при собственных изометрических движениях в переменных $X \in \mathbf{R}^3$.

III.2. Величина действия не изменяется при собственных изометрических движениях в переменных $x \in \mathbf{R}^3$.

Т.е. мы требуем, чтобы при собственных изометрических перемещениях объема среды как в текущем,так и в опорном состоянии величина действия не изменялась.

Так как группа собственных изометрических движений пространства порождается объединением группы параллельных переносов и группы ортогональных поворотов, то каждая из аксиом III.1 и III.2 разбивается на 2 подаксиомы.

III.1.1. Величина действия не изменяется при параллельных переносах среды в текущем состоянии.

III.1.2. Величина действия не изменяется при ортогональных поворотах среды в текущем состоянии.

III.2.1. Величина действия не изменяется при параллельных переносах среды в опорном состоянии.

III.2.2. Величина действия не изменяется при ортогональных поворотах среды в опорном состоянии.

Пусть $V \subset \mathbf{R}^4$ тот же самый объем, что и в предыдущем пункте $V = [a,b] \times Q$.

Математическая формулировка аксиомы III.1.1 заключается в следующем. Пусть для опорного объема V рассматриваются два процесса $X(t,x)$ и $X'(t,x) = X(t,x) + C$, где $C \in \mathbf{R}^3$ постоянный вектор, тогда

$$L_V(X) = L_V(X') \tag{1.2.13}$$

В интегральном виде условие (1.2.13) есть

$$\iiiint\limits_V \mathcal{L}\left(t, x, X, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right) dx_1 dx_2 dx_3 dt = \iiiint\limits_V \mathcal{L}\left(t, x, X + C, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right) dx_1 dx_2 dx_3 dt.$$

Предполагая непрерывную дифференцируемость функции $X(t,x)$ и непрерывность функции $\mathcal{L}$ получаем в силу произвольности интервала $[a,b]$ и объема Q равенство

$$\mathcal{L}\left(t, x, X, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right) = \mathcal{L}\left(t, x, X + C, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right). \tag{1.2.14}$$

В силу произвольности $C \in \mathbf{R}^3$ это означает, что функция $\mathcal{L}$ при выполнении аксиомы III.1.1 не зависит от аргумента $X \in \mathbf{R}^3$.

Рассмотрение аксиомы III.2.1 аналогично рассмотрению аксиомы II предыдущего пункта. А именно, рассмотрим два опорных объема $V = [a, b] \times Q$ и $V' = [a, b] \times Q'$, $Q' = Q + c$, где $c \in \mathbf{R}^3$ — постоянный вектор. Рассмотрим процесс $X(t, x)$ с опорным объемом V и процесс $X'(t, x)$ с опорным объемом V' для которых текущие состояния совпадают

$$\forall x \in Q \ \forall t \in [a, b] \mid X(t, x) = X'(t, x') = X'(t, x + c) \tag{1.2.15}$$

Физически это означает,что процесс X' мы рассматриваем как суперпозицию двух физических движений: сначала параллельного переноса пространственного объема Q' в пространственный объем $Q = Q' - c$,а затем движения опорного состояния из точек x в точке $X(t, x)$. При этом величина плотности лагранжиана не меняется при переносе и не должна меняться величина получившегося действия.

$$L_V(X) = L_{V'}(X') \tag{1.2.16}$$

Или в интегральном виде

$$\int\limits_a^b \iiint\limits_Q \mathcal{L}\left(t, x, X, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right) dx_1 dx_2 dx_3\, dt = \int\limits_a^b \iiint\limits_{Q'} \mathcal{L}\left(t', x', X', \frac{\partial X'}{\partial x'}, \frac{\partial X'}{\partial t'}\right) dx'_1 dx'_2 dx'_3\, dt'. \tag{1.2.17}$$

Далее $t = t'$, $x' = x + c$ и в силу (1.2.15) верно $\frac{\partial X'}{\partial x'} = \frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial X'}{\partial t'} = \frac{\partial X}{\partial t}$, поэтому из (1.2.17) вытекает

$$\int\limits_a^b \iiint\limits_Q \mathcal{L}\left(t, x, X, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right) dx_1 dx_2 dx_3\, dt = \int\limits_a^b \iiint\limits_{Q'} \mathcal{L}\left(t, x + c, X, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right) dx_1 dx_2 dx_3\, dt. \tag{1.2.18}$$

Последнее соотношение в силу произвольности интервала $[a, b]$ и объема Q влечет равенство

$$\mathcal{L}\left(t, x, X, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right) = \mathcal{L}\left(t, x + c, X, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right), \tag{1.2.19}$$

т.е. в силу произвольности $c \in \mathbf{R}^3$ независимость функции $\mathcal{L}$ от аргумента $x \in \mathbf{R}^3$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(t, X, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right). \tag{1.2.20}$$

Итак, если выполнены аксиомы I, II, III.1.1, III.2.1, то функция $\mathcal{L}\left(t, x, X, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right)$ не зависит от аргументов t,x,X и является лишь функцией аргументов $\frac{\partial X}{\partial x} \in M(3)$ и $\frac{\partial X}{\partial t} \in \mathbf{R}^3$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right), \tag{1.2.21}$$

т.е. функцией от 9+3=12 вещественных переменных. В этом случае плотность лагранжиана задаётся функцией $\mathcal{L}(A, v)$, заданной на произведении $M(3) \times \mathbf{R}^3$, $A \in M(3)$, $v \in \mathbf{R}^3$.

Рассмотрим теперь какие ограничения на вид функции $\mathcal{L}(A,v)$ накладывают аксиомы III.1.2 и III.2.2. Пусть $G \in SO(3)$ матрица ортогонального поворота. Рассмотрим два процесса с одним и тем же опорным объемом $V \subset \mathbf{R}^4$ процесса $X(t,x)$ и $X'(t,x) = GX(t,x)$. Согласно аксиоме III.1.2 величины действий должны совпадать

$$L_V(X) = L_V(X')$$

При этом $\frac{\partial X'}{\partial x} = G\frac{\partial X}{\partial x}$ и $\frac{\partial X'}{\partial t} = G\frac{\partial X}{\partial t}$, поэтому получаем для значений в точке

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right) = \mathcal{L}\left(G\frac{\partial X}{\partial x}, G\frac{\partial X}{\partial t}\right).$$

Итак,аксиома III.1.2 влечет следующие требования к функции $\mathcal{L}(A,v)$

$$\forall (A,v) \in M(3) \times \mathbf{R}^3 \;\; \forall G \in SO(3) \mid \mathcal{L}(GA, Gv) = \mathcal{L}(A,v). \tag{1.2.22}$$

Пусть выполнена аксиома III.2.2. Рассмотрим два опорных объема $V = [a,b] \times Q$ и $V' = [a,b] \times Q'$, где $Q' = GQ$, а $G \in SO(3)$. Рассмотрим два процесса: процесс $X(t,x)$ с опорным объемом V и процесс $X'(t',x')$ с опорным объемом V', для которых текущие состояния одинаковы

$$X(t,x) = X'(t',x'), \;\; t' = t, \;\; x' = Gx. \tag{1.2.23}$$

Аксиома III.2.2 требует совпадения величин действия

$$L_V(X) = L_{V'}(X')$$

или в интегральном виде

$$\int\limits_a^b \iiint\limits_Q \mathcal{L}\left(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right) dx_1 dx_2 dx_3\, dt = \int\limits_a^b \iiint\limits_{Q'} \mathcal{L}\left(\frac{\partial X'}{\partial x'}, \frac{\partial X'}{\partial t'}\right) dx'_1 dx'_2 dx'_3\, dt'. \tag{1.2.24}$$

В силу (1.2.23) верны равенства $t' = t$, $x' = Gx$, $X' = X$, $\frac{\partial X'}{\partial x'}G = \frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial X'}{\partial t'} = \frac{\partial X}{\partial t}$. Проводя в правом интеграле в (1.2.24) замену переменных $x' = Gx$, получаем равенство

$$\iiiint\limits_V \mathcal{L}\left(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right) dx_1 dx_2 dx_3 dt = \iiiint\limits_V \mathcal{L}\left(\frac{\partial X}{\partial x}G^{-1}, \frac{\partial X}{\partial t}\right) dx_1 dx_2 dx_3 dt,$$

что влечет равенство значений подынтегральных функций или соотношение

$$\forall (A,v) \in M(3) \times \mathbf{R}^3 \;\; \forall G \in SO(3) \mid \mathcal{L}(AG, v) = \mathcal{L}(A,v). \tag{1.2.25}$$

Мы пришли к выводу, что аксиомы III.1.2 и III.2.2 накладывают требования (1.2.22) и (1.2.25) на функцию $\mathcal{L}(A,v)$.

Если функция $\mathcal{L}(A,v)$ определена, непрерывно дифференцируема на открытом множестве $\mathrm{GL}\,(3) \times \mathbf{R}^3 \subset M(3) \times \mathbf{R}^3$ и удовлетворяем условиям (1.2.22, 1.2.25), то согласно математическим результатам п. 6.4.5 можно утверждать следующее. Шесть функций $g_1(A,v), g_2(A,v), \ldots g_6(A,v)$ вида:

$$g_1(A,v) = \langle A, A\rangle = \langle AA^{\tau}, E\rangle,$$

$$g_2(A,v) = \langle (AA^\tau)^2, E\rangle,$$

$$g_3(A,v) = \det A,$$

$$g_4(A,v) = \langle v, v\rangle, \tag{1.2.26}$$

$$g_5(A,v) = \langle AA^\tau v, v\rangle,$$

$$g_6(A,v) = \langle (AA^\tau)^2 v, v\rangle$$

определены на $M(3) \times \mathbf{R}^3$ и удовлетворяют соотношениям (1.2.22, 1.2.25). Функции $g_1(A,v), g_2(A,v), \dots g_6(A,v)$ являются полиномами степеней $2,4,3,2,4,6$ соответственно и являются координатами полиномиального отображения $g : (M(3) \times \mathbf{R}^3) \to \mathbf{R}^6$. Скалярное произведение двух прямоугольных матриц A и B размеров $n \times m$ понимается как $\langle A, B\rangle \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{ij}$. Существует множество $B_s \subset \mathrm{GL}\,(3) \times \mathbf{R}^3$, которое мы называем *основным*, открытое и всюду плотное в $\mathrm{GL}\,(3) \times \mathbf{R}^3$. Во всех точках этого множества функции $g_1, g_2, \dots g_6$ функционально независимы. Если точка $(A^0, v^0) \in B_s$, то функция $\mathcal{L}(A,v)$ в некоторой окрестности точки (A^0, v^0) допускает представление

$$\mathcal{L}(A,v) = \varphi(g(A,v)), \tag{1.2.27}$$

где функция $\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^6)$.

Рассмотрим состояние $X(t,x) = x$, когда все координаты равны их опорным значениям во все моменты времени. Тогда $\frac{\partial X}{\partial x} = E$ — единичная матрица, $\frac{\partial X}{\partial t} = 0$ — нулевой вектор и $(\frac{\partial X}{\partial x}(t,x), \frac{\partial X}{\partial t}(t,x)) = (E, 0)$. Значение функции $g(E,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv s \in \mathbf{R}^6$ есть постоянный числовой вектор.

Точка $(E,0)$ не принадлежит основному множеству B_s согласно п. 1.2.6, поэтому из выполнения аксиом I-III сплошной среды и из доказанного нами не следует существования представления (1.2.27) в окрестности точки $(E,0)$. Кроме того, функция φ в представлении (1.2.27) зависит от окрестности и возможны, вообще говоря, разные функции φ в разных окрестностях. Поэтому введём дополнительное требование к аксиомам I-III в форме определения.

Определение 1.2.1 *Идеальной средой мы называем сплошную среду с плотностью лагранжиана $\mathcal{L}$ вида*

$$\mathcal{L} = \varphi\left(g\left(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right)\right), \tag{1.2.28}$$

где φ — функция, действующая из $\mathbf{R}^6$ в $\mathbf{R}$ определенная и трижды непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности точки $s \in \mathbf{R}^6$.

Пример 1.1.1 идеального газа, таким образом, есть пример идеальной среды, ибо верно представление (1.2.28) с функцией $\varphi(g) = \varphi(g_3, g_4) = \frac{1}{2} g_4 - \frac{3}{2}(g_3)^{-\frac{2}{3}}$.

Добавим теперь к аксиомам I-III требование линейности.

1.2.6 Требование линейности.

Определение 1.2.2 *Среду будем называть линейной, если плотность лагранжиана* $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(t, x, X, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right)$ *есть полином второй степени по переменным* $X, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}$ *с коэффициентами, зависящими от переменных* t, x.

Сравнивая определения 1.2.1 и 1.2.2, мы видим, что идеальная линейная среда — это среда с плотностью лагранжиана $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right)$ вида

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2}\left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial X}{\partial t}\right\rangle - \frac{\mu}{2}\left\langle \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial x}\right\rangle + C, \tag{1.2.29}$$

где ρ, μ, C — числовые константы данной идеальной среды.

1.2.7 Группа инвариантных преобразований действия идеальной среды. Зафиксируем на векторном пространстве $\mathbf{R}^3$ каноническую структуру евклидова пространства. Группа изометрических преобразований евклидова пространства $\mathbf{R}^3$ называется группой движений и обозначается нами $Mes(3)$. Каждое движение $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ имеет вид

$$g(x) = Q(x - a) \tag{1.2.30}$$

где Q принадлежит группе ортогональных матриц $O(3)$, $a \in \mathbf{R}^3$. Наоборот, любая пара $(Q, a) \in O(3) \times \mathbf{R}^3$ задаёт по формуле (1.2.30) движение $g \in Mes(3)$. При композиции движений

$$g_2 g_1(x) = g_2(Q_1(x - a_1)) = Q_2(Q_1(x - a_1) - a_2) = Q_2 Q_1(x - (a_2 + Q_1^{-1} a_2)).$$

Таким образом композиции $g_2 g_1$ соответствует пара $(Q_2 Q_1, a_1 + Q_1^\top a_2)$ и группа $Mes(3)$ допускает представление как матричная группа Ли, в алгебре квадратных вещественных матриц $M(4)$ с 4 строками и 4 столбцами

$$G \equiv \begin{pmatrix} & 0 \\ Q & 0 \\ & 0 \\ a^\top & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.2.31}$$

где $Q \in O(3)$, $a \in \mathbf{R}^3$. Связную компоненту единицы группы Ли $Mes(3)$ обозначим через $Mese(3) \subset Mes(3)$. Связная компонента единицы $Mese(3)$ состоит из всех матриц вида (1.2.31) с $Q \in SO(3) = Oe(3)$, где $Oe(3)$ — связная компонента единицы ортогональной группы $O(3)$. $Mese(3) \subset \mathrm{GL}\,(4)$ есть подгруппа Ли группы невырожденных матриц $\mathrm{GL}\,(4) \subset M(4)$ с алгеброй Ли, состоящей из всех матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} & 0 \\ V & 0 \\ & 0 \\ a^\top & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.32}$$

где $a \in \mathbf{R}^3$, $V \in Ma(3)$ — множеству кососимметричных матриц 3×3.

Произведение двух групп $Mese(3) \times Mese(3) \equiv Mese^2(3)$ есть связная группа Ли размерности 12, допускающая матричное представление в алгебре матриц $M(8)$ вида

$$g = (g_2, g_1) = \begin{pmatrix} G_2 & 0 \\ 0 & G_1 \end{pmatrix}, \tag{1.2.33}$$

где G_2, G_1 — квадратные матрицы вида (1.2.31).

Определим линейное представление $T_g : F_3(I \times \mathbf{R}^3) \to F_3(I \times \mathbf{R}^3)$ группы Ли $Mese^2(3)$ в группу линейных изоморфизмов векторного пространства $F_3(I \times \mathbf{R}^3)$ в себя вида.

$$T_g(X)(t, x) \equiv g_2^{-1}(X(t, g_1(x)). \tag{1.2.34}$$

Сужения операторов T_g на векторное пространства $C_3^{(1)}(I \times \mathbf{R}^3)$ или $D_3(I \times \mathbf{R}^3)$ также будут линейными изоморфизмами. По определению идеальной среды для неё верна аксиома III, поэтому выполнено соотношение

$$\forall g \in Mese^2(3) \mid L(T_g(X)) = L(X), \tag{1.2.35}$$

где $L(X)$ — действие идеальной среды, а $X \in C_3^(1)(I \times \mathbf{R}^3)$ — функция, на которой определено действие $L(X)$.

Если мы теперь рассмотрим функции $X(t, x)$, заданные во все моменты времени, т.е. $I = \mathbf{R}$ и $X \in C_3^{(1)}(\mathbf{R}^4)$, то группу преобразований $Mese^2(3)$ можно рассмотреть до связной группы Ли до размерности 13 с добавлением сдвига по времени. Обозначим эту группу Ли $Mste(3) \equiv Mese(3) \times Mese(3) \times \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ рассматривается как группа по сложению. Группа $Mste(3)$ допускает матричное представление $g \in Mste(3)$ есть $g = (g_3, g_1, c)$ и элементу g соответствует блочная матрица $G \in M(10)$ вида

$$G \equiv \begin{pmatrix} G_2 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}, \tag{1.2.36}$$

где матрицы G_1, G_2 имеют вид (1.2.31).

Расширенное антипредставление T_g группы Ли $Mste(3)$ будет

$$T_g(X) = g_2^{-1}(X(t - c, g_1(x))) \tag{1.2.37}$$

Если для функции $X \in C_3^{(i)}(\mathbf{R}^4)$ определено значение действия идеальной среды, то

$$\forall \in Mste(3) \mid L(T_g(X)) = L(X), \tag{1.2.38}$$

Итак, из аксиом II, III вытекает существование у действия идеальной среды $L(X)$ 13-параметрической группы преобразований, оставляющих действие неизменным.

1.2.8 Группа инвариантных преобразований действия в смещениях

Итак, группа изоморфизмов (1.2.37), являющаяся точным линейным антипредставлением группы Ли $Mste(3)$, оставляет инвариантным действие идеальной среды. Каждое T_g есть линейный изоморфизм линейного пространства функций $C_3^{(2)}(\mathbf{R}^4)$ на себя. Однако для моделирования частиц в п. 1.1.1 мы договорились использовать не все функции $X(t, x) \in C_3^{(1)}(\mathbf{R}^4)$ а лишь такие, которые представляют возмущения среды, исчезающие в пространственной бесконечности, т.е. такие что функция $U(t, x) \equiv X(t, x) - x$ исчезает в пространственной бесконечности (при $\mid x \mid \to \infty$) вместе с производным. Итак, частицам соответствуют лишь функции $X(t, x)$ вида

$$X(t, x) = U(t, x) + x, \tag{1.2.39}$$

где $U \in \bar{C}_{3,0}^{(1)}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3)$. Пусть $X_0(t, x) \equiv x$. Введём согласно сказанному подмножество функций $Dis \equiv X_0 + \bar{C}_{3,0}^{(1)}(\mathbf{R}^4) \subset C_3^{(1)}(\mathbf{R}^4)$. Преобразования T_g вида(1.2.37) уже могут не переводить функцию $X \in Dis$ в функцию $T_g(X) \in Dis$ — достаточно рассмотреть преобразование вида $T_g(X)(t,x) = X(t,x) - a_2$, $a_2 \in \mathbf{R}^3$ и $a_2 \neq 0$. Тогда $T_g(t,x) - x = X(t,x) - x - a_2$ не принадлежит $\bar{C}^{(1)}_{3,0}(\mathbf{R}^4)$,если функция $U(t,x) \equiv X(t,x) - x$ принадлежала $\bar{C}^{(1)}_{3,0}(\mathbf{R}^4)$.

Рассмотрим произвольную функцию $X \in Dis$ и найдем все те $g \in Mste(3)$, для которых $T_g(X) \in Dis$.Условие $T_g(X) \in Dis$ эквивалентно условию $(T_g(X) - x) \in \bar{C}^{(1)}_{3,0}(\mathbf{R}^4)$, но

$$T_g(X)(t,x) - x = Q_2^{-1}(X(t-c, Q_2(x-a_2)) + Q_2 a_2) - a. \qquad (1.2.40)$$

По условию функция $U(t,x) \equiv X(t,x) - x$ принадлежит пространству $C^{(1)}_{3,0}(\mathbf{R}^4)$, поэтому и функция $Q_2^{-1}U(t-c, Q_2(x-a_1))$ из пространства $\bar{C}^{(1)}_{3,0}(\mathbf{R}^4)$. Согласно (1.2.40) верно

$$\begin{aligned} T_g(X)(t,x) - x &= Q_2^{-1}(U(t-c, Q_1(x-a_1)) + Q_1(x-a_1) + Q_2 a_2) - x \\ &= Q_2^{-1}U(t-c, Q_1(x-a_1)) + (Q_2^{-1}Q_1 - E)x + (a_2 - Q_2^{-1}Q_1 a_1). \end{aligned} \qquad (1.2.41)$$

Для того, чтобы функция (1.2.42) принадлежала линейному пространству $\bar{C}^{(1)}_{3,0}(\mathbf{R}^4)$ необходимо и достаточно в силу предыдущего , чтобы функция $(Q_2^{-1}Q_1 - E)x + (a_2 - Q_2^{-1}Q_1 a_1)$ принадлежала линейному пространству $\bar{C}^{(1)}_{3,0}(\mathbf{R}^4)$, но это верно тогда и только тогда, когда верны равенства

$$Q_2 = Q_1; \qquad (1.2.42)$$

$$a_2 = a_1, \qquad (1.2.43)$$

т.е. в антипредставлении (1.2.37) $g_2 = g_1$.

Всюду далее я использую сокращение иф ≡ "тогда и только тогда, когда". Мы получили что для любой функции $X \in Dis$ соотношение $T_g(X) \in Dis$ верно иф $g_2 = g_1$. Множество элементов группы Ли $Mste(3)$, для которых $g_2 = g_1$ есть связная подгруппа Ли группы Ли $Mste(3)$, которую мы обозначим через $MsteO(3)$. Группа Ли $Msteo(3)$ имеет размерность 7 и изоморфна произведению группы собственных движений $Mese(3)$ на прямую $\mathbf{R}$.

Если функция $X(t,x)$ под действием преобразования T_g, $g \in Msteo(3)$ переходит в функцию $X'(t,x) \equiv T_g(X)(t,x)$, то функция $U(t,x) \equiv X(t,x) - x$ переходит в функцию

$$U'(t,x) \equiv X'(t,x) - x = Q_2^{-1}(U(t-c, Q_1(x-a_1)).$$

Если мы введём преобразование

$$S_q U(t,x) \equiv Q^{-1}(U)(t-c, Q(x-a)), \qquad (1.2.44)$$

где $q \equiv (Q,a,c)$ и $Q \in Oe(3)$, $a \in \mathbf{R}^3$, $c \in \mathbf{R}$, то формула (1.2.44) задаёт антипредставление группы $Msteo(3)$ в группу линейных изоморфизмов линейного пространства $F_3(\mathbf{R}^4)$, являющихся также линейными изоморфизмами линейного подпространства $\bar{C}^{(1)}_{3,0}(\mathbf{R}^4)$ на себя.

Замечание 1.2.1 *Если мы рассмотрим функции $X \in C^{(1)}_3(I \times \mathbf{R}^3)$ то аналогичные рассуждения будут справедливы в более узком классе преобразований без сдвига по времени, т.е. при $c = 0$ во всех формулах. При $c = 0$ получаем подгруппу $Meseo(3) \subset Msteo(3)$.*

Итак, преобразования (1.2.44) есть группа инвариантных преобразований действия $L_t(U) \equiv L(U+x) - L(X_0)$, $X_0 \equiv x$ в смещениях $U(t,x)$, исчезающих в пространственной бесконечности. Формула (1.2.44) есть не что иное как тензорный закон преобразования при котором аргументы x преобразуются с помощью ортогональной матрицы Q, а искомые функции смещений — с помощью обратной матрицы Q^{-1}.

1.2.9 Свойства инвариантности действия L_t. В этом параграфе мы определили плотность лагранжиана идеальной среды $\mathcal{L}\left(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right)$ формулой (1.2.28). В п. 1.1.5 лагранжиану $\mathcal{L}\left(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right)$ мы сопоставили плотность лагранжиана в смещениях $\mathcal{L}_t(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t}) = \mathcal{L}\left(E + \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t}\right) - \mathcal{L}(E,0)$. Рассмотрим теперь какими свойствами обладает действие L_t, если исходное действие L — действие идеальной среды.

Пусть числовая функция φ определена на открытом подмножестве $W \subset \mathbf{R}^6$, содержащим точку $s \in \mathbf{R}^6$. Рассмотрим свойства функции

$$\mathcal{L}_t(A,v) \equiv \varphi(g(E+A,v)) - \varphi(s), A \in M(3), v \in \mathbf{R}^3, \tag{1.2.45}$$

где $g(A,v)$ — отображение $g : M(3) \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, определенное формулами (1.2.26). Положим $Y \equiv g{-}1(W) - (E,O)$, $Y \subset M(3) \times \mathbf{R}^3$ — открытое множество, содержащее нуль, ибо отображение g непрерывно и $g(E,0) = s$.

Утверждение 1.2.1 *Пусть φ-числовая функция,определенная в открытой окрестности $W \subset \mathbf{R}^6$ точки $s \in \mathbf{R}^6$, тогда верны свойства:*
Свойство 1.

$$\forall (A,v) \in Y \forall Q \in SO(3) \mid (QAQ_{-1}, Qv) \in Y \tag{1.2.46}$$

Свойство 2.

$$\forall (A,v) \in Y \forall Q \in SO(3) \mid \mathcal{L}_t(QAQ_{-1}, Qv) = \mathcal{L}_t(A,v). \tag{1.2.47}$$

Свойство 3.

$$\mathcal{L}_t(0,0) = 0. \tag{1.2.48}$$

Доказательство. Свойство 3 следует из определяющей формулы (2.45). Далее, если $(A,v) \in Y$, то по определению множества Y верно $g(E+A,v) \in W$ и при любом $Q \in SO(3)$ верно

$$g(E + QAQ^{-1}, Qv) = g(Q(E+A)Q^{-2}, Qv) = g(E+A,v) \in W,$$

так как функции $g_i(A,v)$ вида (1.2.26) обладают свойствами (1.2.22, 1.2.25). Поэтому и $(QAQ^{-1}, Qv) \in Y$ и верно $\mathcal{L}_t(QAQ^{-1}, Qv) = \mathcal{L}_t(A,v)$.

Свойства 1,2 связаны с инвариантностью функционала.

Утверждение 1.2.2 *Пусть $Y \subset M(3) \times \mathbf{R}^3$ — открытая окрестность нуля со свойством 1, $\mathcal{L}_t(A,v)$ — числовая функция класса $C(Y)$ со свойством 2, функция $u \in C_3^{(1)}(I \times \mathbf{R}^3)$ и определена суперпозиция $\mathcal{L}_t(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x), \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)$, при всех $(t,x) \in I \times \mathbf{R}^3$. Тогда верно соотношение*

$$\forall g \in Meseo(3) \mid L_t(S_g(u)) = L_t(u), \tag{1.2.49}$$

причём интегральные функционалы $L_t(S_g(u)) = L_t(u)$ существуют или не существуют одновременно.

Доказательство. Если $g \in Meseo(3)$ и $q = (Q^{-1}, a, 0)$, то $S_g(u)(t,x) = Qu(t, Q^{-1}(x-a))$ и соответственно

$$\frac{\partial}{\partial x} S_g(u)(t,x) = Q \frac{\partial u}{\partial y}(t,y) Q^{-1} \mid_{y=Q^{-1}(x-a)}, \tag{1.2.50}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S_g(u)(t,x) = Q \frac{\partial u}{\partial t}(t,y) \mid_{y=Q^{-1}(x-a)} . \tag{1.2.51}$$

По свойству 2 тогда

$$\mathcal{L}_t \left(\frac{\partial}{\partial x} S_g(u)(t,x), \frac{\partial}{\partial t} S_g(u)(t,x) \right) = \mathcal{L}_t \left(Q \frac{\partial u}{\partial y}(t,y) Q^{-1}, Q \frac{\partial u}{\partial t}(t,y) \right) \mid_{y=Q^{-1}(x-a)} =$$

$$\mathcal{L}_t \left(\frac{\partial u}{\partial y}(t,y), \frac{\partial u}{\partial t}(t,y) \right) \mid_{y=Q^{-1}(x-a)}$$

Отображение $y(x)$ вида $y = Q^{-1}(x-a)$ есть изометрия пространства $\mathbf{R}^3$ на себя, поэтому

$$L_t(S_g(u)) = \int\limits_I \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{L}_t \left(\frac{\partial}{\partial x} S_g(u)(t,x), \frac{\partial}{\partial t} S_g(u)(t,x) \right) dx_1 dx_2 dx_3 dt =$$

$$\int\limits_I \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{L}_t \left(\frac{\partial u}{\partial y}(t,y), \frac{\partial u}{\partial t}(t,y) \right) dy_1 dy_2 dy_3 dt = L_t(u).$$

Свойство 2 сохраняется при взятии суперпозиции.

Утверждение 1.2.3 *Пусть числовые функции $\mathcal{L}_{t,i}(A,v)$, $i \in \overline{1,n}$ определены на открытой окрестности нуля $Y \subset M(3) \times \mathbf{R}^3$, являются функциями класса $C^{(k)}(Y)$, обладают свойствами 2 и 3, а множество Y обладает свойством 1. Пусть числовая функция $\varphi \in C^{(k)}(W)$, где $W \subset \mathbf{R}^n$ — открытая окрестность нуля. Тогда сложная функция $\mathcal{L}_t(A,v) \equiv \varphi(\vec{\mathcal{L}}_t(A,v))$, где $\vec{\mathcal{L}}_t(A,v) \equiv (\mathcal{L}_{t,1}(A,v), \mathcal{L}_{t,2}(A,v), \ldots \mathcal{L}_{t,n}(A,v))$ определена на открытой окрестности нуля $Y' \equiv \vec{\mathcal{L}}_t^{-1}(W) \subset M(3) \times \mathbf{R}^3$ и принадлежит классу $C^{(k)}(Y')$, причём множество Y' обладает свойством 1, а функция $\mathcal{L}_t(A,v)$ — свойством 2.*

Пусть теперь числовая функция $\mathcal{L}_t(A,v)$ определена на $M(3) \times \mathbf{R}^3$ и является полиномом степени m. Тогда для любых чисел $\lambda \in \mathbf{R}$, $\mu \in \mathbf{R}$ верно равенство

$$\mathcal{L}_t(\lambda A, \mu v) = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbf{N}_0^2 \\ i+j \leq m}} \mathcal{L}_{t,i,j}(A,v) \lambda^i \mu^j, \tag{1.2.52}$$

где $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbf{N}_0 \equiv \{0\} \cup \mathbf{N}$ и $\mathcal{L}_{t,i,j}(A,v)$ — полином однородный по A степени i и по v — степени j.

Утверждение 1.2.4 *Если полином $\mathcal{L}_t(A,v)$ обладает свойством 2 ($Y = M(3) \times \mathbf{R}^3$), то все полиномы $\mathcal{L}_{t,i,}j$ также обладают свойством 2.*

Доказательство. По условию верно равенство

$$\forall A \in M(3)\ \forall v \in \mathbf{R}^3\ \forall \lambda \in \mathbf{R}\ \forall \mu \in \mathbf{R}\ \forall Q \in SO(3)\ \mid \mathcal{L}_t(Q\lambda A Q_{-1}, Q\mu v) = \mathcal{L}_t(\lambda A, \mu v). \tag{1.2.53}$$

Согласно представлению (1.2.52) тогда

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}\ \forall \mu \in \mathbf{R} \mid \sum_{\substack{(i,j)\in \mathbf{N}_0^2\\ i+j\le m}} \mathcal{L}_{t,i,j}(QAQ^{-1}, Qv)\lambda^i\mu^j = \sum_{\substack{(i,j)\in \mathbf{N}_0^2\\ i+j\le m}} \mathcal{L}_{t,i,j}(A, v)\lambda^i\mu^j.$$

Но из равенства полиномов следует равенство их коэффициентов, поэтому

$$\forall (i,j) \in \mathbf{N}_0^2\ \forall A \in M(3)\ \forall v \in \mathbf{R}^3\ \forall Q \in SO(3) \mid \mathcal{L}_{t,i,j}(QAQ^{-1}, Qv) = \mathcal{L}_{t,i,j}(A, v).$$

Утверждения 1.2.1-1.2.4 позволяют из одних инвариантных действий строить другие.

§1.3 Простая среда. Среда Максвелла.

Цель настоящей работы — изучение возмущение сплошной среды и взаимодействий между ними. Согласно § 1.1 для этого мы аппроксимируем действие идеальной среды $L(X)$ квадратичным полиномом Тейлора в окрестности опорного состояния $X_0(t,x) \equiv x$.

Для действительной числовой функции действительного переменного $f(x)$ *линеаризацией* в точке x_0 называется переход от функции $f(x)$ к функции $f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)\triangle x$, где $\triangle x = x - x_0$, — линейной по $\triangle x$. Аналогично *квадратизацией* в точке x_0 мы называем переход от функции $f(x)$ к функции

$$f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 = f'(x_0)\triangle x + \frac{1}{2}f''(x_0)(\triangle x)^2$$

— квадратичному полиному Тейлора.Мы сохраним термины линеаризация и квадратизация и для дифференцируемых функционалов, заданных на подмножествах векторных пространств.

В данном случае квадратизация действия идеальной среды $L(X)$ в точке $X_0(t,x)$ есть переход от функционала $L(X)$ к функционалу $L_{ts}(U)$. Переход состоит из двух этапов. Сначала мы проводим замену переменных $X = X_0 + U$ и переходим к функционалу $L_t(x) \equiv L(X_0 + U) - L(X_0)$, что соответствует переходу от лагранжиана $\mathcal{L}(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t})$ к лагранжиану $\mathcal{L}_t(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t}) = \mathcal{L}(E + \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t}) - \mathcal{L}(E, 0)$. Далее от действия $L_t(U)$ мы переходим к его квадратичному полиному Тейлора $L_{ts}(U)$, что соответствует переходу от лагранжиана $\mathcal{L}_t(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t})$ — функции 9+3=12 числовых переменных к её полиному Тейлора второго порядка в нуле $\mathcal{L}_{ts}(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t})$.

1.3.1 Квадратизация действия идеальной среды в окрестности опорного состояния $X_0(t,x) \equiv x$**.** Плотность лагранжиана идеальной среды согласно определению 1.2.1 имеет вид

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right) = \varphi\left(g\left(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right)\right), \tag{1.3.1}$$

где компоненты вектор-функции $g : M(3) \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^6$ полиномы (1.2.26), а $\varphi \in C^{(3)}(W)$, где $W \subset \mathbf{R}^6$ некоторая окрестность точки $s \in \mathbf{R}^6$, $s^\top = (3,3,1,0,0,0)$. Чтобы перейти от функции (1.3.1) к её полиному Тейлора по $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t}$, рассмотрим сначала частные случаи, когда $\varphi(g) = g_i$, $i \in \overline{1,6}$, т.е. $\mathcal{L}(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}) = g_i(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t})$. При замене $X(t,x) = X_0(t,x) + U(t,x)$ имеем

$$\frac{\partial X}{\partial x} = E + \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}. \tag{1.3.2}$$

Далее $\frac{\partial U}{\partial x}$ заменяем в обозначениях на матрицу $A \in M(3)$, а $\frac{\partial U}{\partial t}$ на вектор $v \in \mathbf{R}^3$ и введём для удобства выкладок символ малости $\varepsilon \in \mathbf{R}$. Наша следующая задача написать полиномы $g_i(A,v)$ как сумму однородных полиномов. Мы используем здесь свойства скалярного произведения матриц из п. 6.1.1.

По формуле (1.2.26)

$$\begin{gathered} g_1(E+\varepsilon A, \varepsilon v) = \langle E+\varepsilon A, E+\varepsilon A\rangle = \\ \langle E,E\rangle + 2\varepsilon\langle A,E\rangle + \varepsilon^2\langle A,A\rangle = \\ 3 + 2\varepsilon\langle A,E\rangle + \varepsilon^2\langle AA^\top, E\rangle; \end{gathered} \tag{1.3.3}$$

$$\begin{gathered} g_2(E+\varepsilon A, \varepsilon v) = \langle((E+\varepsilon A)(E+\varepsilon A)^\top)^2, E\rangle = \\ \langle(E+\varepsilon(A+A^\top)+\varepsilon^2 AA^\top)^2, E\rangle = \langle E + 2\varepsilon(A+A^\top) + \varepsilon^2(2AA^\top + (A+A^\top)^2) + \\ \varepsilon^3((A+A^\top)AA^\top + AA^\top(A+A^\top)) + \varepsilon^4(AA^\top)^2, E\rangle = \\ 3 + \varepsilon 4\langle A,E\rangle + \varepsilon^2(4\langle AA^\top, E\rangle + 2\langle A^2, E\rangle) + \varepsilon^3 4\langle A^2, A\rangle + \varepsilon^4\langle (AA^\top)^2, E\rangle; \end{gathered} \tag{1.3.4}$$

$$g_3(E+\varepsilon A, \varepsilon v) = \det(E+\varepsilon A) = 1 + \varepsilon\langle A,E\rangle + \varepsilon^2 s_2(A) + \varepsilon^3 \det A, \tag{1.3.5}$$

где

$$s_2(A) \equiv \sum_{1\le\alpha<\beta\le 3} a_{\alpha\alpha}a_{\beta\beta} - a_{\beta\alpha}a_{\alpha\beta}; \tag{1.3.6}$$

Для функций g_4, g_5, g_6 аналогично имеем

$$g_4(E+\varepsilon A, \varepsilon v) = \varepsilon^2\langle v,v\rangle; \tag{1.3.7}$$

$$\begin{gathered} g_5(E+\varepsilon A, \varepsilon v) = \varepsilon^2\langle (E+\varepsilon A)(E+\varepsilon A)^\top v, v\rangle = \\ \varepsilon^2\langle (E+\varepsilon(A+A^\top)+\varepsilon^2 AA^\top)v, v\rangle = \varepsilon^2\langle v,v\rangle + \varepsilon^3 2\langle Av, v\rangle + \varepsilon^4\langle AA^\top v, v\rangle; \end{gathered} \tag{1.3.8}$$

$$\begin{gathered} g_6(E+\varepsilon A, \varepsilon v) = \varepsilon^2\langle((E+\varepsilon A)(E+\varepsilon A)^\top)^2 v, v\rangle = \\ \varepsilon^2\langle (E+\varepsilon(A+A^\top)+\varepsilon^2 AA^\top)^2 v, v\rangle = \\ \varepsilon^2\langle (E + \varepsilon 2(A+A^\top) + \varepsilon^2(2AA^\top + (A+A^\top)^2) + \varepsilon^3((A+A^\top)AA^\top + AA^\top(A+A^\top)) \\ +\varepsilon^4(AA^\top)^2)v, v\rangle = \varepsilon^2\langle v,v\rangle + \varepsilon^3 4\langle Av, v\rangle + \\ \varepsilon^4(2\langle AA^\top v, v\rangle + \langle A+A^\top)^2 v, v\rangle) + \\ \varepsilon^5 2\langle (A+A^\top)AA^\top v, v\rangle + \varepsilon^6\langle (AA^\top)^2 v, v)\rangle. \end{gathered} \tag{1.3.9}$$

Теперь перейдем к построению полинома Тейлора для функции $\mathcal{L}_t(A,v) = \varphi(g(E+A,v)) - \varphi(s)$ в точке (0,0) по аргументу $(A,v) \in M(3)\times\mathbf{R}^3$. Введём первые частные производные функции $\varphi(g)$ в точке $s \in \mathbf{R}^6$:

$$c_i \equiv \frac{\partial\varphi(g)}{\partial g_i}\Big|_g = s, \quad i \in \overline{1,6} \tag{1.3.10}$$

и матрицу $B \in M(3)$ из вторых частных производные в точке s вида

$$(B)_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial^2\varphi(g)}{\partial g_\alpha \partial g_\beta}\Big|_g = s;\ i \in \overline{1,3} \tag{1.3.11}$$

Применим формулу Тейлора к функции $\varphi(g)$ и учтём формулы (1.3.3-1.3.9), получим

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_t(\varepsilon A, \varepsilon v) = \varphi(g(E+\varepsilon A, \varepsilon v)) - \varphi(s) = \textstyle\sum_{i=1}^6 \frac{\partial\varphi}{\partial g_i}(s)(g_i - s_i) + \\ \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2\varphi}{\partial g_i \partial g_j}(s)(g_i - s_i)(g_j - s_j) + o(\varepsilon^2) = \\ c_1(\varepsilon 2\langle A, E\rangle + \varepsilon^2\langle AA^\top, E\rangle) + c_2(\varepsilon 4\langle A, E\rangle + \varepsilon^2(4\langle AA^\top, E\rangle + 2\langle A^2, E\rangle)) + \\ c_3(\varepsilon\langle A, E\rangle + \varepsilon^2 s_2(A)) + (c_4 + c_5 + c_6)\varepsilon^2\langle v, v\rangle + \varepsilon^2\tfrac{1}{2}\langle A, E\rangle^2 r + o(\varepsilon^2),\end{gathered} \tag{1.3.12}$$

где

$$r \equiv \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \tag{1.3.13}$$

Итак, квадратичный полином Тейлора $\mathcal{L}_{ts}(A, v)$ равен

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{ts}(A, v) = (2c_1 + 4c_2 + c_3)\langle A, E\rangle + \tfrac{1}{2}[(2c_1 + 8c_2)\langle AA^\top, E\rangle + \\ 4c_2\langle A^2, E\rangle + 2c_3 S_2(A) + r\langle A, E\rangle^2 + 2(c_4 + c_5 + c_6)\langle v, v\rangle].\end{gathered} \tag{1.3.14}$$

Между функциями $\langle A^2, E\rangle$, $s_2(A)$ и $\langle A, E\rangle^2$ имеет место следующая связь — формула (6.2.53):

$$\langle A^2, E\rangle = -2s_2(A) + \langle A, E\rangle^2. \tag{1.3.15}$$

Подставляя (1.3.15) в (1.3.14), получим $\mathcal{L}_{ts}(A, v)$ в эквивалентной форме

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{ts}(A, v) = (2c_1 + 4c_2 + c_3)\langle A, E\rangle + \tfrac{1}{2}[(2c_1 + 8c_2)\langle AA\rangle + \\ (r + 4c_2)\langle A, E\rangle^2 + (2c_3 - 8c_2)s_2(A) + 2(c_4 + c_5 + c_6)\langle v, v\rangle].\end{gathered} \tag{1.3.16}$$

Введём константы

$$\begin{gathered}\rho = 2(c_4 + c_5 + c_6), \\ \mu = -(2c_1 + 8c_2), \\ \chi = -(r + 4c_2), \\ \nu = -(c_3 - 4c_2).\end{gathered} \tag{1.3.17}$$

С их помощью полином $\mathcal{L}_{ts}(A, v)$ записывается в виде

$$\mathcal{L}_{ts}(A, v) = \frac{\rho}{2}\langle v, v\rangle - [(\mu + \nu)\langle A, E\rangle + \frac{\mu}{2}\langle A, A\rangle + \frac{\chi}{2}\langle A, E\rangle^2 + \nu s_2(A)]. \tag{1.3.18}$$

Вывод 1.3.1 *Квадратизация плотности лагранжиана идеальной среды* $\mathcal{L}(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t})$ *даёт следующую плотность лагранжиана*

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{ts}\left(\tfrac{\partial U}{\partial x}, \tfrac{\partial U}{\partial t}\right) = \tfrac{\rho}{2}\langle \tfrac{\partial U}{\partial t}, \tfrac{\partial U}{\partial t}\rangle - \Big[(\mu + \nu)\langle \tfrac{\partial U}{\partial x}, E\rangle + \tfrac{\mu}{2}\langle \tfrac{\partial U}{\partial x}, \tfrac{\partial U}{\partial x}\rangle + \\ \tfrac{\chi}{2}\langle \tfrac{\partial U}{\partial x}, E\rangle^2 + \nu s_2(\tfrac{\partial U}{\partial x})\Big].\end{gathered} \tag{1.3.19}$$

Определение 1.3.1 *Сплошную среду с плотностью лагранжиана в смещениях вида (1.3.19) назовём простой.*

Вывод 1.3.1 можно теперь сформулировать в следующей форме: квадратизация действия идеальной среды даёт действие простой среды.

Из формулы (1.3.18) мы видим, что плотность лагранжиана простой среды есть разница двух функций $\mathcal{L}_{ts}(A,v)=\mathcal{L}_c(v)-\mathcal{L}_d(A)$, где

$$\mathcal{L}_c(v)\equiv\frac{1}{2}\rho\langle v,v\rangle,\quad v\in\mathbf{R}^3, \tag{1.3.20}$$

$$\mathcal{L}_d(A)\equiv(\mu+\nu)\langle A,E\rangle+\frac{\mu}{2}\langle A,A\rangle+\frac{\chi}{2}\langle A,E\rangle^2+\nu\, s_2(A),\ A\in M(3), \tag{1.3.21}$$

из которых $\mathcal{L}_c(v)$ зависит лишь от вектора $v\in\mathbf{R}^3$, а $\mathcal{L}_d(A)$ — лишь от матрицы $A\in M(3)$. Величину $\mathcal{L}_c(\frac{\partial U}{\partial t})$ мы называем плотностью кинетической энергии, а величину $\mathcal{L}_d(\frac{\partial U}{\partial x})$ — плотностью энергии деформации. Интегралы по опорному пространственному объёму $V\subset\mathbf{R}^3$

$$\mathcal{E}c\equiv\iiint\limits_V\mathcal{L}_c\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)dx_1dx_2dx_3, \tag{1.3.22}$$

$$\mathcal{E}d\equiv\iiint\limits_V\mathcal{L}_d\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)dx_1dx_2dx_3 \tag{1.3.23}$$

мы называем кинетической и потенциальной энергией. Итак, действие простой среды может быть записано в виде

$$L_{ts}(U)=\int\limits_a^b\left(\mathcal{E}c\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)+\mathcal{E}d\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right)dt \tag{1.3.24}$$

для функции $U(t,x)\in C_3^{(1)}(I\times V)$, $I=[a,b]$.

1.3.2 Уравнения Эйлера простой среды. Далее мы используем тензорное обозначение о суммировании по повторяющимся индексам . Индексы обозначаются греческими буквами α,β, $\gamma,\ldots$ и пробегают значения 1,2,3. Например, выражение $s_{\alpha\beta}g_{\alpha\gamma}$ обозначает в традиционных обозначениях сумму $\sum_{\alpha=1}^3 s_{\alpha\beta}g_{\alpha\gamma}$.

Введём следующие массивы чисел от двух и трёх целочисленных переменных, принимающих значения 1,2,3. Символ Кронекера $\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}1, & \alpha=\beta;\\ 0, & \alpha\neq\beta\end{cases}$ и символ Леви-Чивиты $e_{\alpha\beta\gamma}$, такой что $e_{1,2,3}=1$ и массив $e_{\alpha\beta\gamma}$ антисимметричен, т.е. меняет знак при перестановке любых двух индексов. Величина $e_{\alpha\beta\gamma}$ принимает три значения $1,0,-1$. Массивы $\delta_{\alpha\beta}$ и $e_{\alpha\beta\gamma}$ связаны тождеством ([50], с.38):

$$e_{\gamma\beta\alpha}e_{\gamma\eta\xi}=\delta_{\alpha\xi}\delta_{\beta\eta}-\delta_{\alpha\eta}\delta_{\beta\xi};\quad\alpha,\beta,\xi,\eta\in\overline{1,3}. \tag{1.3.25}$$

Пусть $U(t,x)\in C_3^{(2)}(V)$, где $V\subset\mathbf{R}^4$ открытая или замкнутая область. С помощью символов Кронекера и Леви-Чивиты дивергенция и ротор записываются в виде следующих сумм.

$$div\,U=\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}(t,x), \tag{1.3.26}$$

$$(\,rot\,U)_\alpha=e_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial U_\gamma}{\partial x_\beta}(t,x). \tag{1.3.27}$$

Из тождества (1.3.25) следуют тождества

$$(rot\, U)^2 = \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}, \tag{1.3.28}$$

$$(rot\, U)^2 + (div\, U)^2 = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial U_{alpha}}{\partial x_\beta} + 2s_2(\frac{\partial U}{\partial x}), \tag{1.3.29}$$

где $s_2(\frac{\partial U}{\partial x})$ задаётся формулой (1.3.6).

Так как операция дифференцирования функционала линейна, то согласно формулам (1.1.12),(1.1.13) при любых числах $\lambda_1\lambda_2 \in \mathbf{R}^4$ и плотностях лагранжиана $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$, имеющих непрерывные вторые частные производные, при $\mathcal{L} = \lambda\mathcal{L}_1\lambda\mathcal{L}_2$ верны равенства

$$\mathcal{L}[U] = \lambda\mathcal{L}_1[U] + \lambda\mathcal{L}_2[U] \tag{1.3.30}$$

$$P[U] = \lambda_1 p_1[U] - \lambda_2 p_2[U], \tag{1.3.31}$$

для функции $U \in C_3^{(2)}(V)$, для которой определены $\mathcal{L}_1[U]$ и $\mathcal{L}_2[U]$ и $p_1[U]$, $p_2[U]$.

Рассмотрим следующие примеры плотностей лагранжиана $\mathcal{L}(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t})$ и соответствующих выражений $\mathcal{L}[U]$ и $p[U]$, согласно формулам (1.12),(1.13).

Пример 1.3.1

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\frac{\partial U}{\partial t})^2 = \frac{1}{2}\langle\frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial t}\rangle$. Тогда $\mathcal{L}[U]_\alpha = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}U_\alpha$. В векторном виде $\mathcal{L}[U] = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}U$. $p[U] = 0$.

Пример 1.3.2

$\mathcal{L} = div\, U = \delta_{\alpha\beta}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} = \langle\frac{\partial U}{\partial x}, E\rangle$. Тогда $\mathcal{L}[U]_\alpha = -\frac{\partial}{\partial x_\beta}\delta_{\alpha\beta} = 0$ и $p[U]_\alpha = \delta_{\alpha\beta}n_\beta = n_\alpha$. В векторном виде $\mathcal{L}[U] = 0, p[U] = n$.

Пример 1.3.3

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(div\, U)^2 = \frac{1}{2}\langle\frac{\partial U}{\partial x}, E\rangle^2 = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}\delta_{\xi\eta}\frac{\partial U_\xi}{\partial x_\eta}$. Тогда $\mathcal{L}[U]_\alpha = -\frac{\partial}{\partial x_\beta}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\xi\eta}\frac{\partial U_\xi}{\partial x_\eta} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\delta_{\xi\eta}\frac{\partial U_\xi}{\partial x_\eta} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\, div\, U$, $p[U]_\alpha = \delta_{\alpha\beta}n_\beta\delta_{\xi\eta}\frac{\partial U_\xi}{\partial x_\eta} = n_\alpha\, div\, U$. В векторном виде $\mathcal{L}[U] = -\, grad\ div\, U$, $p[U] = n\, div\, U$.

Пример 1.3.4

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(rot\, U)^2 = \frac{1}{2}e_{\gamma\beta\alpha}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}e_{\gamma\eta\xi}\frac{\partial U_\xi}{\partial x_\eta}$. Тогда $\mathcal{L}[U]_\alpha = -e_{\gamma\beta\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}e_{\gamma\eta\xi}\frac{\partial U_\xi}{\partial x_\eta} = e_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x_\beta}e_{\gamma\eta\xi}\frac{\partial U_\xi}{\partial x_\eta} = rot\,(rot\, U)_\alpha$, $p[U] = e_{\gamma\beta\alpha}n_\beta e_{\gamma\eta\xi}\frac{\partial U_\xi}{\partial x_\eta} = -e_{\alpha\beta\gamma}n_\beta e_{\gamma\eta\xi}\frac{\partial U_\xi}{\partial x_\eta} = -[n,\, rot\, U]_\alpha$. В векторном виде $\mathcal{L}[U] = \, rot\ rot\, U$, $p[U] = -[n,\, rot\, U]$.

Пример 1.3.5

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\langle\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial x}\rangle = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\xi\eta}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\xi}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\eta}$. Тогда $\mathcal{L}[U]_\alpha = -\delta_{\alpha\beta}\delta_{\xi\eta}\frac{\partial}{\partial x_\xi}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\eta} = -\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_\eta\partial x_\eta}$, $p[U]_\alpha = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\xi\eta}n_\xi\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\eta} = n_\eta\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\eta}$. В векторном виде $\mathcal{L}[U] = -\triangle U$, где $\triangle \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial_3^2}$ — оператор Лапласа, $p[U] = \frac{\partial U}{\partial x}n$.

Пример 1.3.6

$\mathcal{L} = s_2(\frac{\partial U}{\partial x}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\beta} - \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}) = \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\xi}\delta_{\beta\eta} - \delta_{\alpha\eta}\delta_{\beta\xi})\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\xi}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\eta}$. Тогда

$$\mathcal{L}[U]_\gamma = -\frac{1}{2}(\delta_{\gamma\xi}\delta_{\beta\eta} - \delta_{\gamma\eta}\delta_{\beta\xi})\frac{\partial}{\partial x_\xi}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\eta} - \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\xi}\delta_{\gamma\eta} - \delta_{\alpha\eta}\delta_{\gamma\xi})\frac{\partial}{\partial x_\eta}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\xi} =$$

$$[-\frac{1}{2}(\delta_{\gamma\xi}\delta_{\alpha\eta} - \delta_{\gamma\eta}\delta_{\alpha\xi}) - \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\xi}\delta_{\gamma\eta} - \delta_{\alpha\eta}\delta_{\gamma\xi})]\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_\xi \partial x_\eta} = 0.$$

Далее

$$p[U]_\gamma = \frac{1}{2}(\delta_{\gamma\xi}\delta_{\beta\eta} - \delta_{\gamma\eta}\delta_{\beta\xi})n_\xi\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\eta} + \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\xi}\delta_{\gamma\eta} - \delta_{\alpha\eta}\delta_{\gamma\xi})n_\eta\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\xi} =$$

$$\frac{1}{2}(\delta_{\gamma\xi}\delta_{\alpha\eta} - \delta_{\gamma\eta}\delta_{\alpha\xi})(n_\xi\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\eta} - n_\eta\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\xi}) = \frac{1}{2}(n_\gamma\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha} - n_\alpha\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\gamma} - n_\alpha\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\gamma} + n_\gamma\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha}) =$$

$$n_\gamma\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha} - n_\alpha\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\gamma}.$$

В векторном виде $\mathcal{L}(U) = 0$, $p[U] = n\,div\,U - (\frac{\partial U}{\partial x})^\top n$.

Из примеров 1.3.3-1.3.6 и тождества (1.3.29) следуют тождества

$$rot\ rot\,U - \ grad\ div\,U = -\triangle U \tag{1.3.32}$$

$$-[n,\,rot\,U] + n\,div\,U = \frac{\partial U}{\partial x}n + n\,div\,U - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^\top n,$$

т.е.

$$[n,\,rot\,U] = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^\top\right)n. \tag{1.3.33}$$

Из примеров 1.3.1-1.3.6 получаем для плотности лагранжиана простой среды $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}[U] = -\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}U + \mu\triangle U + \chi\,grad\ div\,U \tag{1.3.34}$$

или с учётом тождества (1.3.32)

$$\mathcal{L}[U] = -\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \mu\,rot\ rot\,U + (\mu+\chi)\,grad\ div\,U. \tag{1.3.35}$$

Для $p[U]$ получаем выражение

$$\begin{aligned} p[U] = -[(\mu+\nu)n + \mu\tfrac{\partial U}{\partial x}n + \chi n\,div\,U + \nu n\,div\,U - \nu(\tfrac{\partial U}{\partial x})^\top n] = \\ -[(\mu+\nu)n + (\chi+\nu)n\,div\,U + (\mu\tfrac{\partial U}{\partial x} - \nu(\tfrac{\partial U}{\partial x})^\top)n]. \end{aligned} \tag{1.3.36}$$

1.3.3 Свойства инвариантности действия простой среды. Если $L = L(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}) = g_i(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t})$, где $g_i(A, v)$ — одна из 6 функций (1.2.26), то функция $\mathcal{L}$ допускает представление (1.2.27) с функцией $\varphi(g) = g_i$ и является плотностью лагранжиана идеальной среды. Согласно утверждению 1.2.2 из п. 1.2.9 тогда соответствующие 6 функций $\mathcal{L}_t(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t})$ обладают свойством

$$\forall (A, v) \in M(3)\times\mathbf{R}^3\ \ \forall Q \in SO(3)\ \Big|\ \mathcal{L}_t(QAQ^{-1}, Qv) = \mathcal{L}_t(A, v) \tag{1.3.37}$$

и являются полиномами. Согласно утверждению 1.2.4 тогда и однородные по аргументам A и v полиномы, составляющие полиномы $\mathcal{L}_t(A, v)$, обладают свойством (1.3.37).

Из формул п. 1.3.2, где мы записали $g_i(E+A,v)$ в виде суммы однородных по A и v полиномов, и из утверждений 1.2.3, 1.2.4 вытекает, что следующие однородные полиномы $\mathcal{L}_t(A,v)$ обладают свойством (1.3.37):

$$\mathcal{L}_t = \langle A, E\rangle, \tag{1.3.38}$$

$$\mathcal{L}_t = \langle A, E\rangle^2, \tag{1.3.39}$$

$$\mathcal{L}_t = s_2(A), \tag{1.3.40}$$

$$\mathcal{L}_t = \langle A, A\rangle, \tag{1.3.41}$$

$$\mathcal{L}_t = \langle A^2, E\rangle, \tag{1.3.42}$$

$$\mathcal{L}_t = \langle v, v\rangle. \tag{1.3.43}$$

В силу утверждения 1.2.3, так как плотность лагранжиана простой среды есть полином от функций вида (1.3.38–1.3.43), то плотность лагранжиана простой среды также обладает свойством (1.3.37) и, следовательно, по утверждению 1.2.2 для действия простой среды L_{ts} при любом $q \in Meteo(3)$ и любой функции $U \in C_3^{(1)}(I \times \mathbf{R}^3)$ верно соотношение инвариантности

$$L_{ts}(S_q(U)) = L_{ts}(U) \tag{1.3.44}$$

причём левая и правая часть как интегралы сходятся и расходятся одновременно.

Если $I = \mathbf{R}$ и $U \in C_3^{(1)}(I \times \mathbf{R}^3)$, то соотношение (1.3.44) верно и при любом $q \in Msteo(3)$ в силу независимости функции $\mathcal{L}_t(t, x, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t})$ от аргументов t, x, U.

Итак, действие простой среды имеет 6-параметрическую группу инвариантных преобразований S_q, $q \in Meteo(3)$, а в случае $I = \mathbf{R}$ — 7-параметрическую группу инвариантных преобразований S_q, $q \in Msteo(3)$.

1.3.4 Об областях определения действий идеальной и простой среды. Пусть $L(X)$ — действие идеальной среды. Перейдем к действию в смещениях $L_t(U) \equiv L(X_0 + U) - L(X_0)$ и рассмотрим вопрос об области определения действия идеальной среды в смещениях $L_t(U)$ и действия простой среды $L_{ts}(U)$.

По определению 1.2.1 идеальной среды плотность лагранжиана идеальной среды представим в виде (1.3.1), где $g(A,v)$ — полиномы (1.2.26) от аргументов $A \in M(3)$, $v \in \mathbf{R}^3$, а $\varphi \in C^{(3)}(W)$, где $W \subset \mathbf{R}^6$ окрестность точки $s = g(E,0)$. Введём на векторном пространстве $M(3) \times \mathbf{R}^3$ норму

$$|\,(A,v)\,| \equiv \max\{\max_{\alpha,\beta \in \overline{1.3}}\{|\,a_{\alpha\beta}\,|\},\ \max_{\alpha \in \overline{1.3}}\{|\,v_\alpha\,|\}\} \tag{1.3.45}$$

и выделим при $\delta \in \mathbf{R}_+$ замкнутый шар с центром в нуле радиуса δ в пространстве $M(3) \times \mathbf{R}^3$ вида

$$G[\delta] \equiv \{(A,v) \in M(3) \times \mathbf{R}^3 \;\Big|\; |\,(A,v)\,| \le \delta\}. \tag{1.3.46}$$

Тогда для лагранжиана $\mathcal{L}_t(A,v) = \mathcal{L}(E+A,v) - \mathcal{L}(E,0) = \varphi(g(E+A,v)) - \varphi(s)$ справедлив вывод.

Вывод 1.3.2 *Для любой идеальной среды существует число $\delta > 0$, что $\mathcal{L}_t(A,v) \in C^{(3)}(G[\delta])$.*

Рассмотрим теперь, когда определена плотность лагранжиана $\mathcal{L}_t(\frac{\partial U}{\partial x}(t,x), \frac{\partial U}{\partial t}(t,x))$. Пусть $V \subset \mathbf{R}^4$ — замкнутая область. Через $C_n^{(k)}(V)$ мы обозначаем линейное пространство вектор-функций с n числовыми компонентами, каждая из которых имеет все непрерывные частные производные до порядка k включительно. Мы, вообще говоря, не предполагаем задания на линейном пространстве $C_n^{(k)}(V)$ нормы. Введём следующую преднорму $pc(U)$ определенную, вообще говоря, не на всех элементах $x \in C_n^{(k)}(V)$:

$$pc(U) \equiv \sup_{(t,x)\in V} \left| \left(\frac{\partial U}{\partial x}(t,x), \frac{\partial U}{\partial t}(t,x) \right) \right|. \tag{1.3.47}$$

Вывод 1.3.3 *Для любой идеальной среды существует число $\delta > 0$, что если $U \in C_3^{(1)}(V)$ и $pc(U) \le \delta$, то при всех $(t,x) \in V$ определена плотность лагранжиана $\mathcal{L}_t(\frac{\partial U}{\partial x}(t,x), \frac{\partial U}{\partial t}(t,x))$.*

Перейдем теперь к вопросу когда определено само действие $L_t(U)$. Рассмотрим два случая: первый — когда множество V компакт и второй — когда $V = I \times \mathbf{R}^3$. В случае компактности множества V для функции $U \in C_3^{(1)}(V)$ условия $pc(U) \le \delta$ достаточно для существования действия $L_t(U)$.

Прежде чем перейти ко второму случаю заметим, что из принадлежности $\mathcal{L}_t(A,v) \in C^{(3)}(G[\delta])$ вытекает справедливость утверждения.

Вывод 1.3.4 *Для любой идеальной среды существуют положительные числа δ,C, что для любой точки $(A,v) \in G[\delta]$ верно неравенство*

$$\mid \mathcal{L}_t(A,v) - \mathcal{L}_{ts}(A,v) \mid \le C \mid (A,v) \mid (\langle A,A\rangle + \langle v,v\rangle) \tag{1.3.48}$$

Формула (1.3.48) позволяет оценить разницу $L_t(U) - L_{ts}(U)$ значений действий идеальной среды и соответствующей простой среды.

Итак, пусть $V \subset \mathbf{R}^4$ — произвольная замкнутая область.

Лемма 1.3.1 *Для любой идеальной среды существуют положительные числа δ, C, что для любой функции $U \in C_3^{(4)}(V)$, удовлетворяющей условию $pc(U) \le \delta$, верно неравенство*

$$|L_t(U) - L_{ts}(U)| \le C pc(U) pw(U), \tag{1.3.49}$$

где

$$pw(U) \equiv \iiiint\limits_V \left(\left\langle \frac{\partial U}{\partial x}(t,x), \frac{\partial U}{\partial x}(t,x) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial U}{\partial t}(t,x), \frac{\partial U}{\partial t}(t,x) \right\rangle \right) dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt, \tag{1.3.50}$$

Неравенства (1.3.49) получаются интегрированием неравенств (1.3.48).

Введём пространство Соболева $W_{2,3}^{(1)}(V)$ как линейное пространство 3-вектор-функций на V, имеющих все обобщённые производные первого порядка, для которых конечна преднорма $pw(U)$. Мы не предполагаем, вообще говоря, задания нормы на $W_{2,3}^{(1)}(V)$.

Пусть $V = I \times \mathbf{R}^3$. Рассмотрим достаточные условия существования действия простой среды $L_{ts}(U)$ для $U \in C_3^{(1)}(V)$. Из вида (1.3.19) лагранжиана простой среды следует, что для функции $U \in C_3^{(1)}(V)$ действие $L_{ts}(U)$ существует, если выполнены два условия:

1)$pw(U) < \infty$,

2) существует интеграл

$$(\mu+\nu)\iiiint\limits_V div\, U(t,x)\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt. \tag{1.3.51}$$

В частности, при $\mu+\nu=0$ для существования действия $L_{ts}(U)$ достаточно принадлежности $U \in C_3^{(1)}(V) \cap W_{2,3}^{(1)}(V)$.

Из леммы 1.3.1 и вышеизложенного следует достаточное условие существования действия $L_t(U)$.

Лемма 1.3.2 *Для любой идеальной среды существует число $\delta > 0$, что если выполнены условия:*

1)$U \in C_3^{(1)}(V) \cap W_{2,3}^{(1)}(V)$,

2)$pc(U) \le \delta$,

3)существует интеграл (1.3.51), — то существует действие $L_t(U)$.

Следствие 1.3.1 *Если $\mu+\nu=0$, то лемма 1.3.2 верна без требования 3).*

Итак, для достаточно малых в смысле леммы 1.3.2 функций $U(t,x) \in C_3^{(1)}(V)$ существует действие $L_t(U)$.

Условия существования действия $L_t(U)$ упрощаются, если в представлении (1.3.1) лагранжиана идеальной среды потребовать, чтобы $\varphi \in C^{(3)}(\mathbf{R}^6)$. Введём

Условие 1. Пусть в представлении (1.3.1) лагранжиана идеальной среды функция $\varphi \in C^{(3)}(\mathbf{R}^6)$.

Из условия 1 следует, что и функция $L_t(A,b)$ из класса $C^{(3)}(M(3)\times\mathbf{R}^3)$, поэтому для любого компакта $K \subset M(3)\times\mathbf{R}^3$ существует число $C = C(K) > 0$, что для любой точки $(A,b) \in K$ верно неравенство (1.3.48). Если теперь $U \in C_3^{(1)}(V)$ и $pc(U) < \infty$, то по сказанному существует число $C = C(pc(U)) > 0$, что верно неравенство

$$|L_t(U) - L_{ts}(U)| \le C pc(U) pw(U).$$

Итак, если идеальная среда удовлетворяет условию 1, то для существования действия $L_t(U)$ достаточно выполнения условий: 1) $U \in C_3^{(1)}(V) \cap W_{2,3}^{(1)}(V)$, 2) $pc(U) < \infty$, 3) существует интеграл (1.3.51). Если $\mu+\nu=0$, то требование 3) излишне.

Согласно п. 1.1.3 мы в случае $V = I\times\mathbf{R}^3$ рассматриваем действие $L_t(U)$ на функциях $U \in \bar{C}_{3,0}^{(1)}(I\times\mathbf{R}^3)$. Класс $\bar{C}_{3,0}^{(1)}(I\times\mathbf{R}^3)$ мы определили как класс функций $U \in C_3^{(1)}(I\times\mathbf{R}^3)$, удовлетворяющих дополнительному условию исчезновения в пространственной бесконечности функций и их первых частных производных, более точно:

$$\forall t\in I\ \forall\varepsilon\in\mathbf{R}_+\ \exists A\in\mathbf{R}_+\ \forall x\in\mathbf{R}^3,\ |x|\ge A\ \Big| \tag{1.3.52}$$
$$(|U(t,x)|\le\varepsilon)\wedge\left(\left|\left(\frac{\partial U}{\partial x}(t,x),\frac{\partial U}{\partial t}(t,x)\right)\right|\le\varepsilon\right).$$

Введём более узкий класс функций $\bar{C}r_{3,0}^{(1)}(I\times\mathbf{R}^3)$, заменив условие (1.3.52) более сильным условием равномерного по $t\in I$ изчезновения в пространственной бесконечности функции и её первых частных производных

$$\forall\varepsilon\in\mathbf{R}_+\ \exists A\in\mathbf{R}_+\ \forall t\in I\ \ \forall x\in\mathbf{R}^3,\ |x|\ge A\ \Big| \tag{1.3.53}$$

$$(|u(t,x)| \le \varepsilon) \wedge \left(\left|\left(\frac{\partial U}{\partial x}(t,x), \frac{\partial U}{\partial t}(t,x)\right)\right| \le \varepsilon\right).$$

Если $U \in \bar{C}r^{(1)}_{3,0}(I \times \mathbf{R}^3)$, то $pc(U) < \infty$ и мы приходим к выводу.

Вывод 1.3.5 *Для идеальной среды с условием 1 и условием $\mu + \nu = 0$ для любой функции $U \in \bar{C}r^{(1)}_{3,0}(I \times \mathbf{R}^3) \cap W^{(1)}_{2,3}(I \times \mathbf{R}^3)$ существуют действия $L_t(U)$ и $L_{ts}(U)$.*

1.3.5 Консервативная среда

Определение 1.3.2 *Сплошная среда консервативна, если состояние $X(t,x) = x$ является её физическим состоянием.*

Выясним теперь когда идеальная среда и простая среда являются консервативными. Рассмотрим два случая: 1) $V = I \times Q$, где $Q \subset \mathbf{R}^3$ компактная область, 2) $V = I \times \mathbf{R}^3$.

В первом случае для вариации $h \in C^{(1)}_3(I \times Q)$, такой, что $h(a,x) = h(b,x) = 0$ при $x \in Q$, вариации $\delta L(x;h) = \delta L_t(o,h) = \delta L_{ts}(o,h)$ согласно формуле (1.11) и формулам (1.3.35, 1.3.36)

$$\delta L(x,h) = \delta L_t(o,h) = \delta L_{ts}(o,h) = -\int\limits_I \iint\limits_S (\mu+\nu)\langle n, h(t,x)\rangle d\sigma\, dt. \tag{1.3.54}$$

Итак, первые вариации действий идеальной и простой среды в точке $X_0(t,x) = x$ обращаются в нуль тогда и только тогда, когда

$$\mu + \nu = 0. \tag{1.3.55}$$

Это есть необходимое и достаточное условие консервативности идеальной и простой сред в случае компактной пространственной области. Для действия идеальной среды соотношение (1.3.55) есть линейное соотношение между первыми производными функциями φ в представлении (1.3.1) в точке s вида

$$-\left(2\frac{\partial\varphi(g)}{\partial g_1} + 4\frac{\partial\varphi(g)}{\partial g_2} + \frac{\partial\varphi(g)}{\partial g_3}\right)\Big|_{g=s} = 0. \tag{1.3.56}$$

Перейдем теперь к случаю $V = I \times \mathbf{R}^3$ и выясним когда функция $U_0(t,x) \equiv 0$ есть физическое состояние для действия $L_t(U)$, т.е. когда первая вариация $\delta L_t(0;h) = 0$ на классе допустимых вариаций $h(t,x) \in \mathcal{H}(I \times \mathbf{R}^3)$.

Сначала построим следующую функцию $h(t,x) \in C^{(\infty)}_3(I \times \mathbf{R}^3)$. Пусть $\psi(t)$ — неотрицательная бесконечно дифференцируемая числовая функция, определенная на отрезке $I = [a,b]$ с носителем внутри интервала $]a,b[$, причём $\int\limits_I \psi(t)dt = 1$. Пусть $\omega(r)$ бесконечно дифференцируемая числовая функция, заданная на $\mathbf{R}$, такая что $\omega(r) = \begin{cases} 0, |r| \le 1; \\ 1, |r| \ge 2. \end{cases}$. Положим при $x \in \mathbf{R}^3$

$$v(x) \equiv \frac{x}{|x|^3}\omega(|x|);\; h(t,x) \equiv \psi(t)v(x). \tag{1.3.57}$$

Для построенной функции $h(t,x)$ справедливы при $|x| \geq 2$ неравенства при любых $\alpha, \beta \in \overline{2,3}$:

$$|h_\alpha(t,x)| \leq \frac{1}{|x|^2} \sup_{t \in I} \psi(t), \tag{1.3.58}$$

$$\left| \frac{\partial h_\alpha(t,x)}{\partial t} \right| \leq \frac{1}{|x|^2} \sup_{t \in 1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial t}(t) \right|. \tag{1.3.59}$$

Далее при $|x| \geq 2$ верно

$$\frac{\partial h_\alpha(t,x)}{\partial x_\beta} = \psi(t) \frac{\delta_{\alpha\beta}|x|^3 - 3x_\alpha |x| x_\beta}{|x|^6} = \psi(t) \frac{\delta_{\alpha\beta} - 3\frac{x_\alpha x_\beta}{|x|^2}}{|x|^3}, \tag{1.3.60}$$

поэтому при $|x| \geq 2$ имеем

$$div\, h(t,x) = 0, \tag{1.3.61}$$

$$\left| \frac{\partial h_\alpha}{\partial x_p}(t,x) \right| \leq \frac{4}{|x|^3} \sup_{t \in 1} \psi(t). \tag{1.3.62}$$

Из неравенств (1.3.58, 1.3.59, 1.3.62) следует принадлежность $h \in \bar{C}r^{(1)}_{3,0}(I \times \mathbf{R}^3)$ и принадлежность $h \in W^{(1)}_{3,0}(I \times \mathbf{R}^3)$. Из равенства (1.3.61) следует существование интеграла

$$\int_I \iiint_{\mathbf{R}^3} div\, h(t,x)\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt. \tag{1.3.63}$$

Функция $h(t,x)$ обращается в нуль при $t = a$ и $t = b$, поэтому принадлежит классу допустимых выражений $\mathcal{H}(I \times \mathbf{R}^3)$ из п. 1.1.4. Согласно предыдущему пункту при любом $\alpha \in \mathbf{R}$ определено действие $L_{t,s}(\alpha h)$. Согласно же леммам 1,2 существует $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, что при $|\alpha| \leq \varepsilon$ существует действие $L_t(\alpha h)$ и справедлива оценка

$$|L_t(\alpha h) - L_{ts}(\alpha h)| \leq C_1 |\alpha|^3, \tag{1.3.64}$$

где $c_1 \in \mathbf{R}_+$.

Итак, при $|\alpha| \leq \varepsilon$ имеем

$$\delta L_t(0; \alpha h) = \delta L_{t,s}(0; \alpha h) = -\alpha(\mu + \nu) \int_I \iiint_{\mathbf{R}^3} div\, h\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt =$$

$$-\alpha(\mu + \nu) \int_I \psi(t)\, dt \iiint_{\mathbf{R}^3} div\, v(x)\, dx_1 dx_2 dx_3. \tag{1.3.65}$$

По условию $\int_I \psi(t)\, dt = 1$. С другой стороны, при $|x| \geq 2$ $div\, v(x) = 0$, поэтому

$$\iiint_{\mathbf{R}^3} div\, v(x)\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{|x| \leq 2} div\, v(x)\, dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$\iint_{|x|=2} \langle v, n \rangle\, d\sigma = \iint_{|x|=2} \frac{1}{|x|^2}\, d\sigma = 4\pi.$$

Таким образом, вариации (1.3.65) равны

$$\delta L_t(0; \alpha h) = \delta L_{t,s}(0; \alpha h) = -4\pi(\mu + \nu)\alpha \tag{1.3.66}$$

при $|\alpha| \le \varepsilon$ и первые вариации на допустимых функциях αh обращаются в нуль иф $\mu+\nu=0$. Итак, условие (1.3.55) необходимо как для консервативности идеальной среды, так и для консервативности простой среды в случае $V = I\times\mathbf{R}^3$. Достаточность условия (1.3.55) консервативности идеальной среды следует из того, что $L_t[0] \equiv 0$, $p[0] \equiv 0$ и формулы (1.1.11) для вариации в конечном объеме. Аналогично проверяется достаточность условия (1.3.55) для консервативности простой среды при $I \times \mathbf{R}^3$.

Рассмотрим пример п. 1.1.2 идеального газа. Согласно п. 1.2.5 тогда $\varphi(g) = \frac{1}{2}g_4 - \frac{3}{2}(g_3)^{-\frac{2}{3}}$ и $\mu+\nu = -((-\frac{3}{2})(-\frac{2}{3})g_3^{-\frac{5}{3}})|_{g_3=1} = -1$, т.е. идеальный газ — среда неконсервативная.

Мы приходим к следующим выводам, справедливым и в компактной области V и в случае $V = I \times \mathbf{R}^3$.

Вывод 1.3.6 *Идеальная среда консервативна иф верно (1.3.56). Простая среда консервативна иф верно (1.3.55).*

Вывод 1.3.7 *Если L — действие идеальной среды, то действия L_t и L_{ts} консервативны или нет одновременно.*

Условие консервативности простой среды сокращает число свободных параметров, задающих её плотность лагранжиана с четырех: ρ, μ, χ, ν до трёх: ρ, μ, χ, ибо $\nu = -\mu$.

1.3.6 Об одном слагаемом действия простой среды. Рассмотрим сначала одно свойство квадратичного функционала. Пусть Z — векторное пространство, $B(x,y)$, где $(x,y) \in Z^2$, — билинейная форма и

$$L(z) \equiv B(z,z), \quad z \in Z \tag{1.3.67}$$

— квадратичная форма. Тогда $L(z+h) = B(z+h,z+h) = B(z,z)+B(z,h)+B(h,z)+B(h,h) = L(z)+(B(z,h)+B(h,z))+B(h,h)$. Итак, производная квадратичного функционала в точке $z \in Z$ равна

$$\delta L(z;h) = B(z;h) + B(h;z). \tag{1.3.68}$$

При $z = h$ из формул (1.3.67, 1.3.68) получаем $B(2z,2z) = 2B(z,z) + \delta L(z;z)$. Откуда для квадратичного функционала $L(z)$ верна формула

$$L(z) = \frac{1}{2}\delta L(z;z). \tag{1.3.69}$$

связывающая значения квадратичного функционала в точке z и его производной в той же точке.

Рассмотрим теперь слагаемое $s_2(\frac{\partial U}{\partial x}(t,x))$, входящие в плотность лагранжиана простой среды с коэффициентом $-\nu$. Покажем, что в случае всего пространства $V = I \times \mathbf{R}^3$ в типичных для дальнейшего условия это слагаемое не даёт вклада в величину действия на основании леммы.

Лемма 1.3.3 *Если $U \in C_3^{(2)}(\mathbf{R}^3)$ и выполнено условие*

$$\exists C \in \mathbf{R}_+ \ \exists r \in \mathbf{R}_+ \ \forall\alpha \in \overline{1,3} \ \ \forall\beta \in \overline{1,3} \ \forall x \in \mathbf{R}^3, |x| \ge r \ \Big| \tag{1.3.70}$$

$$\left(|U_\alpha(x)| \le \frac{C}{|x|}\right) \wedge \left(\left|\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}(x)\right| \le \frac{C}{|x|^2}\right),$$

то существует по Лебегу интеграл

$$J \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} s_2\left(\frac{\partial U}{\partial x}(x)\right) dx_1\, dx_2\, dx_3 = 0. \qquad (1.3.71)$$

Доказательство. В силу (1.3.70) интеграл J существует по Лебегу и

$$J = \lim_{a\to\infty} J_a(U), \qquad (1.3.72)$$

где

$$J_a(U) \equiv \iiint\limits_{|x|\le a} s_2\left(\frac{\partial U}{\partial x}(x)\right) dx_1\, dx_2\, dx_3. \qquad (1.3.73)$$

Интеграл $J_a(U)$ — квадратичная форма от U, поэтому по формуле (1.3.69) верно

$$J_a(U) = \frac{1}{2}\delta J_a(U;U). \qquad (1.3.74)$$

Подставляя в (1.3.74) формулу (1.1.11) для вариации функционала в ограниченной области, получаем

$$J_a(U) = \frac{1}{2}\iiint\limits_{|x|\le a} \langle J_a[U], U\rangle\, dx_1\, dx_2\, dx_3 + \frac{1}{2}\iint\limits_{|x|=a} \langle p[U], U\rangle d\sigma. \qquad (1.3.75)$$

Согласно примеру 1.3.6 в данном случае $J_a[U] = 0$, $p[U] = \langle \frac{\partial U}{\partial x}(x), E\rangle n - (\frac{\partial U}{\partial x})^\top(x) n$. При $|x| \ge 2$ в силу условия (1.3.70) леммы верна оценка $|p[U]_\alpha| \le 6\frac{C}{|x|^2}$, $\alpha \in \overline{1,3}$. Поэтому при $a \ge r$ верна оценка

$$\Big|\iint\limits_{|x|=a} \langle p[U], U\rangle d\sigma\Big| \le 4\pi a^2 \cdot 3 \cdot \frac{6C}{a^2}\cdot\frac{C}{a} = \frac{72\pi C^2}{a}. \qquad (1.3.76)$$

Для функционала $J_a(U)$ получаем из формул (1.3.75, 1.3.76) оценку $|J_a(x)| \le \frac{36\pi C^2}{a}$ и следовательно $\lim\limits_{a\to\infty} J_a(U) = 0$, что в силу (1.3.72) доказывает равенство (1.3.71).

Итак, для функции $U(t,x) \in C_3^{(2)}(I \times \mathbf{R}^3)$, удовлетворяющих при каждом $t \in I$ условию убывания (1.3.70) по пространственным переменным, интеграл

$$\int\limits_I \iiint\limits_Q s_2\left(\frac{\partial U}{\partial x}(t,x)\right) dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt = 0 \qquad (1.3.77)$$

и не даёт вклада в действие простой среды. В случае же компактной пространственной области Q, и $V = I \times Q$ интеграл

$$\int\limits_I \iiint\limits_Q s_2\left(\frac{\partial U}{\partial x}(t,x)\right) dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt$$

вообще говоря, не равен нулю. В этом случае слагаемое $-\nu s_2(\frac{\partial U}{\partial x}(t,x))$ в лагранжиане простой среды не даёт вклада в уравнение Эйлера, но даёт вклад в граничное условие $p[U]|_\Gamma = 0$ на поверхности Γ области Q. В частном случае консервативной простой среды, т.е. при $\nu = -\mu$, граничное условие имеет вид согласно формуле (1.3.36):

$$\left[(\chi-\mu) n\, div\, U + \mu\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^\top\right) n\right]\Bigg|_\Gamma = 0, \qquad (1.3.78)$$

где n — вектор внешней единичной нормали к поверхности Γ.

1.3.7 Знак плотности энергии деформации Согласно формулам (1.3.20, 1.3.21) п. 1.3.1 плотность лагранжиана простой среды $\mathcal{L}_{t,s}(A,v) = \mathcal{L}_c(v) - \mathcal{L}_d(A)$, где функции $\mathcal{L}_c(v)$ и $\mathcal{L}_d(A)$ называется соответственно плотностью кинетической энергии и плотностью энергии деформации.

Функция $\mathcal{L}_c(v) = \frac{\rho}{2}\langle v, v\rangle$ имеет тот же знак, что и константа ρ при $v \neq 0$. В случае $\rho > 0$ функция $\mathcal{L}_c(v) \geq 0$ при всех $v \in \mathbf{R}^3$ и $\mathcal{L}_c(v) > 0$ при $v \neq 0$ и кинетическая энергия любого опорного пространственного объема Q

$$\mathcal{E}_c = \iiint\limits_Q \frac{\rho}{2}\left\langle \frac{\partial U}{\partial t}(t,x), \frac{\partial U}{\partial t}(t,x)\right\rangle dx_1\,dx_2\,dx_3$$

неотрицательна и равна нулю лишь если $\frac{\partial U}{\partial t}(t,x) \equiv 0$ в этом объёме.

Чтобы изучить знак функции $\mathcal{L}_d(A)$ вида (21) при $A \in M(3)$ сначала преобразуем выражение (1.3.21) представив матрицу A в виде суммы $A = C + D$ симметричной матрицы $C = \frac{1}{2}(A + A^\top)$ и кососимметричной матрицы $D = \frac{1}{2}(A - A^\top)$.

Заметим что линейное пространство квадратных вещественных матриц $M(n)$ есть прямая сумма линейного подпространства симметричных матриц $Ms(n)$ и кососимметричных матриц $Ma(n)$, так что разложение $A \in M(n)$ на сумму $A = C + D$, $C \in Ms(n)$, $d \in Ma(n)$ однозначно. При этом если $D \in Ma(n)$, то $\langle D, E\rangle = 0$, ибо $\langle D, E\rangle = \langle D^\top, E^\top\rangle = -\langle D, E\rangle$.

Используя свойства скалярного произведения матриц из §29 п.1, преобразуем сначала каждое из четырех слагаемых в первой части суммы (1.3.21).

$$\langle A, E\rangle = \langle C + D, E\rangle = \langle C, E\rangle \tag{1.3.79}$$

Далее

$$\langle A, A\rangle = \langle C + D, C + D\rangle = \langle C, C\rangle + 2\langle C, D\rangle + \langle D, D\rangle,$$

но

$$\langle C, D\rangle = \langle C^\top, D^\top\rangle = -\langle C, D\rangle.$$

Поэтому

$$\langle C, D\rangle = 0 \tag{1.3.80}$$

и

$$\langle A, A\rangle = \langle C, C\rangle + \langle D, D\rangle. \tag{1.3.81}$$

Согласно формуле (6.2.49) $s_2(A) = -\frac{1}{2}\langle A^2, E\rangle + \frac{1}{2}\langle A, E\rangle^2$. Поэтому

$$\begin{gathered} s_2(C+D) = -\tfrac{1}{2}\langle C + D, (C+D)^\top\rangle + \tfrac{1}{2}\langle C + D, E\rangle^2 = \\ -\tfrac{1}{2}\langle C + D, C - D\rangle + \tfrac{1}{2}\langle C, E\rangle^2 = -\tfrac{1}{2}\langle C, C\rangle + \tfrac{1}{2}\langle D, D\rangle + \tfrac{1}{2}\langle C, E\rangle^2. \end{gathered} \tag{1.3.82}$$

С помощью формул (1.3.79–1.3.82) приводим функцию $\mathcal{L}_d(A)$ вида (1.3.21) к форме

$$\mathcal{L}_d(C+D) = (\mu+\nu)\langle C, E\rangle + \frac{\mu}{2}\langle C, C\rangle + \frac{\mu}{2}\langle D, D\rangle + \frac{\chi}{2}\langle C, E\rangle^2$$

$$-\frac{\nu}{2}\langle C, C\rangle + \frac{\nu}{2}\langle D, D\rangle + \frac{\nu}{2}\langle C, E\rangle^2$$

или

$$\mathcal{L}_d(C+D) = (\mu+\nu)\langle C, E\rangle + \frac{\mu-\nu}{2}\langle C, C\rangle + \frac{\chi+\nu}{2}\langle C, E\rangle^2 + \frac{\mu+\nu}{2}\langle D, D\rangle. \tag{1.3.83}$$

В случае консервативной простой среды $\nu = -\mu$ и плотность энергии деформации имеет вид
$$\mathcal{L}_d(C + D) = \mu\langle C, C\rangle + \frac{\chi - \mu}{2}\langle C, E\rangle^2. \tag{1.3.84}$$

Из формулы (1.3.83) следует

Вывод 1.3.8 *Плотность энергии деформации $\mathcal{L}_d(A)$ простой среды обладает свойством*
$$\forall C \in Ms(3)\ \forall D \in Ma(3)\ \Big|\ \mathcal{L}_d(C + D) = \mathcal{L}_d(C) \tag{1.3.85}$$
тогда и только тогда, когда среда консервативна $\mu + \nu = 0$.

Итак, консервативная простая среда характеризуется среди всех простых сред следующим свойством: плотность энергии деформации $\mathcal{L}_d(\frac{\partial U}{\partial x})$ зависит лишь от симметричной составляющей $\frac{1}{2}(\frac{\partial U}{\partial x} + (\frac{\partial U}{\partial x})^\top)$ матрицы $\frac{\partial U}{\partial x}$. Введём по функции $U \in C_3^{(1)}(V)$ матричную функцию
$$\varepsilon(t, x) \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}(t, x) + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^\top(t, x)\right). \tag{1.3.86}$$

В традиционной теории упругости ([50], *с.*29) величины $\varepsilon_{\alpha\beta}(t, x)$, где $\alpha, \beta \in \overline{1,3}$ называются "тензором малых деформаций". Тогда для консервативной простой среды плотность энергии деформации
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_d\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \mathcal{L}_d(\varepsilon) = \mu\langle\varepsilon, \varepsilon\rangle + \frac{\chi - \mu}{2}\langle\varepsilon, E\rangle^2, \tag{1.3.87}$$

и соответствующие функции
$$\mathcal{L}[U]_\beta = -2\mu\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\varepsilon_{\beta\alpha} - (\chi - \mu)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\varepsilon_{\alpha\alpha}, \tag{1.3.88}$$
и
$$p[U]_\beta = (\chi - \mu)n_\beta\varepsilon_{\alpha\alpha} + 2\mu\varepsilon_{\beta\alpha}n_\alpha \tag{1.3.89}$$
выражаются только через величину $\varepsilon(t, x)$ согласно формулам (1.3.34, 1.3.36).

Приравнивая выражение для плотности энергии деформации (1.3.87) плотности работы деформации ([50], с.106, формула (6)) мы устанавливаем следующую связь введенных нами параметров простой среды μ, χ с параметрами Ламе μ, λ:
$$\mu = \mu, \tag{1.3.90}$$
$$\lambda = \chi - \mu. \tag{1.3.91}$$

Перейдем к вопросу о знаке плотности энергии деформации. Мы придерживаемся следующей терминологии здесь: числовая функция $f : Z \to \mathbf{R}$, определенная на векторном пространстве Z неотрицательна, если $f(z) \geq 0$ для всех значений $z \in Z$, и положительно определена, если $f(z) > 0$ при всех $z \in Z$ не равных нулю.

Рассмотрим сначала знак однородного полинома второй степени, входящего в $\mathcal{L}_\alpha(A)$, т.е. следующей квадратичной формы на векторном пространстве $M(3)$:
$$\varphi(A) \equiv \frac{\mu}{2}\langle A, A\rangle + \frac{\chi}{2}\langle A, E\rangle^2 + \nu s_2(A),\ A \in M(3). \tag{1.3.92}$$

Или разлагая матрицу A в сумму $A = C+D$, $C \in M_s(3)$, $D \in M_a(3)$, согласно формуле (83) верно

$$\varphi(C + D) = \frac{\mu - \nu}{2}\langle C, C\rangle + \frac{\chi + \nu}{2}\langle C, E\rangle^2 + \frac{\mu + \nu}{2}\langle D, D\rangle. \qquad (1.3.93)$$

Так как линейное пространство $M(3)$ есть прямая сумма линейных подпространств $Ms(3)$ и $Ma(3)$, то согласно (93) функция $\varphi(A)$ неотрицательна на $M(3)$ иф функция

$$\psi(C) \equiv \frac{\mu - \nu}{2}\langle C, C\rangle + \frac{\chi + \nu}{2}\langle C, E\rangle^2,\ C \in Ms(3) \qquad (1.3.94)$$

неотрицательна на векторном пространстве $Ms(3)$ и $\mu + \nu \geq 0$.

Линейное пространство симметричных матриц $Ms(3)$ в свою очередь является прямой суммой линейного подпространства диагональных матриц $Diag(3)$ и линейного пространства симметричных матриц с нулевой диагональю $Msgo(3)$. Если $C \in Ms(3)$, то $C = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & 0 & p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$, где $q \in \mathbf{R}^3$ и $p \in \mathbf{R}^3$. Поэтому имеем $\psi(C) = \frac{\mu-\nu}{2}(\langle p, p\rangle + \langle q, q\rangle) + \frac{\chi+\nu}{2}(q_1 + q_2 + q_3)^2$ или, если ввести вектор $h \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, то

$$\psi(C) = \frac{\mu - \nu}{2}\langle p, p\rangle + \frac{\mu - \nu}{2}\langle q, q\rangle + 3\frac{\chi + \nu}{2}\langle g, h\rangle^2. \qquad (1.3.95)$$

Квадратичная форма (95) неотрицательна иф $\mu - \nu \geq 0$ и квадратичная форма

$$\omega(q) = \frac{\mu - \nu}{2}\langle q, q\rangle + \frac{3}{2}(\chi + \nu)\langle g, h\rangle^2, \quad g \in \mathbf{R}^3 \qquad (1.3.96)$$

неотрицательна на векторном пространстве $\mathbf{R}^3$. Квадратичная форма (1.3.96) неотрицательна на $\mathbf{R}^3$, иф она не отрицательна на единичной сфере, т.е. $\min\limits_{\{q\in\mathbf{R}^3, |q|=1\}} \{\omega(q)\} \geq 0$. Но

$$\min_{\{q\in\mathbf{R}^3, |q|=1\}} \{\omega(q)\} = \frac{\mu - \nu}{2} + \frac{3}{2}\min_{\{q\in\mathbf{R}^3, |q|=1\}} \{(\chi + \nu)\langle q, h\rangle^2\} =$$

$$\frac{\mu - \nu}{2} + \frac{3}{2}\left\{\begin{array}{ll} 0, & \chi + \nu \geq 0 \\ (\chi + \nu), & \chi + \nu \leq 0 \end{array}\right\} = \frac{\mu - \nu}{2} + \frac{3}{2}min\{0, \chi + \nu\}$$

. Объединяя полученные ограничения, мы видим, что функция $\psi(C)$ неотрицательна иф

$$\left\{\begin{array}{l} \mu - \nu \geq 0, \\ \mu - \nu + 3\min\{0, \chi + \nu\} \geq 0, \end{array}\right.$$

что эквивалентно системе неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} \mu - \nu \geq 0, \\ \chi + \nu \geq -\frac{1}{3}(\mu - \nu). \end{array}\right. \qquad (1.3.97)$$

Соответственно функция $\varphi(A)$ неотрицательна иф

$$\left\{\begin{array}{l} \mu \geq |\nu|, \\ \chi + \nu \geq -\frac{1}{3}(\mu - \nu). \end{array}\right. \qquad (1.3.98)$$

Рассматривая снова проведенные рассуждения, мы видим, что квадратичная форма $\psi(C)$ положительно определена, иф

$$\begin{cases} \mu-\nu>0, \\ \mu-\nu>-\frac{1}{3}(\mu-\nu), \end{cases} \tag{1.3.99}$$

а квадратичная форма $\varphi(A)$ положительно определена, иф

$$\begin{cases} \mu>|\nu|, \\ \chi+\nu>-\frac{1}{3}(\mu-\nu). \end{cases} \tag{1.3.100}$$

Теперь заметим, что плотность энергии деформации простой среды есть сумма

$$\mathcal{L}_d(A)=(\mu+\nu)\langle A,E\rangle+\varphi(A) \tag{1.3.101}$$

однородного полинома первой степени $(\mu+\nu)\langle A,E\rangle$ и однородного полинома второй степени $\varphi(A)$ и перейдем к выводам.

Вывод 1.3.9 *Если плотность энергии деформации простой среды $\mathcal{L}_d(A)$ неотрицательна на векторном пространстве $M(3)$, то среда консервативна $\mu+\nu=0$.*

Вывод 1.3.10 *Плотность энергии деформации $\mathcal{L}_d(A)$ консервативной простой среды неотрицательна на векторном пространстве $M(3)$, иф $\mu\geq 0$, и $\chi\geq\frac{1}{3}\mu$.*

Вывод 1.3.11 *Ни для какой простой среды плотность энергии деформации $\mathcal{L}_d(A)$ не может быть положительно определена на $M(3)$, и её сужение $\mathcal{L}_d|_{Ms(3)}$ на векторное пространство $Ms(3)\subset M(3)$ также не может быть положительно определено.*

Однако, в отличии от кинетической энергии знак плотности энергии деформации и знак энергии деформации данного опорного объема простой среды связан более сложным образом, хотя бы в силу леммы 3.

1.3.8 Знак энергии деформации

Рассмотрим следующий интеграл по всему пространству от квадратичной части (1.3.92) плотности энергии деформации

$$J(U)\equiv\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x)\right)dx_1\,dx_2\,dx_3, \tag{1.3.102}$$

предполагая, что функция $U(x)\in C_3^{(2)}(\mathbf{R}^3)$ и удовлетворяет условиям убывания в пространственной бесконечности (1.3.70) леммы 3. Тогда по лемме 3 верно

$$\begin{aligned} J(x)=\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\left(\tfrac{\mu}{2}\left\langle\tfrac{\partial U}{\partial x}(x),\tfrac{\partial U}{\partial x}(x)\right\rangle+\tfrac{\chi}{2}\left\langle\tfrac{\partial U}{\partial x}(x),E\right\rangle^2+\nu s_2\left(\tfrac{\partial U}{\partial x}(x)\right)\right)dx_1\,dx_2\,dx_3= \\ \iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\left(\tfrac{\mu}{2}\left\langle\tfrac{\partial U}{\partial x}(x)\tfrac{\partial U}{\partial x}(x)\right\rangle+\tfrac{\chi}{2}\left\langle\tfrac{\partial U}{\partial x}(x),E\right\rangle^2\right)dx_1\,dx_2\,dx_3. \end{aligned} \tag{1.3.103}$$

Если выполнены условия (1.3.98), то при всех $x\in\mathbf{R}^3$ верно $\varphi(\frac{\partial U}{\partial x}(x))\geq 0$ и следовательно $J(U)\geq 0$. Итак, если функция $U\in C_3^{(2)}(I\times\mathbf{R}^3)$ удовлетворяет по пространственным переменным $x\in\mathbf{R}^3$ условиям леммы 3, то для любых значений параметров $\mu,\ \chi,\ \nu$, удовлетворяющих условиям (1.3.98), интеграл

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\left(\frac{\mu}{2}\left\langle\frac{\partial U}{\partial x}(x),\frac{\partial U}{\partial x}(x)\right\rangle+\frac{\chi}{2}\left\langle\frac{\partial U}{\partial x}(x),E\right\rangle^2\right),dx_1\,dx_2\,dx_3. \tag{1.3.104}$$

неотрицателен.

Вывод 1.3.12 *Если $\mu \geq 0$, $\chi \geq -\mu$, то для функции $U \in C_3^{(2)}(I \times \mathbf{R}^3)$, удовлетворяющих условиям убывания в пространственной бесконечности (1.3.70) по пространственным переменным, интеграл (1.3.104) неотрицателен.*

1.3.9 Среда Максвелла. Пусть $\mathcal{L}$ — плотность лагранжиана идеальной среды, $\mathcal{L}_t$ — соответствующая плотность лагранжиана в смещениях, $\mathcal{L}_{t,s}$ — соответствующая плотность лагранжиана простой среды. Пусть $\mathcal{L}_{tr} \equiv \mathcal{L}_t - \mathcal{L}_{ts}$. Если функция $U \in C_3^{(2)}(V)$ есть физическое состояние идеальной среды в смещениях, то выполнены уравнения Эйлера в области V вида $\mathcal{L}_t[U] = 0$, но $\mathcal{L}_t[U] = \mathcal{L}_{ts}[U] + \mathcal{L}_{tr}[U]$ по построению, поэтому для физического состояния идеальной среды выполнены условия.

$$\mathcal{L}_{ts}[U] = -\mathcal{L}_{tr}[U] \tag{1.3.105}$$

в области V. Введём обозначение $j \equiv -\mathcal{L}_{tr}[U]$ и запишем уравнение Эйлера (105) в форме

$$\mathcal{L}_{ts}[U] = j, \tag{1.3.106}$$

где величину $j \in C_3(V)$ мы назовём вектором плотности тока.

Подставим вид оператора $\mathcal{L}_{ts}[U]$ для простой среды согласно формуле (1.3.35) и запишем уравнения (1.3.106) в виде

$$-\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \mu\, rot\ rot\, U + (\mu + \chi)\, grad\ div\, U = j. \tag{1.3.107}$$

Введём следующие вектор-функции

$$E \equiv -\frac{\partial U}{\partial t}(t, x), \tag{1.3.108}$$

$$H \equiv\ rot\, U(t, x). \tag{1.3.109}$$

Тогда уравнения (1.3.107) принимают вид

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} E - \mu\, rot\, H + (\mu + \chi)\, grad\ div\, U = j. \tag{1.3.110}$$

Введём функцию

$$\rho(t, x) \equiv\ div\, \frac{\partial U}{\partial t}(t, x) = -\, div\, E. \tag{1.3.111}$$

Из определяющих формул (1.3.108, 1.3.109) вытекают кинематические следствия

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\, rot\, E, \tag{1.3.112}$$

$$div\, H = 0. \tag{1.3.113}$$

Если параметры μ, χ связаны соотношением

$$\mu + \chi = 0, \tag{1.3.114}$$

то система 4 уравнений (1.3.110, 1.3.111, 1.3.112, 1.3.113) образует систему 4 уравнений Максвелла в вакууме.

Определение 1.3.3 *Средой Максвелла мы называем простую среду с параметрами $\rho > 0, \mu > 0, \chi = -\mu, \nu = -\mu$.*

Итак, среда Максвелла — это простая среда с двумя дополнительными условиями на 4 задающих среду параметра ρ, μ, χ, ν вида $\chi = -\mu, \nu = -\mu$, или консервативная простая среда с одним дополнительным условием на параметры $\chi = -\mu$. Плотность лагранжиана среды Максвелла равен

$$\mathcal{L}_{ts}\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{2}\left\langle\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t}\right\rangle - \frac{\mu}{2}\left(\left\langle\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial x}\right\rangle - \left\langle\frac{\partial U}{\partial x}, E\right\rangle^2 - 2s_2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right), \quad (1.3.115)$$

или учитывая тождество (1.3.29),

$$\mathcal{L}_{ts}\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \frac{\mu}{2}\left((\,rot\, U)^2 - 4s_2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right). \quad (1.3.116)$$

Плотность энергии деформации среды Максвелла не является неотрицательной, ибо соотношения (1.3.98) при $\nu = -\mu$ $\chi = -\mu, \mu > 0$ не выполняются. Однако, для функций $U \in C_3^{(2)}(I \times \mathbf{R}^3)$, удовлетворяющих условиям убывания в пространственной бесконечности (1.3.70) леммы 3, согласно выводу 12, интеграл (1.3.104), равный полной энергии деформации, неотрицателен и равен по лемме 3 интегралу

$$\mathcal{E}_d(U) = \frac{\mu}{2}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\left((\,rot\, U)^2 - 4s_2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right) dx_1\, dx_2\, dx_3 = \frac{\mu}{2}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}(\,rot\, U)^2\, dx_1\, dx_2\, dx_3. \quad (1.3.117)$$

Проведём нормировочную замену переменных

$$\mathcal{M} = \frac{1}{\mu}\mathcal{L}_{ts}, \ c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \ x_0 = ct \quad (1.3.118)$$

и запишем следующую плотность лагранжиана Максвелла

$$\mathcal{M}\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial U}{\partial x_0}\right)^2 - (\,rot\, U)^2\right) + 2s_2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right). \quad (1.3.119)$$

Соответственно,

$$\mathcal{M}[U] = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_0^2} - \,rot\ rot\, U = \frac{1}{\mu}\mathcal{L}_{ts}[U]. \quad (1.3.120)$$

Запишем теперь систему уравнений Максвелла в нормированных переменных. По функции $U(x_0, x) \in C_3^{(2)}(V)$ построим следующие три вектор-функции

$$E(x_0, x) = -\frac{\partial U}{\partial x_0}(x_0, x), \quad (1.3.121)$$

$$H(x_0, x) = \,rot\, U(x_0, x), \quad (1.3.122)$$

$$j(x_0, x) = \frac{1}{\mu}\mathcal{L}_{tr}[U] \quad (1.3.123)$$

и скалярную функцию

$$\rho = \,div\, \frac{\partial U}{\partial x_0}(x_0, x) = -\,div\, E(x_0, x). \quad (1.3.124)$$

Тогда уравнение (1.3.107) переходит в уравнение

$$\frac{\partial E}{\partial x_0} = rot\, H + j. \tag{1.3.125}$$

Соотношения (1.3.121, 1.3.122) дают кинематические следствия

$$\frac{\partial H}{\partial x_0} = -\, rot\, E, \tag{1.3.126}$$

$$div\, H = 0. \tag{1.3.127}$$

Система 4 уравнений (1.3.124 – 1.3.127) есть искомая система уравнений Максвелла в вакууме в нормированных переменных.

1.3.10 Соотношения введённых понятий. Мы ввели следующие виды сред: идеальная, линейная, простая, консервативная, среда Максвелла. Как связаны эти понятия между собой ?

Всякая простая среда линейна по построению данного параграфа.

Если среда идеальна и линейна, то согласно п. 1.2.6 её плотность лагранжиана есть

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{2}\left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial X}{\partial t}\right\rangle - \frac{\mu}{2}\left\langle \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial x}\right\rangle + C. \tag{1.3.128}$$

и соответственно

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{2}\left\langle \frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial t}\right\rangle - \frac{\mu}{2}\left(\left\langle \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial x}\right\rangle + 2\left\langle \frac{\partial U}{\partial x}, E\right\rangle\right). \tag{1.3.129}$$

Если среда идеальная и простая, то она идеальна и линейна, поэтому её плотность лагранжиана $\mathcal{L}_t$ имеет вид (1.3.129). Итак, простая среда идеальна иф $\chi = 0$ и $\nu = 0$.

Среда консервативная идеальная и простая, если плотность лагранжиана $\mathcal{L}_t$ имеет вид (1.3.129) и $\mu = 0$. Итак, всякая консервативная простая идеальная среда имеет плотность лагранжиана

$$\mathcal{L}_t\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{2}\left\langle \frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial t}\right\rangle, \tag{1.3.130}$$

т.е. является пылью. В частности, среда Максвелла простая консервативная, но не идеальная.

Из аксиом I, II, III идеальной среды среда Максвелла не удовлетворяет аксиоме III. Более точно, если мы разобьём аксиому III на четыре подаксиомы III.1.1, III.1.2, III.2.1, III.2.2 согласно п. 1.2.5, то подаксиомы III.1.1 и III.2.1 независимости действия от параллельных переносов выполняются, а подаксиомы III.1.2 и III.2.2 независимости от ортогональных поворотов могут нарушаться.

Глава 2

Переход к 4-функциям. Группы преобразований функций состояния и токов.

Действия или плотности лагранжианов называются *эквивалентными*, если их уравнения Эйлера совпадают. Описываются эквивалентные квадратичные действия (§2.1). Действие Максвелла $M(u)$ является функционалом на 3-вектор-функциях от 4 переменных $u(x) \in \mathbf{R}^3$, $x \in \mathbf{R}^4$. Проводится переход к эквивалентному действию $Ms(u)$ и проводится операторная замена переменных замена Максвелла $u = Bu$, где $u(x)$ — 4-вектор функция от 4 переменных. Получается действие Лоренца $N(u)$. Показано как любое решение уравнения Эйлера для действия Максвелла получается из соответствующего решения уравнения Эйлера для действия Лоренца. Оператор Эйлера для действия Лоренца называется базовым оператором — это линейный дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами, действующий на 4-вектор-функциях.

Далее в §2.3 применяется замена переменных, состоящая в линейном преобразовании аргументов для преобразования линейного дифференциального оператора второго порядка с постоянным коэффициентом в общем случае. В связи с этим в §2.4 проводится изучение группы матриц $\Omega(A), A \in M(n)$ состоящей из матриц

$G \in M(n)$, таких что $GAG^\top = A$. При $A = \Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ группа $\Omega(\Theta) = O(1,3)$ есть матричное представление группы Лоренца. В §2.5 введены операторы $T(u)(x) \equiv G^\top u(G(x))$ и $\widetilde{T}(u)(x) \equiv G^{-1}u(G(x))$ и показано, что $N(T(u)) = (u)$ и $AT = \widetilde{T}A$. Операторы T оставляют неизменной величину действия и переводят решение уравнения Эйлера снова в решение.

§2.1 Эквивалентные квадратичные действия

Каждому действию однозначно соответствует его уравнение Эйлера, которые мы и называем уравнением движения системы, но одному и тому же уравнению Эйлера могут соответствовать разные действия. Действия или плотности лагранжианов, которым соответствуют одинаковые уравнения Эйлера, мы называем *эквивалентными*. Действие (плотность лагранжиана), уравнение Эйлера для которого выполняется для любой допустимой функции, назовём тривиальным.

Рассматривая плотности лагранжианов, имеющие вид полиномов второго порядка от первых частных производных неизвестных функций по аргументам, можно заметить, что добавление к плотности лагранжиана константы или первой частной производной функции с постоянным коэффициентом не меняет уравнений Эйлера. Поэтому здесь мы рассмотрим вопрос о том, какие однородные полиномы второй степени от первых производных функций имеют одинаковые уравнения Эйлера?

Здесь и далее мы пользуемся тем, что уравнения Эйлера линейно зависят от лагранжиана.

Рассматриваются m функций $u_1(x), u_2(x), ...u_m(x)$, определенных в области $G = \mathbf{R}^n$, $x \in G$ и предполагается $u(x) \in C_m^{(2)}(\overline{G})$. Рассматривая плотность лагранжиана вида

$$\mathcal{L} = \sum_{\substack{k,l=1,2,...m \\ i,j=1,2,...n}} a_{i,j}^{kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j}, \tag{2.1.1}$$

где a_{ij}^{kl} — массив постоянных чисел, симметричный в следующем смысле.

$$a_{ij}^{kl} = a_{ji}^{lk}. \tag{2.1.2}$$

(В этом параграфе мы не пользуемся соглашением о суммировании по повторяющимся индексам). Вопрос: Для каких массивов a_{ij}^{kl} и $\widetilde{a}_{ij}^{kl}$ уравнения Эйлера совпадают? Этот вопрос эквивалентен вопросу об описании всех таких массивов a_{ij}^{kl}, для которых уравнения Эйлера нулевые или тождественно выполняются для любых функций, т.е. в уравнении Эйлера все вторые частные производные входят с нулевыми коэффициентами.

Напишем соответствующее (2.1.1) уравнение Эйлера

$$\sum_{\substack{l=1,...m \\ i,j=1,...n}} a_{ij}^{kl} \frac{\partial^2 x_l}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{\substack{l=1,...m \\ i,j=1,...n}} a_{ij}^{lk} \frac{\partial^2 x_l}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

т.е.

$$\sum_{\substack{l=1,...m \\ i,j=1,...n}} \left(a_{ij}^{kl} + a_{ji}^{lk}\right) \frac{\partial^2 x_l}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Учитывая (2.1.2) получим

$$\sum_{\substack{l=1,\dots m\\ i,j=1,\dots n}} a_{ij}^{kl}\frac{\partial^2 x_l}{\partial x_i \partial x_j}=0.$$

Поскольку $\frac{\partial^2 x_l}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial^2 x_l}{\partial x_j \partial x_i}$ из последнего соотношения следует

$$\sum_{\substack{l=1,\dots m\\ 1\le i<j\le n}} \left(a_{ij}^{kl}+a_{ji}^{kl}\right)\frac{\partial^2 x_l}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{\substack{l=1,\dots m\\ i=1,\dots n}} a_{ii}^{lk}\frac{\partial^2 x_l}{\partial x_i^2}=0.$$

Доказано следующее утверждение.

Лемма 2.1.1 *Уравнения Эйлера, соответствующие (2.1.1) нулевые тогда и только тогда, когда*

$$\forall k,l=1,...m \quad \forall i,j=1,...n \quad | \quad a_{ij}^{kl}=-a_{ji}^{kl}. \tag{2.1.3}$$

Возвращаясь к плотности лагранжиана Максвелла (1.3.39) предыдущего параграфа, мы теперь можем утверждать его эквивалентность следующей плотности лагранжиана

$$\mathcal{M}s\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2-(rot\ \ u)^2\right). \tag{2.1.4}$$

Действие с плотностью лагранжиана (2.1.4) назовём *укороченным действием Максвелла.*

§2.2 Замена переменных Максвелла

Займемся изучением свойств решений уравнений Эйлера для действия Максвелла, т.е. уравнений

$$\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial x_0^2}+rot\ rot\,\vec{U}=0. \tag{2.2.1}$$

Воспроизведем также плотность лагранжиана Максвелла (1.3.119)

$$\mathcal{M}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0}\right)^2-(\,rot\,\vec{U})^2\right)+\left(\frac{\partial U_\eta}{\partial x_\eta}\frac{\partial U_\gamma}{\partial x_\gamma}-\frac{\partial U_\eta}{\partial x_\gamma}\frac{\partial U_\gamma}{\partial x_\eta}\right). \tag{2.2.2}$$

Нас интересует группа преобразований, переводящих решения уравнения (2.2.1) снова в решения. Для построения таких преобразований в силу инвариантности уравнений Эйлера (см. п. 2.5.1) достаточно указать группу преобразований, оставляющих инвариантным действие Максвелла

$$M=\int\iiint \mathcal{M}\,dx_0dx_1dx_2dx_3 \tag{2.2.3}$$

или действие ему эквивалентное.

Уравнение Эйлера (2.2.1) есть система трёх уравнений для трёх неизвестных функций $U_1(x), U_2(x), U_3(x)$ от четырех переменных x_0, x_1, x_2, x_3. Для построения группы преобразований решений системы (2.2.1) мы с помощью операторной замены переменных

$$\vec{U} = \vec{u} - \; grad \int\limits_{c}^{x_0} u_0(x_0, \vec{x})\, dx_0 \tag{2.2.4}$$

введём четыре новые неизвестные функции $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, отмечая впредь стрелочкой сверху пространственные вектора $\vec{U} \equiv (U_1, U_2, U_3)$, $\vec{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$, и введём плотность лагранжиана $\mathcal{N}(\frac{\partial u}{\partial x})$ для функций
$u(x) = (u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x)) \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)$ вида

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2}(-\theta^{rl}\theta_{ij} + \theta_j^r\theta_i^l)\frac{\partial u_r}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}, \tag{2.2.5}$$

где

$$\theta_j^i \equiv \theta^{ij} \equiv \theta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j = 0; \\ -1, & i = j \neq 0. \end{cases} \tag{2.2.6}$$

Плотность лагранжиана (2.2.5) назовём *плотностью лагранжиана Лоренца.* Ей соответствуют уравнения Эйлера

$$\theta^{rl}\theta_{ij}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j} - \theta_j^r\theta_i^l\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \tag{2.2.7}$$

Соответствующий дифференциальный оператор

$$(Au)_r \equiv (\theta^{rl}\theta_{ij} - \theta_j^r\theta_i^l)\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{2.2.8}$$

определенный на пространстве $C_4^{(2)}(\mathbf{R}^4)$, будет *базовым оператором.*

В трёхмерных обозначениях система (2.2.7) имеет вид

$$\Box u_0 - \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0} - \; div\, \vec{u}\right) = 0, \tag{2.2.9}$$

$$-\Box\vec{u} + \; grad\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0} - \; div\, \vec{u}\right) = 0, \tag{2.2.10}$$

где $\Box \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ — оператор Даламбера.

Оказывается, решение уравнения (2.2.1) получается из решений уравнения (2.2.7) по формуле (2.2.4). Что позволяет свести изучение уравнения (2.2.1) к изучению решений уравнения (2.2.7), имеющего более симметричный вид относительно четырех неизвестных функций u_i $i \in \overline{0,3}$ и четырех неизвестных переменных $x_i,\ i \in \overline{0,3}$. Переход от системы (2.2.1) и лагранжиана (2.2.2) к системе (2.2.7) и плотности лагранжиана (2.2.5) носит чисто математический характер, как метод построения решений уравнений (2.2.1), имеющих согласно §3 простую физическую интерпретацию.

Операторную замену переменных (2.2.4) мы будем называть *заменой Максвелла.*

2.2.1 Сравнение множеств решений систем (2.2.1) и (2.2.9, 2.2.10).

Лемма 2.2.1 *Для любой функции $u_0(x) \in C^{(2)}(\mathbf{R}^4)$, если $\vec{u}(x)$ — решение системы (2.2.10), то функции $\vec{U}(x)$, полученные из $u(x)$ по формуле (2.2.4), являются решением системы (2.2.1).*

Доказательство. Подставим (2.2.4) в (2.2.1), получим

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_0^2} + rot\ rot\,\vec{u} - grad\,\frac{\partial u_0}{\partial x_0} = 0. \tag{2.2.11}$$

В силу тождества

$$rot\ rot\,\vec{u} = grad\ div\,\vec{u} - \triangle\vec{u},$$

где $\triangle \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ — оператор Лапласа, соотношение (2.2.11) переходит в соотношение

$$\Box\vec{u} - grad\,\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0} - div\,\vec{u}\right) = 0.$$

Последнее соотношение совпадает с уравнением (2.2.10), которое по условию леммы выполнено. $\diamondsuit$

Таким образом, формулы (2.2.4) задают линейное отображение B векторного пространства $C_4^{(3)}(\mathbf{R}^4)$ четырёхкомпонентных трижды непрерывно дифференцируемых вектор-функций $u(x)$ в векторное пространство $C_3^{(2)}(\mathbf{R}^4)$ трёхкомпонентных, дважды непрерывно дифференцируемых вектор-функций $\vec{U}(x)$. При этом множество решений уравнения (2.2.7) отображается во множество решений уравнения (2.2.1). Остается рассмотреть вопрос: каждое ли решение уравнения (2.2.1) является образом некоторого решения уравнения (2.2.7), т. е. $\vec{U} = Bu$?

Отметим сначала следующее свойство решений уравнения (2.2.1). Если $\vec{U} \in C_3^{(3)}(\mathbf{R}^4)$, то применяя к (2.2.1) оператор дивергенции, получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}(\,div\,\vec{U}) = 0, \tag{2.2.12}$$

или

$$\rho(x) \equiv div\,\frac{\partial\vec{U}}{\partial x_0} = Const, \tag{2.2.13}$$

т. е. $\rho(x_0, x_1, x_2, x_3) = \rho(x_1, x_2, x_3) = \rho(\vec{x})$.

Пусть теперь $\vec{U}(x) \in C_3^{(2)}(V_0)$ — решение уравнения (2.2.1), а функции $u(x) \in C_4^{(2)}(V_0)$ связаны с $\vec{U}(x)$ соотношением (2.2.4). Тогда уравнения (2.2.10) будут выполнены в силу (2.2.1) и (2.2.4), а в уравнение (2.2.9) мы выразим $\vec{u}$ через $\vec{U}(x)$ и $u_0(x)$ и получим соотношение для определения $u_0(x)$:

$$\triangle u_0(x) - \frac{\partial}{\partial x_0}(\,div\,\vec{U} + +\triangle\int\limits_c^{x_0} u_0(x_0, \vec{x})dx_0) = 0$$

или

$$div\,\frac{\partial\vec{U}}{\partial x_0} = 0. \tag{2.2.14}$$

Если теперь выполнено соотношение (2.2.14) и $\vec{U} \in C_3^{(2)}(V_0)$ — решение уравнения (2.2.1), то полагая $\vec{u} = \vec{U}$, $u_0 = 0$, нетрудно убедиться, что $\vec{U} = Bu$ и $u(x)$ — решение уравнения (2.2.7).

Обозначим через $\mathcal{H}_1 \in C_3^{(2)}(V_0)$ множество решений уравнения (2.2.1), а через $\mathcal{H}_2 \in C_4^{(2)}(V_0)$ — множество решений уравнения (2.2.7). Доказано следующее утверждение.

Лемма 2.2.2 *Множество $B\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1$ и состоит из функций $\vec{U}(x)$, удовлетворяющих условию (2.2.14).*

Учитывая соотношение(2.2.13), верное для любой функции $\vec{U} \in \mathcal{H}_1$, можно сделать следующий вывод:

Теорема 2.2.1 *Если в пространственной области $G \in \mathbf{R}^3$ в некоторый момент времени x_0 для решения $\vec{U}(x)$ уравнения (2.2.1) выполнено соотношение*

$$\forall \vec{x} \in G \;\Big|\; div \left.\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0}\right|_{(x_0,\vec{x})} = 0,$$

то в области G решение $\vec{U}(x)$ представимо в виде $\vec{U} = Bu$, где $u(x) \in \mathcal{H}_2$, при любых $x_0 \in \mathbf{R}$.

2.2.2 Сравнение множеств решений неоднородного уравнения (2.2.1) и неоднородной системы уравнений (2.2.9, 2.2.10). Перейдем к сравнению множеств решений неоднородного уравнения (2.2.1) и неоднородной системы уравнений (2.2.9, 2.2.10). Неоднородное уравнение (2.2.1) запишем в виде:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_0^2} + rot\; rot\, \vec{u} = -\vec{j}, \tag{2.2.15}$$

где $\vec{j}(x) \in C_3^{(1)}(V_0)$. А неоднородную систему уравнений (2.2.9, 2.2.10) запишем в виде:

$$\triangle u_0 - div\, \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_0} = -\rho \tag{2.2.16}$$

$$\Box \vec{u} - grad\, \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0} - div\, \vec{u}\right) = -\vec{j}. \tag{2.2.17}$$

Четырёх-вектором тока $j(x)$ назовём четырёхкомпонентную функцию $j(x) = (\rho(x), \vec{j}(x))$.

Базовый оператор A вида (2.2.8) обладает следующим свойством.

Лемма 2.2.3 *Если $u(x) \in C_4^{(3)}(V_0)$, то 4-функция $j \equiv Au$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\partial j_r}{\partial x_r} = 0. \tag{2.2.18}$$

Доказательство. Подставим (2.2.8) в (2.2.18)

$$\frac{\partial j_r}{\partial x_r} = (\theta^{rl}\theta_{ij} - \theta_j^r\theta_i^l)\frac{\partial^3 u_l}{\partial x_r \partial x_i \partial x_j} = \left(\theta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_r}\theta_r^l\right) - \left(\theta_{rj}\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\theta_i^l\right) = 0. \;\Diamond$$

Итак, если существует решение уравнений (2.2.16, 2.2.17) класса $C_4^{(3)}(V_0)$, то должно быть выполнено соотношение (2.2.18) или

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_0} + div\,\vec{j} = 0, \qquad (2.2.19)$$

т. е. (2.2.19) — необходимое условие существования решения $u(x)$ системы (2.2.16, 2.2.17).

Перейдем к связи решений системы (2.2.15) и системы (2.2.16, 2.2.17).

Лемма 2.2.4 *Если $u(x) \in C_4^{(2)}(V_0)$ — решение системы (2.2.16, 2.2.17), то $\vec{U} = Bu$ — решение системы (2.2.15) с тем же вектором $\vec{j}$.*

Проверяется подстановкой (2.2.4) в (2.2.15).

Пусть теперь $\vec{U}(x) \in C_3^{(3)}(V_0)$ — решение системы (2.2.15). Образуем

$$\rho(x) = div\,\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0} \qquad (2.2.20)$$

и положим $u_0(x) \equiv 0$, тогда 4-вектор $u(x) = (0, \vec{U}(x))$ удовлетворяет системе (2.2.16, 2.2.17).

Итак, каждое решение $\vec{U}(x)$ класса $C_3^{(3)}(V_0)$ системы (2.2.15) является образом при отображении B некоторого решения $u(x)$ системы (2.2.16, 2.2.17) класса $C_4^{(3)}(V_0)$.

2.2.3 Потенциальность и соленоидальность.

Решению $\vec{U}(x)$ однородной системы (2.2.1) по формулам (2.2.4) соответствует, вообще говоря, решение $u(x)$ неоднородной системы (2.2.16, 2.2.17) с 4-вектором тока $j = (\rho, 0, 0, 0)$, где $\rho(x) = \rho(\vec{x}) = div\,\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0}$. Если при $x_0 = 0$ поля смещений $\vec{U}(x)$ и скоростей $\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0}$ были потенциальными во всем пространстве, функция $\rho(\vec{x})$ интегрируема и непрерывна во всем пространстве и при $|\vec{x}| \to \infty$ выполнено $\vec{U}(x) \to 0$, $\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \to 0$, то решение уравнения (2.2.1) $\vec{U}(x)$ остается потенциальным полем при всех x_0 и выражается формулой

$$\vec{U}(x) = \vec{U}(0, \vec{x}) + x_0 \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0}(0, \vec{x}) = \vec{U}(0, \vec{x}) - \,grad \int\limits_0^{x_0} u_0(\vec{x}) dx_0,$$

здесь $u_0(x) = u_0(\vec{x})$ — решение уравнения

$$\triangle u_0(\vec{x}) = -\rho(\vec{x})$$

согласно ([79], с.359), даваемое формулой

$$u_0(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|}\, dx_1'\, dx_2'\, dx_3'. \qquad (2.2.21)$$

Итак, в случае потенциальности полей смещений и скоростей в настоящий момент времени они остаются потенциальными в любой момент времени и потенциал поля скоростей $u_0(\vec{x})$ не зависит от времени и даётся формулой (2.2.21), $\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0} = -\,grad\, u_0(\vec{x})$. Если же в начальный момент времени поля смещений и скоростей были соленоидальными, то они останутся соленоидальными при всех моментах времени, если 3-вектор тока $\vec{j}(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\forall x \in \mathbf{R}^4 \;\Big|\; div\,\vec{j}(x) = 0,$$

так как из (2.2.15) следует

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\, div\, \vec{U}(x) = 0. \tag{2.2.22}$$

В частности, соленоидальность поля смещений сохраняется в случае $\vec{j}(x) = 0$, т.е. однородного уравнения (2.2.1).

2.2.4 Вектора напряжённости электрического и магнитного полей В п. 1.3.9 мы ввели функции

$$\begin{gathered}\vec{E}(x) \equiv -\tfrac{\partial \vec{U}}{\partial x_0}(x_0, \vec{x}),\ \vec{H}(x) \equiv\ rot\, \vec{U}(x_0, \vec{x}),\\ \rho(x) \equiv\ div\, \tfrac{\partial \vec{U}}{\partial x_0}(x_0, \vec{x}) = -\, div\, \vec{E}(x_0, x),\ \vec{j}(x) \equiv \tfrac{1}{\mu}\mathcal{L}_{tr}[\vec{U}]\end{gathered} \tag{2.2.23}$$

и убедились, что если $\vec{U} \in C_3^{(2)}(V)$, то введённые функции удовлетворяют системе 4 уравнений Максвелла (1.3.124–1.3.127). Если $\vec{U} \in C_3^{(3)}(V)$, то применяя к уравнению (1.3.125) оператор дивергенции, получим (2.2.19) как необходимое условие разрешимости системы уравнений Максвелла в области V.

Через 4-вектор $u(x)$ функции $\vec{E}(x)$ и $\vec{H}(x)$ согласно формулам (2.2.4, 2.2.23) выражаются в виде

$$\vec{E}(x) = -\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_0}(x_0, \vec{x}) +\ grad\, u_0(x_0, \vec{x}), \tag{2.2.24}$$

$$\vec{H}(x) =\ rot\, \vec{u}(x_0, \vec{x}). \tag{2.2.25}$$

Условие (2.2.19) для функции $u \in C_4^{(3)}(V)$ следует из системы (2.2.16, 2.2.17) и является необходимым условием её разрешимости.

Система уравнений Максвелла в виде (1.3.124–1.3.127) отличается от принятой в учебном пособии [41] лишь нормировкой, т. е. выбором единиц измерения. В частности, в [41] вместо 4-вектора u используется 4-вектор $(\varphi, \vec{A})$ и 3-функции $\vec{E}$, $\vec{H}$ выражаются через $(\varphi, \vec{A})$ следующим образом

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial x_0} -\ grad\, \varphi, \tag{2.2.26}$$

$$\vec{H} =\ rot\, \vec{A}. \tag{2.2.27}$$

Т. е. функции φ соответствует функция $(-u_0)$, а функции $\vec{A}$ — функция $\vec{u}$.

Далее рассматривая асимптотическое взаимодействие частиц, мы увидим, что в формуле (2.2.23) величины имеют следующий физический смысл: $\vec{E}$ — напряжённость электрического поля, $\vec{H}$ — напряжённость магнитного поля, ρ — плотность заряда, $\vec{j}$ — плотность тока.

2.2.5 Действие Максвелла $M(Bu)$ в переменных $u(x)$. Рассмотрим как выглядят действие Максвелла $M(Bu)$ через переменные $u(x)$. В этом пункте $V = I \times \mathbf{R}^3$. Введём укороченное действие Максвелла с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{M}s\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0}\right) \equiv \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0}\right)^2 - (\ rot\, \vec{U})^2\right). \tag{2.2.28}$$

Величина разности есть

$$\mathcal{F} \equiv (\mathcal{M} - \mathcal{M}s)\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0}\right) = 2s_2\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{x}}\right) = \frac{\partial U_\eta}{\partial x_\gamma}\frac{\partial U_\eta}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial U_\eta}{\partial x_\gamma}\frac{\partial U_\gamma}{\partial x_\eta}.$$

(Здесь действует тензорное соглашение о суммирование по повторяющимся индексам. Греческие индексы $\eta, \gamma, \alpha, \beta, \nu, ...$ пробегают значения 1, 2, 3, латинские индексы $i, j, k, l, ...$ — значения 0, 1, 2, 3.) Величина $\mathcal{F}(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{x}})$ является 3-дивергенцией $\mathcal{F} = div\, q$, где

$$q_\eta = U_\eta \frac{\partial U_\gamma}{\partial x_\gamma} - U_\gamma \frac{\partial U_\eta}{\partial x_\gamma}, \quad \eta \in \overline{1,3}. \tag{2.2.29}$$

Для сравнения действий $M(\vec{U})$ и $Ms(\vec{U})$ используем лемму 1.3.3. Предварительно заметим, что условия (1.3.70) убывания функции $\vec{U}(x_0, \vec{x})$ по переменной $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ в пространственной бесконечности можно записать в виде

$$\forall \eta, \gamma \in \overline{1,3} \;\left|\; \left(U_\eta(x_0, \vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\right) \bigwedge \left(\frac{\partial U_\eta}{\partial x_\gamma}(x_0, \vec{x})) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^2}\right)\right)\right. . \tag{2.2.30}$$

Лемма 2.2.5 *Если $\vec{U} \in C_3^{(1)}(I \times \mathbf{R}^3)$ и удовлетворяет условиям убывания в пространственной бесконечности (2.2.30), то*

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{M}\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0}\right) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{M}s\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0}\right) dx_1 dx_2 dx_3. \tag{2.2.31}$$

Данная лемма есть непосредственное следствие леммы 1.3.3.

Следствие 2.2.1 *В условиях леммы 2.2.5 верно равенство $M(\vec{U}) = Ms(\vec{U})$.*

В силу формул (2.2.23, 2.2.24, 2.2.25)

$$\mathcal{M}s\left(\frac{\partial Bu}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial Bu}{\partial x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_0} + grad\, u_0\right)^2 - (\,rot\, \vec{u})^2\right). \tag{2.2.32}$$

Непосредственной подстановкой проверяется, что

$$\tfrac{1}{2}\left(\left(-\tfrac{\partial \vec{u}}{\partial x_0} + grad\, u_0\right)^2 - (\,rot\, \vec{u})^2\right) = \tfrac{1}{2}\left(-\theta^{kl}\theta_{ij}\tfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\tfrac{\partial u_l}{\partial x_j} + \theta^k_j\theta^l_i\tfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\tfrac{\partial u_l}{\partial x_j}\right) =$$
$$\tfrac{1}{2}\left(-\theta^{kl}\theta_{ij} + \theta^k_j\theta^l_i\right)\tfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\tfrac{\partial u_l}{\partial x_j}. \tag{2.2.33}$$

Итак, плотности лагранжианов Лоренца и Максвелла связаны равенством

$$\mathcal{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \mathcal{M}s\left(\frac{\partial Bu}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial Bu}{\partial x_0}\right). \tag{2.2.34}$$

Если теперь $u \in C_3^{(2)}(I \times \mathbf{R}^3)$ и функция $\vec{U} = Bu$ удовлетворяет условиям убывания в пространственной бесконечности (2.2.30), то по лемме 2.2.5 верны равенства

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{M}\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0}\right) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{M}s\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0}\right) dx_1 dx_2 dx_3 = \tag{2.2.35}$$

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx_1 dx_2 dx_3$$

и следовательно,

$$M(Bu) = Ms(Bu) = N(u) \tag{2.2.36}$$

Если ввести величины

$$F_{ik} \equiv \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \tag{2.2.37}$$

то плотность лагранжиана Лоренца $\mathcal{N}(\frac{\partial u}{\partial x})$ записывается в следующем виде

$$\mathcal{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{1}{4}\theta_{ij}\theta_{kl}F_{ik}F_{jl}, \tag{2.2.38}$$

совпадающем с точностью до постоянного множителя с плотностью лагранжиана электромагнитного поля, принятой в [41, с. 97]. В самом деле,

$$\theta_{ij}\theta_{kl}F_{ik}F_{jl} = \theta_{ij}\theta_{kl}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right)$$

$$= \theta_{ij}\theta_{kl}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right) - \theta_{ij}\theta_{kl}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right)$$

$$= 2\left(\theta^{kl}\theta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j} - \theta^k_j\theta^l_i\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right) = -4\mathcal{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Отметим, что плотность лагранжиана $\mathcal{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ эквивалентна плотности лагранжиана

$$\mathcal{N}_d \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l=0}^{3}\left(-\theta^{kl}\theta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \theta^k_i\theta^l_j\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right), \tag{2.2.39}$$

так как

$$\mathcal{N} - \mathcal{N}_d = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l=0}^{3}\left(\theta^k_j\theta^l_i - \theta^k_i\theta^l_j\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j} \tag{2.2.40}$$

и справедливо соотношение для коэффициентов $\frac{1}{2}\left(\theta^k_j\theta^l_i - \theta^k_i\theta^l_j\right) = -\frac{1}{2}\left(\theta^k_i\theta^l_j - \theta^k_j\theta^l_i\right)$, которое по лемме 2.1.1 означает, что уравнения Эйлера для $\mathcal{N} - \mathcal{N}_d$ тривиальны.

Перейдем снова к тензорному соглашению о суммировании и убедимся, что величина $\mathcal{N} - \mathcal{N}_d$ является 4-дивергенцией. Для этого перепишем выражение (2.2.40) в следующем виде:

$$2\left(\mathcal{N} - \mathcal{N}_d\right) = \left(\theta^k_j\theta^l_i\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j} - \theta^k_i\theta^l_j\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right) = \theta^k_i\theta^l_j\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_l}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right) =$$

$$\left(\theta^l_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\theta^k_i u_k\frac{\partial u_l}{\partial x_i} - \theta^k_i u_l\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) - \left(\theta^l_j\theta^k_i u_k\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i\partial x_j} - \theta^l_j\theta^k_i u_l\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\theta^l_j\theta^k_i u_k\frac{\partial u_l}{\partial x_i} - \theta^l_j\theta^k_i u_l\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right). \tag{2.2.41}$$

Итак, $\mathcal{N} - \mathcal{N}_d$ является 4-дивергенцией вектора $\mathcal{P}$ с компонентами

$$\mathcal{P}_j = \frac{1}{2}\left(\theta^l_j\theta^k_i u_k\frac{\partial u_l}{\partial x_i} - \theta^l_j\theta^k_i u_l\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right). \tag{2.2.42}$$

В частности,

$$2\mathcal{P}_0 = \theta_i^k u_k \frac{\partial u_0}{\partial x_i} - \theta_i^k u_0 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = -\vec{u}\, grad\, u_0 + u_0\, div\, \vec{u}.$$

Дальнейшая наша задача — исследование уравнений для четырех-вектора $u(x)$, как однородных (2.2.7), так и неоднородных

$$\theta^{rl}\theta_{ij}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j} - \theta_i^r \theta_j^l \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j} = j_r, \quad r = 0, 1, 2, 3, \tag{2.2.43}$$

используя плотность лагранжиана Лоренца $\mathcal{N}$.

2.2.6 Существование решения неоднородной системы (2.2.43) в классе обобщённых функций медленного роста на $\mathbf{R}^4$.

Применим к системе (2.2.43) трансформацию Фурье, получим:

$$-\theta^{rl}\theta_{ij}\xi_i\xi_j\hat{u}_l + \theta_i^r\theta_j^l\xi_i\xi_j\hat{u}^l = \hat{j}_r \tag{2.2.44}$$

Для 4-вектора $\hat{v} = \Theta\hat{u}$ при $\lambda \equiv \langle \xi, \Theta\xi \rangle$ система (2.2.44) может быть записана в виде:

$$-\lambda\hat{v} + \langle \xi, \hat{v} \rangle \Theta\xi = \hat{j}. \tag{2.2.45}$$

При $\lambda \neq 0$ 4-вектор $\hat{v}$ является линейной комбинацией 4-векторов $\hat{j}$ и $\Theta\xi$,

$$\hat{v} = C_1\hat{j} + C_2\Theta\xi. \tag{2.2.46}$$

Подставив (2.2.46) в (2.2.45), получим для констант соотношения при линейной независимости векторов $\hat{j}$ и $\Theta\xi$:

$$-\lambda C_1 = 1, \tag{2.2.47}$$

$$-\lambda C_2 + C_1 \left\langle \xi, \hat{j} \right\rangle + C_2 \langle \xi, \Theta\xi \rangle = 0. \tag{2.2.48}$$

Из первого условия $C_1 = -\frac{1}{\lambda}$, а второе условие выполняется тождественно при любых C_1 и C_2, если $\left\langle \xi, \hat{j} \right\rangle = 0$.

Таким образом, общее решение системы (2.2.44) при $\lambda \neq 0$ имеет вид

$$\hat{u} = \frac{-1}{\langle \xi, \Theta\xi \rangle}\Theta\hat{j} + C_2(\xi)\xi, \tag{2.2.49}$$

где $C_2(\xi)$ — произвольная функция и существует при любой функции $j(x)$, удовлетворяющей условию (2.2.19).

Отметим, что условие Лоренца на решение $u(x)$ в образах Фурье принимает вид $\langle \xi, \Theta\hat{u} \rangle = 0$, или подставляя (2.2.49)

$$\frac{-1}{\langle \xi, \Theta\xi \rangle}\left\langle \xi, \hat{j} \right\rangle + C_2(\xi)\langle \xi, \Theta\xi \rangle = 0,$$

т. е. при $\langle \xi, \Theta\xi \rangle \neq 0$ эквивалентно условию

$$C_2(\xi) = 0.$$

Условие Лоренца выделяет из общего решения (2.2.49) единственное решение

$$\hat{u} = \frac{-1}{\langle \xi, \Theta\xi \rangle}\Theta\hat{j}. \tag{2.2.50}$$

В случае $\lambda(\xi) = \langle \xi, \Theta\xi \rangle = 0$ уравнение (2.2.45) принимает вид:

$$\Theta\xi \langle \xi, \Theta\hat{u} \rangle = \hat{j} \tag{2.2.51}$$

и имеет решение лишь, если вектор $\hat{j}$ коллинеарен вектору $\Theta\xi$, т.е. $\hat{j} = C_3(\xi)\Theta\xi$, $C_3(\xi) \in \mathbf{C}$. Условие $\left\langle \xi, \hat{j} \right\rangle = 0$ превращается при этом в условие $\langle \xi, \Theta\xi \rangle = 0$. Для определения 4-вектора $\hat{u}$ получается лишь одно скалярное условие $\langle \xi, \Theta\hat{u} \rangle = C_3(\xi)$. В случае $\hat{j} = 0$ условие (2.2.51) превращается в условие Лоренца

$$\langle \xi, \Theta\hat{u} \rangle = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_0} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0. \tag{2.2.52}$$

Таким образом, для функции $u(x)$, спектр который лежит на световом конусе, система уравнений (2.2.7) сводится к одному условию Лоренца (2.2.52).

2.2.7 Ядро линейного оператора B, осуществляющего замену Максвелла. В силу (2.2.4) соотношение $Bu = 0$ означает

$$\vec{u} = grad \int\limits_0^{x_0} u_0(x_0, \vec{x})\, dx_0. \tag{2.2.53}$$

Добавляя к (2.2.53) соотношение

$$u_0 = \frac{\partial}{\partial x_0} \int\limits_0^{x_0} u_0(x_0, \vec{x}) dx_0, \tag{2.2.54}$$

мы видим, что 4-функция $u(x)$ является 4-градиентом некоторой скалярной функции $f(x)$ вида

$$f(x) = \int\limits_0^{x_0} u_0(x_0, \vec{x}) dx_0 \tag{2.2.55}$$

Наоборот, пусть функция $u(x)$ является 4-градиентом некоторой скалярной функции $f(x)$

$$u(x) = \frac{\partial}{\partial x_0} f(x), \tag{2.2.56}$$

тогда для смещений $\vec{U}(x)$ мы получаем формулу

$$\vec{U}(x) = Bu = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} f(x) - \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \int\limits_c^{x_0} \frac{\partial}{\partial x_0} f(x_0, \vec{x}) dx_0 = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} f(c, \vec{x}). \tag{2.2.57}$$

В этом случае поле смещений является потенциальным с потенциалом $f(c, \vec{x})$ не зависящим от времени, что влечет соотношения $\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0} = 0$ и $rot\, \vec{U} = 0$. Таким образом, если $\vec{U}(x)$ имеет вид (2.2.57), то для укороченного лагранжиана Максвелла при любой функции $\vec{V}(x)$ имеем

$$\mathcal{M}s \left(\frac{\partial (\vec{U} + \vec{V})}{\partial x} \right) = \mathcal{M}s \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \right), \tag{2.2.58}$$

т. е. функция $\vec{U}(x)$ не даёт вклада в действие и во взаимодействие с полем. При выполнение условий (2.2.30) на поведение функций $\vec{U}(x)$, $\vec{V}(x)$ в пространственной бесконечности справедливо равенство

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{M}\left(\frac{\partial(\vec{U}+\vec{V})}{\partial x}\right) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{M}\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}\right) dx_1 dx_2 dx_3, \qquad (2.2.59)$$

т.е. функция смещений вида (2.2.57) не даёт вклада в действие Максвелла и во взаимодействие с другим полем.

§2.3 Линейное преобразование функций и аргументов для систем дифференциальных уравнений

2.3.1 Линейное преобразование решений системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Рассматривается вектор-функция $u(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$ и система α уравнений второго порядка вида:

$$A^{kp} u_p = 0, \quad k = 1, 2, ...\alpha, \qquad (2.3.1)$$

где каждая величина A^{kp} есть дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами вида:

$$A^{kp} = a_{ij}^{kp} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}. \qquad (2.3.2)$$

Будем также записывать уравнения (2.3.1) в виде $Au = 0$, где A — матрица $\alpha \times m$ с элементами A^{kp}.

Далее совершаем линейное преобразование $G : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ и линейное преобразование $B : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$. Пусть $u(x)$ было решением системы (2.3.1). Потребуем, чтобы матрицы B, G были таковыми, чтобы для любого решения $u(x)$ системы (2.3.1) функция $Bu(Gx)$ также была решением системы (2.3.1). Обозначим $x' = Gx$.

Вычисляем производные

$$\frac{\partial}{\partial x_j} b_{pl} u_l(Gx) = b_{pl} \frac{\partial u_l}{\partial {x'}_q} \;\; g_{qj}, \qquad (2.3.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} b_{pl} u_l(Gx) = b_{pl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial {x'}_s \partial {x'}_q} \;\; g_{qj} \;\; g_{si} \qquad (2.3.4)$$

и подставляем их в систему (2.3.1). Получаем

$$a_{ij}^{kp} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} b_{pl} \;\; u_l(Gx) = a_{ij}^{kp} \;\; b_{pl} \frac{\partial^2 u_l(x')}{\partial {x'}_s \partial {x'}_q} \;\; g_{qj} g_{si}, \qquad (2.3.5)$$

Итак, требуется, чтобы при каждом $k = 1, 2, ...\alpha$ выполнялось соотношение

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \;\Big|\; a_{ij}^{kp} b_{pl} g_{qi} g_{si} \frac{\partial^2 u_l(x)}{\partial x_s \partial x_q} = 0, \quad k = 1, 2, ...\alpha, \qquad (2.3.6)$$

если для функции $u(x)$ выполнены соотношения (2.3.1).

Проведём в формуле (2.3.6) преобразование индексов суммирования: $s \to i,\ q \to j,$ $l \to p,\ k \to r,\ i \to s,\ j \to q,\ p \to l$. Получим соотношение (2.3.6) в следующей форме

$$a_{sq}^{rl} b_{lp} g_{jq} g_{is} \frac{\partial^2 u_p(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad r = 1, 2, ...\alpha \tag{2.3.7}$$

и сравним его с соотношением (2.3.1), записанным в виде:

$$a_{ij}^{kp} \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad k = 1, 2, ...\alpha. \tag{2.3.8}$$

Для того,чтобы из соотношений (2.3.8) вытекало соотношение (2.3.7) достаточно потребовать, чтобы линейный оператор, стоящий в левой части равенства (2.3.7), был линейной комбинацией линейных операторов, стоящих в левой части равенства (2.3.8), что означает следующее равенство коэффициентов

$$\forall r \in \overline{1, \alpha}\ \forall k \in \overline{1, \alpha} \exists \lambda_k^r \in \mathbf{R} \ \Big|\ a_{sq}^{rl} b_{lp} g_{jq} g_{is} + a_{sq}^{rl} b_{lp} g_{iq} g_{js} = \lambda_k^r (a_{ij}^{kp} + a_{ji}^{kp}). \tag{2.3.9}$$

Итак, если выполнено (2.3.9), то преобразование $Bu(Gx)$ из любого решения $u(x)$ уравнений (2.3.1) снова даёт решение этого уравнения.

Рассмотрим случай одного уравнения с одной неизвестной функцией, т.е. $\alpha = 1$. В таком случае матрица B превращается в умножение на константу b, которую из соображений однородности можно выбрать $b = \lambda$. И соотношения (2.3.9) для симметричной матрицы a_{ij} приобретают вид

$$a_{sq} g_{jq} g_{is} = a_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, ...n. \tag{2.3.10}$$

Соотношения (2.3.10) можно переписать в матричном виде:

$$GAG^\top = A, \tag{2.3.11}$$

где $A = (a_{ij})$, $G = (g_{ij})$ — матрицы $n \times n$. Соотношение (2.3.11) сравним с условием инвариантности матрицы квадратичной формы A, имеющим согласно ([30], с.32) вид

$$B^\top AB = A, \tag{2.3.12}$$

где B матрица $n \times n$,выражающая старые координаты через новые. Если при фиксированной матрице A обозначить множество решений G уравнения (2.3.11) через $\Omega(A)$, а множество решений B уравнения (2.3.12) через $I(A)$, то справедливо равенство

$$\Omega(A) = I^\top(A), \tag{2.3.13}$$

т.е. операция транспонирования устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множествами матриц $\Omega(A)$ и $I(A)$.

2.3.2 Линейное преобразований правых частей системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных при замене переменных.

Рассмотрим теперь линейный дифференциальный оператор $A : C_m^{(2)} \to C_\alpha$, сопоставляющий элементу $u \in C_m^{(2)}$ элемент $f \in C_\alpha$, т.е. вида

$$Au = f, \tag{2.3.14}$$

определённой в координатном виде формулой

$$A^{kp}u_p = f^k. \qquad (2.3.15)$$

Введём линейные операторы $A^k : C_m^{(2)} \to C$, определённые по правилу:

$$A^k u \equiv a^{kp}u_p, \qquad k = 1, 2, ...\alpha, \qquad (2.3.16)$$

и линейные операторы $\widetilde{A}^k : C_m^{(2)} \to C$, определённые по правилу:

$$\widetilde{A}^k u \equiv a_{ij}^{kp} b_{pl} g_{qj} g_{si} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_s \partial x_q}. \qquad (2.3.17)$$

Условие (2.3.9) означает следующие операторные равенства

$$\widetilde{A}^r = \lambda_k^r A^k, \qquad r = 1, 2, ...\alpha. \qquad (2.3.18)$$

Если рассматривать линейные операторы $A : C_m^{(2)} \to C_\alpha^{(0)}$ и $\widetilde{A} : C_m^{(2)} \to C_\alpha^{(0)}$ как столбцы, составленные из операторов A^k и $\widetilde{A}^k$, соответственно, и ввести матрицу Λ размеров $\alpha \times \alpha$, то соотношение (2.3.18) можно переписать в виде

$$\widetilde{A} = \Lambda A. \qquad (2.3.19)$$

Обозначим через T линейный оператор $T : C_n^{(0)} \to C_n^{(0)}$, определённый правилом

$$(Tu)(x) \equiv Bu(Gx), \qquad (2.3.20)$$

и рассмотрим композицию операторов AT. Согласно формулам (2.3.5, 2.3.19) имеем

$$(ATu) = A(Tu) = (\widetilde{A}u)(Gx) = (\Lambda Au)(Gx). \qquad (2.3.21)$$

Введём линейный оператор $\widetilde{T} : C_\alpha^{(0)} \to C_\alpha^{(0)}$, определённый по правилу

$$(\widetilde{T}f)(x) = \Lambda f(Gx), \qquad (2.3.22)$$

тогда соотношение (2.3.21) можно записать в виде следующего равенства операторов

$$AT = \widetilde{T}A. \qquad (2.3.23)$$

Таким образом при выполнении условия (2.3.9), чтобы вычислить действие оператора A на преобразованную функцию Tu, можно применить оператор A к исходной функции u и затем к полученному результату применить преобразование $\widetilde{T}$. В случае, когда матрицы G, B неособенные, операторы T и $\widetilde{T}$ являются операторами линейного изоморфизма на пространствах $C_m^{(0)}$ и $C_\alpha^{(0)}$ соответственно, оставляющими инвариантными линейные подпространства $C_m^{(k)} \subset C_m^{(0)}$ и $C_\alpha^{(k)} \subset C_\alpha^{(0)}$ при любом натуральном k. Из соотношения (2.3.23) непосредственно вытекает, что каждое нетривиальное решение u уравнения

$$Au = 0 \qquad (2.3.24)$$

переводится оператором T в нетривиальное решение Tu того же уравнения. В случае, когда $\alpha = m$ и матрица Λ неособая, в силу (2.3.23) уравнения $ATu = 0$ и $Au = 0$ эквивалентны, т.е. если u — решение уравнения (2.3.24), то Tu — решение того же уравнения и наоборот.

§2.4 Множество матриц $\Omega(A)$

В предыдущем параграфе в случае одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с одной неизвестной функцией для построения группы преобразования его решений мы пришли к задаче об описании всех матриц $G \in M(n)$, удовлетворяющих для данной фиксированной матрицы $A \in M(n)$ соотношению (2.3.10), которое в матричной форме имеет вид

$$GAG^\top = A. \tag{2.4.1}$$

Множество матриц $G \in M(n)$, удовлетворяющих соотношению (2.4.1), мы обозначим $\Omega(A)$. Множество матриц $\Omega(A)$ играет важную роль в нашем дальнейшем изложении, поэтому в данном параграфе мы более детально его изучим.

2.4.1 Группа Ли $\Gamma m(A)$. В этом пункте $A \in M(n)$ произвольная матрица.

Из соотношения (2.4.1) непосредственно видно, что множество матриц $\Omega(A)$ содержит единичную матрицу $E \in \Omega(A)$ и является полугруппой по умножению. В самом деле, если $G_1 \in \Omega(A)$ и $G_2 \in \Omega(A)$, то $(G_1G_2)A(G_1G_2)^\top = G_1(G_2AG_2^\top)G_1^\top = G_1AG_1^\top = A$, т.е. $G_1G_2 \in \Omega(A)$.

Если $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$, то соотношение (2.4.1) и соотношение $G(\lambda A)G^\top = \lambda A$ эквивалентны т.е.

$$\Omega(\lambda A) = \Omega(A), \ \lambda \neq 0. \tag{2.4.2}$$

Транспонируя равенство (2.4.1) получим эквивалентное равенство $GA^\top G^\top = A^\top$,поэтому

$$\Omega(A) = \Omega(A^\top). \tag{2.4.3}$$

Если матрица G удовлетворяет соотношению (2.4.1), то матрица $-G$ также удовлетворяет соотношению (2.4.1), поэтому

$$\Omega(A) = -\Omega(A). \tag{2.4.4}$$

Следующее свойство позволяет сводить описание множества $\Omega(A_1)$ к описанию множества $\Omega(A_2)$ с матрицей более простого вида.

Лемма 2.4.1 *Если выполнено равенство*

$$A_1 = WA_2W^\top \tag{2.4.5}$$

с невырожденной матрицей W, то

$$\Omega(A_1) = W\Omega(A_2)W^{-1}. \tag{2.4.6}$$

Доказательство. Соотношение $GA_1G^\top = A_1$ в силу равенства (2.4.5) эквивалентно соотношению

$$GWA_2W^\top G^\top = WA_2W^\top,$$

а в силу невырожденности матрицы W и соотношению

$$(W^{-1}GW)A_2(W^\top G^\top W^{\top -1}) = A_2.$$

Таким образом, включения $G \in \Omega(A_1)$ и $W^{-1}GW \in \Omega(A_2)$ эквивалентны, что доказывает равенство (2.4.6). $\diamondsuit$

Если матрица $G \in \Omega(A)$ невырождена, то умножая равенство (2.4.1) на G^{-1} слева и на $G^{-1\top}$ справа, получим эквивалентное равенство

$$A = G^{-1}AG^{-1\top},$$

откуда вытекает, что множество $\Omega(A) \cap \mathrm{GL}\,(n)$ является подгруппой группы невырожденных матриц $\mathrm{GL}\,(n)$. Так как подгруппа $\Omega(A) \cap \mathrm{GL}\,(n)$ выделяется из группы $\mathrm{GL}\,(n)$ системой алгебраических уравнений (2.4.1), то по теореме Картана (см. [53], с.242) группа $\Omega(A) \cap \mathrm{GL}\,(n)$ является группой Ли, которую мы далее будем обозначать $\Gamma m(A) \equiv \Omega(A) \cap \mathrm{GL}\,(n)$.

2.4.2 Случай невырожденной матрицы A. Предположим в этом пункте, что матрица A невырождена.

Переходя от равенства (2.4.1) к определителям, получим

$$(\det G)^2 \det A = \det A.$$

И из условия $\det A \neq 0$ следует $\det G = \pm 1$. Таким образом, полугруппа $\Omega(A)$ состоит из невырожденных матриц, т.е. $\Omega(A) \subset \mathrm{GL}\,(n)$. В силу рассуждений пункта 1 верна теорема.

Теорема 2.4.1 *Если матрица A невырождена, то множество матриц $\Omega(A)$ — группа Ли по умножению, причём*

$$\forall G \in \Omega(A) \;\Big|\; |\det G| = 1.$$

Выразим теперь группу $\Omega(A^{-1})$ через группу $\Omega(A)$.

Лемма 2.4.2 *Справедливо соотношение*

$$\Omega(A^{-1}) = \Omega^\top(A). \tag{2.4.7}$$

Доказательство. Перейдём в равенстве (2.4.1) к обратным матрицам, получим эквивалентное равенство

$$(G^\top)^{-1}A^{-1}G^{-1} = A^{-1}. \tag{2.4.8}$$

Итак, включения $G \in \Omega(A)$ и $(G^\top)^{-1} \in \Omega(A^{-1})$ эквивалентны. Так как множество $\Omega(A^{-1})$ — группа, то включения $(G^\top)^{-1} \in \Omega(A^{-1})$ и $G^\top \in \Omega(A^{-1})$ эквивалентны. Итак, включая $G \in \Omega(A)$ и $G^\top \in \Omega(A^{-1})$ эквивалентны, а следовательно включения $G^\top \in \Omega^\top(A)$ и $G^\top \in \Omega(A^{-1})$ эквивалентны. $\diamondsuit$

Следствие 2.4.1 *Если $A^{-1} = \lambda A$, $\lambda \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, то $\Omega(A) = \Omega^\top(A)$.*

Матрицу удовлетворяющую условию $A^{-1} = \lambda A$, $\lambda \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, назовём *псевдоинволютивной*, при $\lambda = 1$ *инволютивной*, при $\lambda = -1$ *антиинволютивной*.

Соотношение $A^{-1} = A$ эквивалентно соотношению

$$A^2 = E. \tag{2.4.9}$$

В общем случае для не псевдоинволютивной матрицы соотношение $\Omega(A) = \Omega^\top(A)$ не имеет места. В качестве примера положим $A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $G \equiv \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, тогда $GAG^\top = A$, но $G^\top AG = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq A$.

Для матрицы $G \in \Omega(A)$ нетрудно выразить обратную матрицу через транспонированную.

Лемма 2.4.3 *Если* $G \in \Omega(A)$, *то*

$$G^{-1} = AG^\top A^{-1}. \tag{2.4.10}$$

Доказательство. Умножим матрицу G справа на матрицу $AG^\top A^{-1}$ и используем соотношение (2.4.1):

$$G(AG^\top A^{-1}) = (GAG^\top)A^{-1} = AA^{-1} = E. \ \diamondsuit$$

2.4.3 Случай симметричной матрицы $A \in M(n)$.

В этом пункте рассмотрим симметричную матрицу $A \in M(n)$. Для симметричной матрицы A существует ортогональная матрица $U \in O(n)$, что

$$A = UA_1U^\top, \tag{2.4.11}$$

где матрица A_1 диагональная

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{2.4.12}$$

у которой первые p чисел λ_k положительным, затем следует q отрицательных чисел λ_k и затем следует r нулей, $p+q+r=n$. Числа p,q,r принимают значения $0,1,2,...n$.

Введём диагональную матрицу $Z_{p,q,r} \in M(n)$, содержащую на диагонали сначала p единиц, затем q минус-единиц, затем r нулей. В случае $r=0$ введём специальное обозначение для матрицы $Z_{k,(n-k),0} \equiv Z_k$. Построим по матрице A_1 диагональную матрицу $N \in M(n)$, у которой первые $(p+q)$ диагональных элементов равны $\sqrt{|\lambda_k|}$, а оставшиеся r равны единице, тогда

$$A_1 = NZ_{p,q,r}N^\top. \tag{2.4.13}$$

Для матрицы A получено представление

$$A = WZ_{p,q,r}W^\top, \tag{2.4.14}$$

где матрица $W \in M(n)$ невырождена

$$W \equiv UN. \tag{2.4.15}$$

Согласно лемме 1 из представления (2.4.14) вытекает следующее представление для полугруппы матриц $\Omega(A)$:

$$\Omega(A) = W\Omega(Z_{p,q,r})W^{-1}. \tag{2.4.16}$$

Формула (2.4.16) сводит построение полугруппы $\Omega(A)$ для произвольной симметричной матрицы к построению полугруппы $\Omega(Z_{p,q,r})$. В частном случае невырожденной матрицы A будет $r=0$, $q=n-p$, т.е.

$$\Omega(A) = W\Omega(Z_p)W^{-1}, \tag{2.4.17}$$

где p — число положительных собственных значений.

Заметим, что $-Z_p = Z_{(n-p)}$ поэтому в силу соотношения (2.4.2)

$$\Omega(Z_p) = \Omega(Z_{n-p}). \tag{2.4.18}$$

Описание полугруппы $\Omega(Z_{p,q,r})$ при $r \neq 0$ сводится к описанию группы $\Omega(Z_k)$ следующим образом. Введём обозначение $Z_k^n \equiv Z_k$, т.е. в качестве верхнего индекса поставим размерность матрицы и запишем матрицы $Z_{p,q,r} \in M(n)$ в блочном виде

$$Z_{p,q.r} = \begin{pmatrix} Z_p^m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m = p+q \tag{2.4.19}$$

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.4.20}$$

где матрицы $G_{11} \in M(m\times m)$, $G_{12} \in M(m\times r)$, $G_{21} \in M(r\times m)$, $G_{22} \in M(r\times r)$. Уравнение

$$GZ_{p,q,r}G^\top = Z_{p,q,r}. \tag{2.4.21}$$

в блочном виде эквивалентно четырём уравнениям

$$G_{11}Z_p^m G_{11}^\top = Z_p^m, \tag{2.4.22}$$

$$G_{11}Z_p^m G_{21}^\top = 0, \tag{2.4.23}$$

$$G_{21}Z_p^m G_{11}^\top = 0, \tag{2.4.24}$$

$$G_{21}Z_p^m G_{21}^\top = 0. \tag{2.4.25}$$

Соотношение (2.4.22) означает включение $G_{11} \in \Omega(Z_p^m)$ и влечет невырожденность матрицы G_{11}. Невырожденность матриц Z_p^m и G_{11} в силу соотношения (2.4.23) влечет $G_{21}=0$, после чего соотношения (2.4.24) и (2.4.25) выполняются.

Получено следующее описание множества матриц $\Omega(Z_{p,q,r})$: матрица $G \in \Omega(Z_{p,q,r})$ тогда и только тогда, когда она имеет следующий блочный вид

$$G = \begin{pmatrix} G' & \\ 0 & V \end{pmatrix}, \tag{2.4.26}$$

где матрица $G' \in \Omega(Z_p^{p+q})$, а $V \in M(n\times r)$ — произвольная матрица.

Итак, описание полугруппы $\Omega(A)$ для произвольной симметричной матрицы мы редуцировали к описанию группы $\Omega(Z_k)$. В силу инволютивности матрицы Z_k по следствию 1 и соотношению (2.3.13) группа $\Omega(Z_k) = I(Z_k)$, т.е. совпадает с группой матриц, оставляющих инвариантной квадратичную форму $\langle x, Z_k x\rangle$, где $x \in \mathbf{R}^n$. Таким образом, группа $\Omega(Z_k)$ есть группа псевдоортогональных матриц $\Omega(Z_k) = O(k, n-k)$. В частности, при $k=n$ получаем $\Omega(Z_k) = \Omega(E) = O(n)$ группу ортогональных матриц.

2.4.4 Группа Лоренца $\Omega(Z_1) = O(1,3)$

Мы убедились, что для невырожденной симметричной матрицы A описание группы $\Omega(A)$ сводится к группе $\Omega(Z_k)$. Поэтому в настоящем пункте применим проведенные выше рассмотрения к случаю $A = Z_1$, $n = 4$, тогда $\Omega(Z_1) = O(1,3)$ — группа Лоренца. Обратную матрицу к матрице $G \in \Omega(\Theta)$ согласно лемме 2 представим в виде

$$G^{-1} = \Theta G^\top \Theta. \tag{2.4.27}$$

Известно (см. [30]), что группа Лоренца является 6-мерной группой Ли, состоящей из четырёх компонент связности. Четыре компоненты связности мы обозначаем Ω_{++}, Ω_{+-}, Ω_{-+}, Ω_{--}, выбирая их представителями соответственно матрицы

$$G_{++} = E_4,\ G_{+-} = \begin{pmatrix} 1 & 0\ 0\ 0 \\ 0 & \\ 0 & -E_3 \\ 0 & \end{pmatrix},\ G_{-+} = \begin{pmatrix} -1 & 0\ 0\ 0 \\ 0 & \\ 0 & E_3 \\ 0 & \end{pmatrix},\ G_{--} = -E_4. \tag{2.4.28}$$

Компоненту связности единицы мы обозначаем также $\Omega_e \equiv \Omega_{++}$. Для компонент связности справедливо представление

$$\Omega_i = \Omega_e G_i, \quad i = ++, +-, -+, --\,. \tag{2.4.29}$$

2.4.5 Разложение матрицы A на сумму симметричной C и кососимметричной D матриц.

Преобразование матрицы A по правилу $A \to GAG^\top$ обладает тем свойством, что сохраняет симметричность или кососимметричность матрицы. Линейное пространство квадратных матриц $M(n)$ является прямой суммой двух линейных подпространств: линейного подпространства симметричных матриц $Ms(n)$, удовлетворяющих условию $A^\top = A$ и линейного подпространства кососимметричных матриц $Ma(n)$, удовлетворяющих условию $A^\top = A$. Каждая матрица $A \in M(n)$ единственным образом представляется в виде суммы

$$A = C + D, \tag{2.4.30}$$

где $C \in Ms(n)$, $D \in Ma(n)$, причём

$$C = \frac{1}{2}(A + A^\top),\ D = \frac{1}{2}(A - A^\top). \tag{2.4.31}$$

Для любой матрицы $G \in M(n)$, если $A \in Ms(n)$, то $GAG^\top \in Ms(n)$ и если $A \in Ma(n)$, то $GAG^\top \in Ma(n)$. Справедливы включения

$$\forall G \in M_(n) \ \Big|\ \Big(GMs(n)G^\top \subset Ms(n)\Big) \wedge \Big(GMa(n)G^\top \subset Ma(n)\Big), \tag{2.4.32}$$

которые для невырожденной матрицы G превращаются в равенства

$$\forall G \in \mathrm{GL}_(n) \ \Big|\ \Big(GMs(n)G^\top = Ms(n)\Big) \wedge \Big(GMa(n)G^\top = Ma(n)\Big). \tag{2.4.33}$$

Подставим в равенство (2.4.1) представление (2.4.30) матрицы A, получим

$$GCG^\top + GDG^\top = C + D,$$

что эквивалентно одновременному выполнению двух равенств

$$GCG^{\top} = C, \tag{2.4.34}$$

$$GDG^{\top} = D. \tag{2.4.35}$$

Мы получили равенство

$$\Omega(A) = \Omega(C) \cap \Omega(D). \tag{2.4.36}$$

Поскольку для нулевой матрицы

$$\Omega(0) = M(n), \tag{2.4.37}$$

то равенство (2.4.36) становится тривиальным для симметричной матрицы A $(D = 0)$ и кососимметричной матрицы A $(C = 0)$.

2.4.6 Случай кососимметричной матрицы A. В этом пункте рассмотрим кососимметричную матрицу A. Тогда аналогично п. 2.4.3 существует невырожденная матрица W, что справедливо представление (см. [52], с. 125)

$$A = WY_{k,z}W^{\top}, \tag{2.4.38}$$

где $Y_{k,z} \in Ma(n)$ — матрица вида

$$Y_{k,z} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & & & & & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & \\ & 0 & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad k + r = n, \tag{2.4.39}$$

содержащая на диагонали $\frac{k}{2}$ клеток вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, идущих подряд, а все остальные её элементы равны нулю. В случае когда $k = n$ матрица $Y_{k,o}$ невырождена и будет обозначаться Y_n. Матрица Y_n антиинволютивна $Y_n^{-1} = -Y_n$, поэтому по следствию 1 верно $\Omega(Y_n) = \Omega^{\top}(Y_n) = I(Y_n)$, где под $I(Y_n)$ мы понимаем группу преобразований сохраняющих билинейную форму с матрицей Y_n. Итак, $\Omega(Y_n) = Sp(m)$, $n = 2m$ — симплектическая группа (см. [53], с.17).

Замечание 2.4.1 *Для квадратных матриц* 2×2 *справедливо следующее включение*

$$\Omega_e(Z_2) = SO(2) \subset \Omega_e(Y_2), \tag{2.4.40}$$

проверяемое прямым вычислением, где $\Omega_e(A)$ *означает компоненту связности единицы данной группы* $\Omega(A)$.

§2.5 Замена переменных в действии

Мы уже высказали точку зрения, что отдаём предпочтение уравнениям Эйлера перед действием. Причина такого рассмотрения — существование физически естественных решений уравнения Эйлера, для которых не существует интеграл

$$\iiiint\limits_{\mathbf{R}^4} \mathcal{L}\, dx_0\, dx_1 dx_2 dx_3.$$

В частности, в случае стационарных решений уравнений Эйлера, для которых интеграл по пространству

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{L}\ dx_1 dx_2 dx_3 = Const \neq 0, \tag{2.5.1}$$

действие

$$L(u) \equiv \int\limits_{\mathbf{R}} \left(\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{L}\, dx_1 dx_2 dx_3 \right) dx_0$$

не существует. Итак, наша первая задача — построить математический формализм, позволяющий рассматривать решения уравнения Эйлера, для которых не определено действие. Кроме того, в настоящем параграфе мы рассмотрим роль замены переменных в действии и найдём замену переменных, оставляющую действие Лоренца с плотностью (2.2.40) инвариантным. Последнее означает, что мы построим бесконечномерное представление группы Лоренца в виде преобразований T, переводящих решения уравнений Эйлера снова в решения. При этом будут построены и преобразования токов, т.е. операторы $\tilde{T}$, связанные с оператором T соотношением

$$AT = \tilde{T}A,$$

где A — базовый оператор для действия Лоренца.

2.5.1 Преобразование множества экстремалей. Рассмотрим отображение $L : U \to \mathbf{R}$ локально выпуклого линейного топологического пространства во множество действительных чисел, т.е. функционал. Пусть в каждой точке $u \in U$ существует производная $\frac{\partial L}{\partial u}(u) \in U^*$ в смысле [70]. Каждой точке $u \in U$ мы сопоставили линейный функционал $\frac{\partial L}{\partial u}(u) \in U^*$ — получилось отображение пространства U в локально выпуклое линейное топологическое пространство U^* линейных непрерывных функционалов на U с топологией поточечной сходимости на U. Отображение, сопоставляющее элементу $u \in U$ элемент $\frac{\partial L}{\partial u}(u) \in U^*$, обозначим $\Pi L : U \to U^*$ или поэлементно $\Pi L(u) = \frac{\partial L}{\partial u}(u)$ и назовём *отображением Эйлера (оператором Эйлера).*

Пусть $T : U^* \to U$ дифференцируемое отображение локально выпуклого линейного топологического пространства U^* в локально выпуклое линейное топологическое пространство U. Суперпозиция $LT : U \to \mathbf{R}$ будет дифференцируемым функционалом и

$$\frac{\partial LT}{\partial w}(w) = \frac{\partial L}{\partial u}\Big|_{u=T(w)} \frac{\partial T}{\partial w}(w).$$

Обозначим далее $L_T(x) = L(T(x))$ и перепишем предыдущую формулу в виде

$$\frac{\partial L_T}{\partial w}(w_0) = \frac{\partial L}{\partial u}\Big|_{u=T(w_0)} \frac{\partial T}{\partial w}(w_0), \tag{2.5.2}$$

где $\frac{\partial T}{\partial w}(w_0)$ при каждом $w_0 \in W$ есть линейное непрерывное отображение пространства W в пространство U, $\frac{\partial L}{\partial u}(u) \in U^*$, $\frac{\partial L_T}{\partial w}(w) \in W^*$.

Уравнение Эйлера для функционала L есть по определению уравнение

$$\Pi L(u) = 0. \tag{2.5.3}$$

Уравнение Эйлера для преобразованного функционала L_T будет согласно (2.5.2) иметь вид

$$\Pi L(T(w))\Pi T(w) = 0, \quad (\Pi T(w) \equiv \frac{\partial T}{\partial w}(w)). \tag{2.5.4}$$

Экстремалями функционала L мы называем элементы $u \in U$, удовлетворяющие уравнению (2.5.3). Нас, как правило, будут интересовать свойства экстремалей функционала. Рассмотрим соотношения между множеством экстремалей функционала L и преобразованного функционала L_T.

Из соотношения (2.5.2) следует, что если точка $u_0 \in U$ экстремаль исходного функционала L, то её прообраз состоит из экстремалей преобразованного функционала L_T. Обозначив через $\Phi(L) \subset U$ множество экстремалей функционала L, мы можем записать включение

$$T^{-1}(\Phi(L)) \subset \Phi(L_T). \tag{2.5.5}$$

Итак, прообраз экстремали, если он не пуст, состоит из экстремалей.

В более ограничительных предположениях на отображение T справедливо утверждение.

Утверждение 2.5.1 *Если в точке $w_0 \in W$ линейный оператор $\frac{\partial T}{\partial w}(w_0)$ сюръективен, то условия*

$$\Pi L(T(w_0) = 0 \tag{2.5.6}$$

и

$$\Pi L_T(w_0) = 0 \tag{2.5.7}$$

эквивалентны.

Доказательство. Условие $\Pi L_T(w_0) = 0$ означает, что функционал $\Pi L_T(w_0) \in W^*$ нулевой, т.е.

$$\forall\, \delta w \in W \;\Big|\; \Pi L_T(w_0)\, \delta w = 0$$

или в силу (2)

$$\forall\, \delta w \in W \;\Big|\; \Pi L(T(w_0))\Pi T(w_0)\delta w = 0. \tag{2.5.8}$$

Но когда элемент δw пробегает пространство W, элемент $\delta u \equiv \Pi T(w_0)\delta w$ пробегает по условию всё пространство U, поэтому условие (2.5.7) эквивалентно следующему условию

$$\forall\, \delta u \in U \;\Big|\; \Pi L(T(w_0))\, \delta u = 0. \tag{2.5.9}$$

Последнее соотношение и означает (2.5.5). $\diamondsuit$

Итак, в точках w_0, в которых линейный оператор $\frac{\partial T}{\partial w}(w_0)$ сюръективен, точка $u_0 = T(w_0) \in U$ будет экстремалью (искомого) функционала L, тогда и только тогда, когда точка $w_0 \in W$ будет экстремалью преобразованного функционала L_T.

Следствие 2.5.1 *Если при любом $w_0 \in W$ линейный оператор $\frac{\partial T}{\partial w}(w_0)$ сюръективен, то*

$$T^{-1}(\Phi(L)) = \Phi(L_T). \tag{2.5.10}$$

В частности, (2.5.10) верно, если $T : W \to U$ линейное сюръективное непрерывное отображение. А если оператор T линейный изоморфизм локально выпуклых пространств W и U, то экстремальные задачи для функционалов L и L_T эквивалентны.

Пусть $W = U$ и отображение $T : U \to U$ линейный изоморфизм локально выпуклого пространства U на себя. Пусть при этом функционал L инвариантен относительно преобразования T, т.е.

$$\forall u \in U \;\Big|\; L_T(w) = L(u). \tag{2.5.11}$$

Тогда $\Phi(L) = \Phi(L_T)$ и

$$T^{-1}(\Phi(L)) = \Phi(L), \tag{2.5.12}$$

т.е.отображение T переводит любую экстремаль функционала L снова в экстремаль. Таким образом, если нам известна экстремаль x_0 функционала L и семейство линейных изоморфизмов T_α, $\alpha \in I$, относительно которых функционал L инвариантен, то применяя операторы T_α к элементу u_0, мы получим семейство экстремалей функционала L вида $T_\alpha(u_0)$, $\alpha \in I$.

2.5.2 Продолжение производной на пространство обобщённых функций

По функционалу L мы построили отображение $\Pi L : U \to U^*$, сопоставляющее каждому элементу $u \in U$ производную $\frac{\partial L}{\partial u}(u)$ функционала L в точке u. Пусть отображение $\Pi L : U \to U^*$ непрерывно, это означает, что если τ_1 — топология на пространстве U, а τ_2 — прообраз топологии пространства U^* при отображении ΠL, то топология τ_1 мажорирует топологию τ_2, $\tau_1 \succ \tau_2$. Тогда для любой промежуточной локально выпуклой топологии τ на пространстве U отображение ΠL будет непрерывно из пространства (U, τ) в пространство U, где (U, τ) означает локально выпуклое линейное топологическое пространство, состоящее из векторного пространства U с топологией τ. Пополним пространство (U, τ) до полного локально выпуклого пространства $\overline{(U, \tau)}$. Пусть существует продолжение ΠL отображения ΠL со множества U на множество $G = \overline{(U, \tau)}$, тогда это продолжение единственно. В случае квадратичного функционала L, который мы рассматриваем далее, отображение ΠL линейно и описанная процедура даёт рецепт продолжения линейного оператора на более широкое пространство.

Рассмотрим случай квадратичного действия вида

$$L = \iiiint\limits_{\mathbf{R}^4} \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx_0\, dx_1 dx_2 dx_3, \tag{2.5.13}$$

где плотность функции Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = z_{ij}^{kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j}, \quad i, j, k, l = 0, 1, 2, 3. \tag{2.5.14}$$

В качестве пространства U выберем пространство $D_4(\mathbf{R}^4)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем (определение см. [24]) и со значениями в $\mathbf{R}^4$. Тогда U^* будет пространством обобщённых функций. Производная ΠL будет линейным оператором, сопоставляющим основной функции $u \in U$ обобщённую функцию $\Pi L(u)$ вида

$$(\Pi L(u))^k = -z_{ij}^{kl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \tag{2.5.15}$$

Линейное отображение $\Pi L : U \to U^*$ непрерывно и может быть однозначно продолжено по непрерывности на пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций $C_4^{(2)}(\mathbf{R}^4)$ более того, формула (2.5.15) позволяет продлить по непрерывности отображение ΠL на все пространство обобщённых функций. Таким образом, можно однозначно определить $\Pi L(u)$ для любой обобщённой функции $u \in U^*$, если вложение $Q : U \to U^*$ понимать как сопоставление функции $u_0 \in U$ функционала $Q(u_0)$, такого, что

$$Q(u_0)(w) = \int\iiint\limits_{\mathbf{R}^4} u_0(x)u(x)\,dx_0\,dx_1 dx_2 dx_3. \tag{2.5.16}$$

Вышесказанное позволяет при выводе уравнения Эйлера для функционала L ограничиться рассмотрением функционала L на основных функциях $u(x) \in D_4(\mathbf{R}^4)$.

2.5.3 Условия инвариантности действия при линейном преобразовании T.

Рассмотрим действие вида (2.5.13, 2.5.14) с массивом коэффициентов z_{ij}^{kl}, зависящим от 4 индексов $k, l, i, j = 0, 1, 2, 3$ и удовлетворяющим условию симметричности

$$z_{ij}^{kl} = z_{ji}^{lk}. \tag{2.5.17}$$

Возьмём две матрицы B и G размера 4×4, $\det G \neq 0$ и рассмотрим линейный оператор

$$T(u)(x) = Bu(Gx), \tag{2.5.18}$$

сопоставляющий функции $u(x) \in C_4(\mathbf{R}^4)$ функцию $u'(x) \equiv Bu(Gx)$ класса $C_4(\mathbf{R}^4)$. Если $\det B \neq 0$, то линейный оператор $T : C_4(\mathbf{R}^4) \to C_4(\mathbf{R}^4)$ будет изоморфизмом пространства $C_4(\mathbf{R}^4)$ на $C_4(\mathbf{R}^4)$, сужение которого на пространство $C_4^{(k)}(\mathbf{R}^4)$, $k = 1, 2, ...$ также изоморфизм $T_k : C_4^{(k)}(\mathbf{R}^4) \to C_4^{(k)}(\mathbf{R}^4)$. Обозначим $x' = Gx$ и преобразуем действие L_T.

Вычислим $\mathcal{L}(\frac{\partial T}{\partial x}(u))$, учитывая, что

$$(T(u))^k = b_r^k u^r(Gx), \tag{2.5.19}$$

следовательно,

$$\frac{\partial (T(u))^k}{\partial x_i} = b_r^k \frac{\partial u_r}{\partial x'_p} g_i^p. \tag{2.5.20}$$

Таким образом, плотность лагранжиана

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial (T(u))}{\partial x}\right) = z_{ij}^{kl} b_r^k \frac{\partial u_r}{\partial x'_p} g_i^p b_s^l \frac{\partial u_s}{\partial x'_q} g_j^q = z_{ij}^{kl} b_r^k b_s^l g_i^p g_j^q \frac{\partial u_r}{\partial x'_p}\frac{\partial u_s}{\partial x'_q}. \tag{2.5.21}$$

Действие принимает вид

$$L_T(u) = L\left(T(u)\right) = \iiiint\limits_{\mathbf{R}^4} \left(z_{ij}^{kl} b_r^k b_s^l g_i^p g_j^q\right) \frac{\partial u_r}{\partial x'_p}\frac{\partial u_s}{\partial x'_q}\,dx_0\,dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

Сделав в последнем интеграле замену переменных $x' = Gx$, получим

$$L_T(u) = \frac{1}{|\det G|}\iiiint\limits_{\mathbf{R}^4} \left(z_{ij}^{kl} b_r^k b_s^l g_i^p g_j^q\right) \frac{\partial u_r}{\partial x'_p}\frac{\partial u_s}{\partial x'_q}\,dx'_0\,dx'_1\,dx'_2\,dx'_3.$$

Мы получили, что

$$L_T(u) = \iiiint\limits_{\mathbf{R}^4} z'^{rs}_{pq} \frac{\partial u_r}{\partial x_p} \frac{\partial u_s}{\partial x_q} \, dx_0 \, dx_1 dx_2 dx_3, \tag{2.5.22}$$

где

$$z'^{rs}_{pq} = \frac{1}{|\det G|} z^{kl}_{ij} b^k_r b^l_s g^p_i g^q_j. \tag{2.5.23}$$

Итак, мы убедились, что преобразование действия с помощью линейного оператора вида (2.5.18) сводится к преобразованию массива z^{kl}_{ij} по формуле (2.5.23). Для инвариантности действия (2.5.13, 2.5.14) под действием преобразования T в таком случае достаточно равенства

$$z^{rs}_{pq} = \frac{1}{|\det G|} z^{kl}_{ij} b^k_r b^l_s g^p_i g^q_j. \tag{2.5.24}$$

Поскольку отображение Эйлера, соответствующее плотности лагранжиана (2.5.14), имеет вид (2.5.15), то в обозначениях § 2.2 выполняется равенство $\Pi L(u) = A(u)$ и преобразованию T соответствует преобразование массива $a^{kl}_{ij} = -z^{kl}_{ij}$, задающего уравнение Эйлера, по тем же формулам. Условие инвариантности действия L в терминах массива a^{kl}_{ij} имеет тот же вид

$$a^{rs}_{pq} = \frac{1}{|\det G|} a^{kl}_{ij} b^k_r b^l_s g^p_i g^q_j. \tag{2.5.25}$$

Умножая последнее равенство на $(B^{-1})^r_t$ и суммируя, получим эквивалентное равенство

$$a^{tl}_{ij} b^l_s g^p_i g^q_j = |\det G| (B^{-1})^r_t a^{rs}_{pq}. \tag{2.5.26}$$

Последнее равенство влечет выполнение равенства (2.3.9) из §2.3 с матрицей

$$\Lambda = |\det G| (B^{-1})^{\top}, \tag{2.5.27}$$

а следовательно и выполнение равенства (2.3.23) для оператора $A = \Pi L$, т.е.

$$AT = \tilde{T} A$$

2.5.4 Проверка условий инвариантности для трёх действий.

Рассмотрим теперь три плотности лагранжиана вида (2.5.14) с массивами

$$z^{kl}_{ij} = \theta^{kl} \theta_{ij}, \tag{2.5.28}$$

$$z^{kl}_{ij} = \theta^k_j \theta^l_i, \tag{2.5.29}$$

$$z^{kl}_{ij} = \theta^k_i \theta^l_j. \tag{2.5.30}$$

Для первого массива соотношения (2.5.24) принимают вид:

$$|\det G| \theta^{rs} \theta_{pq} = \theta^{kl} \theta_{ij} b^k_r b^l_s g^p_i g^q_j$$

и будут выполнены, если выполняется два равенства

$$\theta^{rs} = \theta^{kl} b^k_r b^l_s, \tag{2.5.31}$$

$$\theta_{pq} = \theta_{ij} g_i^p g_j^q. \tag{2.5.32}$$

В терминах §2.3, §2.4 условие (2.5.31) означает, что $B^\top \in \Omega(\Theta)$, а условие (2.5.32) — что $G \in \Omega(\Theta)$. Поскольку $\Omega^\top(\Theta) = \Omega(\Theta)$, то условие $B^\top \in \Omega(\Theta)$ эквивалентно условию $B \in \Omega(\Theta)$. Итак, если $B \in \Omega(\Theta), G \in \Omega(\Theta)$, то действие с массивом z_{ij}^{kl} вида (2.5.28) инвариантно и

$$\Lambda = (B^{-1})^\top. \tag{2.5.33}$$

Для массива (2.5.29) условия (2.5.24) имеют вид

$$|\det G| \theta_q^r \theta_p^s = \theta_j^k \theta_i^l b_r^k b_s^l g_i^p g_j^q$$

и выполнены, если выполнены два условия

$$\theta_q^r = \theta_j^k b_r^k g_j^q, \tag{2.5.34}$$

$$\theta_p^s = \theta_i^l b_s^l g_i^p. \tag{2.5.35}$$

Соотношения (2.5.34, 2.5.35) в матричном виде записываются следующим образом, соответственно

$$\Theta = B^\top \Theta G^\top,$$

$$\Theta = B^\top \Theta G^\top$$

и выполняются, если

$$G \in \Omega(\Theta), \quad B = G^\top. \tag{2.5.36}$$

Для массива (2.5.30) условия (2.5.24) имеют вид

$$|\det G| \theta_p^r \theta_q^s = \theta_i^k \theta_j^l b_r^k b_s^l g_i^p g_j^q$$

и выполнены, если выполнены два условия, записываемых в матричном виде следующим образом:

$$\Theta = B^\top \Theta G^\top,$$

$$\Theta = B^\top \Theta G^\top.$$

Что верно при условии (2.5.36).

Мы убедились в справедливости теоремы.

Теорема 2.5.1 *Если $G \in \Omega(\Theta)$, $B = G^\top$, то действие с массивом коэффициентов*

$$z_{ij}^{kl} = -\theta^{kl}\theta_{ij} + \theta_j^k \theta_i^l \tag{2.5.37}$$

инвариантно при преобразовании T вида (2.5.18) и оператор $\tilde{T}(u)$ имеет вид

$$\tilde{T}(u) = G^{-1} u(Gx). \tag{2.5.38}$$

Замечание 2.5.1 *Из вышесказанного следует, что теорема верна для любого массива z_{ij}^{kl} вида*

$$z_{ij}^{kl} = c_1 \theta^{kl}\theta_{ij} + c_2 \theta_j^k \theta_i^l + c_3 \theta_i^k \theta_j^l \tag{2.5.39}$$

с произвольными постоянными c_1, c_2, c_3.

Действие Лоренца с массивом z_{ij}^{kl} вида (2.5.37) на пространстве $\mathbf{R}^4$ инвариантно также относительно сдвига аргументов на постоянный вектор и сдвига функции на постоянный вектор. Поскольку мы рассматриваем решения, исчезающие на бесконечности, $|u(x)| \to 0$ при $|x| \to 0$, то сдвиг функции на постоянный вектор недопустим. Мы получаем 10–параметрическую группу Ли преобразований решений $T_p : U \to U$, являющуюся бесконечномерным представлением группы Пуанкаре P. Преобразования T_p переводят решения уравнений Эйлера снова в решения.

Преобразования $p : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ из группы Пуанкаре P задаются 10 числовыми параметрами $q \in \mathbf{R}^{10}$ — координатами на группе Пуанкаре. Как правило, мы выбираем преобразование $p(x)$ в форме

$$p(x) = G(x - a), \tag{2.5.40}$$

где $a \in \mathbf{R}^4$ постоянный вектор — вектор сдвига, а $G \in \Omega(\Theta)$ матрица Лоренца, зависящая от 6 параметров $\omega \in \mathbf{R}^6$. Итак $q = (\omega, a)$. Оператор $T_p(u)$ имеет в таком случае вид

$$T_p(u)(x) = G^\top u\left(G(x-a)\right) = G^\top u\left(p(x)\right), \tag{2.5.41}$$

а оператор $\tilde{T}_p(u)$ —

$$\tilde{T}_p(u)(x) = G^{-1} u\left(G(x-a)\right) = G^{-1} u\left(p(x)\right). \tag{2.5.42}$$

Операторы T_p и $\tilde{T}_p$ связаны соотношением

$$AT_p = \tilde{T}_p A, \tag{2.5.43}$$

где A — оператор Эйлера для действия Лоренца.

2.5.5 Инвариантность условия Лоренца.

Преобразования (2.5.41) обладают свойствами сохранять условие Лоренца. Введём линейный дифференциальный оператор Лоренца $K : C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4) \to C_1(\mathbf{R}^4)$ следующего вида:

$$Ku \equiv \theta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{2.5.44}$$

и оператор $\tilde{K} : C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4) \to C_1(\mathbf{R}^4)$ вида

$$\tilde{K}u \equiv \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{2.5.45}$$

Лемма 2.5.1 *Для любой функции $u \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)$ справедливы равенства*

$$KT_p(u)(x) = K(u)(p(x)), \tag{2.5.46}$$

$$\tilde{K}\tilde{T}_p(u)(x) = \tilde{K}(u)(p(x)). \tag{2.5.47}$$

Доказательство. Согласно формуле (2.5.41)

$$T_p(u)_i = g_{ik}^\top u_k\left(G(x-a)\right),$$

поэтому

$$K(T_p(u)) = \theta_{ij} g_{ik}^\top \frac{\partial u_k(G(x-a))}{\partial x_j} = \theta_{ij} g_{ik}^\top g_{sj} \frac{\partial u_k}{\partial x_s}\Big|_{p(x)} = \theta_k s \frac{\partial u_k}{\partial x_s}\Big|_{p(x)} = K(u)(p(x)). \tag{2.5.48}$$

(Мы использовали равенство $\theta_{ij}g^{\top}_{ik}g_{sj} = \theta_{ks}$, вытекающее из условия $G \in \Omega(\Theta)$). Аналогично, используя равенство $GEG^{-1} = E$, получаем

$$\tilde{K}(T_p(x)) = \delta_{ij}g^{-1}_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}(G(x-a)) = \delta_{ij}g^{-1}_{ik}g_{sj}\frac{\partial u_k}{\partial x_s}\Big|_{p(x)} = \delta_{ks}\frac{\partial u_k}{\partial x_s}\Big|_{p(x)} = \tilde{K}(u)(p(x)). \tag{2.5.49}$$

$\diamondsuit$

Следствие 2.5.2 *При любом $p \in P$ условия $K(u) = 0$ и $KT_p(u) = 0$ эквивалентны, а также условия $\tilde{K}(u) = 0$ и $\tilde{K}\tilde{T}_p(u) = 0$ эквивалентны.*

2.5.6 Билинейная форма N_1.

Рассмотрим симметричную билинейную форму

$$N_1\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \equiv z^{kl}_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}, \tag{2.5.50}$$

где массив z^{kl}_{ij} имеет вид (2.5.37), соответствующую квадратичной форме (2.5.14), и проведём с функциями $v(x)$,$u(x)$ преобразования вида (2.5.18)

$$T_1(v)(x) \equiv B_1v(G_1(x-a^1)), \quad T_2(u)(x) \equiv B_2u(G_2(x-a^2)), \tag{2.5.51}$$

где $B_1, B_2, G_1, G_2 \in M(4)$ и $a^1, a^2 \in \mathbf{R}^4$. Введём обозначения $x' = G_1(x-a^1)$, $x'' = G_2(x-a^2)$ и рассмотрим выражение

$$N_1\left(\frac{\partial}{\partial x}T_1(v), \frac{\partial}{\partial x}T_2(u)\right) = z^{kl}_{ij}b^k_{r1}\frac{\partial v_r}{\partial x'_s}g^s_{i1}b^l_{t2}\frac{\partial u_t}{\partial x''_h}g^h_{j2} = (z^{kl}_{ij}b^k_{r1}b^l_{t2}g^s_{i1}g^h_{j2})\frac{\partial v_r}{\partial x'_s}\frac{\partial u_t}{\partial x''_h}. \tag{2.5.52}$$

В случае $T_1 = T_2 = T_p$, $p \in P$ преобразование T_p оставляет инвариантным величину z^{kl}_{ij}, т.е.

$$z^{kl}_{ij}b^k_{r1}b^l_{t2}g^s_{i1}g^h_{j2} = z^{rt}_{sh}, \tag{2.5.53}$$

получаем следующее свойство билинейной формы (2.5.50)

$$N_1\left(\frac{\partial}{\partial x}T_p(v), \frac{\partial}{\partial x}T_p(u)\right)(x) = N_1\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)(p(x)). \tag{2.5.54}$$

Глава 3

Преобразование характеристик частицы

Для построения функции Лагранжа частицы во внешнем поле в плотность лагранжиана Лоренца $\mathcal{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ подставляется функция $u = T_p(v) + w$, где v — функция стандартного состояния частицы, $p \in P_e$, w — функция состояния внешнего поля. Интегрируя плотность лагранжиана $\mathcal{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x)$ по пространственным переменным $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$, получаем функцию Лагранжа $n(x_0, p)$ как функцию времени $x_0 \in \mathbf{R}$ и элемента $p \in P_e$ или 10 чисел $q(p)$ — координат на группе P. Этот переход от плотности лагранжиана $\mathcal{N}$ к функции Лагранжа n мы называем *конденсацией.* Три параметра из десяти параметров q, а именно координаты вектора пространственного сдвига $\vec{a}$ выражаются через координаты центра частицы — вектора $\vec{b}(x_0)$ (§3.2).

В силу квадратичности плотности лагранжиана Лоренца $\mathcal{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ функцию Лагранжа $n(x_0, p)$ после конденсации можно записать в виде суммы трёх слагаемых, из которых первое зависит лишь от частицы, второе — от частицы и внешнего поля, а третье — лишь от внешнего поля. Первый член мы называем *массой* — это есть, вообще говоря, функция $m(x_0, p)$. Второй член называем *функционалом взаимодействия* или *потенциалом взаимодействия.* Потенциал взаимодействия является билинейным функционалом от функций состояния частицы и поля. Вводя условие Лоренца на функции состояния, мы получаем взаимно-однозначную связь между функцией состояния и функцией тока и выражаем потенциал взаимодействия как линейный функционал от функции тока j при фиксированной функции состояния внешнего поля w. Для асимптотического вычисления этого линейного функционала мы аппроксимируем его обобщённой функцией с точечным носителем в центре частицы. Для построения соответствующей обобщённой функции и асимптотического вычисления интеграла взаимодействия мы вводим пространственные моменты функции тока $j(x_0, \vec{x})$: 4 момента нулевого порядка cj и $4 \times 3 = 12$ моментов первого порядка — kj. Массивы чисел cj и kj мы называем соответственно векторными и тензорными коэффициентами взаимодействия. Значения коэффициентов cj и kj зависят от состояния частицы (§ 3.3, § 3.4).

Мы вводим класс частиц, называемых нами *агвидами*, или класс частиц-волн, у которых функция тока $j(x) \in F_4(I \times \mathbf{R}^3)$ выражается через функцию трёх переменных $jf(\vec{x}) \in F_4(\mathbf{R}^3)$ и постоянный вектор $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ по формуле $j(x) = jf(\vec{x} - \vec{l}x_0)$. Для агвидных частиц явно вычисляются их характеристики cj и kj как функции состояния (§ 3.7). А именно, все моменты нулевого порядка агвидной частицы выражаются через одну числовую характеристику — заряд частицы e по формуле $cj = el$, где $l = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{l} \end{pmatrix}$ и $\vec{l}$ — вектор скорости центра частицы. А 12 моментов первого порядка в случае $e \neq 0$ выражаются через 3 числовые характеристики.

§3.1 Частицы и их координаты

3.1.1 Базовая плотность лагранжиана для опорного состояния $u_0(x)$.

Рассмотрим плотность лагранжиана $\mathcal{L}(x, u, \frac{\partial u}{\partial x})$, зависящий от 4-вектора координат $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, 3-вектора смещений $u = (u_1, u_2, u_3)$ и матрицы частных производных $\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}$, $\alpha = 1, 2, 3$; $i = 0, 1, 2, 3$. (Греческие индексы изменяются от 1 до 3, а латинские от 0 до 3.) Фиксируем функцию $u_0(x)$ и рассмотрим плотность лагранжиана $\mathcal{L}(x, u_0 + V, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x})$ при изменяющейся функции $v(x)$ и фиксированной функции $u_0(x)$. Предполагая, что функция $\mathcal{L}$ достаточно гладкая, разложим её по формуле Тейлора до второго порядка включительно по v и $\frac{\partial v}{\partial x}$. Соответствующее разложение назовём *базовой плотностью лагранжиана для опорного состояния* $u_0(x)$ и обозначим $\mathcal{L}b(x, v, \frac{\partial v}{\partial x})$. Таким образом, справедливо разложение

$$\mathcal{L}\left(x, u_0 + v, \frac{\partial(u_0 + v)}{\partial x}\right) = \mathcal{L}b\left(x, v, \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \mathcal{L}r\left(x, v\frac{\partial v}{\partial x}\right), \tag{3.1.1}$$

которому соответствует следующее разложение Эйлера для действия:

$$\Pi L(u_0 + v) = \Pi Lb(v) + \Pi Lr(v), \tag{3.1.2}$$

где $\Pi Lb(v)$ — линейный дифференциальный оператор второго порядка, а $\Pi Lr(v)$ — нелинейный оператор, если $\Pi Lr(v) \not\equiv 0$. В случае $u_0 = 0$ плотность лагранжиана $\mathcal{L}b(x, v, \frac{\partial v}{\partial x})$ мы будем называть *базовой,* также как и соответствующее действие Lb.

По построению

$$\mathcal{L}\left(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) = \mathcal{L}b(x, 0, 0), \tag{3.1.3}$$

$$\mathcal{L}r(x, 0, 0) = 0, \tag{3.1.4}$$

и

$$\Pi L(u_0) = \Pi Lb(0), \tag{3.1.5}$$

$$\Pi Lr(0) = 0. \tag{3.1.6}$$

Если опорное состояние $u_0(x)$ является экстремалью плотности лагранжиана $\mathcal{L}r(x, u, \frac{\partial u}{\partial x})$, то из соотношения (3.1.5) следует

$$\Pi Lb(0) = 0. \tag{3.1.7}$$

В интересующем нас случае, когда функция $u_0 + v$ является экстремалью действия L согласно соотношению (3.1.2) получаем следующее равенство

$$\Pi Lb(v) + \Pi Lr(v) = 0, \tag{3.1.8}$$

откуда следует, что экстремали квадратичного действия L можно рассматривать как решения линейного уравнения Эйлера для квадратичного действия Lb с добавлением в правую часть неоднородности

$$\Pi Lb(v) = j, \tag{3.1.9}$$

где

$$j = -\Pi Lr(v). \tag{3.1.10}$$

В предположении, что для рассматриваемых решений нелинейных уравнений Эйлера функция $\Pi Lr(v)(x)$ является существенно локализованной по пространственным переменным, т.е. функционал $\Pi Lr(v)$ близок к δ-функции, мы покажем, что при некоторых дополнительных условиях (см. §3.7) для изучения асимптотического взаимодействия частиц достаточно знать лишь значение функционала j на линейной функции. Таким образом, мы будем характеризовать функционал j ограниченным числом констант, предполагая их известными, и по этим константам реконструировать поведение решения нелинейного уравнения на больших расстояниях от центра частицы.

3.1.2 Функция тока j как функционал.

Далее в этом параграфе мы рассматриваем плотность вида $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\frac{\partial u}{\partial x})$ и опорное состояние считаем нулевым $u_0 = 0$ и являющимся экстремалью действия. Предполагаем, что функция $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A)$ определена на подобласти пространства матриц $M(3\times 4)$, содержащей нуль, и имеет непрерывные частные производные третьего порядка.

Мы вводим следующее предположение на рассматриваемые решения нелинейных уравнений Эйлера

$$\left| \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{L}r\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\, dx_1 dx_2 dx_3 \right| \ll \left| \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{L}b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\, dx_1 dx_2 dx_3 \right| \tag{3.1.11}$$

Если функция $v(x)$ является решением нелинейного уравнения Эйлера $\Pi L(v) = 0$ то для неё выполняется и соотношение (3.1.9). Таким образом, варьируя квадратичное действие, мы получим линейное уравнение Эйлера. Подставляя в правую часть линейного уравнения Эйлера неоднородность (3.1.10) мы получим *неоднородное линейное уравнение*, которому удовлетворяет интересующее нас решение *нелинейного уравнения* Эйлера. Поэтому далее в квадратичное действие Lb мы подставим функцию $u = w + v$, где w, v — решения уравнения Эйлера L и, варьируя квадратичное действие $Lb(w+v)$ по параметрам, входящим в функции w и v, получим асимптотические уравнения Эйлера для параметров как функций времени.

На рассматриваемом решении $v(x) \in C_3^{(2)}(\mathbf{R}^4)$ нелинейного уравнения мы будем считать, что функционал $j = -\Pi Lr(v)$ близок к δ-функции по пространственным переменным. Функционал j мы считаем регулярным, т.е. его действие на функцию $w(x) \in C_3^{(2)}(\mathbf{R}^4)$ имеет вид

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \left(\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} j_\alpha w_\alpha \, dx_1 dx_2 dx_3 \right) dx_0, \tag{3.1.12}$$

где $j_\alpha(x_0, \vec{x})$ — достаточно гладкие, абсолютно суммируемые по пространственным переменным функции. Отметим, что в целях сокращения числа введенных символов мы регулярный функционал $j \in U^*$ и представляющую его функцию под интегралом (3.1.12) обозначаем одним символом.

Мы считали, что функция $j(x)$ существенно отлична от нуля лишь в некотором пространственном шаре $Q[\vec{b}, \mu]$ с центром в точке $\vec{b} \in \mathbf{R}^3$ и радиусом $\mu > 0$ и достаточно быстро убывает к нулю вне этого шара.

Если бы функция $j(x)$ обращалась строго в нуль вне шара $Q[\vec{b}, \mu]$, то для достаточно медленно меняющейся функции $u(x)$ пространственный интеграл в (3.1.12) принял бы вид:

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} j_\alpha(x_0, \vec{x}) w_\alpha(x_0, \vec{x}) \, dx_1 dx_2 dx_3 = \int\int\limits_{Q[\vec{b},\mu]}\int j_\alpha(x_0, \vec{x}) \Big(w_\alpha(x_0, \vec{b}) +$$

$$\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_\beta}(x_0, \vec{b})(x_\beta - b_\beta) \Big) \, dx_1 dx_2 dx_3 + O(\mu^2).$$

Откуда вытекает представление

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} j_\alpha(x_0, \vec{x}) w_\alpha(x_0, \vec{x}) \, dx_1 dx_2 dx_3 = cj_\alpha w_\alpha(x_0, \vec{b}) + kj_{\alpha\beta} \frac{\partial w_\alpha}{\partial x_\beta}(x_0, \vec{b}) + O(\mu^2), \tag{3.1.13}$$

где величины cj_α и $kj_{\alpha\beta}$ являются моментами нулевого и первого порядка функции $j_\alpha(x_0, \vec{x})$ по пространственным переменным:

$$cj_\alpha \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} j_\alpha(x_0, \vec{x}) \, dx_1 dx_2 dx_3, \tag{3.1.14}$$

$$kj_{\alpha\beta} \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} j_\alpha(x_0, \vec{x})(x_\beta - b_\beta) \, dx_1 dx_2 dx_3. \tag{3.1.15}$$

Вообще говоря, функция $j(x)$ не обращается в нуль вне шара $Q[\vec{b}, \mu]$, но тем не менее мы будем предполагать, что соотношение (3.1.13) для функции $w(x)$ выполняется за счет достаточно быстрого убывания функции $j(x)$ при $|\vec{x}| \to \infty$ и достаточно медленного изменения функции $w(x)$.

3.1.3 Уравнения для координат частицы. Для получения уравнений для координат частицы мы действуем по следующей схеме. Считаем, что функции $v(x)$ и $w(x)$ — решения уравнения Эйлера для действия исходной идеальной среды в смещениях, т.е.

$$\Pi L(v) = 0, \quad \Pi L(w) = 0. \tag{3.1.16}$$

Строим функцию

$$j = -\Pi Lr(v) = \Pi Lb(v) \tag{3.1.17}$$

и считаем, что $Lb(v)$ — действие Максвелла, $Lb(v) = M(v)$. Проводим замену переменных Максвелла, т.е. от функций v, $w \in C_3^{(2)}(I \times \mathbf{R}^3)$ переходим к функциям $v', w' \in C_4^{(3)}(I \times \mathbf{R}^3)$, таким, что

$$v = Bv', \quad w = Bw', \tag{3.1.18}$$

где оператор B: $C_4^{(3)}(I \times \mathbf{R}^3) \to C_3^{(2)}(I \times \mathbf{R}^3)$ описан в § 2.2.

Квадратичное действие Максвелла $M(v + w)$ заменяем на квадратичное действие Лоренца $N(v' + w')$ для 4-функций v', w'.

К функции $v'(x)$ применяем преобразование T_p вида (2.5.41) и получаем 4-функцию $T_p(v')(x)$, зависящую от четырех переменных x_0,x_1,x_2,x_3, и элемента $p \in P_e$ группы Пуанкаре. Значения 10 параметров q преобразования p и будем называть *координатами* частицы. Из этих 10 параметров три параметра $(a_1, a_2, a_3) = \vec{a}$ будут иметь смысл сдвига пространственных координат центра частицы, три параметра $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — смысл скорости движения центра частицы и три параметра — смысл углов поворота частицы в пространстве. Считая функцию $w'(x)$, определяющую внешнее поле, заданной и вид функции $T_p(v')(x)$ заданным, кроме значения параметров q, проинтегрируем плотность лагранжиана $\mathcal{N}(\frac{\partial}{\partial x}(T_p(v') + w'))$ по пространственным переменным x_1, x_2, x_3 и получим функцию

$$n(x_0, p) \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{N}\left(\frac{\partial}{\partial x}(T_p(v') + w')\right) dx_1 dx_2 dx_3, \tag{3.1.19}$$

зависящую от времени x_0 и элемента p$\in P_e$ группы Пуанкаре. Проводя теперь интегрирование по времени, мы получим действие

$$N(q) \equiv \int\limits_I n(x_0, p(q)) dx_0, \tag{3.1.20}$$

уравнения Эйлера которого — система обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений. Мы получили уравнения, описывающие эволюцию координат частицы $q(x_0)$ во времени в заданном поле $w'(x)$.

Построенное таким образом приближение к решению исходного нелинейного уравнения Эйлера для идеальной среды является, во-первых, квазистационарным, так как при вычислении интеграла (3.1.19) мы считаем величины q не зависящими от времени и лишь затем в действии (3.1.20) подставляем $\vec{\beta}(x_0) = \frac{d}{dx_0}\vec{b}(x_0)$, где $\vec{b}(x_0)$ — вектор координат центр частицы. Во-вторых, мы пренебрегаем излучением частицы. Дело в том, что функция $v_p(x) + w(x) \equiv B(T_p(v') + w')$ не является точным решением нелинейного уравнения Эйлера исходной идеальной среды

$$\Pi L(v_p + w) \neq 0.$$

Точным решением будет функция $v_p + w + u$,

$$\Pi L(v_p + w + u) = 0,$$

где $v_p = BT_p(v')$, $w = Bw'$, $u = Bu'$. Функцию $u(x)$ или её прообраз $u'(x)$ и будем рассматривать как характеризующую излучения.

Также как в случае 3-функций для 4-функций v' мы введём функционал

$$j' \equiv \Pi Lb(v'). \tag{3.1.21}$$

Функционал j' мы считаем регулярным, т.е. для достаточно быстро убывающей в бесконечности достаточно гладкой 4-функции $w'(x)$ его действие на $w'(x)$ имеет вид

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} j'_r(x) w'_r(x)\, dx_1 dx_2 dx_3 \;\; dx_0 \tag{3.1.22}$$

и относительно функций $j'_k(x)$ предполагаем, что они достаточно гладкие и существенно отличны от нуля лишь в шаре $Q[\vec{b}, \mu] \subset \mathbf{R}^3$ пространства достаточно малого радиуса.

Также как в пункте 3.1.2 мы предполагаем, что рассматриваемые функции $w'(x)$ обладают такой гладкостью и характером поведения в пространственной бесконечности, что выполняется равенство

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} j'_r(x_0, \vec{x}) w'_r(x_0 \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 = cj'_r w'_r(x_0, \vec{b}) + kj'_{r\alpha} \frac{\partial w'_r}{\partial x_\alpha}(x_0, \vec{b}) + O(\mu^2), \tag{3.1.23}$$

где

$$cj'_r \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} j'_r(x_0, \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3, \tag{3.1.24}$$

$$kj'_{r\alpha} \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} j'_r(x_0, \vec{x})(x_\alpha - b_\alpha)\, dx_1 dx_2 dx_3. \tag{3.1.25}$$

Четыре коэффициента cj'_r, $r = 0{,}1{,}2{,}3$ назовём *коэффициентами векторного взаимодействия*, а двенадцать коэффициентов $kj'_{r\alpha}$, $r = 0{,}1{,}2{,}3$ — *коэффициентами тензорного взаимодействия.*

Чтобы формализовать понятия *центра частицы* мы фиксируем параметр $\varepsilon \in]1, 0[$ и возьмём шар наименьшего радиуса $Q[\vec{b}, \mu]$ такой, что

$$(1 - \varepsilon) \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} |j(x_0, \vec{x})|\, dx_1 dx_2 dx_3 \le \iiint\limits_{Q[\vec{b}, \mu]} |j(x_0 \vec{x})|\, dx_1 dx_2 dx_3. \tag{3.1.26}$$

Число $\mu > 0$ будем называть *радиусом ядра частицы.*

При рассмотрении асимптотического взаимодействия частиц на больших расстояниях в данной схеме достаточно знать о частице лишь её координаты — 10 числовых параметров q и её числовые *характеристики* — 4 числа cj_k и 12 чисел $kj_{r\alpha}$. Таким образом, мы используем для характеризации частицы 16 её собственных констант — параметров, а именно моментов нулевого и первого порядков для 4-функции тока $j'(x)$ по пространственным переменным. Такую теорию естественно назвать *моментной теорией взаимодействия первого порядка.* Возможность аналогичного построения моментной теории n-ного порядка с использованием пространственных моментов до порядка n 4-функции $j'(x)$ определяется порядком убывания в пространственной бесконечности функции $j\prime(x_0, \vec{x})$.

3.1.4 Классы частиц. Пусть 3-функция смещений $u(x) \in C_4^{(2)}(I \times \mathbf{R}^3)$ является физическим состоянием, соответствующем плотности лагранжиана идеальной среды. Пусть $u = Bu'$, где B — оператор замена Максвелла и $u'(x) \in C_4^{(2)}(I \times \mathbf{R}^3)$ есть 4-функция состояния. Введём 4-вектор тока $j'(x) \in C_4(I \times \mathbf{R}^3)$ равный $j' = \mathcal{N}[u']$, где $\mathcal{N}(\frac{\partial x'}{\partial x})$ — плотность лагранжиана Лоренца. Применяя оператор преобразования $T_p(u')$ получим другую функцию состояния, а применяя оператор $\widetilde{T}_p(j')$ — функцию тока в другом состоянии, где $p \in P_e$ — связной компоненте единицы группы Пуанкаре. Перебирая все элементы $p \in P_e$, мы получим все состояния одной частицы. Итак, все состояния частицы нумеруются элементами $p \in P_e$. Состояние, соответствующее единичному элементу e группы Пуанкаре, мы назовём *стандартным.*

Далее, если не оговорено специально, мы имеем дело с 4-функциями состояния $u' \in C_4^{(2)}(I \times \mathbf{R}^3)$ и 4-функциями тока $j' \in C_4(I \times \mathbf{R}^3)$ и поэтому штрих опускается.

Введём также вектор скорости центра частицы $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ и 4-вектор скорости $l \equiv (\frac{1}{\vec{l}})$. При применении к функции тока частицы преобразования $\widetilde{T}_p$ 4-вектор скорости преобразуется по правилу

$$\widetilde{l} = \frac{1}{G^{-1}(p)_0} G^{-1}(p) l, \tag{3.1.27}$$

(см. §3.4, формула (3.4.18)) где $\widetilde{l}$ — 4-вектор скорости в новом состоянии l — 4-вектор скорости в исходном состоянии и $G(p)$ — матрица преобразования Лоренца, соответствующего преобразованию Пуанкаре $p \in P_e$.

Введём следующие 5 типов состояний частицы в зависимости от функции тока $j(x)$ и 4-вектора скорости $l \in \mathbf{R}^4$. Состояние частицы назовём *скалярным* если $j(x) = lj_0(x)$. Состояние частицы назовём *агвидным,* если существует 4-функция трёх переменных $f \in C_4(\mathbf{R}^3)$ и вектор $\vec{s} \in \mathbf{R}^3$, что $j(x) = f(\vec{x} - \vec{s}x_0)$. Состояние частицы *абсолютно нейтральное,* если $j_0 = 0$. Состояние частицы — *состояние покоя,* если $\vec{l} = 0$. Состояние частицы *стационарное,* если $j(x_0, \vec{x})$ не зависит от времени, т.е. $j(x_0, \vec{x}) = j(\vec{x})$.

Если одно состояние частицы скалярно, то и все другие состояния скалярны согласно п. 3.4.3. Если одно состояние частицы агвидно, то и все другие состояния агвидны согласно § 3.6. Свойства же абсолютной нейтральности, состояния покоя и стационарности могут исчезать или приобретаться при изменении состояния.

Для каждого из введенных пяти свойств определим соответствующий тип частицы. А именно, будем говорить, что частица имеет вид **A**, если у неё существует состояние типа **B** согласно таблице:

A — вид частицы	**B** — частица имеет состояние
скалярная	скалярное
агвидная	агвидное
киперная	абсолютно нейтральное
спокойная	состояние покоя
стационарная	стационарное.

Агвидная частица — это частица-волна, которая движется со скоростью $\vec{l}$. Агвидные функции и соответствующие им частицы будут нашим основным классом для моделирования физических частиц. Важным свойством агвидных частиц является их представимость в виде суммы скалярной и киперной частиц согласно § 3.6.

§3.2 Кинематика частицы

Задавая частицу с помощью 4-функции $v(x)$, мы *различными состояниями одной частицы* назвали 4-функции $T_p(v)$, $p \in P_e$, получающиеся действием операторов T_p. Любое состояние частицы может быть получено из любого другого состояния с помощью некоторого оператора T_p, $p \in P_e$. Таким образом, состояния частицы нумеруются элементами $p \in P_e$ связной компоненты единицы группы Пуанкаре. Элементы p группы Пуанкаре в свою очередь нумеруются десятью числовыми параметрами $q(p) \in \mathbf{R}^{10}$ координатами на группе Пуанкаре. Состояние частицы, которому мы приписываем единичный элемент группы P_e называем *стандартным.* Из вышесказанного следует, что любое состояние частицы может быть принято за стандартное. При изменении стандартного состояния изменяются выражения для массы и других характеристик частицы.

При выборе стандартного состояния естественно добиваться наиболее простого вида характеристик частицы. Таким выделенным наиболее удобным состоянием может быть *состояние покоя*, а именно такое состояние, в котором центр частицы покоится. Частицы, имеющие состояние покоя назовём *спокойными*, не имеющие состояния покоя — *беспокойными.* Состояние покоя частицы, вообще говоря, не единственно, так как при пространственных и временных вращениях состояние покоя сохраняется. Как правило, в качестве стандартного состояния покоя спокойной частицы мы будем выбирать состояние с центром в нуле.

Замечание 3.2.1 *В определении состояния покоя частицы мы потребовали, чтобы центр частицы был неподвижен. Это требование в общем случае может быть заменено требованием, чтобы центр находился в малой ограниченной области порядка радиуса ядра частицы при всех временах $x_0 \in \mathbf{R}$. Такое определение покоя может потребоваться, например, для состояний, соответствующих колебательным или вращательным движениям элементов сплошной среды. Само положение центра частицы для описания кинематики её движения в некоторых случаях достаточно определять с точностью до радиуса её ядра.*

Замечание 3.2.2 *Двум различным состояниям частицы могут соответствовать равные функции состояния, т. е. возможно $T_{p_1}(v) = T_{p_2}(v)$ при $p_1 \neq p_2$, что является проявлением симметрии(см. §3.5, §3.6).*

3.2.1 Координаты на группе Пуанкаре.

Итак, группу Пуанкаре преобразований 4-мерного пространства мы обозначили через P. Каждое преобразование $p \in P$ группы Пуанкаре единственным образом представимо в виде:

$$p(x) = G(x - a) \tag{3.2.1}$$

где $a = a(p) \in \mathbf{R}$ — вектор сдвига, $G = G(p) \in \Omega(\Theta)$ матрица преобразования Лоренца.

Рассмотрим следующее свойство величин $a(p), G(p)$ как функций аргумента $p \in P$. Пусть $p = p_1 p_2$, $p_1 \in P$, $p_2 \in P$, тогда

$$p_1(x) = G(p_1)(x - a(p_1)),$$

$$p_2(x) = G(p_2)(x - a(p_2)),$$

$$p(x) = G(p)(x - a(p)) = G(p_1)(G(p_2)(x - a(p_2)) - a(p_1)) =$$
$$G(p_1)G(p_2)(x - (a(p_2) + G^{-1}(p_2)a(p_1))).$$

Мы получили следующие соотношения

$$G(p_1p_2) = G(p_1)G(p_2), \tag{3.2.2}$$

$$a(p_1p_2) = a(p_2) + G^{-1}(p_2)a(p_1). \tag{3.2.3}$$

Выделим некоторые подмножества группы Пуанкаре.

Через $P_n \subset P$ обозначим подгруппу сдвигов $p(x) = x - a$. Через $P_g \subset P$ обозначим подгруппу преобразований Лоренца $p(x) = Gx,\ G \in \Omega(\Theta)$. Через $P_{nt} \subset P_n$ обозначаем подгруппу временных сдвигов, когда $x_0 \to x_0 - a_0, \vec{x} \to \vec{x}$, а через $P_{ns} \subset P_n$ обозначим группу пространственных сдвигов: $x_0 \to x_0,\ \vec{x} \to \vec{x} - \vec{a}$. Через $P_s \subset P$ обозначаем подгруппу движений 3-мерного пространства, т. е. преобразований Пуанкаре, оставляющих время x_0 неизменным. Через $P_t \subset P$ обозначаем подмножество преобразований Пуанкаре, состоящих из сдвига времени и чистого преобразования Лоренца без вращения пространства. Каждый элемент $p \in P$ представим в виде

$$p = p_tp_s, p_t \in P_t, p_s \in P_s \tag{3.2.4}$$

Поскольку группа Лоренца $\Omega(\Theta)$ состоит из четырех компонент связности Ω_i, $i = ++, +-, -+, --$ (см. п. 2.4.4), то подгруппа Лоренца P_g также распадается на 4 соответствующие компоненты связности P_{gi} и вся группа Пуанкаре P распадается на четыре компоненты связности P_i. Компоненту связности единицы $i = ++$ мы ещё обозначаем $P_{++} \equiv P_e$ или $P_{g++} \equiv P_{ge}$, $\Omega_{++} \equiv \Omega_e$.

Каждое преобразование $p \in P_{ge}$ задаётся матрицей $G \in \Omega_e(\Theta)$

$$p(x) = Gx. \tag{3.2.5}$$

Каждая матрица $G \in \Omega_e(\Theta)$ однозначно разлагается в произведение двух матриц $G_t, G_s \in \Omega_e(\Theta)$

$$G = G_tG_s \tag{3.2.6}$$

вида

$$G_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{3.2.7}$$

где $Q \in SO(3)$ — матрица ортогонального поворота трёхмерного пространства,

$$G_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\vec{\beta}^\top}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{-\vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} & B \end{pmatrix}, \tag{3.2.8}$$

где $B \in M(3)$ матрица с элементами

$$b_{\psi\alpha} = \delta_{\psi\delta} + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\frac{\beta_\psi\beta_\alpha}{\beta^2}, \tag{3.2.9}$$

а $\vec{\beta} \in \mathbf{R}^3$ произвольный вектор с длиной $|\vec{\beta}| < 1$

Соответственно для матрицы $G = G(p)$ каждого преобразования Лоренца $p \in P_{gi}$ справедливо представление

$$G = G_i G_t G_s, \tag{3.2.10}$$

где $G_i \in \Omega(\Theta)$ матрица вида (2.4.24), а матрицы G_t, G_s имеют соответственно вид (3.2.7, 3.2.8).

Подгруппу преобразований Пуанкаре вида $p(x) = G_s x$ обозначим $P_{ges} \subset P$, а подмножество преобразований Пуанкаре вида $p(x) = G_t x$ обозначим $P_{get} \subset P$.

Матрица B вида (3.2.9) играет важную роль в дальнейшем изложении, поэтому в следующем пункте изучим её свойства.

3.2.2 Свойства матрицы B.

Пусть $\vec{\beta} \in \mathbf{R}^3$, $|\vec{\beta}| < 1$. Введём матрицу $W = \vec{\beta}\vec{\beta}^\top$ с элементами

$$w_{\psi\alpha} = \beta_\psi \beta_\alpha, \tag{3.2.11}$$

тогда справедливо равенство

$$B = E + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) W. \tag{3.2.12}$$

Рассмотрим $B \in M(3)$ как матрицу линейного оператора $B : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, предполагая, что в пространстве $\mathbf{R}^3$ введено каноническое скалярное произведение векторов. Пусть $\vec{\beta} \neq 0$ и L_1-прямая, натянутая на вектор $\vec{\beta}$, и L_2 — ортогональное этой прямой двумерное линейное пространство, тогда

$$\forall \vec{x} \in L_1 \;\Big|\; B\vec{x} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{x}, \tag{3.2.13}$$

$$\forall \vec{x} \in L_2 \;\Big|\; B\vec{x} = \vec{x}, \tag{3.2.14}$$

т. е. под действием оператора B вектора $\vec{x} \in L_2$ остаются неподвижными, а вектора $\vec{x} \in L_1$ умножаются на множитель $1/\sqrt{1-\beta^2}$.

Поэтому справедливы равенства:

$$B\vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{\beta}, \tag{3.2.15}$$

$$B^{-1}\vec{\beta} = \sqrt{1-\beta^2}\,\vec{\beta}, \tag{3.2.16}$$

$$\det B = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{3.2.17}$$

$$B^{-1} = E + \frac{1}{\beta^2}\left(\sqrt{1-\beta^2} - 1\right) W. \tag{3.2.18}$$

Кроме того,

$$B^2 = E + \frac{1}{1-\beta^2} W, \tag{3.2.19}$$

$$(B^{-1})^2 = E - W.$$

Из определения матрицы W следует

$$W^2 = \beta^2 W. \tag{3.2.20}$$

3.2.3 Преобразование координат центра частицы.

Всюду далее через $\vec{b}(x_0) \in \mathbf{R}^3$ обозначаем положение центра частицы в момент времени x_0. В этом пункте $v(x)$ — стандартное состояние покоя частицы, $T_p(v)$ — функция состояния с координатами центра частицы $\vec{b}(x_0)$. Наша задача связать координаты центра с параметрами преобразования $p \in P_e$.

В результате применения преобразования T_p под аргумент функции v будет подставлена вместо $x \in \mathbf{R}^4$ величина $p(x) \in \mathbf{R}^4$. Центром частицы в момент времени x_0 будет вектор $\vec{b}(x_0) \in \mathbf{R}^3$ являющийся решением относительно $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ уравнения

$$\overrightarrow{p(x_0, \vec{x})} = 0. \tag{3.2.21}$$

Переходя к числовым параметрам, уравнение (3.2.21) запишем в виде

$$\overrightarrow{G_t G_s \begin{pmatrix} x_0 - a_0 \\ \vec{x} - \vec{a} \end{pmatrix}} = 0$$

Используя представление (3.2.6) и вид (3.2.7, 3.2.8) матриц G_t, G_s, получим

$$\overrightarrow{G_t \begin{pmatrix} x_0 - a_0 \\ Q(\vec{x} - \vec{a}) \end{pmatrix}} = 0, \quad Q \in SO(3)$$

или

$$BQ(\vec{x} - \vec{a}) - \frac{\vec{\beta}}{\sqrt{1 - \beta^2}}(x_0 - a_0) = 0.$$

Используя (3.2.15) получаем

$$B(Q(\vec{x} - \vec{a}) - (x_0 - a_0)\vec{\beta}) = 0.$$

Откуда

$$\vec{b} = \vec{a} + (x_0 - a_0)Q^{-1}\vec{\beta}. \tag{3.2.22}$$

Формула (3.2.22) решает поставленную задачу определения центра частицы как функции времени x_0 и параметров $q(p)$. В случае отсутствия пространственного вращения $Q = E$ получаем интуитивно очевидную формулу

$$\vec{b} = \vec{a} + (x_0 - a_0)\vec{\beta}. \tag{3.2.23}$$

Из формулы (3.2.22) следует, что вектор $Q^{-1}\vec{\beta}$ имеет смысл скорости движения центра частицы, а вектор $\vec{a}$ — смысл положения центра в момент $x_0 = a_0$, т. е.

$$\vec{a} = \vec{b}(a_0). \tag{3.2.24}$$

Вернемся снова к преобразованию $p(x)$. Оно может быть записано в виде

$$x' = p(x)$$

или для координатной части

$$\vec{x}' = BQ(\vec{x} - \vec{a}) - \frac{\vec{\beta}}{\sqrt{1 - \beta^2}}(x_0 - a_0).$$

С учётом (3.2.15) получаем

$$\vec{x}' = B(Q(\vec{x} - \vec{a}) - (x_0 - a_0)\vec{\beta}).$$

Подставив в последнюю формулу выражение вектора $\vec{a}$ через вектор $\vec{b}$ из формулы (3.2.22), получим

$$\overrightarrow{p(x)} = BQ(\vec{x} - \vec{b}(x_0)) = \vec{x}'. \tag{3.2.25}$$

Новая координата x_0' выражается через старые координаты и параметры формулой

$$x_0' = \frac{(x_0 - a_0)}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\langle\vec{\beta}, Q(\vec{x} - \vec{a})\rangle}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Подставим в последнюю формулу выражение вектора $\vec{a}$ через вектор $\vec{b}$ из формулы (3.2.22). Получим

$$x_0' = \frac{(x_0 - a_0)}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\langle\vec{\beta}, Q((\vec{x} - \vec{b}) + (x_0 - a_0)Q^{-1}\vec{\beta})\rangle}{\sqrt{1-\beta^2}} = (x_0 - a_0)\sqrt{1-\beta^2} - \frac{\langle\vec{\beta}, Q(\vec{x} - \vec{b})\rangle}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Используя (3.2.15) и симметричность матрицы B, последнюю формулу приведём к виду

$$x_0' = (x_0 - a_0)\sqrt{1-\beta^2} - \langle\vec{\beta}, BQ(\vec{x} - \vec{b})\rangle. \tag{3.2.26}$$

Итак, при применении к покоящейся частице преобразования T_p она переходит в новое состояние, в котором её центр движется прямолинейно и равномерно со скоростью $Q^{-1}\vec{\beta}$.

Формула (3.2.26) содержит в себе эффект, называемый релятивистским замедлением времени. А именно, если мы будем следить за поведением функции состояния $T_p(v)(x_0, \vec{x})$ в центре частицы при $\vec{x} = \vec{b}(x_0)$, то

$$T_p(v)(x_0, \vec{b}(x_0)) = G^\top v((x_0 - a_0)\sqrt{1-\beta^2}, \vec{0}). \tag{3.2.27}$$

Если исходная функция $v(x)$, соответствующая покоящейся частице, зависит от времени x_0, причём за время τ в состоянии покоя длина вектора $v(x_0, \vec{0})$ изменится в два раза, то для движущейся частицы это же изменение длины вектора в центре частицы произойдет за время $\frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Таким образом время жизни движущейся частицы τ_g связано со временем жизни покоящейся частицы τ формулой

$$\tau_g = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3.2.28}$$

3.2.4 Описание квазистационарного движения частицы.

Полученные в п. 3.2.3 формулы описывают равномерное прямолинейное движение центра частицы. При наличии взаимодействия с внешним полем центр частицы, вообще говоря, не будет двигаться прямолинейно и равномерно, более того, вектор состояния $\tilde{v}(x)$ частицы может уже не иметь вида $T_p(v)$. Однако, далее мы используем аппроксимацию движения частицы движением с прямолинейным равномерным движением центра и аппроксимацию её точной функции состояния $\tilde{v}(x)$ функциями состояния вида $T_p(v)$ при следующем выборе параметра $\vec{\beta} = \frac{d}{dx_0}\vec{b}(x_0)$. Таким образом, мы описываем *квазистационарное* движение частицы, когда параметры $q(p)$ изменяются достаточно медленно

$$\left|\frac{d}{dx_0}q_i(x_0)\right| \ll 1, \quad i = 1, 2, \ldots 10,$$

в частности, ускорение $\left|\frac{d\vec{\beta}}{dx_0}(x_0)\right| \ll 1$.

3.2.5 Левое и правое представления матрицы из группы Лоренца.

В случае, если $p \in P_{ge}$, вектор сдвига $a(p) = 0$ и матрица $G(p) \in \Omega_e(\Theta)$. Элемент $p \in P_{ge}$ представим в виде произведения $p = p_t p_s$, где $p_t \in P_{gte},\ p_s \in P_{gse}$ или в виде произведения $p = p'_s p'_t,\ p'_t \in P_{gte},\ p'_s \in P_{gse}$, что соответствует представлению матрицы $G \in \Omega_e(\Theta)$ в виде произведения матриц вида (3.2.6), т. е.

$$G = G_t G_s, \quad G_t \in \Omega_{te}(\Theta), \quad G_s \in \Omega_{se}(\Theta), \tag{3.2.29}$$

или в виде произведения матриц

$$G = G'_s G'_t, \quad G'_t \in \Omega_{te}(\Theta), \quad G'_s \in \Omega_{se}(\Theta) \tag{3.2.30}$$

где матрицы G_s, G'_s имеют вид (3.2.7), а матрицы G_t, G'_t — вид (3.2.8). Представление (3.2.29) мы будем называть *левым*, а представление (3.2.30) — *правым* представлением. Матрица G_t вида (3.2.8) задаётся вектором $\vec{\beta} \in \mathbf{R}^3$, а матрица G_s вида (3.2.7) задаётся ортогональной матрицей $Q \in SO(3)$. Итак, матрицу $G \in \Omega_l(\Theta)$ мы в левом представлении задаём парой $(\vec{\beta}_l, Q_l)$, а в правом представлении парой $(\vec{\beta}_r, Q_r)$. Согласно п. 3 в левом представлении вектор скорости частицы есть

$$\dot{\vec{b}} = Q_l^\top \vec{\beta}_l. \tag{3.2.31}$$

Рассмотрим теперь вопрос о том , как связаны величины $\vec{\beta}$ и Q в левом и правом представлении. По условию равенства $G_t G_s = G'_s G'_t$ имеем

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_l)}^2} & \frac{-\vec{\beta}_l^\top}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_l)^2}} \\ \frac{-\vec{\beta}_l}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_l)^2}} & B_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & Q_l & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & Q_r & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_r)^2}} & \frac{-\vec{\beta}_r^\top}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_r)^2}} \\ \frac{-\vec{\beta}_r}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_r)^2}} & B_r \end{pmatrix}. \tag{3.2.32}$$

Приравнивая у произведения матриц элементы с индексом 00, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_r)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_r)^2}}. \tag{3.2.33}$$

Приравнивая элементы первой строки и первого столбца, получаем соотношения

$$\frac{-\vec{\beta}_l^\top Q_l}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_r)^2}} = \frac{-\vec{\beta}_r^\top}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_r)^2}},$$

$$\frac{-\vec{\beta}_l}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_l)^2}} = \frac{-Q_r\vec{\beta}_r}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_r)^2}}$$

или

$$\vec{\beta}_r = Q_l^\top \vec{\beta}_l, \tag{3.2.34}$$

$$\vec{\beta}_l = Q_r \vec{\beta}_r. \tag{3.2.35}$$

Равенство элементов произведений матриц (3.2.32) не стоящих в нулевой строке или нулевом столбце, сведётся к условию

$$B_l Q_l = Q_r B_r. \tag{3.2.36}$$

Из (3.2.34–3.2.36) следует
$$Q_l = Q_r \tag{3.2.37}$$
в силу представления (3.2.12) матрицы B. Формулу для скорости спокойной частицы со стандартным состоянием покоя (3.2.31) можно записать в виде
$$\dot{\vec{b}} = \vec{\beta}_r \tag{3.2.38}$$

Для того, чтобы ввести координаты на группе матриц $\Omega_l(\Theta)$ осталось ввести координаты на группе матриц $SO(3)$, что можно сделать или с помощью углов Эйлера или с помощью канонических координат на группе $SO(3)$ представляя матрицу $\Omega \in SO(3)$ в виде произведения экспонент
$$Q = e^{\Gamma_1\varphi_1}e^{\Gamma_2\varphi_2}e^{\Gamma_3\varphi_3}, \tag{3.2.39}$$
где $\varphi_1 \in \mathbf{R}$, $\varphi_2 \in \mathbf{R}$, $\varphi_3 \in \mathbf{R}$ — параметры, а $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ матрицы инфинитезимальных поворотов вокруг осей x_1, x_2, x_3 соответственно
$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2.40}$$

Левое и правое представление матрицы $G(p)$, $p \in P_l$ удобны в соответствующих ситуациях. При вычислении скорости частицы и при описании сферически симметричных частиц результаты наиболее просто формулируются в правом представлении. А при вычислении трансформации Пуанкаре, как мы увидим в следующем параграфе, удобнее левое представление.

3.2.6 Преобразование координат при умножении матриц из группы Лоренца.

В п. 3.2.1 мы задали преобразование Пуанкаре $p \in P$ матрицей Лоренца $G(p) \in \Omega(\Theta)$ и вектором сдвига $a(p) \in \mathbf{R}^4$ и нашли правила, по которым для случая $p = p_1p_2$ величины $G(p)$ и $a(p)$ выражаются через $G(p_i)$ и $a(p_i)$ $i = 1, 2$ (формулы (3.2.2, 3.2.3). В предыдущем пункте 3.2.5 мы матрицу $G \in \Omega_l(\Theta)$ задали с помощью правого представления вектором $\vec{\beta}$ и матрицей $Q \in SO(3)$. Поставим теперь аналогичный вопрос: Если $p = p_1p_2$, где $p_1, p_2 \in P_{gl}$, то как выражаются $\vec{\beta}(p)$ и $Q(p)$ через $\vec{\beta}(p_i)$ и $Q(p_i), i = 1, 2$?

Выпишем матрицы $G_1 = G(p_1)$ и $G_2 = G(p_2)$ в правом представлении
$$G_i = G_{si}G_{ti}, \quad i = 1, 2. \tag{3.2.41}$$
Для произведения $p = p_1p_2$ имеем по формуле (3.2.2)
$$G = G(p_1p_2) = G(p_1)G(p_2) = G_{s1}G_{t1}G_{s2}G_{t2}. \tag{3.2.42}$$
Согласно п. 3.2.5
$$G_{t1}G_{s2} = G_{s2}G'_{t1}, \tag{3.2.43}$$
где матрица G'_{t1} имеет вид матрицы G_t с вектором $\vec{\beta}'_1 = Q_2^\top\vec{\beta}_1$. Таким образом, чтобы получить правое представление матрицы G вида (3.2.42) нам достаточно научиться строить правое представление для произведения матриц вида G_t.

Рассмотрим задачу о представлении произведения $G_{t1}G_{t2}$ в виде

$$G_{t1}G_{t2} = G_s G_t, \tag{3.2.44}$$

где G_{t1}, G_{t2} — заданные матрицы вида (3.2.8) с векторами $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$, а матрицу G_s вида (3.2.7) и матрицу G_tвида (3.2.8) требуется построить. Выпишем равенство (3.2.44) в развёрнутом виде

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_1)^2}} & \frac{-\vec{\beta}_1^\top}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_1)^2}} \\ \frac{-\vec{\beta}_1}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_1)^2}} & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_2)^2}} & \frac{-\vec{\beta}_2^\top}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_2)^2}} \\ \frac{-\vec{\beta}_2}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_2)^2}} & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}} & \frac{-\vec{\beta}^\top}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}} \\ \frac{-\vec{\beta}}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}} & B \end{pmatrix}. \tag{3.2.45}$$

Приравняем у произведений матриц элементы с номером 00:

$$\frac{1+ < \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2 >}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_1)^2}\sqrt{1-(\vec{\beta}_2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}}. \tag{3.2.46}$$

Далее приравняем остальные элементы первого столбца

$$\frac{-\vec{\beta}_1}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_1)^2}\sqrt{1-(\vec{\beta}_2)^2}} - \frac{B_1\vec{\beta}_2}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_2)^2}} = \frac{Q\vec{\beta}}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}} \tag{3.2.47}$$

и остальные элементы первой строки

$$\frac{-\vec{\beta}_2^\top}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_2)^2}\sqrt{1-(\vec{\beta}_1)^2}} - \frac{\vec{\beta}_1^\top B_2}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_1)^2}} = \frac{-\vec{\beta}^\top}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}}. \tag{3.2.48}$$

Учитывая (3.2.46), из соотношения (3.2.48) получаем

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{\beta}_2 + \sqrt{1-(\vec{\beta}_2)^2}B_2\vec{\beta}_1}{1+\langle\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2\rangle}. \tag{3.2.49}$$

Чтобы получить выражение для матрицы Q, приравняем в выражении (3.2.45) элементы, не имеющие среди индексов нулей

$$B_1B_2 + \frac{\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2^\top}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_1)^2}\sqrt{1-(\vec{\beta}_2)^2}} = QB. \tag{3.2.50}$$

Поскольку вектор $\vec{\beta}$ мы выразили через вектора $\vec{\beta}_1$ и $\vec{\beta}_2$ — формула (3.2.49) , то и матрица B нам известна как функция векторов $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$. Поэтому из формулы (3.2.50) получаем выражение для матрицы Q

$$Q = \left(B_1B_2 + \frac{\vec{\beta}_1(\vec{\beta}_2)^\top}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_1)^2}\sqrt{1-(\vec{\beta}_2)^2}}\right)B^{-1}. \tag{3.2.51}$$

Формулы (3.2.49) и (3.2.51) решают задачу о представлении произведения $G_{t1}G_{t2}$ в виде (3.2.44).

Возвращаясь к исходной задаче о получении правого представления матрицы $G(p_1)G(p_2)$ мы получаем для правого представления матрицы G

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{\beta}_2 + \sqrt{1-(\vec{\beta}_2)^2}B_2 Q_2^\top \vec{\beta}_1}{1 + \langle Q_2^\top \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2 \rangle}, \tag{3.2.52}$$

$$Q = Q_1 Q_2 Q_3, \tag{3.2.53}$$

где

$$Q_3 = \left(B(Q_2^\top \vec{\beta}_1) B(\beta_2) + \frac{Q_2^\top \vec{\beta}_1 \vec{\beta}_2^\top}{\sqrt{1-(\vec{\beta}_1)^2}\sqrt{1-(\vec{\beta}_2)^2}} \right) B^{-1}(\vec{\beta}), \tag{3.2.54}$$

а через $B(\vec{\beta})$ мы в последней формуле обозначаем матрицу $B \in M(3)$ вида (3.2.9), построенную по вектору $\vec{\beta}$.

Формула (3.2.49) в специальной теории относительности называется "релятивистской формулой сложения скоростей". В нашей теории эта формула показывает как связаны параметры $\vec{\beta}, \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$ при композиции преобразований $p = p_1 p_2$. Если стандартное состояние частицы — состояние покоя $v(x)$, то применяя оператор T_{p_1} мы получим состояние прямолинейного равномерного движения, причём вектор $\vec{\beta}_1 = \vec{\beta}(p_1)$ будет иметь смысл скорости движения центра частицы. Если теперь к функции состояния покоящейся частицы мы применим оператор T_{p_2}, то получим состояние $T_{p_1}(v)$ со скоростью движения центра $\vec{\beta}_2 = \vec{\beta}(p_2)$. Но если мы применим оператор T_{p_2}к функции состояния $T_{p_1}(v)$, то получим функцию состояния $T_{p_1 p_2}(v)$ с прямолинейным равномерным движением центра, но вектор параметров $\vec{\beta}_2$ здесь уже не будет иметь смысл вектора скорости центра. Скорость центра частицы в этом случае будет выражаться через параметры $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$ и матрицу $Q_2 = Q(p_2)$ по формуле (3.2.52).

Формулы (3.2.52–3.2.54) также показывают, что композиция двух чистых преобразований Лоренца может не быть чистым преобразованием Лоренца, т. е. если $Q(p_1) = Q(p_2) = E$, то $Q(p_1 p_2) = Q_3$ и, вообще говоря, $Q_3 \neq E$.

Замечание 3.2.3 *Обратим внимание на то, что формула (3.2.49) имеет смысл и в том предельном случае, когда $|\vec{\beta}_1| = 1$. При этом получаем, что $|\vec{\beta}| = 1$.*

3.2.7 Матрицы $G(p)$ и $G^{-1}(p)$ в правом и левом представлении.

Выпишем в качестве справочного материала матрицы $G(p)$ и $G^{-1}(p)$ в правом и левом представлении. В правом представлении

$$G = G_s G_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 & -\vec{\xi}^\top \\ -\vec{\xi} & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 & -\vec{\xi}^\top \\ -Q\vec{\xi} & QB \end{pmatrix}, \tag{3.2.55}$$

$$G^{-1} = G_t^{-1} G_s^{-1} = \begin{pmatrix} \xi_0 & \vec{\xi}^\top \\ \vec{\xi} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & Q^\top & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 & (Q\vec{\xi})^\top \\ \vec{\xi} & BQ^\top \end{pmatrix}, \tag{3.2.56}$$

где

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta} \end{pmatrix}. \tag{3.2.57}$$

Аналогично в левом представлении

$$G = G_t G_s = \begin{pmatrix} \xi_0 & -\vec{\xi}^\top \\ -\vec{\xi} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 & -\vec{\xi}^\top Q \\ -\vec{\xi} & BQ \end{pmatrix}, \tag{3.2.58}$$

$$G^{-1} = G_s^{-1} G_t^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & Q^\top & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 & \vec{\xi}^\top \\ \vec{\xi} & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 & \vec{\xi}^\top \\ Q^\top \vec{\xi} & Q^\top B \end{pmatrix}. \tag{3.2.59}$$

§3.3 Трансформация Пуанкаре

Для проведения процедуры конденсации, введенной в §3.1, нам требуется дополнительное изучение свойств некоторой интегральной трансформации, которую мы назовём трансформацией Пуанкаре.

Мы уже ввели ранее два бесконечномерных антипредставления группы Пуанкаре P как линейных операторов T_p и $\widetilde{T}_p$ на пространстве функций $C_4(\mathbf{R}^4)$. Если $p \in P$, то преобразование $p(x)$ представимо в виде

$$p(x) = G(x - a), \tag{3.3.1}$$

где $a \in \mathbf{R}^4$ вектор сдвига, а $G \in \Omega(\Theta)$. Операторы T_p и $\widetilde{T}_p$ согласно (2.5.41, 2.5.42) имеют вид

$$T_p(v)(x) = G^\top v(p(x)), \tag{3.3.2}$$

$$\widetilde{T}_p(v)(x) = G^{-1} v(p(x)). \tag{3.3.3}$$

Поэтому естественно ввести следующее бесконечномерное антипредставление группы Пуанкаре, как линейных операторов R_p на пространстве $C(\mathbf{R}^4)$ скалярных функций

$$R_p(v)(x) \equiv v(p(x)). \tag{3.3.4}$$

Каждый из операторов T_p,$\widetilde{T}_p$,R_p переводит финитную функцию в финитную и сохраняет непрерывность и дифференцируемость функций. Заметим, что если $p = p_1 p_2$, то $T_p = T_{p2} T_{p1}$, $\widetilde{T}_p = \widetilde{T}_{p_2} \widetilde{T}_{p_1}$, $R_p = R_{p_2} R_{p_1}$.

Введём оператор интегрирования по пространственным переменным

$$I(\varphi) = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi(x_0, x_1, x_2, x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3 \tag{3.3.5}$$

и оператор V *скалярной трансформации Пуанкаре* или просто *трансформации Пуанкаре*, сопоставляющий скалярной функции $\varphi(x)$, заданной на $\mathbf{R}^4$, скалярную функцию $\psi(p, x_0)$, заданную на произведении $P \times \mathbf{R}$ группы Пуанкаре на числовую ось. Линейный оператор перехода $V(\varphi) = \psi$ от функции φ к функции ψ определяется формулой

$$\psi(p, x_0) = I R_p(\varphi). \tag{3.3.6}$$

В случае, когда элемент $p \in P$ пробегает подгруппу Лоренца $P_g \subset P$ группы Пуанкаре мы говорим о *трансформации Лоренца.*

3.3.1 Свойства трансформации Пуанкаре.

Из определяющей формулы (3.3.6) непосредственно вытекает, что если $p_0 \in P$, то

$$V(R_{p_0}(\varphi))(p, x_0) = IR_p(R_{p_0}(\varphi)) = IR_{p_0 p}(\varphi) = V(\varphi)(p_0 p, x_0), \tag{3.3.7}$$

т.е. применению к функции φ оператора R_{p_0} соответствует в образах умножение аргумента p на элемент p_0 слева.

Так как мера Лебега инвариантна относительно изометрии трехмерного пространства, то для любой функции $\varphi(x)$

$$\forall p \in P_s \;\Big|\; IR_p(\varphi) = IR_e(\varphi) = I(\varphi),$$

т.е.

$$\forall p \in P_s \;\Big|\; V(\varphi)(p, x_0) = V(\varphi)(e, x_0), \tag{3.3.8}$$

где $e \in P$ — единичный элемент группы. Поскольку каждый элемент p группы Пуанкаре представим в виде произведения (формула (3.2.4))

$$p = p_t p_s, \quad p_t \in P_t, \quad p_s \in P_s, \tag{3.3.9}$$

то применяя свойства (3.3.7, 3.3.8), получим

$$V(\varphi)(p, x_0) = V(\varphi)(p_t p_s, x_0) = V(R_{p_t}(\varphi))(p_s, x_0) = V(\varphi)(p_t, x_0), \tag{3.3.10}$$

т.е. значение трансформации Пуанкаре зависит лишь от элемента $p_t \in P_t$ в представлении (3.3.9). Каждое преобразование $p_t \in P_t$ состоит из временного сдвига и чистого преобразования Лоренца, т.е. $p_t = p_{tg} p_{tn}$, где p_{tn} — преобразование сдвига времени, p_{tg} — чистое преобразование Лоренца. Из определяющей формулы (3.3.6) следует, что

$$V(\varphi)(p_{tg} p_{tn}, x_0) = V(\varphi)(p_{tg}, x_0 - a_0). \tag{3.3.11}$$

Таким образом, чтобы вычислить значение трансформации Пуанкаре от функции $\varphi(x)$ на произвольном элементе $p \in P$, достаточно вычислить его на элементах $p_{tg} \in P_{tg}$, являющихся чистыми преобразованиями Лоренца. В наших обозначениях $P_{tg} = P_{gt}$.

Чтобы вычислить $V(\varphi)(p, x_0)$ при $p \in P_{gt}$, вспомним, что группа Лоренца состоит из 4 компонент связности, соответственно, $P_{gt} = \bigcup\limits_i P_{gti}$ и начнём со случая $p \in P_{gte}$, т.е. когда преобразование p есть преобразование Лоренца с матрицей G_t вида (3.2.8), т.е.

$$G_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\vec{\beta}^\top}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{-\vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} & B \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} \in \mathbf{R}^3, \; |\vec{\beta}| < 1.$$

Введём вектор $\xi = \xi(p)$, $\xi \in \mathbf{R}^4$ вида

$$\xi = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad -\frac{\vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right). \tag{3.3.12}$$

По определению трансформации Пуанкаре

$$V(\varphi)(p, x_0) = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi(p(x))\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi(G_t x)\, dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi((x_0\xi_0 - \langle\vec{\xi},\vec{x}\rangle), B\vec{x} - \vec{\xi}x_0)\,dx_1dx_2dx_3 =$$
$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi((x_0\xi_0 - \langle\vec{\xi},\vec{x}\rangle), B(\vec{x} - \vec{\beta}x_0))\,dx_1dx_2dx_3 =$$
$$\frac{1}{|\det B|}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi((x_0\xi_0 - \langle\vec{\xi}, B^{-1}\vec{x} + \vec{\beta}x_0\rangle), \vec{x}')\,dx_1'\,dx_2'\,dx_3' =$$
$$\frac{1}{\xi_0}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi((\xi_0x_0(1-\beta^2) - \langle\vec{\beta},\vec{x}'\rangle), \vec{x}')\,dx_1'\,dx_2'\,dx_3' =$$
$$\frac{1}{\xi_0}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi(\xi(x_0\sqrt{1-\beta^2}) - \langle\vec{\beta},\vec{x}'\rangle), \vec{x}')\,dx_1'\,dx_2'\,dx_3'. \qquad (3.3.13)$$

(Мы использовали свойства (3.2.15–3.2.17) матрицы B). Последний интеграл есть интеграл по гиперплоскости $\langle\xi, x'\rangle = x_0$ и совпадает с интегралом (3) с.16 монографии [27], определяющим трансформацию Радона функции $\varphi(x)$. Итак, в случае $p \in P_{gte}$ доказана формула

$$V(\varphi)(p, x_0) = \overset{\frown}{\varphi}(\xi, x_0). \qquad (3.3.14)$$

Здесь и далее, следуя [27], через $\overset{\frown}{\varphi}(\xi, x_0)$ обозначим трансформацию Радона функции $\varphi(x)$ $\quad(\xi \in \mathbf{R}^4,\ x_0 \in \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R}^4)$.

В более общем случае, когда $p \in P_{gt}$, но не обязательно принадлежит компоненте связности единицы, преобразование $p(x)$ представимо в виде

$$p(x) = G_iG_tx,$$

где матрица F_i имеет вид (2.4.24), а матрица G_t — вида (3.2.8). Поэтому элемент $p{\in}P_{gti}$ представим в виде

$$p = p_ip_{gte}, \qquad (3.3.15)$$

где p_i — преобразование Лоренца с матрицей G_i, а p_{gte} — преобразование Лоренца с матрицей G_t.

По формуле (3.3.7) для трансформации Пуанкаре получим

$$V(\varphi)(p, x_0) = V(\varphi)(p_ip_{gte}, x_0) = V(R_{pi}(\varphi))(p_{gte}, x_0) = \overbrace{R_{p_i}(\varphi)}(\xi(p_{gte}), x_0). \qquad (3.3.16)$$

Но функция $R_{p_i}(\varphi)(x)$ имеет вид

$$R_{pi}(\varphi)(x) = \varphi(G_ix),$$

поэтому по свойству трансформации Радона (см.[27], с.20-21)

$$\overbrace{R_{p_i}(\varphi)}(\xi, x_0) = \frac{1}{|\det G_i|}\overset{\frown}{\varphi}((G_i^{-1})^\top)\xi, x_0) = \overset{\frown}{\varphi}(G_i\xi, x_0). \qquad (3.3.17)$$

В последнем соотношении мы учли, что матрицы G_i вида (2.4.24) обладают свойствами: $|\det G_i| = 1,\ G_i^{-1} = G_i = G_i^\top$. Из формул (3.3.16, 3.3.17) получаем для элемента p вида (3.3.15)

$$V(\varphi)(p, x_0) = \overset{\frown}{\varphi}(G_i\xi, x_0), \qquad (3.3.18)$$

где $\xi \in \mathbf{R}^4$ вектор вида (3.3.12).

В общем случае $p \in P$ мы представляем элемент p в виде

$$p = p_i p_{gte} p_{tn} p_s, \tag{3.3.19}$$

где $p_s \in P_s$, $p_{tn} \in P_{tn}$, элемент p_{gte} соответствует преобразованию Лоренца с матрицей G_t, а элемент p_i соответствует преобразованию Лоренца с матрицей G_i, и определяем вектор $\xi(p) \in \mathbf{R}^4$ формулой

$$\xi(p) = G_i \xi(p_{gte}), \tag{3.3.20}$$

где $\xi(p_{gte}) \in \mathbf{R}^4$ вектор (3.3.12). Согласно вышесказанному справедливо равенство для любой функции $\varphi(x)$

$$V(\varphi)(p, x_0) = \widehat{\varphi}(\xi(p), x_0 - a_0). \tag{3.3.21}$$

Используя свойства трансформации Радона, рассмотрим вопрос о том, как изменится трансформация Пуанкаре при переходе от функции $\varphi(x)$ к функции $\varphi_A \equiv \varphi(Ax)$, где $A \in M(4)$ — невырожденная матрица. Согласно формуле (3.3.21)

$$V(\varphi_A)(p, x_0) = \widehat{\varphi_A}(\xi(p), x_0 - a_0(p)).$$

Согласно свойству трансформации Радона ([27], с.20-21)

$$\widehat{\varphi_A}(\xi(p), x_0 - a_0(p)) = \frac{1}{|\det A|} \widehat{\varphi}(A^{-1\top} \xi(p), x_0 - a_0(p)).$$

Итак, мы получили формулу

$$V(\varphi_A)(p, x_0) = \frac{1}{|\det A|} \widehat{\varphi}(A^{-1\top} \xi(p), x_0 - a_0(p)). \tag{3.3.22}$$

Пусть теперь нам известна трансформация Радона функции $\varphi(x)$ — функция $\widehat{\varphi}(\xi, x_0)$, $\xi \in \mathbf{R}^4$, $x_0 \in \mathbf{R}$ и пусть $p' \in P$ — фиксированный элемент. Выразим значение $V(\varphi)(p'p, x_0)$ трансформации Пуанкаре функции $\varphi(x)$ при значении аргумента $p'p$ через трансформацию Радона функции $\varphi(x)$.

Согласно формулам (3.2.2, 3.2.3) элемент $p'p$ представим в виде

$$p'p(x) = G(p')G(p)(x - a(p'p)) = p_1 p_2(x), \tag{3.3.23}$$

где

$$p_1(x) = G(p')x, \ p_2(x) = G(p)(x - a(p'p)). \tag{3.3.24}$$

По определению трансформации Пуанкаре и свойству (3.3.7)

$$V(\varphi)(p'p, x_0) = V(\varphi)(p_1 p_2, x_0) = V(R_{p_1}(\varphi))(p_2, x_0) = \widehat{R_{p_1}(\varphi)}(\xi(p_2), x_0 - a_0(p_2)). \tag{3.3.25}$$

Из формулы (3.3.24) следует, что $G(p_2) = G(p)$, поэтому $\xi(p_2) = \xi(p)$. Функция $R_{p_1}(\varphi)(x) \equiv \varphi(p_1(x)) = \varphi(G(p')x) \equiv \varphi_{Gp'}(x)$. По формуле (3.3.22) получаем

$$V(\varphi)(p'p, x_0) = \widehat{\varphi_{G(p)'}}(\xi(p), x_0 - a_0(p_2)) = \widehat{\varphi}(G^{-1\top}(p')\xi(p), x_0 - a_0(p'p)).$$

Поскольку в силу (3.2.3) $a(p'p) = a(p) + G^{-1}(p)a(p')$ окончательно получаем формулу

$$V(\varphi)(p'p, x_0) = \widehat{\varphi}(G^{-1\top}(p')\xi(p), x_0 - (a(p) + G^{-1}(p)a(p'))_0); \quad p' \in P, \ p \in P. \tag{3.3.26}$$

Формула (3.3.21) позволяет выразить трансформацию Пуанкаре $V(\varphi)(p, x_0)$ функции $\varphi(x)$ через её трансформацию Фурье $\hat{\varphi}(\xi)$, так как трансформация Радона $\overset{\frown}{\varphi}(\xi, t)$, $\xi \in \mathbf{R}^4$, $t \in \mathbf{R}$ функции $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}^4$ выражается через её трансформацию Фурье $\hat{\varphi}(\xi)$, $\xi \in \mathbf{R}^4$ формулой (см. [27], с.19)

$$\overset{\frown}{\varphi}(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\alpha\xi) e^{-i\alpha t}\, d\alpha. \tag{3.3.27}$$

Введём важный для дальнейшего класс функций, для которых легко вычисляется трансформация Пуанкаре. Функцию 4 переменных $\varphi(x)$ назовём *агвидной,* если существует функция 3 переменных $\eta(\vec{x})$ и вектор $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$, что

$$\varphi(x) = \eta(\vec{x} - \vec{l}x_0). \tag{3.3.28}$$

Если центр функции $\eta(\vec{x})$ находится в точке $\vec{c} \in \mathbf{R}^3$, то вектор $\vec{b}(x_0) = \vec{l}x_0 + \vec{c}$ имеет смысл положения центра "перенесённой"функции в момент времени x_0. Вводя сдвинутую функцию $\chi(\vec{x}) \equiv \eta(\vec{x} + \vec{c})$, центр которой находится в нуле, мы запишем соотношение (3.3.28) в эквивалентном виде

$$\varphi(x) = \chi(\vec{x} - \vec{b}(x_0)). \tag{3.3.29}$$

Перейдём к вычислению трансформации Радона агвидной функции $\varphi(x)$, с помощью её трансформации Фурье и представления (3.3.29). Трансформация Фурье функции (3.3.29) по переменным x_1, x_2, x_3 равна

$$\hat{\varphi}(x_0, \vec{\xi}) = e^{\langle\vec{\xi}, \vec{b}(x_0)\rangle} \hat{\chi}(\vec{\xi}).$$

Проводя трансформацию Фурье по переменной x_0, получим

$$\hat{\varphi}(\xi) = e^{i\langle\vec{\xi}, \vec{c}\rangle} 2\pi\delta(\xi_0 + \langle\vec{l}, \vec{\xi}\rangle)\hat{\chi}(\vec{\xi}).$$

Подставим последнюю формулу в формулу (3.3.27), получим

$$\overset{\frown}{\varphi}(\xi, t) = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{i\alpha(\langle\vec{\xi}, \vec{c}\rangle - t)} \delta(\alpha(\xi_0 + \langle\vec{l}, \vec{\xi}\rangle))\hat{\chi}(\alpha\vec{\xi})\, d\alpha =$$

$$\frac{\hat{\chi}(0)}{|\xi_0 + \langle\vec{e}, \vec{\xi}\rangle|}.$$

Итак, получена следующая формула для трансформации Радона агвидной функции

$$\overset{\frown}{\varphi}(\xi, t) = \frac{\hat{\chi}(0)}{|\langle l, \xi\rangle|}, \tag{3.3.30}$$

где 4-вектор $l = (\frac{1}{\vec{l}})$, а константа

$$\hat{\chi}(0) = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \chi(\vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi(0, \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3. \tag{3.3.31}$$

В частном случае, когда функция $\varphi(x)$ не зависит от переменной x_0, т.е. $\vec{l} = 0$, получаем

$$\overset{\frown}{\varphi}(\xi, t) = \frac{\hat{\chi}(0)}{|\xi_0|}. \tag{3.3.32}$$

Формулы (3.3.30–3.3.32) дают выражение для скалярной трансформации Пуанкаре агвидной функции в силу представления (3.3.14) трансформации Пуанкаре через трансформацию Радона.

Из проведенных выкладок сделаем следующий вывод:

Лемма 3.3.1 *Если функция $\varphi(x)$ агвидна, то трансформация Радона $\widehat{\varphi}(\xi,t)$ функции $\varphi(x)$ не зависит от t, т.е.*

$$\forall t\in\mathbf{R}\ \Big|\ \widehat{\varphi}(\xi,t)=\widehat{\varphi}(\xi,0)\equiv\widehat{\varphi}(\xi).$$

Формулы (3.3.21, 3.3.27) позволяют также на языке трансформации Фурье сформулировать условия, когда трансформация Пуанкаре обращается в нуль. Из формулы (3.3.27) следует, что если на прямой, проходящей через нуль в направлении вектора $\xi(p)$, трансформация Фурье $\hat{\varphi}$ обращается в нуль, то $V(\varphi)(p,x_0)=0$ при всех $x_0\in\mathbf{R}$.

3.3.2 Два примера применения скалярной трансформации Лоренца.

Используя разработанную теорию трансформации Радона и трансформации Фурье, мы теперь в ряде случаев можем явно предъявить результат трансформации Пуанкаре. Приведём два примера применения трансформации Радона, непосредственно дающие два примера применения скалярной трансформации Лоренца.

Пример 1. Пусть $\chi(x), x\in\mathbf{R}^4$ — характеристическая функция шара в пространстве $\mathbf{R}^4$ радиуса $r>0$ с центром в начале координат, тогда

$$\widehat{\chi}(\xi,x_0)=\begin{cases}\frac{4}{3\pi}\frac{1}{|\xi|}\left(r^2-\frac{x_0^2}{|\xi|^2}\right)^{\frac{3}{2}} & ,\ \frac{x_0^2}{|\xi|^2}\le r^2\\ 0 & ,\ \frac{x_0^2}{|\xi|^2}>r^2.\end{cases}$$

(см. [27], с.18).

Пример 2. Трансформация Радона функции $\varphi(x)=\exp\left(\frac{-|x|^2}{2\sigma^2}\right)$ согласно ([27], с. 28) есть

$$\widehat{\varphi}(\xi,x_0)=\frac{(\sqrt{2\pi\sigma})^3}{|\xi|}\exp\left(\frac{-x_0^2}{2\sigma^2|\xi|^2}\right).$$

Пользуясь выражением трансформации Лоренца функции $\varphi(x)$ через её трансформацию Фурье, нетрудно выяснить как изменяется трансформация Лоренца при умножении функции $\varphi(x)$ на экспоненту вида $e^{-i\langle k,x\rangle}$, $k\in\mathbf{R}^4$. Так как $e^{-i\langle k,x\rangle}\varphi(x)=\hat{\varphi}(\xi-k)$, то преобразование Фурье при этом сдвигается на вектор k. Согласно формуле (3.3.27) затем трансформация Фурье интегрируется со множителем $e^{-i\alpha x_0}$ вдоль прямой, проходящей через вектор ξ. Если трансформация Фурье функции φ существенно отлично от нуля лишь в шаре радиуса r, то при $|k|\to\infty$ трансформация Лоренца может существенно отличаться от нуля лишь при векторах ξ близких к вектору $\frac{1}{\sqrt{\langle k,\Theta k\rangle}}k$.

В качестве модельного примера рассмотрим случай, когда $\varphi(x)=\exp(\frac{-x^2}{2\sigma^2})$, $\sigma>0$. Для функции $P_k(x)\equiv\exp(-i\langle k,x\rangle-\frac{x^2}{2\sigma^2})$ трансформация Фурье (см. [24], с. 107)

$$\hat{\varphi}_k(\xi)=4\pi^2\sigma^4\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2(\xi-k)^2\right).$$

Используя формулу (3.3.27), получаем

$$\widehat{\varphi_k}(\xi,x_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} 4\pi^2\sigma^4 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2(\xi-k)^2 - i\alpha x_0\right)d\alpha = \tag{3.3.33}$$

$$= \frac{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3}{|\xi|}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x_0^2}{\sigma^2\xi^2}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{(k^2\xi^2-\langle k,\xi\rangle^2)}{\xi^2}\right)\exp\left(-i\frac{x_0\langle\xi,k\rangle}{\xi^2}\right).$$

Чтобы провести аналогичное рассуждение в действительных функциях достаточно взять функцию

$$\eta_k(x) \equiv \frac{1}{2}(\varphi_k(x)+\varphi_{-k}(x)) = \cos(\langle k,x\rangle)\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

Тогда в силу линейности трансформации Радона

$$\widehat{\eta_k}(\xi,x_0) = \frac{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^3}{|\xi|}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x_0^2}{\sigma^2\xi^2}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{k^2\xi^2-\langle k,\xi\rangle^2}{\xi^2}\right)\cos\left(\frac{x_0\langle\xi,k\rangle}{\xi^2}\right). \tag{3.3.34}$$

В правой части формулы (3.3.33) стоит произведение трёх экспонент, каждая из которых по модулю не превосходит единицу. В показателе второй экспоненты содержится выражение

$$\sigma^2\frac{k^2\xi^2-\langle k,\xi\rangle^2}{\xi^2} = \sigma^2\left(\frac{k^2\xi^2-k^2\xi^2\cos^2\gamma}{\xi^2}\right) = \sigma^2k^2\sin^2\gamma,$$

где γ — угол между векторами ξ и k. Таким образом, величина $\widehat{\varphi_k}(\xi,x_0)$ будет существенно отлична от нуля лишь когда

$$\sigma^2k^2\sin^2\gamma = O(1).$$

При условии $\sigma|k|\gg 1$ последнее соотношение эквивалентно соотношению

$$\gamma = O\left(\frac{1}{\sigma|k|}\right),$$

указывающему, при каких углах γ между векторами ξ и k трансформация Пуанкаре существенно отлична от нуля.

При $\sigma\to\infty$ функция $\varphi_k(x)$ как регулярный функционал на $D(\mathbf{R}^4)$ сходится к функции $\exp(-i\langle k,x\rangle)$. Трансформация Фурье функции $\varphi_k(x)$ сходится при этом к обобщённой функции $(2\pi)^4\delta(\xi-k)$, где $\delta(\xi)$ — 4-мерная δ-функция. Трансформация Лоренца будет при этом существенно отлична от нуля лишь при следующих значениях величин ξ и x_0

$$\left|\xi-\frac{k}{\sqrt{\langle k,\Theta k\rangle}}\right| = O\left(\frac{1}{\sigma}\right), \tag{3.3.35}$$

$$|x_0| = O\left(\sigma\sqrt{\frac{k_0^2+\vec{k}^2}{k_0^2-\vec{k}^2}}\right). \tag{3.3.36}$$

Вернёмся к случаю функции $\varphi(x_0,x_1,x_2,x_3)$, не зависящей от первого аргумента x_0, т.е. $\varphi(x) = 1(x_0)\chi_3(\vec{x})$ и рассмотрим как изменяется её трансформация Лоренца при умножении функции на $\exp(-i\langle k,x\rangle)$. Трансформация Фурье функции $\varphi_k(x) = \exp(-i\langle k,x\rangle)\varphi(x)$ будет согласно формуле (3.3.28)

$$\hat{\varphi}_k(\xi) = 2\pi\delta(\xi_0)\hat{\chi}_3(\vec{\xi}-\vec{k}). \tag{3.3.37}$$

Подставляя (3.3.37) в формулу (3.3.27), получаем

$$\widehat{\widehat{\varphi_k}}(\xi,x_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\alpha\xi_0-k_0)\hat{\chi}_3(\alpha\vec{\xi}-\vec{k})\exp(-i\alpha x_0)\,d\alpha =$$

$$\frac{1}{|\xi_0|}\hat{\chi}_3\left(\frac{k_0}{\xi_0}\vec{\xi}-\vec{k}\right)\exp\left(-i\frac{k_0x_0}{\xi_0}\right). \tag{3.3.38}$$

§3.4 Коэффициенты векторного и тензорного взаимодействия как функции скорости

В §3.1 мы ввели коэффициенты векторного взаимодействия cj и коэффициенты тензорного взаимодействия kj для описания взаимодействия частицы с внешним полем. В этом параграфе наша задача рассмотреть, как преобразуются эти коэффициенты при изменении состояния частицы. При этом мы будем опираться на свойства трансформации Пуанкаре, изученной в предыдущем параграфе.

3.4.1 Коэффициенты векторного взаимодействия.

Пусть $j(x)$ — 4-функция тока для стандартного состояния частицы, а $\tilde{j}(x) \equiv \widetilde{T}_p(j)(x)$ — 4-функция тока в состоянии, соответствующем $p \in P$. По определяющей формуле (3.1.24)

$$cj(x_0) = Ij \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} j(x_0,x_1,x_2,x_3)\,dx_1dx_2dx_3 \tag{3.4.1}$$

где I — оператор интегрирования по пространству, соответственно,

$$c\tilde{j}(p,x_0) = I\tilde{j} = I\widetilde{T}_p(j) = IG^{-1}R_pj = G^{-1}IR_pj = G^{-1}V(j), \tag{3.4.2}$$

где $V(j)$ — трансформация Пуанкаре, применённая к 4-функции $j(x)$, матрица $G \in \Omega(\Theta)$ входит в представление преобразования $p(x) = G(x-a)$. Переход от 4-функции $j(x)$, $x \in \mathbf{R}^4$ к функции от аргументов (p,x_0) вида

$$W(j)(p,x_0) \equiv G(p)^{-1}V(j)(p,x_0) \tag{3.4.3}$$

назовём *векторной трансформацией Пуанкаре.*

В случае, когда $p \in P_g$ аналогично скалярному случаю будем говорить о *векторной трансформации Лоренца.* Отметим, что векторная трансформация Пуанкаре 4-функции $j(x)$ состоит в покомпонентном применении скалярной трансформации Пуанкаре и последующем умножении на матрицу G^{-1}. Формулы (3.4.2, 3.4.3) показывают, что значения коэффициентов $c\tilde{j}(p,x_0)$ получаются путем применения к функции $j(x)$ векторной трансформации Пуанкаре (3.4.3).

Векторная трансформация Пуанкаре обладает следующим важным свойством

$$W(\widetilde{T}_{p'}(j))(p,x_0) = W(j)(p'p,x_0); \quad p',p \in P, \tag{3.4.4}$$

т.е. применение к функции j оператора $\widetilde{T}_{p'}$ соответствует в образах умножению аргумента p на элемент p' слева. Чтобы убедиться в этом, положим $p(x) = G(x-a)$, $p^{'}(x) = G^{'}(x-a')$ и заметим, что по определению векторной трансформации Пуанкаре

$$W(\widetilde{T}_{p'}(j))(p, x_0) = G^{-1} I R_p \widetilde{T}_{p'}(j) = G^{-1} I R_p G'^{-1} R_{p'}(j) =$$

$$G^{-1} G'^{-1} I R_p R_{p'}(j) = (G'G)^{-1} I R_{p'p}(j) = W(j)(p'p, x_0).$$

Согласно (3.3.21), используя выражение скалярной трансформации Пуанкаре через трансформацию Радона, получим следующее выражение векторной трансформации Пуанкаре через трансформацию Радона

$$c\tilde{j} = W(j)(p, x_0) = G^{-1}(p) \widehat{\ j\ }(\xi(p), x_0 - a_0(p)). \tag{3.4.5}$$

3.4.2 Заряд частицы.

Выделим нулевую компоненту вектора $c\tilde{j}_0$ и назовём её *зарядом частицы.* Поскольку согласно предыдущему вектор $c\tilde{j}(p, x_0)$ зависит от элемента $p \in P_e$ группы Пуанкаре и времени x_0, то заряд частицы — функция состояния или элемента $p \in P$ и времени x_0. Однако, 4-функция тока $j(x)$ не является произвольной, а по свойству базового оператора системы A согласно §2.2 лемма 2.2.3 удовлетворяет условию

$$\widetilde{K} j = \frac{\partial i_r}{\partial x_r} = 0, \tag{3.4.6}$$

где дифференциальный оператор первого порядка $\widetilde{K}$ мы ввели в §2.5 (формула (2.5.45)). Введём линейное пространство функций J, состоящее из всех функций $j(x) \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)$, удовлетворяющих соотношению (3.4.6). В следствии (2.5.1) мы убедились, что соотношение (3.4.6) и

$$\widetilde{K}\tilde{j} = 0 \tag{3.4.7}$$

эквивалентны при любом $p \in P$, если $j \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)$, $\tilde{j} \equiv \widetilde{T}_p(j)$, т.е. каждый оператор T_p оставляет пространство $J \subset C_4(\mathbf{R}^4)$ инвариантным.

Но соотношения (3.4.6) и (3.4.7) есть дифференциальные законы сохранения, которые влекут интегральные законы сохранения

$$c j_0 = I j_0 = Const, \tag{3.4.8}$$

и

$$c\tilde{j}_0 = I\tilde{j}_0 = Const, \tag{3.4.9}$$

т.е. независимость заряда частицы от времени при достаточно быстром убывании величины $j(x)$ в пространственной бесконечности. В частности, для выполнения (3.4.8) достаточно, чтобы сходился интеграл $\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} j_0(x_0, x_1, x_2, x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3$ и $|\vec{j}(x_0, \vec{x})| = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^2}\right)$ при $|\vec{x}| \to \infty$.

Мы приходим к следующему общему выводу: *заряд частицы в фиксированном состоянии не зависит от времени.* Таким образом, заряд частицы, т.е. величина $c\tilde{j}_0(p, x_0)$ является лишь функцией состояния частицы $c\tilde{j}_0 = c\tilde{j}_0(p)$. В §15 мы убедимся, что для простейших частиц, а именно скалярных, заряд не зависит и от состояния частицы.

3.4.3 Зарядовый центр частицы.

Для заряженной частицы уточним понятие *центра* следующим образом. Выберем величину вектора $\vec{b}(x_0)$ — положение центра частицы в момент x_0, как центр заряда, т.е. из условия

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} j_0(x_0, \vec{x})(\vec{x} - \vec{b})\, dx_1 dx_2 dx_3 = 0, \tag{3.4.10}$$

откуда

$$\vec{b}(x_0) = \frac{1}{c\tilde{j}_0} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} j_0(x_0, \vec{x})\vec{x}\, dx_1 dx_2 dx_3. \tag{3.4.11}$$

Введём для удобства 4-вектор центра частицы (точнее центра заряда) $b(x_0)$, продолжая условия (3.4.10) до условия

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} j_0(x_0, \vec{x})(x - b)\, dx_1 dx_2 dx_3 = 0, \tag{3.4.12}$$

т.е. $b \equiv (x_0, \vec{b}(x_0))$ и

$$b = \frac{1}{c\tilde{j}_0} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} j_0(x_0, \vec{x})\vec{x}\, dx_1 dx_2 dx_3. \tag{3.4.13}$$

Полученный таким образом вектор $\vec{b}(x_0)$ будем называть *зарядовым центром частицы.*

Найдём производную по времени x_0 вектора координат центра. Дифференцируем (3.4.11)

$$\frac{d}{dx_0}\vec{b}(x_0) = \frac{1}{cj_0} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_0} j_0(x_0, \vec{x})\vec{x}\, dx_1 dx_2 dx_3. \tag{3.4.14}$$

В силу ограничения (3.4.7) на 4-вектор тока $j(x)$ имеем $\frac{\partial}{\partial x_0} j_0(x_0, \vec{x}) = -\,div\, \vec{j}(x_0, \vec{x})$. Предполагая, что функция $\vec{j}(x_0, \vec{x})$ достаточно быстро убывает в пространственной бесконечности, именно при $|\vec{x}| \to \infty$

$$|\vec{j}(x_0, \vec{x})| = o\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right), \tag{3.4.15}$$

из (3.4.14) получаем

$$\frac{d}{dx_0}\vec{b}(x_0) = \frac{1}{cj_0} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \vec{j}(x_0, \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{c\vec{j}}{cj_0}. \tag{3.4.16}$$

Учитывая, что $b_0(x_0) = x_0$ по определению, мы можем записать для 4-вектора $b(x_0)$

$$l \equiv \frac{d}{dx_0} b(x_0) = \frac{1}{cj_0} cj. \tag{3.4.17}$$

Пусть функция тока $j(x)$ соответствует скалярному состоянию, т.е. $j(x) = l j_0(x)$. Тогда при переходе к другому состоянию с функцией тока $\tilde{j}(x) = \widetilde{T}_p(j)(x) =$

$G^{-1}(p)j(p(x))$ для 4-вектора скорости в новом состоянии по формуле (3.4.17) получим согласно формуле (3.4.2)

$$\widetilde{l}=\frac{c\widetilde{j}}{c\widetilde{j}_0}=\frac{G^{-1}(p)V(j)}{(G^{-1}(p)V(j))_0}=\frac{G^{-1}(p)lV(j_0)}{(G^{-1}(p)l)_0V(j_0)},$$

т.е.

$$\widetilde{l}=\frac{G^{-1}(p)l}{(G^{-1}(p)l)_0}. \tag{3.4.18}$$

Для новой 4-функции тока соответственно имеем

$$\widetilde{j}(x)=G^{-1}(p)lj_0(p(x))=\widetilde{l}(G^{-1}(p)l)_0j_0(p(x)),$$

так что новое состояние также скалярно и

$$\widetilde{j}_0(x)=(G^{-1}(p)l)_0j_0(p(x)). \tag{3.4.19}$$

В частном случае $\vec{l}=0$, используя представление (3.2.6–3.2.8) матрицы $G(p)$ и свойство $G^{-1}(p)=\Theta G^{\top}(p)\Theta$ для матрицы $G(p)\in\Omega(\Theta)$, получаем

$$\widetilde{l}=\begin{pmatrix}1\\ Q^{\top}\vec{\beta}\end{pmatrix}. \tag{3.4.20}$$

Если матрица G имеет вид (3.2.8), т.е. $G=G_t$, что соответствует преобразованию Лоренца без поворота, получим из (3.4.20)

$$\frac{d}{dx_0}\vec{b}(x_0)=\vec{\beta}. \tag{3.4.21}$$

3.4.4 Закон изменения коэффициентов тензорного взаимодействия $k\widetilde{j}_{r\alpha}$ при изменении состояния частиц.

Доопределим $b_0(x_0)\equiv x_0$ и

$$k\widetilde{j}_{rs}\equiv\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\widetilde{j}_r(x_0,\vec{x})(x_s-b_s)\,dx_1dx_2dx_3;\quad r,s=0,1,2,3. \tag{3.4.22}$$

Найдём, как выражаются коэффициенты $k\widetilde{j}_{rs}$ через скалярные трансформации Пуанкаре функций $j_r(x)$ и $j_r(x)x_s$. Для этого в интеграле (3.4.22) выразим функции $\widetilde{j}_r(x)$ через функции $j_k(x)$:

$$k\widetilde{j}_{rs}=\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}g^{-1}_{rk}j_k(G(x-a))(x_s-b_s)\,dx_1dx_2dx_3=$$

$$g^{-1}_{rk}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}j_k(G(x-a))((x_s-a_s)-(b_s-a_s)\,dx_1dx_2dx_3=$$

$$g^{-1}_{rk}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}j_k(G(x-a))g^{-1}_{st}g_{tl}(x_l-a_l)\,dx_1dx_2dx_3-(b_s-a_s)c\widetilde{j}_r=$$

$$g^{-1}_{rk}g^{-1}_{st}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}j_k(p(x))(p(x))_t\,dx_1dx_2dx_3-(b_s-a_s)c\widetilde{j}_r=$$

$$g_{rk}^{-1} g_{st}^{-1} V(x_t j_k) - (b_s - a_s) g_{rk}^{-1} V(j_k).$$

Мы получили следующее выражение

$$k\widetilde{j}_{rs}(p, x_0) = g_{rk}^{-1} g_{st}^{-1} V(j_k x_t)(p, x_0) - (b_s - a_s) g_{rk}^{-1} V(j_k)(p, x_0), \tag{3.4.23}$$

где $V(\varphi)(p, x_0)$ — скалярная трансформация Пуанкаре функции $\varphi(x)$. С точки зрения вычисления выражений $V(j_k x_t)$ отметим, то если известна трансформация Фурье функций $j_k(x)$, то скалярная трансформация Пуанкаре $V(j_k)$ выражается через трансформацию Фурье по формулам (3.3.21,3.3.27). А трансформация Фурье функции $j_k x_t$ выражается через трансформацию Фурье функцией j_k по формуле (см.[24], с.103)

$$\widehat{j_k x_t}(\xi) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_t} \widehat{j}_k(\xi).$$

3.4.5 Взаимодействие частицы со стандартным состоянием $v(x) \in C_4^{(2)}(\mathbf{R}^4)$ с полем, описываемым 4-функцией $w(x) \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)$, при ряде дополнительных ограничений на характер убывания функций $v(x)$, $w(x)$ и $j(x) = (Av)(x)$ в пространственной бесконечности (см.§3.7) может описываться интегралом

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \widetilde{j}_r(x_0, \vec{x}) w_r(x_0, \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3,$$

который по формуле (3.1.23) допускает асимптотическое представление

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \widetilde{j}_r(x_0, \vec{x}) w_r(x_0, \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 = c\widetilde{j}_r w_r(x_0, \vec{b}(x_0)) + k\widetilde{j}_{r\alpha} \frac{\partial w_r}{\partial x_\alpha}(x_0, \vec{b}(x_0)) + O(\mu^2), \tag{3.4.24}$$

где μ — радиус ядра частицы.

В правую часть равенства (3.4.24) входят два члена. Первый член имеет вид $c\widetilde{j}_r w_r(x_0, \vec{b})$ и взаимодействие, осуществляемое через этот член, мы назвали в § 3.1 векторным. Второй член имеет $k\widetilde{j}_{r\alpha} \frac{\partial w_r}{\partial x_\alpha}(x_0, \vec{b})$, и взаимодействие, осуществляемое через этот член, мы назвали в § 3.1 тензорным. Тензорное взаимодействие является более слабым в том смысле, что соответствующие коэффициенты тензорного взаимодействия $k\widetilde{j}_{r\alpha}$ имеют на единицу более высокий порядок по параметру μ — радиусу ядра частицы, чем коэффициенты векторного взаимодействия $c\widetilde{j}_r$.

В этом параграфе мы выяснили, как преобразуются коэффициенты cj, когда функция $v(x)$ подвергается преобразованию T_p, а соответствующий ток $j(x)$ — преобразованию $\widetilde{T}_p$. Величина $c\widetilde{j}(p, x_0)$ является векторной трансформацией Пуанкаре функции $j(x)$ и варажается через трансформацию Радона функции $j(x)$.

Кроме того, мы выяснили, как преобразуются коэффициенты тензорного взаимодействия $kj_{r\alpha}$ при переходе от тока j к току $\widetilde{j} \equiv \widetilde{T}_p j$. Коэффициенты $k\widetilde{j}_{r\alpha}(p, x_0)$ выражаются через скалярную трансформацию Пуанкаре функций $j_r(x)$ и $j_r(x) x_s$.

Важным результатом проведенных рассмотрений является зависимость векторного и тензорного взаимодействий от скорости движения частицы. Для частиц, спектр Фурье функции состояния которых существенно отличен от нуля лишь вокруг вектора $k \in \mathbf{R}^4$, взаимодействие с полем осуществляется лишь при векторах ξ, близких к вектору $\frac{k}{\sqrt{\langle k, \Theta k \rangle}}$. Если же трансформация Фурье $\widehat{j}(\xi)$ обращается в нуль внутри светового конуса $\xi_0^2 > \vec{\xi}^2$, то векторное и тензорное взаимодействие частицы с полем отсутствует.

3.4.6 Изменение коэффициентов $c\widetilde{j}$ при изменении стандартного состояния.

Нас интересует, как связаны коэффициенты векторного взаимодействия для токов $j(x)$ и $\widetilde{T}_{p'}(j)(x)$, где $p^{'} \in P$. Переход от характеристик функции состояния v и её тока $j = Av$ к характеристикам функции состояния $T_{p'}(v)$ и соответствующего тока $\widetilde{T}_{p'}(j) = AT_{p'}v$ мы будем называть *перенормировкой.* Ответ на заданный вопрос даётся формулами (3.4.4, 3.4.5), согласно которым

$$c\widetilde{j}(p, x_0) = W(j)(p, x_0), \quad c\widetilde{T}_{p'}(j) = W(\widetilde{T}_{p'}(j))(p, x_0) = W(j)(p'p, x_0). \tag{3.4.25}$$

Выразим $W(j)(p, x_0)$ и $W(j)(p'p, x_0)$ через трансформацию Радона 4-функции $j(x)$. По формуле (3.4.3)

$$W(j)(p, x_0) = G^{-1}(p)V(j)(p, x_0), \tag{3.4.26}$$

$$W(j)(p'p, x_0) = G^{-1}(p'p)V(j)(p'p, x_0), \tag{3.4.27}$$

Согласно (10.2) $G(p'p) = G(p')G(p)$. Согласно свойству (3.3.26) скалярной трансформации Пуанкаре

$$V(j)(p'p, x_0) = \overbrace{\ j\ }\left(G^{-1\top}(p')\xi(p), x_0 - (a(p) + G^{-1}(p)a(p'))_0\right). \tag{3.4.28}$$

Учитывая последние соотношения, получаем следующие выражения величин $W(j)(p, x_0)$ и $W(j)(p'p, x_0)$ через трансформацию Радона 4-функции $j(x)$:

$$W(j)(p, x_0) = G^{-1}(p)\overbrace{\ j\ }(\xi(p), x_0 - a_0(p)), \tag{3.4.29}$$

$$W(T_{p'}(j))(p, x_0) = G^{-1}(p)G^{-1}(p')\overbrace{\ j\ }\left(G^{-1\top}(p')\xi(p), x_0 - (a(p) + G^{-1}(p)a(p'))_0\right), \tag{3.4.30}$$

описывающие процедуру перенормировки коэффициентов векторного взаимодействия.

3.4.7 Состояния частицы и квартеты симметричных частиц.

Если задана функция $v \in C_4^{(2)}(\mathbf{R}^4)$, то *частицей* мы называем все функции вида $T_p(v)$, если p берётся из связной компоненты единицы группы Пуанкаре, $p \in P_e$. При разных $p \in P_e$ мы получаем, вообще говоря, различные состояния одной и той же частицы. Итак, две функции $v \in C_4^{(2)}(\mathbf{R}^4)$, $u \in C_4^{(2)}(\mathbf{R}^4)$ есть различные состояния одной частицы, если существует $p \in P_e$, что $u = T_p(v)$. Однако, поскольку группа Пуанкаре имеет четыре компоненты связности P_i, $i = ++, +-, -+, --$, то при действии на функцию $v(x)$ преобразования $T_p, p \notin P_{++}$ мы получаем, вообще говоря, другую частицу. Таким образом, каждая частица может порождать квартет частиц, свойства которых симметричны. Используя свойства скалярной трансформации Пуанкаре, выразим коэффициенты $c\widetilde{j}(p, x_0)$ этих частиц друг через друга.

Пусть $p_i \in P_i$, $i = ++, +-, -+, --$ преобразование Пуанкаре вида

$$p_i(x) = G_i x, \tag{3.4.31}$$

где матрицы G_i имеют вид (2.4.24) и $j^i \equiv \widetilde{T}_{p_i}(j)$.

Сравним коэффициенты $c\widetilde{j}$ и $c\widetilde{j}^i$. Согласно (3.4.5)

$$c\widetilde{j}(p, x_0) = G^{-1}IR_p(j) = G^{-1}\overbrace{\ j\ }(\xi(p), x_0 - a_0). \tag{3.4.32}$$

Применяем формулу (3.4.30)

$$\widetilde{cj}^i(p, x_0) = G^{-1} G_i^{-1} \overbrace{j}(G_i \xi(p), x_0 - a_0), \tag{3.4.33}$$

где $G = G(p)$, $a_0 = a_0(p)$. Сравнивая (3.4.32) и (3.4.33), мы можем заметить, что если известен вектор $\widetilde{cj} = \widetilde{cj}(\xi, x_0 - a_0)$, как функция $\xi(p)$ и $x_0 - a_0$, то вектор $\widetilde{cj}^i$ получается из него по формуле

$$\widetilde{cj}^i(\xi, x_0 - a_0) = G^{-1} G_i^{-1} G \widetilde{cj}(G_i \xi, x_0 - a_0).$$

§3.5 Спин

3.5.1 Спиновая функция частицы. Рассмотрим частицу, имеющую абсолютно нейтральное состояние, т.е. такое, в котором нулевая компонента тока $j_0(x)$ есть функция, равная нулю. Такое состояние выберем за стандартное. Так как 4-вектор тока удовлетворяет соотношению $\frac{\partial j_r}{\partial x_r} = 0$, то для оставшихся пространственных компонент абсолютно нейтрального состояния частицы мы получаем соотношение

$$div\, \vec{j} = 0, \tag{3.5.1}$$

т.е. вектор $\vec{j}(x)$ является соленоидальным и существует вектор-функция $\vec{s}(x)$, что

$$\vec{j} = rot\, \vec{s}(x). \tag{3.5.2}$$

Функцию $\vec{s}(x)$ назовём *спиновой функцией.*

Используя формулу (3.5.2) и предполагая, что спиновая функция $\vec{s}(x)$ убывает в пространственной бесконечности как

$$|\vec{s}(\vec{x}, x_0)| = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right), \tag{3.5.3}$$

вычислим коэффициенты векторного и тензорного взаимодействия абсолютно нейтрального состояния частицы.

Сначала, используя формулу Остроградского-Гаусса, вычислим два интеграла

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\partial s_\psi}{\partial x_\alpha}(\vec{x}, x_0)\, dx_1 dx_2 dx_3 = \lim_{\mu \to \infty} \iiint\limits_{Q[0,\mu]} \frac{\partial s_\psi}{\partial x_\alpha}(\vec{x}, x_0)\, dx_1 dx_2 dx_3 = \tag{3.5.4}$$
$$\lim_{\mu \to \infty} 4\pi \mu^2 O\left(\frac{1}{\mu^3}\right) = 0,$$

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\partial s_\psi}{\partial x_\alpha} x_\beta\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(s_\psi x_\beta) - s_\psi \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}\right) dx_1 dx_2 dx_3 = \tag{3.5.5}$$
$$-\delta_{\beta\alpha} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} s_\psi\, dx_1 dx_2 dx_3 + \lim_{\mu \to \infty} \iiint\limits_{Q[0,\mu]} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(s_\psi x_\beta)\, dx_1 dx_2 dx_3 =$$
$$-\delta_{\beta\alpha} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} s_\psi\, dx_1 dx_2 dx_3 + \lim_{\mu \to \infty} 4\pi \mu^2 \vec{O}\left(\frac{1}{\mu^3}\right) \mu = -\delta_{\beta\alpha} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} s_\psi\, dx_1 dx_2 dx_3.$$

Введём вектор

$$\vec{S}(x_0) \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \vec{s}(\vec{x}, x_0)\, dx_1 dx_2 dx_3 \tag{3.5.6}$$

и назовём его *спином,* — это характеристика частицы.

Далее из формулы (3.5.4) следует, что коэффициенты векторного взаимодействия

$$cj_r = 0, \quad r = 0, 1, 2, 3. \tag{3.5.7}$$

А коэффициенты тензорного взаимодействия выражаются через вектор спина с помощью антисимметричного тензора $e_{\alpha\beta\gamma}$ $(e_{1,2,3} = 1)$ следующим образом

$$kj_{0\alpha} = 0, \tag{3.5.8}$$

$$kj_{\gamma\beta} = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} e_{\gamma\alpha\psi} \frac{\partial s_\psi}{\partial x_\alpha} x_\beta \, dx_1 dx_2 dx_3 = -e_{\gamma\alpha\psi}\delta_{\beta\alpha} S_\psi = -e_{\gamma\beta\psi} S_\psi. \tag{3.5.9}$$

В случае, когда взаимодействие с внешним полем $w(x)$ локализовано (п. 12.1.3) оно даёт следующий вклад в одномерную плотность лагранжиана в терминах §12.1:

$$\mathrm{nt}\,(e, e, w, j) = kj_{r\beta} \frac{\partial w_r}{\partial x_\beta}(b) = kj_{\gamma\beta}\, \frac{\partial w_\gamma}{\partial x_\beta}(b) = -e_{\gamma\beta\psi} S_\psi \frac{\partial w_\gamma}{\partial x_\beta} = S_\psi e_{\psi\beta\gamma} \frac{\partial w_\gamma}{\partial x_\beta} = \langle \vec{S},\, rot\, \vec{w} \rangle. \tag{3.5.10}$$

Поскольку в п. 1.3.9 мы отождествили величину $rot\,\vec{w}$ с магнитным полем $\vec{H} = rot\,\vec{w}$, то формула (3.5.10) для взаимодействия абсолютно нейтральной частицы с внешним полем приобретает вид энергии взаимодействия спина с магнитным полем, принятый в квантовой механике:

$$\mathrm{nt}\,(e, e, w, j) = \langle \vec{S}, \vec{H}(b) \rangle, \tag{3.5.11}$$

где $b(x_0)$ — 4-вектор центра частицы.

3.5.2 Коэффициенты векторного взаимодействия $\widetilde{cj}$.

Подвергнем теперь 4-вектор тока $j(x)$ преобразованию $\widetilde{T}_p$ и вычислим коэффициенты векторного взаимодействия $\widetilde{cj}$. Согласно результатам предыдущего параграфа это означает применение к 4-функции $j(x)$ векторной трансформации Пуанкаре. Согласно формуле (3.4.3) нужно сначала вычислить скалярную трансформацию Пуанкаре от компонент 4-функции $j(x)$. По формуле (3.3.21) и свойству преобразования Радона (см. [27], с.21) получаем

$$V(j_\psi) = e_{\psi\alpha\beta} V\left(\frac{\partial s_\beta}{\partial x_\alpha}\right) = e_{\psi\alpha\beta}\xi_\alpha \frac{\partial}{\partial x_0} \overbrace{s_\beta}(\xi, x_0 - a_0),$$

откуда

$$V(\vec{j})(\xi, x_0 - a_0) = \frac{\partial}{\partial x_0}\left[\vec{\xi}, \overbrace{\vec{s}}\,(\xi, x_0 - a_0)\right]. \tag{3.5.12}$$

Умножим теперь 4-вектор $V(j)$ на матрицу $G(p)^{-1}$, выбирая матрицу $G = G(p)$ в *левом представлении.* Получаем для векторной трансформации Пуанкаре выражение

$$W(j) = G^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_0}[\vec{\xi}, \overbrace{\vec{s}}\,] \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_0} G_s^{-1} G_t^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ [\vec{\xi}, \overbrace{\vec{s}}\,] \end{pmatrix} = \tag{3.5.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} G_s^\top \begin{pmatrix} \langle \vec{\xi}, [\vec{\xi}, \overbrace{\vec{s}}\,] \rangle \\ B[\vec{\xi}, \overbrace{\vec{s}}\,] \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_0} \begin{pmatrix} 0 \\ Q^\top [\vec{\xi}, \overbrace{\vec{s}}\,] \end{pmatrix}.$$

Мы использовали представления (3.2.7, 3.2.8) для матриц G_s, G_t и то свойство, что вектор $[\vec{\xi}, \overbrace{\vec{s}}\,]$ ортогонален вектору $\vec{\xi}$.

Первым следствием формулы (3.5.13) является то, что *заряд киперной частицы в любом состоянии равен нулю.*

3.5.3 Вычисление коэффициентов тензорного взаимодействия $k\widetilde{j}$.

Перейдем к вычислению коэффициентов тензорного взаимодействия $k\widetilde{j}$. Согласно формуле (3.4.23) для этого сначала требуется вычислить скалярную трансформацию Пуанкаре функций $x_t j_k$.

Нам потребуется следующее свойство трансформации Радона функции $\varphi(x)$

$$\left(x_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \right)(\xi, t) = -\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\xi_r \overbrace{\varphi}(\xi, t) \right). \tag{3.5.14}$$

В самом деле по свойствам трансформации Фурье (см. [24], с. 103)

$$\widehat{\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}} = (-i\xi_r)\widehat{\varphi},$$

$$\left(x_k \widehat{\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}} \right) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\widehat{\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}} \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\xi_r \widehat{\varphi} \right). \tag{3.5.15}$$

Выражаем трансформацию Радона через трансформацию Фурье по формуле (3.3.27)

$$\overbrace{(x_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_r})}(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{(}x_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_r}) \alpha\xi e^{-i\alpha t} d\alpha = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} (\xi_r \widehat{\varphi}(\xi)) \right) \Big|_{\alpha\xi} d\alpha =$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} \left(\delta_{kr} \widehat{\varphi}(\alpha\xi) + \left(\xi_r \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \xi_k} \right) \Big|_{\alpha\xi} \right) d\alpha =$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} \left(\delta_{kr} \widehat{\varphi}(\alpha\xi) + \xi_r \frac{\partial \widehat{\varphi}(\alpha\xi)}{\partial \xi_k} \right) d\alpha =$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\xi_r \widehat{\varphi}(\alpha\xi)) d\alpha = -\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\xi_r \overbrace{\varphi}(\xi, t) \right).$$

Формула (3.5.14) доказана.

Поскольку $j_\psi = e_{\psi\alpha\beta} \frac{\partial s_\beta}{\partial x_\alpha}$, то из формулы (3.5.14) получаем

$$\overbrace{(x_m j_\psi)}(\xi, t) = e_{\psi\alpha\beta} \overbrace{\left(x_m \frac{\partial s_p}{\partial x_\alpha} \right)}(\xi, t) = -e_{\psi\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\xi_\alpha \overbrace{s_\beta}(\xi, t) \right). \tag{3.5.16}$$

Подставляем теперь выражение (3.5.16) в формулу (3.4.23) для коэффициентов тензорного взаимодействия $W(j)_r$

$$k\widetilde{j}_{rk}(\xi, t) = -g^{-1}_{r\psi} g^{-1}_{km} e_{\psi\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial_{\xi_m}} (\xi_\alpha \overbrace{s_\beta}) - (b_k - a_k) g^{-1}_{r\psi} e_{\psi\alpha\beta} \xi_\alpha \frac{\partial}{\partial x_0} \overbrace{s_\beta} = \tag{3.5.17}$$

$$-g^{-1}_{r\psi}\left(g^{-1}_{km}\frac{\partial}{\partial\xi_m}(e_{\psi\alpha\beta}\xi_\alpha\widehat{s_\beta})+(b_k-a_k)\frac{\partial}{\partial x_0}(e_{\psi\alpha\beta}\xi_\alpha\widehat{s_\beta})\right).$$

Трансформация Радона $\widehat{\varphi}(\xi,t)$ функции $\varphi(x)$ обладает свойством однородности (см. [27], с.17)

$$\widehat{\varphi}(\alpha\xi,\alpha t)=\frac{1}{\alpha}\widehat{\varphi}(\xi,t),\quad \alpha>0. \tag{3.5.18}$$

Дифференцируя соотношение (3.5.18) по α при $\alpha=1$, получаем соотношение

$$\widehat{\varphi}(\xi,t)+t\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial t}(\xi,t)+\xi_r\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial\xi_r}(\xi,t)=0. \tag{3.5.19}$$

Преобразуем выражение (3.5.17), исключив из него координаты центра b_k. По формуле (3.2.22)

$$(b_k-a_k)=(x_0-a_0)\frac{1}{\xi_0}\left(G_s^{-1}\xi\right)_k. \tag{3.5.20}$$

Поэтому

$$(b_k-a_k)e_{\psi\alpha\beta}\xi_\alpha\frac{\partial}{\partial x_0}\widehat{s_\beta}=e_{\psi\alpha\beta}\xi_\alpha\frac{1}{\xi_0}\left(G_s^{-1}\xi\right)_k(x_0-a_0)\frac{\partial}{\partial x_0}\widehat{s_\beta}(\xi,x_0-a_0)= \tag{3.5.21}$$

$$-e_{\psi\alpha\beta}\xi_\alpha\frac{1}{\xi_0}\left(G_s^{-1}\xi\right)_k\left(\widehat{s_\beta}+\xi_m\frac{\partial\widehat{s_\beta}}{\partial\xi_m}\right).$$

Подставим (3.5.21) в формулу (3.5.17) и получим

$$k\widetilde{j}_{r\gamma}=-g^{-1}_{r\psi}\left(g^{-1}_{\gamma m}\frac{\partial}{\partial\xi_m}\left(e_{\psi\alpha\beta}\xi_\alpha\widehat{s_\beta}\right)-e_{\psi\alpha\beta}\xi_\alpha\frac{1}{\xi_0}\left(Q^\top\vec{\xi}\right)_\gamma\left(s_\beta+\xi_m\frac{\partial\widehat{s_\beta}}{\partial\xi_m}\right)\right)=$$

$$-g^{-1}_{r\psi}\left(g^{-1}_{\gamma m}\delta_{\alpha m}e_{\psi\alpha\beta}\widehat{s_\beta}+g^{-1}_{\gamma m}e_{\psi\alpha\beta}\xi_\alpha\frac{\partial}{\partial\xi_m}\widehat{s_\beta}-\right.$$

$$\left.(Q^\top\vec{\xi})_\gamma\frac{\xi_\alpha}{\xi_0}e_{\psi\alpha\beta}\widehat{s_\beta}-(Q^\top\vec{\xi})_\gamma\frac{1}{\xi_0}e_{\psi\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_m\frac{\partial\widehat{s_\beta}}{\partial\xi_m}\right)=$$

$$-g^{-1}_{r\psi}\left(g^{-1}_{\gamma\alpha}e_{\psi\alpha\beta}\widehat{s_\beta}-(Q^\top\vec{\xi})_\gamma\frac{\xi_\alpha}{\xi_0}e_{\psi\alpha\beta}\widehat{s_\beta}+\left(g^{-1}_{\gamma\eta}-(Q^\top\vec{\xi})_\gamma\frac{\xi_\eta}{\xi_0}\right)\left(e_{\psi\alpha\beta}\xi_\alpha\frac{\partial\widehat{s_\beta}}{\partial\xi_\eta}\right)\right)=$$

$$-g^{-1}_{r\psi}\left(g^{-1}_{\gamma\alpha}-(Q^\top\vec{\xi})_\gamma\frac{\xi_\alpha}{\xi_0}\right)\left(e_{\psi\alpha\beta}\widehat{s_\beta}+e_{\psi\chi\beta}\xi_\chi\frac{\partial\widehat{s_\beta}}{\partial\xi_\alpha}\right). \tag{3.5.22}$$

Выразим матрицу G^{-1} через матрицы Q и B

$$G^{-1}=(G_tG_s)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&Q^\top\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_0&\vec{\xi}^\top\\\vec{\xi}&B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_0&\vec{\xi}^\top\\Q^\top\vec{\xi}&Q^\top B\end{pmatrix}. \tag{3.5.23}$$

Таким образом,

$$g^{-1}_{\gamma\alpha}-(Q^\top\vec{\xi})_\gamma\frac{\xi_\alpha}{\xi_0}=(Q^\top B)_{\gamma\alpha}-\xi_0(Q^\top W)_{\gamma\alpha}, \tag{3.5.24}$$

где $(W)_{\gamma\alpha}\equiv\beta_\gamma\beta_\alpha$. Перепишем (3.5.24) в виде

$$g^{-1}_{\gamma\alpha}-(Q^\top\vec{\xi})_\gamma\frac{\xi_\alpha}{\xi_0}=(Q^\top(B-\xi_0W))_{\gamma\alpha}=(Q^\top B^{-1})_{\gamma\alpha}, \tag{3.5.25}$$

а формулу (3.5.22) в виде двух формул

$$k\vec{j}_{0\gamma} = -\xi\psi(Q^\top B^{-1})_{\gamma\alpha}\left(e_{\psi\alpha\beta}\widehat{s_\beta} + e_{\psi\chi\beta}\xi_\chi\frac{\partial\widehat{s_\beta}}{\partial\xi_\alpha}\right) = (Q^\top B_{-1})[\vec{\xi},\widehat{\vec{s}}\,] = (Q^\top[\vec{\xi},\widehat{\vec{s}}\,])_\gamma; \tag{3.5.26}$$

$$k\vec{j}_{\eta\gamma} = -(Q^\top B)_{\eta\psi}(Q^\top B^{-1})_{\gamma\alpha}\left(e_{\psi\alpha\beta}\widehat{s_\beta} + e_{\psi\chi\beta}\xi_\chi\frac{\partial\widehat{s_\beta}}{\partial\xi_\alpha}\right) = \tag{3.5.27}$$

$$-(Q^\top B)_{\eta\psi}(Q^\top B^{-1})_{\gamma\alpha}e_{\psi\alpha\beta}\widehat{s_\beta} - Q^\top_{\eta\varphi}(\delta_{\varphi\psi} + f\xi_\varphi\xi_\psi)e_{\psi\chi\beta}\xi_\chi\frac{\partial\widehat{s_\beta}}{\partial\xi_\alpha}(Q^\top B^{-1})_{\gamma\alpha},$$

где $f = (1-\beta^2)(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{\beta^2})$. Из формулы (3.5.27) получаем

$$k\tilde{j}_{\eta\gamma} = -(Q^\top B)_{\eta\psi}(Q^\top B^{-1})_{\gamma\alpha}e_{\psi\alpha\beta}\widehat{s_\beta} - Q^\top_{\eta\psi}(Q^\top B^{-1})_{\gamma\alpha}e_{\psi\chi\beta}\xi_\chi\frac{\partial\widehat{s_\beta}}{\partial\xi_\alpha}. \tag{3.5.28}$$

Замечание 3.5.1 *Матрица* $B - \xi_0 W = B^{-1}$, *ибо* $\frac{1}{\beta^2}(\xi_0 - 1) - \xi_0 = \frac{1}{\beta^2}(\xi_0 - 1)$.

3.5.4 Случай, когда преобразование p — пространственный поворот.

Рассмотрим теперь полученные в пунктах 3.5.2,3.5.3 формулы в случае, когда преобразование p — пространственный поворот, т.е. $\xi_0 = 1$, $\vec{\xi} = 0$. В таком случае по формуле (3.5.13) $c\tilde{j} = 0$, по формуле (3.5.26) $k\tilde{j}_{0\gamma} = 0$ и по формуле (3.5.28)

$$k\tilde{j}_{\eta\gamma} = -Q^\top_{\eta\psi}Q^\top_{\gamma\alpha}e_{\psi\alpha\beta}\widehat{s_\beta} = -Q_{\psi\eta}Q_{\alpha\gamma}e_{\psi\alpha\beta}\widehat{s_\beta}, \tag{3.5.29}$$

и функционал взаимодействия с внешним полем принимает вид

$$\mathrm{nt}\,(e,e,w,j) = -Q_{\psi\eta}Q_{\alpha\gamma}e_{\psi\alpha\beta}\widehat{s_\beta}\frac{\partial w_\eta}{\partial x_\gamma} = \widehat{s_\beta}\,e_{\beta\alpha\psi}Q_{\psi\eta}Q_{\alpha\gamma}\frac{\partial w_\eta}{\partial x_\gamma}. \tag{3.5.30}$$

Для ортогональной матрицы $Q \in SO(3)$ справедливо тождество

$$e_{\beta\alpha\psi}Q_{\psi\eta}Q_{\alpha\gamma} = Q_{\beta\chi}e_{\chi\gamma\eta}, \tag{3.5.31}$$

подставляя которое в (3.5.30) получаем

$$\mathrm{nt}\,(e,e,w,j) = (Q^\top\widehat{\vec{s}}\,)_\chi e_{\chi\gamma\eta}\frac{\partial w_\eta}{\partial x_\gamma} = \langle Q^\top\widehat{\vec{s}}, \mathit{rot}\,\vec{w}\rangle = \langle Q^\top\vec{S}, \vec{H}\rangle. \tag{3.5.32}$$

В последней формуле мы учли, что при $\vec{\xi} = 0$ верно $\widehat{\vec{s}} = \vec{S}$. Из формулы (3.5.32) вытекает физический вывод о том, что для неподвижной абсолютно нейтральной частицы вектор спина коллинеарен вектору магнитного поля.

3.5.5 Функционал $\mathrm{nt}\,(e,p,w,j)$ для абсолютно нейтральной частицы в случае $|\vec{\xi}| \ll 1$.

Рассмотрим теперь функционал $\mathrm{nt}\,(e,p,w,j)$ для абсолютно нейтральной частицы в случае $|\vec{\xi}| \ll 1$. Получим выражение для коэффициентов $k\tilde{j}_{r\gamma}$, отбрасывая величины второго порядка и выше по $\vec{\xi}$. В таком приближении матрицы B и B^{-1} в (3.5.28) можно заменить на единичные и получим

$$k\tilde{j}_{\eta\gamma} = (Q^\top\widehat{\vec{s}}\,)_\chi e_{\chi\gamma\eta} - Q^\top_{\eta\psi}Q^\top_{\gamma\alpha}e_{\psi\chi\beta}\xi_\chi\frac{\partial\widehat{s_\beta}}{\partial\xi_\alpha} + O(|\vec{\xi}|^2). \tag{3.5.33}$$

С точностью до величины порядка $|\vec{\xi}|^2$ получаем

$$\mathrm{nt}\,(e,p,w,j) = \langle Q^\top \overbrace{\vec{s}}\,,\,rot\,\vec{w}\rangle - e_{\psi\chi\beta}\xi_\chi \frac{\partial \overbrace{s_\beta}}{\partial \xi_\alpha} Q^\top_{\eta\psi} Q^\top_{\gamma\alpha} \frac{\partial w_\eta}{\partial x_\gamma} + \langle Q^\top [\vec{\xi}, \frac{\partial \vec{s}}{\partial x_0}], \vec{w}\rangle + O(|\vec{\xi}|^2), \tag{3.5.34}$$

где 4-функция $w(x)$ взята в точке $x = b$.

Мы рассматриваем 4-вектор ξ в малой окрестности точки $\xi = l_0 \equiv \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$. При описании частицы компоненты 4-вектора ξ не являются независимыми, а связаны соотношением

$$\xi_0^2 - |\vec{\xi}|^2 = 1,$$

поэтому в рассматриваемой окрестности точки l_0

$$\xi_0 = 1 + O(|\vec{\xi}|^2). \tag{3.5.35}$$

Далее разложим функцию $\overbrace{\vec{s}}\,(\xi, x_0 - a_0)$ в окрестности точки l_0 по аргументу ξ по формуле Тейлора

$$\overbrace{\vec{s}}\,(\xi, x_0 - a_0) = \overbrace{\vec{s}}\,(l_0, x_0 - a_0) + \frac{\partial \overbrace{\vec{s}}}{\partial \xi_0}\Big|_{(l_0, x_0 - a_0)} \vec{\xi} + \frac{\partial \overbrace{\vec{s}}}{\partial \xi_0}\Big|_{(l_0, x_0 - a_0)} (\xi_0 - 1) + O(|\triangle\,\xi|^2). \tag{3.5.36}$$

Наряду с вектором спина $\vec{S} = \overbrace{\vec{s}}\,(l_0, x_0 - a_0)$ введём матрицу $D \in M(3)$ вида

$$D \equiv \frac{\partial \overbrace{\vec{s}}}{\partial \vec{\xi}}(l_0, x_0 - a_0). \tag{3.5.37}$$

Равенство (3.5.36) с учётом (3.5.35, 3.5.36) перепишем в виде

$$\overbrace{\vec{s}} = \vec{S} + D\vec{\xi} + O(|\vec{\xi}|^2). \tag{3.5.38}$$

Введём также вектор

$$\vec{F}(x_0 - a_0) \equiv \frac{\partial \overbrace{\vec{s}}}{\partial x_0}(l_0, x_0 - a_0). \tag{3.5.39}$$

С помощью введенных обозначений слагаемые формулы (3.5.34) преобразуются следующим образом

$$\langle Q^\top \overbrace{\vec{s}}\,,\,rot\,\vec{w}\rangle = \langle Q^\top \vec{S} + Q^\top D Q Q^\top \vec{\xi},\,rot\,\vec{w}\rangle + O(|\vec{\xi}|^2); \tag{3.5.40}$$

$$\begin{aligned} &e_{\psi\chi\beta}\xi_\chi \frac{\partial \overbrace{s_\beta}}{\partial \xi_\alpha} Q^\top_{\eta\psi} Q^\top_{\gamma\alpha} \frac{\partial w_\eta}{\partial x\gamma} = e_{\psi\chi\beta} Q_{\chi\varphi} Q^\top_{\varphi\nu}\xi_\nu (DQ)_{\beta\gamma} Q^\top_{\eta\psi} \frac{\partial w_\eta}{\partial x_\gamma} + O(|\vec{\xi}|^2) = \\ &e_{\psi\chi\beta} Q_{\chi\varphi} Q_{\psi\eta} Q_{\beta\theta} (Q^\top D Q)_{\theta\gamma} (Q^\top_{\varphi\nu}\xi_\nu) \frac{\partial w_\eta}{\partial x_\gamma} + O(|\vec{\xi}|^2) = \\ &e_{\eta\varphi\theta} (Q^\top D Q)_{\theta\gamma} (Q^\top \vec{\xi})_\varphi \frac{\partial w_\eta}{\partial x_\gamma} + O(|\vec{\xi}|^2); \end{aligned} \tag{3.5.41}$$

$$\langle Q^\top[\vec{\xi}, \widehat{\vec{s}}], grad\, w_0\rangle = -\langle[Q^\top\vec{S}, Q^\top\vec{\xi}], grad\, w_0\rangle + O(|\vec{\xi}|^2) = \tag{3.5.42}$$
$$-\langle Q^\top\vec{S}, [Q^\top\vec{\xi}, grad\, w_0]\rangle + O(|\vec{\xi}|^2);$$

$$\langle Q^\top[\vec{\xi}, \frac{d\vec{s}}{dx_0}], \vec{w}\rangle = -\langle Q^\top\vec{F}, [Q^\top\vec{\xi}, \vec{w}]\rangle + O(|\vec{\xi}|^2). \tag{3.5.43}$$

Формула (3.5.34) в итоге преобразуется к виду

$$\mathrm{nt}\,(e,p,w,j) = \langle Q^\top\vec{S}, rot\,\vec{w} - [Q^\top\vec{\xi}, grad\, w_0]\rangle + \langle (Q^\top DQ)Q^\top\vec{\xi}, rot\,\vec{w}\rangle +$$
$$e_{\varphi\eta\theta}(Q^\top DQ)_{\theta\gamma}\frac{\partial w_\eta}{\partial x_\gamma}(Q^\top\vec{\xi})_\varphi - \langle Q^\top\vec{F}, [Q^\top\vec{\xi}, \vec{w}]\rangle + O(|\vec{\xi}|^2). \tag{3.5.44}$$

В случае, если ток $j(x)$ соответствует состоянию покоя спокойной частицы, величина $Q^\top\vec{\xi}$ имеет смысл скорости центра частицы, умноженной ξ_0 :

$$Q^\top\vec{\xi} = \xi_0\dot{\vec{b}} = \dot{\vec{b}} + O(|\vec{\xi}|^3). \tag{3.5.45}$$

В этом случае обозначая

$$\vec{S}' = Q^\top S, \quad D' = Q^\top DQ, \quad \vec{F}' = Q^\top\vec{F}, \tag{3.5.46}$$

приводим формулу (3.5.44) к виду

$$\mathrm{nt}\,(e,p,w,j) = \langle\vec{S}', rot\,\vec{w} - [\dot{\vec{b}}, grad\, w_0]\rangle + \langle D'\dot{\vec{b}}, rot\,\vec{w}\rangle \tag{3.5.47}$$
$$+e_{\varphi\eta\theta}D'_{\theta\gamma}\dot{b}_\varphi\frac{\partial w_\eta}{\partial x_\gamma} - \langle\vec{F}', [\dot{\vec{b}}, \vec{w}]\rangle + O(|\dot{\vec{b}}|^2).$$

В простейшем случае, когда для спокойной частицы $D = 0$ и $\vec{F} = 0$, получаем

$$\mathrm{nt}\,(e,p,w,j) = \langle\vec{S}', rot\,\vec{w} - [\dot{\vec{b}}, grad\, w_0]\rangle + O(|\dot{\vec{b}}|^2). \tag{3.5.48}$$

Формула (3.5.44) существенно упрощается также в случае движения в электростатическом поле, т.е. при $\vec{w} = 0$, тогда

$$\mathrm{nt}\,(e,p,w,j) = -\langle\vec{S}', [Q^\top\vec{\xi}, grad\, w_0]\rangle = -\langle\vec{S}', [Q^\top\vec{\xi}, \vec{E}\rangle + O(|\vec{\xi}|^2)$$

или для спокойной частицы

$$\mathrm{nt}\,(e,p,w,j) = -\langle\vec{S}', [\dot{\vec{b}}, \vec{E}]\rangle. \tag{3.5.49}$$

Из формулы (3.5.49) следует, что при движении электрона в электростатическом поле ядра спин электрона коллинеарен его орбитальному моменту и перпендикулярен плоскости движения.

3.5.6 Физический смысл спиновой функции абсолютно нейтральной частицы. В этом пункте через $v(x) \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)$ будем обозначать функцию абсолютно нейтрального состояния частицы, а через

$$\vec{u}(x) = \vec{v}(x) - grad\int_0^{x_0} v_0(\vec{x}, x_0)\, dx_0 \tag{3.5.50}$$

3-функцию, имеющую согласно §2.2 формула (2.2.4) смысл пространственных смещений элементов среды. 4-функция состояния $v(x)$ связана с 4-функцией тока $j(x)$ уравнениями (2.2.16, 2.2.17), т.е.

$$\triangle\, v_0 - \mathit{div}\,\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_0} = -\rho, \tag{3.5.51}$$

$$\Box\vec{v} - \mathit{grad}\,\left(\frac{\partial v_0}{\partial x_0} - \mathit{div}\,\vec{v}\right) = -\vec{j}. \tag{3.5.52}$$

Из условия абсолютной нейтральности $\rho(x) = 0$ следует, что

$$\mathit{div}\,\left(\mathit{grad}\, v_0 - \frac{\partial\vec{v}}{\partial x_0}\right) = \mathit{div}\,\left(-\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_0}\right) = 0, \tag{3.5.53}$$

т.е. поле скоростей $\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_0}$ соленоидально во все моменты времени. А уравнение (3.5.52) через смещения $\vec{u}(x)$ можно записать в виде

$$\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x_0^2} + \mathit{rot}\;\mathit{rot}\,\vec{u} = -\vec{j}. \tag{3.5.54}$$

Из условия (3.5.53) следует, что существует векторный потенциал скоростей, т.е. 3-функция $\vec{p}(x)$, что

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_0} = \mathit{rot}\,\vec{p}(x). \tag{3.5.55}$$

Подставляя (3.5.55) в соотношение (3.5.54), мы видим, что

$$j = -\,\mathit{rot}\,(\,\mathit{rot}\,\vec{u} + \frac{\partial\vec{p}}{\partial x_0}).$$

Таким образом, с точностью до прибавления градиента произвольной скалярной функции, спиновая функция

$$\vec{s}(x) = -\left(\mathit{rot}\,\vec{u} + \frac{\partial\vec{p}}{\partial x_0}\right). \tag{3.5.56}$$

В случае, когда функция смещений достаточно быстро убывает в пространственной бесконечности, а именно, если

$$|\vec{u}(\vec{x}, x_0)| = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^2}\right) \tag{3.5.57}$$

при $|\vec{x}| \to \infty$, то из формулы (3.5.56) следует, что спин частицы

$$\vec{S} = -\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\partial\vec{p}(\vec{x}, x_0)}{\partial x_0}\, dx_1 dx_2 dx_3 \tag{3.5.58}$$

выражается через векторный потенциал поля скоростей.

Из формулы (3.5.53) также следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x_0}(\,\mathit{div}\,\vec{u}(x)) = 0,$$

т.е. если поле смещений в некоторый момент времени было соленоидальным, то оно будет соленоидальным всегда. Пусть поле смещений соленоидально, т.е. существует векторный потенциал $\vec{q}(x)$, что

$$\vec{u}(x) = rot\,\vec{q}(x). \tag{3.5.59}$$

Тогда подставим уравнение (3.5.59) в уравнение (3.5.54) и получим уравнение для вектор-потенциала $\vec{q}$:

$$rot\,\left(\frac{\partial^2 \vec{q}}{\partial x_0^2} + rot\;rot\,\vec{q}\right) = rot\,(-\vec{s}).$$

Таким образом, для некоторой скалярной функции $\varphi(x)$

$$\frac{\partial^2 \vec{q}}{\partial x_0^2} + rot\;rot\,\vec{q} = -(\vec{s} + grad\,\varphi). \tag{3.5.60}$$

Но и сама спиновая функция определена, вообще говоря, с точностью до градиента скалярной функции.

3.5.7 Электростатическое поле. Вернёмся ещё раз к случаю внешнего поля $w(x)$, для которого отлично от нуля лишь составляющая $w_0(x)$, что охватывает электростатические поля. В этом случае согласно §12.1 для функционала взаимодействия справедливо равенство

$$\mathrm{ni}\,(e,p,w,v) = \mathrm{nt}\,(e,p,w,j), \tag{3.5.61}$$

где $v(x)$, $j(x)$ — функции состояния и тока стандартного состояния частицы. Для абсолютно нейтральной частицы согласно §3.1 и проведённым рассуждениям в таком случае

$$\mathrm{ni}\,(e,p,w,v) = \langle Q^\top[\vec{\xi}, \widehat{\vec{s}}\,],\, grad\,w_0\rangle = \langle[Q^\top\vec{\xi}, Q^\top\widehat{\vec{s}}\,], \vec{E}\rangle. \tag{3.5.62}$$

Или для спокойной, абсолютно нейтральной частицы в электростатическом поле получаем

$$\mathrm{ni}\,(e,p,w,v) = -\xi_0\langle Q^\top\widehat{\vec{s}}\,, [\dot{\vec{b}}, \vec{E}]\rangle. \tag{3.5.63}$$

3.5.8 Рассмотрим частный случай, описанный в п. 3.3.1, когда трансформация Радона функции $\vec{s}(x)$ легко вычисляется. А именно, предположим, что линейной невырожденной заменой переменных $x' = Ax$, $A \in M(4)$, функция $\vec{s}(x)$ приводится к функции, не зависящей от переменной x_0'. В этом случае согласно п. 3.3.1

$$\widehat{\vec{s}} = g(\xi)\vec{S}, \tag{3.5.64}$$

где $\vec{S}$ — вектор спина, а скалярная функция $g(\xi)$ такова, что

$$\frac{1}{g(\xi)} = \xi_0 + \langle\vec{\xi}, \vec{S}_1\rangle, \tag{3.5.65}$$

где $\vec{S}_1 \in \mathbf{R}^3$ постоянный вектор.

В частном случае, когда функция $\vec{s}(x)$ не зависит от времени, согласно п. 3.3.1 получаем

$$\widehat{\vec{s}} = \frac{1}{\xi_0}\vec{S}. \tag{3.5.66}$$

Функционал $\mathrm{nt}\,(e,p,w,j)$ будет тогда равен согласно пунктам 2,3 данного параграфа

$$\mathrm{nt}\,(e,p,w,j) = -\frac{1}{\xi_0}\langle Q^\top \vec{S}, [Q^\top \vec{\xi},\ grad\, w_0]\rangle - \frac{1}{\xi_0} S_\beta e_{\beta\psi\alpha}(Q^\top B)_{\eta\psi}(Q^\top B^{-1})_{\gamma\alpha}\frac{\partial w_\eta}{\partial x_\gamma}. \quad (3.5.67)$$

Если кроме того внешнее поле электростатическое ($\vec{w} = 0$) и частица спокойная, из (3.5.63, 3.5.66) получаем

$$\mathrm{ni}\,(e,p,w,v) = -\langle Q^\top \vec{S}, [\dot{\vec{b}}, \vec{E}]\rangle. \quad (3.5.68)$$

§3.6 Кинематика агвидных частиц

Для изучения следствий развиваемой теории для поведения взаимодействующих частиц мы заинтересованы в выделении класса математических моделей, для которых явно аналитически вычисляются их характеристики. Простейшим таким классом частиц будут агвидные частицы.

3.6.1 Линейное преобразование аргумента агвидной функции.

В п. 3.3.1 мы назвали скалярную или векторную функцию четырёх переменных $\varphi(x)$ агвидной, если существует функция трёх переменных $\eta(\vec{x})$ и вектор $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$, что справедливо представление

$$\varphi(x) = \eta(\vec{x}\ - x_0\vec{l}). \quad (3.6.1)$$

Если вектор $\vec{c} \in \mathbf{R}^3$ — центр функции $\eta(\vec{x})$, то вектор $\vec{b}(x_0) \equiv x_0\vec{l} + \vec{c}$ будет иметь смысл положения центра сдвинутой функции и представление (3.6.1) эквивалентно представлению

$$\varphi(x) = \chi(\vec{x} - \vec{b}(x_0)) \quad (3.6.2)$$

где функция $\chi(\vec{x}) \equiv \eta(\vec{x} + \vec{c})$ имеет центр в нуле.

Проведём теперь линейное преобразование аргумента агвидной функции. Пусть $\psi(x) = Ax + f$, где $A \in M(4)$, $f \in \mathbf{R}^4$. Рассмотрим суперпозицию

$$\varphi(\psi(x)) = \chi(\vec{\psi}(x) - (\psi_0(x)\vec{l} + \vec{c}))$$

и выпишем компоненты вектора $\vec{\psi}(x) - (\psi_0(x)\vec{l} + \vec{c})$

$$\psi_\alpha(x) - (l_\alpha\psi_0(x) + c_\alpha) = A_{\alpha 0}x_0 + A_{\alpha\gamma}x_\gamma + f_\alpha - l_\alpha(A_{00}x_0 + A_{0\gamma}x_\gamma + f_0) =$$

$$(A_{\alpha\gamma} - l_\alpha A_{0\gamma})x_\gamma - (l_\alpha A_{00} - A_{\alpha 0})x_0 - (c_\alpha + l_\alpha f_0 - f_\alpha).$$

Введём матрицу $R \in M(3)$

$$R_{\alpha\gamma} \equiv A_{\alpha\gamma} - l_\alpha A_{0\gamma}. \quad (3.6.3)$$

В случае её невырожденности определим вектора $\tilde{\vec{l}} \in \mathbf{R}^3$ и $\tilde{\vec{c}} \in \mathbf{R}^3$ следующим образом

$$\tilde{l}_\nu \equiv R^{-1}_{\nu\alpha}(l_\alpha A_{00} - A_{\alpha 0}), \quad (3.6.4)$$

$$\tilde{c}_\nu \equiv R^{-1}_{\nu\alpha}(c_\alpha + l_\alpha f_0 - f_\alpha) \quad (3.6.5)$$

и получим представление суперпозиции $\varphi(\psi(x))$ в виде

$$\varphi(\psi(x)) = \tilde{\chi}\left(\vec{x} - \tilde{\vec{b}}(x_0)\right), \quad (3.6.6)$$

где

$$\tilde{\vec{b}}(x_0) = x_0\tilde{\vec{l}} + \tilde{\vec{c}}, \tag{3.6.7}$$

$$\tilde{\chi}(\vec{x}) = \chi(R\vec{x}). \tag{3.6.8}$$

Функция $\tilde{\chi}(\vec{x})$также имеет центр в нуле.

Наиболее интересен для дальнейшего случай, когда $\psi(x) = p(x)$ преобразование Пуанкаре, т.е. $p(x) = G(x-a)$. Выбирая матрицу $G = G(p)$ в левом представлении, согласно формуле (3.2.58) получаем следующее выражение для матрицы R вида (3.6.3)

$$R = BQ + \vec{l}\vec{\xi}^\top Q. \tag{3.6.9}$$

Тогда

$$\det(R) = \det(BQ + \vec{l}\vec{\xi}^\top Q) = \det(B + \vec{l}\vec{\xi}^\top) = \det(E + \vec{l}\vec{\xi}^\top B^{-1})\det B = \tag{3.6.10}$$

$$\det(E + \vec{l}\vec{\xi}^\top)\det B = (1 + \langle\vec{l},\vec{\beta}\rangle)\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \langle l, \xi\rangle,$$

где $l \in \mathbf{R}^4$, $\xi(p) \in \mathbf{R}^4$,

$$l = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{l} \end{pmatrix}, \ \xi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta} \end{pmatrix}. \tag{3.6.11}$$

Из формулы (3.6.10) следует, что если

$$\langle\vec{l},\vec{\beta}\rangle \neq -1, \tag{3.6.12}$$

то преобразование R_p из п. 3.3.1 переводит агвидную функцию $\varphi(x)$ в агвидную функцию $\tilde{\varphi}(x)$, причём справедливо правило преобразования (3.6.8) функции χ.

Так как для матрицы R справедлива формула (3.6.9), то

$$R = (E + \vec{l}\vec{\beta}^\top)BQ, \tag{3.6.13}$$

и для обратной матрицы получаем

$$R^{-1} = Q^\top B^{-1}(E + \vec{l}\vec{\beta}^\top)^{-1} = Q^\top B^{-1}\left(E - \frac{\vec{l}\vec{\beta}^\top}{1 + \langle\vec{\beta},\vec{l}\rangle}\right). \tag{3.6.14}$$

Вычислим теперь новое значение вектора скорости центра $\tilde{\vec{l}}$ по формуле (3.6.4)

$$\tilde{\vec{l}} = R^{-1}\left(\xi_0\vec{l} + \vec{\xi}\right) = Q^\top B^{-1}\left(\xi_0\vec{l} + \vec{\xi} - \vec{l}\left(\frac{\xi_0\langle\vec{\beta},\vec{l}\rangle + \langle\vec{\beta},\vec{\xi}\rangle}{1 + \langle\vec{\beta},\vec{l}\rangle}\right)\right) = \tag{3.6.15}$$

$$Q^\top\left(\vec{\beta} + B^{-1}\vec{l}\left(\frac{\xi_0 - \langle\vec{\beta},\vec{l}\rangle}{1 + \langle\vec{\beta},\vec{l}\rangle}\right)\right) = Q^\top\left(\vec{\beta} + \frac{1}{\langle\vec{l},\vec{\xi}\rangle}B^{-1}\vec{l}\right).$$

Подставим в последнее выражение формулу (3.2.18) для матрицы B^{-1}, получим

$$\tilde{\vec{l}} = Q^\top\frac{\left(\vec{l} + \vec{\beta}\left(\langle l,\xi\rangle + \frac{1}{\beta^2}(\sqrt{1-\beta^2} - 1)\langle\vec{\beta},\vec{l}\rangle\right)\right)}{\langle l,\xi\rangle} = \tag{3.6.16}$$

$$Q^\top\ \frac{\vec{l} + \vec{\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \langle\vec{\beta},\vec{l}\rangle\left(\frac{1}{\beta^2}(\sqrt{1-\beta^2} - 1) + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\right)}{\langle l,\xi\rangle} =$$

$$Q^\top\ \frac{\vec{l} + \vec{\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \langle\vec{\beta},\vec{l}\rangle\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\right)}{(1 + \langle\vec{\beta},\vec{l}\rangle)}\sqrt{1-\beta^2}.$$

Через 4-вектор ξ формула (3.6.16) записывается в виде

$$\widetilde{\vec{l}} = Q^\top \frac{\vec{l} + \vec{\xi}\left(1 + (\langle\xi, l\rangle - 1)\frac{\xi_0 - 1}{(\vec{\xi})^2}\right)}{\langle\xi, l\rangle}. \tag{3.6.17}$$

Через матрицу $B(\vec{\beta})$ выражение (3.6.16) записывается в виде

$$\widetilde{\vec{l}} = Q^\top \frac{\vec{\xi} + B\vec{l}}{\langle\xi, l\rangle}. \tag{3.6.18}$$

Соответственно, в правом представлении матрицы G формула (3.6.18) заменяется формулой

$$\widetilde{\vec{l}} = \frac{\vec{\xi} + BQ^\top\vec{l}}{\left(\xi_0 + \langle\vec{\xi}, Q^\top\vec{l}\rangle\right)}. \tag{3.6.19}$$

Формулы (3.6.16–3.6.19) есть не что иное как варианты "релятивистской формулы сложения скоростей распространенной на случай любых скоростей $\vec{l}$. Физический смысл этих формул заключается в том, что частица, двигавшаяся со скоростью $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ после применения преобразования T_p к ее функции состояния или преобразования $\tilde{T}_p$ к Её функции тока переходит в новое состояние со скоростью движения центра $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$. С помощью 4-векторов скорости соотношения (3.6.18, 3.6.19) могут быть записаны в эквивалентном виде

$$\widetilde{l} = \frac{1}{(G^{-1}l)_0} G^{-1} l. \tag{3.6.20}$$

Выразим вектор $\widetilde{\vec{c}}$ согласно формуле (3.6.5) для случая, когда $\psi(x) = p(x)$ преобразование Пуанкаре. Тогда $f = -Ga$, поэтому

$$\tilde{c_\nu} = R^{-1}_{\nu\alpha}(c_\alpha - l_\alpha(G_{00}a_0 + G_{\alpha\gamma}a_\gamma) + (G_{\alpha0}a_0 + G_{\alpha\gamma}a_\gamma)) = \tag{3.6.21}$$

$$R^{-1}_{\nu\alpha}(c_\alpha + (G_{\alpha\gamma} - l_\alpha G_{0\gamma})a_\gamma - (l_\alpha G_{00} - G_{\alpha0})a_0) = R^{-1}_{\nu\alpha}(c_\alpha + R_{\alpha\gamma}a_\gamma - (l_\alpha\xi_0 + \xi_\alpha)a_0).$$

Согласно предыдущему из формулы (3.6.21) получим в векторном виде

$$\widetilde{\vec{c}} = R^{-1}\vec{c} + \vec{a} - a_0 R^{-1}(\vec{l}\xi_0 + \vec{\xi}) = R^{-1}\vec{c} + \vec{a} - a_0\widetilde{\vec{l}}. \tag{3.6.22}$$

3.6.2 Вектор квазитока и спиновая функция.

Для агвидных функций $\varphi(x)$ от четырёх переменных договоримся обозначать переход к представлению (3.6.2) через функцию трёх переменных добавлением буквы f, т.е.

$$\varphi(x) = \varphi f(\vec{x} - \vec{b}(x_0)),$$

причём предполагается, что функция φf имеет центр в нуле.

Определение 3.6.1 *Частица называется агвидной, если у неё существует состояние с агвидной функцией состояния.*

Согласно предыдущему пункту, если частица агвидна, то в любом состоянии её функция состояния агвидна. Применяя к агвидной функции состояния базовый оператор системы (2.2.8), мы убеждаемся, что функция тока агвидной частицы также агвидна в любом состоянии.

Замечательным свойством агвидной частицы является возможность определения спиновой функции.

Пусть $j(x)$ функция тока агвидной частицы в некотором состоянии, тогда

$$j(x) = jf(\vec{x} - \vec{b}(x_0)). \qquad (3.6.23)$$

Условие на функцию тока

$$\frac{\partial j_r}{\partial x_r} = 0$$

в силу представления (3.6.23) принимает вид

$$-\langle \vec{l}, \, grad\, jf_0(\vec{x} - \vec{b}(x_0))\rangle + div \, \overrightarrow{jf}\, (\vec{x} - \vec{b}(x_0)) = 0. \qquad (3.6.24)$$

Введём теперь матрицу

$$D \equiv \begin{pmatrix} 1 & -\vec{l}^{\top} \\ -\vec{l} & E_3 \end{pmatrix} \qquad (3.6.25)$$

и определим для данного состояния вектор квазитока

$$jt(x) \equiv Dj(x). \qquad (3.6.26)$$

Для пространственной части вектора квазитока дивергенция

$$div \, \overrightarrow{jt}\, (x) = div\,(-\vec{l} jf_0(\vec{x} - \vec{b}(x_0)) + \overrightarrow{jf}\, (\vec{x} - \vec{b}(x_0))) =$$

$$-\langle \vec{l}, \, grad\, jf_0(\vec{x} - \vec{b}(x_0))\rangle + div \, \overrightarrow{jf}\, (\vec{x} - \vec{b}(x_0))$$

и обращается в нуль в силу соотношения (3.6.24). Итак, поле $\overrightarrow{jtf}\,(\vec{x})$ соленоидально и существует *спиновая функция* $\overrightarrow{sf}\,(\vec{x})$, что

$$\overrightarrow{jtf}\, (\vec{x}) = rot \, \overrightarrow{sf}\, (\vec{x}). \qquad (3.6.27)$$

Определитель матрицы D равен

$$\det D = 1 - \left(\vec{l}\right)^2, \qquad (3.6.28)$$

и в случае $|\vec{l}| \neq 1$ существует обратная матрица

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\left(\vec{l}\right)^2} & \frac{\vec{l}^{\top}}{1-\left(\vec{l}\right)^2} \\ \frac{\vec{l}}{1-\left(\vec{l}\right)^2} & E_3 + \frac{\vec{l}\vec{l}^{\top}}{1-\left(\vec{l}\right)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & E_3 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} + \frac{1}{1-\left(\vec{l}\right)^2} l\, l^{\top}. \qquad (3.6.29)$$

Рассмотрим теперь случай $|\vec{l}| \neq 1$, тогда преобразование $\widetilde{T}_p$ функции тока

$$\widetilde{T}_p(j)(x) = G^{-1} j(p(x))$$

удалённых следующее правило преобразования функции квазитока $jt(x)$при изменении состояния

$$\widetilde{jt}\,(x) = \widetilde{D} G^{-1} jt(p(x)) = \widetilde{D} G^{-1} D^{-1} R_p(jt)(x), \qquad (3.6.30)$$

где $\widetilde{D} \in M(4)$ (3.6.4) матрица вида (3.6.25) с заменой вектора $\vec{l}$ на вектор

$$\widetilde{\vec{l}} = \frac{\overrightarrow{G^{-1}l}}{(G^{-1}l)_0}. \tag{3.6.31}$$

Вычисляем произведение матриц

$$G^{-1}D^{-1} = G^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & E_3 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} + \frac{1}{1-\left(\vec{l}\right)^2}\left(ll^\top\right)\right) = \tag{3.6.32}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{\xi}^\top \\ 0 & \\ 0 & Q^\top B \\ 0 & \end{pmatrix} + \frac{1}{1-\left(\vec{l}\right)^2} G^{-1}l\,l^\top = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\xi}^\top \\ 0 & \\ 0 & Q^\top B \\ 0 & \end{pmatrix} + \frac{1}{1-\left(\vec{l}\right)^2}\left(G^{-1}l\right)_0 \tilde{l}\,l^\top.$$

и произведение матриц

$$\widetilde{D}G^{-1}D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{\vec{l}}^\top \\ -\widetilde{\vec{l}} & E_3 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 0 & \vec{\xi}^\top \\ 0 & \\ 0 & Q^\top B \\ 0 & \end{pmatrix} + \frac{1}{1-\left(\vec{l}\right)^2}\langle l,\xi\rangle \tilde{l}\,l^\top\right) = \tag{3.6.33}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{\xi}^\top - \widetilde{\vec{l}}^\top Q^\top B \\ 0 & \\ 0 & -\widetilde{\vec{l}}\vec{\xi}^\top + Q^\top B \\ 0 & \end{pmatrix} + \frac{\langle l,\xi\rangle}{1-\left(\vec{l}\right)^2}\begin{pmatrix} 1-\left(\widetilde{\vec{l}}\right)^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} l^\top.$$

Далее заметим, что если $G \in \Omega(\Theta)$, то

$$\langle l, \Theta l\rangle = \langle G^{-1}l, \Theta G^{-1}l\rangle = \langle l,\xi\rangle^2 \langle \tilde{l}, \Theta\tilde{l}\rangle, \tag{3.6.34}$$

поэтому из формулы (3.6.33) следует

$$\widetilde{D}G^{-1}D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\langle \xi,l\rangle} & \vec{\xi}^\top - \widetilde{\vec{l}}^\top Q^\top B + \frac{1}{\langle \xi,l\rangle}\vec{l}^\top \\ 0 & \\ 0 & -\widetilde{\vec{l}}\vec{\xi}^\top + Q^\top B \\ 0 & \end{pmatrix}. \tag{3.6.35}$$

Согласно формуле (3.6.15)

$$\widetilde{\vec{l}} = Q^\top B^{-1}\left(\vec{\xi} + \frac{\vec{l}}{\langle \xi, l\rangle}\right). \tag{3.6.36}$$

Подставим (3.6.36) в (3.6.35), получим

$$\widetilde{D}G^{-1}D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\langle \xi,l\rangle} & 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 & \\ 0 & Q^\top B - \widetilde{\vec{l}}\vec{\xi}^\top \\ 0 & \end{pmatrix}. \tag{3.6.37}$$

Обозначим входящую в представление (3.6.37) матрицу 3×3 через

$$F \equiv Q^\top B - \widetilde{\vec{l}}\vec{\xi}^\top. \tag{3.6.38}$$

Тогда

$$\widetilde{D}G^{-1}D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\langle \xi, l \rangle} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & F & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \tag{3.6.39}$$

Наличие трёх нулей в нулевой строке и нулевом столбце матрицы $\widetilde{D}G^{-1}D^{-1}$ означает, что функция квазитока $jt(x)$ обладает тем замечательным свойством, что преобразование её временной и пространственной компонент происходит независимо, а именно

$$\widetilde{jt}_0(x) = \frac{1}{\langle l, \xi \rangle} jt_0(p(x)), \tag{3.6.40}$$

$$\widetilde{\vec{jt}}(x) = F\vec{jt}(p(x)). \tag{3.6.41}$$

Соответственно, для функций $jtf(\vec{x})$ имеем

$$\widetilde{jtf}_0(\vec{x}) = \frac{1}{\langle l, \xi \rangle} jtf_0(R(x)), \tag{3.6.42}$$

$$\widetilde{\overrightarrow{jtf}}(\vec{x}) = F\overrightarrow{jtf}(R(\vec{x})). \tag{3.6.43}$$

Таким образом, в случае несветовых агвидных частиц, если в каком-то состоянии плотность квазитока равна нулю, то она равна нулю в любом состоянии. Аналогично, если в каком-то состоянии пространственная составляющая квазитока $\vec{jt}(x)$ обращается в нуль, то она равна нулю в любом состоянии.

Формулы (3.6.38–3.6.43) примут более естественный вид, если заметить, что матрица F есть обратная к матрице R,

$$F = R^{-1}. \tag{3.6.44}$$

В самом деле,

$$FR = Q^\top B \left(E - \frac{\vec{l} + \frac{1}{\xi_0}\vec{\xi}}{\langle \xi, l \rangle}\vec{\xi}^\top \right) \left(E + \frac{1}{\xi_0}\vec{l}\vec{\xi}^\top \right) BQ =$$

$$Q^\top B \left(E + \left(\frac{1}{\xi_0}\vec{l} - \frac{\vec{l} + \frac{1}{\xi_0}\vec{\xi}}{\langle \xi, l \rangle} - \frac{\vec{l} + \frac{1}{\xi_0}\vec{\xi}}{\xi_0 \langle \xi, l \rangle}\langle \vec{\xi}, \vec{l} \rangle \right) \vec{\xi}^\top \right) BQ =$$

$$Q^\top B \left(E - \frac{1}{\xi_0^2}\vec{\xi}\vec{\xi}^\top \right) BQ = Q^\top B (B^{-1})^2 BQ = E.$$

Итак, через матрицу $R \in M(3)$ вида (3.6.9) матрица $\widetilde{D}G^{-1}D^{-1} \in M(4)$ запишется в виде

$$\widetilde{D}G^{-1}D^{-1} = \begin{pmatrix} \det(R^{-1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{3.6.45}$$

а формулы преобразования (3.6.42, 3.6.43) — в виде

$$\widetilde{jtf}_0(\vec{x}) = \det(R^{-1})\, jtf_0(R\vec{x}), \tag{3.6.46}$$

$$\widetilde{\overrightarrow{jtf}}\,(\vec{x}) = R^{-1}\overrightarrow{jtf}\,(R\vec{x}). \tag{3.6.47}$$

Формулы преобразования квазитока (3.6.46, 3.6.47) не определены для случая $\det(R) = \langle l, \xi \rangle = 0$. Для досветовых частиц $|\vec{l}| < 1$ и световых частиц $|\vec{l}| = 1$ они всегда определены, ибо тогда $\langle l, \xi \rangle = \xi_0(1 + \langle \vec{l}, \vec{\beta} \rangle)$ и $|\langle \vec{l}, \vec{\beta} \rangle| \le |\vec{l}||\vec{\beta}| \le |\vec{\beta}| < 1$.

3.6.3 Досветовые, световые и сверхсветовые частицы.

Формула преобразования 4-вектора скорости (3.6.20) и формула (3.6.34), которую мы перепишем в виде

$$1 - (\vec{l}) = \langle l, \xi \rangle^2 (1 - (\widetilde{\vec{l}})^2). \tag{3.6.48}$$

приводят к следующему выводу: если в некотором состоянии для скорости частицы выполнялось условие $|\vec{l}| < 1$ или $|\vec{l}| = 1$ или $|\vec{l}| > 1$, то такое же условие будет выполняться для вектора скорости частицы в любом состоянии, т.е. соответственно $|\widetilde{\vec{l}}| < 1$ или $|\widetilde{\vec{l}}| = 1$ или $|\widetilde{\vec{l}}| > 1$. Таким образом, возникает деление частиц на досветовые — скорость меньше скорости света, световые — скорость равна скорости света и сверхсветовые — скорость больше скорости света.

Из формулы (3.6.18) следует, что досветовые частицы имеют состояние покоя. В самом деле, приравнивая преобразованную скорость нулю, получаем

$$\widetilde{\vec{l}} = Q^\top \frac{\vec{\xi} + B\vec{l}}{\langle \xi, l \rangle} = 0, \tag{3.6.49}$$

что влечет

$$\vec{\xi} = -B\vec{l}$$

или

$$\vec{l} = -B^{-1}\vec{\xi} = -\vec{\beta}. \tag{3.6.50}$$

Последняя формула при $|\vec{l}| < 1$ позволяет определить значение параметров преобразования $G_(p)$, "останавливающего"частицу. Так как в состоянии покоя скорость $\vec{l} = 0$, то в состоянии покоя агвидной частицы её функция тока $j(x)$ не зависит от времени, а зависит лишь от пространственных переменных. Итак, всякая агвидная досветовая частица имеет состояние покоя, которое стационарно. По определению (см. п. 3.1.4) для любой, не обязательно агвидной частицы, стационарное состояние есть состояние покоя и агвидное состояние. Итак, класс агвидных досветовых частиц совпадает с классом стационарных частиц.

Для стационарных частиц в качестве стационарного состояния удобно выбирать состояние покоя с $\vec{l} = 0$, в этом случае формулы преобразования координат и характеристик частицы при изменении состояния имеют наиболее простой вид.

3.6.4 Правило преобразования спиновой функции.

Формула (3.6.48) преобразования пространственной составляющей квазитока и формула (3.6.27) выражения пространственной составляющей квазитока через спиновую функцию приводят к следующему правилу преобразования спиновой функции при изменении состояния

$$\widetilde{\vec{sf}}(\vec{x}) = \frac{1}{\det(R)} R^\top \widetilde{\vec{sf}}(R\vec{x}). \tag{3.6.51}$$

В самом деле, по определению спиновой функции (3.6.27)

$$\widetilde{\overrightarrow{jtf}}\,(\vec{x}) = \,rot\,\widetilde{\vec{sf}}(\vec{x})$$

или в координатах

$$\widetilde{\overrightarrow{jtf}}_{\alpha}(\vec{x}) = \frac{1}{\det(R)} e_{\alpha\nu\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\nu} R^{\top}_{\gamma\tau} sf_\tau(R\vec{x}) = \frac{1}{\det(R)} e_{\alpha\nu\tau} R_{\tau\gamma}\, \frac{\partial sf_\tau(\vec{x}')}{\partial x'_\chi}\bigg|_{\vec{x}'=R\vec{x}} R_{\chi\nu} \qquad (3.6.52)$$

А согласно правилу преобразования пространственной составляющей квазитока

$$\widetilde{\overrightarrow{jtf}}\,(\vec{x}) = R^{-1}\,\overrightarrow{jtf}\,\;(R\vec{x}) = \,R^{-1}\,rot\;\,\vec{sf}\;(\vec{x}')\Big|_{\vec{x}'=R\vec{x}}$$

или в координатах

$$\widetilde{jtf}_{\alpha}(\vec{x}) = \,R^{-1}_{\alpha\varphi} e_{\varphi\chi\tau} \frac{\partial sf_\tau}{\partial x'_\chi}(\vec{x}')\bigg|_{\vec{x}'=R\vec{x}}. \qquad (3.6.53)$$

Осталось заметить, что для всякой вырожденной матрицы $R \in M(3)$ обратная матрица R^{-1} удовлетворяет тождеству

$$R^{-1}_{\alpha\chi} l_{\varphi\chi\tau} = \frac{1}{\det(R)} e_{\alpha\nu\gamma} R_{\tau\gamma} R_{\chi\nu} \qquad (3.6.54)$$

3.6.5 Вектор псевдотока.

В п. 3.5.2 мы ввели вектор квазитока, обладающий тем замечательным свойством, что его временная и пространственная компоненты преобразуются независимо при изменении состояния. Вектор квазитока определен для любой агвидной частицы, но в случае световых частиц вектор тока уже не выражается через вектор квазитока в силу вырожденности матрицы D при $|\vec{l}| = 1$. Поэтому по вектору тока $j(x)$ мы построим также вектор псевдотока $js(x)$, состоящий из плотности заряда $js_0(x) = j_0(x)$ и пространственных компонент квазитока $\vec{js}\;(x) = \vec{jt}\;(x)$. Временная и пространственная компоненты функции $js(x)$ уже не преобразуются независимо при изменении состояния, однако, пространственные компоненты вектора $js(x)$ все-таки преобразуются без участия временной компоненты. Кроме того, вектор тока выражается через вектор псевдотока и, наоборот, для любых частиц. Итак, переход от функции $j(x)$ к функции $js(x)$ производится по правилу

$$js(x) = Aj(x), \qquad (3.6.55)$$

где матрица $A \in M(4)$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0\;\;0\;\;0 \\ -\vec{l} & E_3 \end{pmatrix} \qquad (3.6.56)$$

и обратная матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0\;\;0\;\;0 \\ \vec{l} & E_3 \end{pmatrix}.$$

Аналогично п.2 найдем закон преобразования функции псевдотока, справедливый для любых значений скорости частицы, опираясь на закон преобразования функции тока. По определению псевдотока

$$\widetilde{js} = \widetilde{A}\widetilde{j} = \widetilde{A}G^{-1}R_p j = \widetilde{A}G^{-1}R_p A^{-1} js = \widetilde{A}G^{-1}A^{-1}R_p js \qquad (3.6.57)$$

Вычисляем произведение матриц

$$\widetilde{A}G^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\ 0\ 0\\ -\widetilde{\vec{l}} & E_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_0 & \vec{\xi}_\top\\ \vec{\xi} & Q^\top B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\ 0\ 0\\ \vec{l} & E_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\langle\xi,l\rangle & \vec{\xi}^\top\\ 0 & \\ 0 & R^{-1}\\ 0 & \end{pmatrix}, \tag{3.6.58}$$

где матрица $R^{-1}=F$ имеет вид (3.6.39). Получаем следующее правило преобразования функции псевдотока при изменении состояния

$$\widetilde{jsf}(\vec{x})=\begin{pmatrix}\langle\xi,l\rangle & \vec{\xi}^\top\\ 0 & \\ 0 & R^{-1}\\ 0 & \end{pmatrix} jsf(R\vec{x}), \tag{3.6.59}$$

т.е. для пространственных компонент псевдотока правило преобразования имеет вид тот же, что и для пространственных компонент квазитока

$$\widetilde{\overrightarrow{jsf}}\,(\vec{x})=R^{-1}\,\overrightarrow{jsf}\,(R\vec{x}), \tag{3.6.60}$$

и плотность заряда преобразуется по правилу

$$\widetilde{jsf}_0(x)=\langle\xi,l\rangle\, jsf_0(R\vec{x})+\langle\vec{\xi},\overrightarrow{jsf}\,(R\vec{x})\rangle. \tag{3.6.61}$$

3.6.6 Разложение агвидной частицы на скалярную и киперную составляющие.

Подведем некоторые итоги проведенных рассмотрений. Мы убедились, что агвидная частица в каждом состоянии характеризуется функцией тока $j(x)$ вида

$$j(x)=jf(\vec{x}-\vec{b}(x_0)), \tag{3.6.62}$$

где $jf\in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^3)$ есть 4-функция от трёх переменных, а не от четырёх , как исходная функция $jf\in C_4^{(1)}(I\times\mathbf{R}^3)$. Здесь величина $\vec{b}(x_0)$ есть вектор координат центра частицы и $\vec{b}(x_0)=x_0\vec{l}+\vec{c}$, где $\vec{l}\in\mathbf{R}^3$ — скорость центра частицы, $\vec{c}\in\mathbf{R}^3$ вектор сдвига. При изменении состояния частицы мы переходим от функции $j(x)$ к 4-функции $\widetilde{j}(x)\equiv\widetilde{T}_p(j)(x)$. При этом функции $jf(\vec{x})$ преобразуются по правилу

$$\widetilde{jf}(\vec{x})=G^{-1}jf(R\vec{x}), \tag{3.6.63}$$

где $R\in M(3)$ матрица (3.6.9). Соответственно $\widetilde{\vec{b}}(x_0)=x_0\widetilde{\vec{l}}+\widetilde{\vec{c}}$, где 4-вектор $l\equiv\binom{1}{\vec{l}}$ преобразуется по формуле (3.6.20), а вектор $\vec{c}$ по формуле (3.6.22).

Перейдем теперь к разложению агвидной частицы на скалярную и киперную составляющие. Согласно лемме 5.3 функция удовлетворяет условию

$$\widetilde{K}j\equiv\frac{\partial j_k}{\partial x_k}=0. \tag{3.6.64}$$

Построим функцию $j'(x)=j_0(x)l$, где l — вектор скорости частицы. Будет ли функция j' удовлетворять условию $\widetilde{K}j'=0$ или в координатном виде

$$\frac{\partial j_0}{\partial x_0}(x_0,\vec{x})+\langle\vec{l},\,grad\,j_0(x_0,\vec{x})\rangle=0? \tag{3.6.65}$$

Если частица агвидна, то — да ! Ибо в этом случае $\frac{\partial j_0}{\partial x_0}(x_0, \vec{x}) = \langle -\vec{l}, grad\, j_0(x_0, \vec{x})\rangle$. В силу линейности оператора $\widetilde{K}$ тогда и функция $j''(x) \equiv j(x) - j'(x)$ также удовлетворяет условию $\widetilde{K}j'' = 0$. Итак, функции $j'(x)$ и $j''(x)$ являются векторами тока некоторых частиц. Функция тока $j'(x)$ соответствует скалярному агвидному состоянию, а функция тока $j''(x)$ абсолютно нейтральному агвидному состоянию.

Если мы зафиксируем некоторое состояние агвидной частицы с функцией тока j и разложим в этом состоянии функции тока $j = j' + j''$ описанным образом, то получим в данном состоянии разложение частицы на скалярную и киперную частицы. При изменении состояния в силу линейности операторов $\widetilde{T}_p$ это разложение сохранится $\widetilde{T}_p(j) = \widetilde{T}_p(j') + \widetilde{T}_p(j'') \equiv \tilde{j}' + \tilde{j}''$. Итак, зафиксировав состояние, мы единственным образом определили разложение агвидной частицы на сумму скалярной и киперной частиц.

Если для агвидной частицы рассмотреть в данном состоянии разницу

$$j(x) - j_0(x)l \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{jt}\,(x) \end{pmatrix}$$

то 3-вектор $\overrightarrow{jtf}\ (\vec{x})$ является соленоидальным и существует вектор-функция $\vec{sf}\ (\vec{x})$, что $\overrightarrow{jtf}\ (\vec{x}) = rot\ \vec{sf}\ (\vec{x})$. Итак, в каждом состоянии агвидной частицы существует спиновая функция $\vec{sf}\ (\vec{x})$, что

$$jf(\vec{x}) = jf_0(\vec{x})l + \begin{pmatrix} 0 \\ rot\ \vec{sf}\ (\vec{x}) \end{pmatrix}. \tag{3.6.66}$$

Выбирая спиновую функцию $\vec{s}(x)$ в различных состояниях согласованным образом, мы имеем следующие правила преобразования 4-вектора $\begin{pmatrix} j_0(x) \\ \vec{s}(x) \end{pmatrix}$ при изменении состояния

$$\widetilde{\vec{sf}}(\vec{x}) = \frac{1}{\det(R)} R^\top\ \vec{sf}\ (R\vec{x}), \tag{3.6.67}$$

$$\widetilde{jf}_0(\vec{x}) = \left(G^{-1}(p) \left(jf_0 l + \begin{pmatrix} 0 \\ rot\ \vec{sf} \end{pmatrix} \right) \Big|_{R\vec{x}} \right)_0 = \langle \xi, l\rangle jf_0(R\vec{x}) + \langle \vec{\xi}, rot\ \vec{sf}\rangle \Big|_{R\vec{x}}. \tag{3.6.68}$$

4-функцию $\begin{pmatrix} j_0(x) \\ \vec{s}(x) \end{pmatrix} f$, состоящую из плотности заряда $j_0(x)$ и плотности спина $\vec{s}(x)$ мы назовём *функцией заспина* или плотностью заспина.

3.6.7 Свойства матрицы R.

Пусть $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ вектор скорости и $p \in P_e$ элемент группы Пуанкаре. По элементу p и вектору $\vec{l}$ мы построили матрицу $R(p, \vec{l}) \in M(3)$ вида (3.6.9), причём матрица $R(p, \vec{l})$ зависит от элемента $p \in P_e$ только через матрицу $G(p)$, т.е. параметры сдвига не влияют на вид матрицы $G(p, \vec{l})$. Матрица $R(p, \vec{l})$ выражается через матрицы $B(p)$, $Q(p)$ и вектор $\vec{\xi}(p)$ в левом представлении матрицы $G(p)$ согласно формуле (3.6.9). Оставаясь в рамках левого представления матрицы $G(p)$, приведём сводку формул о свойствах матрицы R, полезных в дальнейшем:

$$R = BQ + \vec{l}\,\vec{\xi}^\top Q, \tag{3.6.69}$$

$$R^{-1} = Q^\top B - \tilde{\vec l}\vec\xi^\top, \tag{3.6.70}$$

$$R\tilde{\vec l} = \xi_0\vec l + \vec\xi, \tag{3.6.71}$$

$$R^{-1}\vec l = \xi_0\tilde{\vec l} - Q^\top\vec\xi, \tag{3.6.72}$$

$$R^{-1}(E - \vec l\vec l^\top)R^{-1\top} = E - \tilde{\vec l}\tilde{\vec l}^\top. \tag{3.6.73}$$

Здесь формулы (3.6.69, 3.6.70, 3.6.71) уже встречались под номерами (3.6.9), (3.6.45) и (3.6.15) соответственно. Чтобы получить формулу (3.6.72), умножаем равенство (3.6.71) на матрицу R^{-1} вида (3.6.70), получаем

$$\tilde{\vec l} = \xi_0 R^{-1}\vec\xi + R^{-1}\vec\xi = \xi_0 R^{-1}\vec l + Q^\top\xi_0\vec\xi - \tilde{\vec l}(\vec\xi)^2.$$

Откуда следует (3.6.72).

Формулу (3.6.73) проверяем подстановкой формул (3.6.70, 3.6.72) и формулы (3.2.19) для $B^2 = E + \vec\xi\vec\xi^\top$:

$$R^{-1}(E - \vec l\vec l^\top)R^{-1\top} = R^{-1}R^{-1\top} - R^{-1}\vec l(R^{-1}\vec l)^\top =$$

$$(Q^\top B - \tilde{\vec l}\vec\xi^\top)(BQ - \vec\xi\tilde{\vec l}^\top) - (\xi_0\tilde{\vec l} - Q^\top\vec\xi)(\xi_0\tilde{\vec l} - Q^\top\vec\xi)^\top =$$

$$Q^\top B^2 Q - \xi_0 Q^\top\vec\xi\tilde{\vec l}^\top - \xi_0\tilde{\vec l}(Q^\top\vec\xi)^\top + \tilde{\vec l}\tilde{\vec l}^\top(\vec\xi)^2 + \xi_0\tilde{\vec l}(Q^\top\vec\xi)^\top + \xi_0 Q^\top\vec\xi\tilde{\vec l}^\top - \xi_0^2\tilde{\vec l}\tilde{\vec l}^\top - Q^\top\vec\xi(Q^\top\vec\xi)^\top =$$

$$E + Q^\top\vec\xi(Q^\top\vec\xi)^\top - (Q^\top\vec\xi)(Q^\top\vec\xi)^\top - \tilde{\vec l}\tilde{\vec l}^\top = E - \tilde{\vec l}\tilde{\vec l}^\top.$$

Запишем также матрицу R в правом представлении матрицы $G(p)$, используя формулы (3.2.34 – 3.2.37).

$$R = QB + \vec l\vec\xi^\top \tag{3.6.74}$$

Входящую в формулу (3.6.73) матрицу обозначим

$$Ks(\vec l) = E - \vec l\vec l^\top. \tag{3.6.75}$$

Её определитель

$$\det(Ks(\vec l)) = 1 - (\vec l)^2. \tag{3.6.76}$$

Напомним также формулу (3.6.10)

$$\det(R) = \langle\xi, l\rangle, \tag{3.6.77}$$

в левом представлении.

3.6.8 Формула преобразования скорости при изменении состояния. Соберем для удобства основные разновидности формулы преобразования скорости частицы при изменении состояния в левом представлении матрицы $G(p)$. Основная формула (3.6.20) есть

$$\tilde l = \frac{1}{(G^{-1}(p)l)_0}G^{-1}(p)l, \tag{3.6.78}$$

где

$$(G^{-1}(p)l)_0 = \langle\xi, l\rangle \tag{3.6.79}$$

Подставляя в (3.6.77) вид матрицы $G^{-1}(p)$ (3.2.59), получаем

$$\tilde{\vec{l}} = \frac{1}{\langle \xi, l \rangle} Q^{\top}(\vec{\xi} + B\vec{l}). \tag{3.6.80}$$

Формула (3.6.36) имеет вид

$$\tilde{\vec{l}} = Q^{\top} B^{-1} \left(\vec{\xi} + \frac{1}{\langle \xi, l \rangle} \vec{l} \right). \tag{3.6.81}$$

Через матрицу R скорость $\tilde{\vec{l}}$ выражается формулой (3.6.71)

$$\tilde{\vec{l}} = R^{-1}(\xi_0 \vec{l} + \vec{\xi}). \tag{3.6.82}$$

Из формулы (3.6.79) извлечем следующий факт.

Утверждение 3.6.1 *Если* $|\vec{l}| = 1$*, то*

$$\frac{1}{\det(R)} R^{\top} \vec{l} = \tilde{\vec{l}}. \tag{3.6.83}$$

Доказательство. Согласно формуле (3.6.77) $\det(R) = \langle \xi, l \rangle$. По формуле (3.6.69)

$$\frac{1}{\det(R)} R^{\top} \vec{l} = \frac{1}{\langle \xi, l \rangle} Q^{\top} (B + \vec{\xi}\, \vec{l}^{\top}) \vec{l} = \frac{1}{\langle \xi, l \rangle} Q^{\top} (\vec{\xi} \langle \vec{l}, \vec{l} \rangle + B\vec{l})$$

Так как $\langle \vec{l}, \vec{l} \rangle = |\vec{l}|^2 = 1$, то в силу (3.6.80) получили формулу (3.6.83). ♢

3.6.9 Некоторые свойства алгебры трёхмерных векторов.

В этом пункте, являющимся чисто математическим приложением к данному параграфу, мы сформулируем несколько свойств векторов из $\mathbf{R}^3$ и матриц из $M(3)$, используемых далее.

В этом пункте используется тензорное соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Индексы обозначаются греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ и пробегают значения 1, 2, 3. Через $\delta_{\alpha\beta}$ обозначается символ Кронекера, через $e_{\alpha\beta\gamma}$ — символ Леви-Чивиты, уже введённые в п. 1.3.3. В векторном пространстве $\mathbf{R}^3$ вводится стандартное скалярное произведение двух векторов $\vec{a} \in \mathbf{R}^3$, $\vec{b} \in \mathbf{R}^3$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \equiv a_\alpha b_\alpha. \tag{3.6.84}$$

И вводится векторное произведение двух векторов $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$

$$[\vec{a}, \vec{b}]_\alpha \equiv e_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma. \tag{3.6.85}$$

Смешанное произведение трёх векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ определяется формулой

$$\langle \vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}] \rangle = a_\alpha e_{\alpha\beta\gamma} b_\beta c_\gamma = e_{\alpha\beta\gamma} a_\alpha b_\beta c_\gamma = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}). \tag{3.6.86}$$

и равно определителю матрицы $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \in M(3)$, составленной из столбцов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Пусть $Q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ линейное отображение, тогда для смешанного произведения произвольных трёх векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ согласно предыдущему

$$\langle Q\vec{a}, [Q\vec{b}, Q\vec{c}] \rangle = (\det(Q)) \langle \vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}] \rangle, \tag{3.6.87}$$

ибо

$$\langle Q\vec{a}, [Q\vec{b}, Q\vec{c}]\rangle = \det(Q\vec{a}, Q\vec{b}, Q\vec{c}) = \det(Q)\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Для векторного произведения двух векторов $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ в случае невырожденной матрицы Q верна формула

$$[Q\vec{a}, Q\vec{b}] = (\det(Q))Q^{-1T}[\vec{a}, \vec{b}], \tag{3.6.88}$$

которую мы докажем далее. Из формулы (3.6.88) вытекает в силу плотности множества невырожденных матриц в пространстве $M(3)$ всех матриц, формула

$$\forall Q \in M(3)\ \forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3\ \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3\ \Big|\ Q^\top[Q\vec{a}, Q\vec{b}] = (\det(Q))[\vec{a}, \vec{b}].$$

Для доказательства справедливости формулы (3.6.88) сначала установим несколько свойств матриц. Пусть $Q \in M(3)$, тогда

$$\det(Q) = e_{\alpha\beta\gamma} q_{1\alpha} q_{2\beta} q_{3\gamma}, \tag{3.6.89}$$

где $q_{\nu\tau}$ — элементы матрицы Q. Более того,

$$e_{\alpha\beta\gamma} q_{\nu\alpha} q_{\tau\beta} q_{\varphi\gamma} = e_{\nu\tau\varphi}\det(Q). \tag{3.6.90}$$

Далее в этом пункте полагаем, что матрица $Q \in GL(3)$ невырождена и существует обратная матрица $Q^{-1} \in GL(3)$. Тогда справедливо представление для обратной матрицы

$$Q^{-1}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\det(Q)} e_{\alpha\varphi\chi} q_{\nu\varphi} q_{\gamma\chi} e_{\beta\nu\gamma}. \tag{3.6.91}$$

В самом деле, используя равенство (3.6.90), получаем

$$q_{\theta\alpha}\left(\frac{1}{2\det(Q)} e_{\alpha\varphi\chi} q_{\nu\varphi} q_{\gamma\chi} e_{\beta\nu\gamma}\right) = \frac{1}{2\det(Q)} e_{\beta\nu\gamma}(e_{\alpha\varphi\chi} q_{\theta\alpha} q_{\nu\varphi} q_{\gamma\chi}) =$$

$$\frac{1}{2\det(Q)} e_{\beta\nu\gamma} e_{\theta\nu\gamma}\det(Q) = \frac{1}{2} e_{\theta\nu\gamma} e_{\beta\nu\gamma} = \left\{\begin{array}{ll} 0, & \theta \neq \beta \\ 1, & \theta = \beta \end{array}\right\} = \delta_{\theta\beta}.$$

Теперь проверим справедливость формулы

$$Q^{-1}_{\alpha\xi} e_{\xi\theta\tau} = \frac{1}{\det(Q)} e_{\alpha\varphi\chi} q_{\theta\varphi} q_{\tau\chi}, \tag{3.6.92}$$

которую под номером (3.6.54) мы уже использовали в этом параграфе. В самом деле, используя (3.6.91), получаем

$$Q^{-1}_{\alpha\xi} e_{\xi\theta\tau} = \frac{1}{2\det(Q)} e_{\alpha\varphi\chi}(e_{\xi\nu\gamma} e_{\xi\theta\tau}) q_{\nu\varphi} q_{\gamma\chi}. \tag{3.6.93}$$

Согласно тождеству (1.3.25)

$$e_{\xi\nu\gamma} e_{\xi\theta\tau} = \delta_{\nu\theta}\delta_{\gamma\tau} - \delta_{\nu\tau}\delta_{\gamma\theta}$$

и выражение (3.6.93) преобразуется к виду

$$Q^{-1}_{\alpha\xi} e_{\xi\theta\tau} = \frac{1}{2\det(Q)} e_{\alpha\varphi\chi}(\delta_{\nu\theta}\delta_{\gamma\tau} - \delta_{\nu\tau}\delta_{\varphi\theta}) q_{\nu\varphi} q_{\gamma\chi} = \frac{1}{2\det(Q)} e_{\alpha\varphi\chi}(q_{\theta\varphi} q_{\tau\chi} - q_{\tau\varphi} q_{\theta\chi}) =$$

$$\frac{1}{\det(Q)}\frac{1}{2}(e_{\alpha\varphi\chi}q_{\theta\varphi}q_{\tau\chi}-e_{\alpha\varphi\chi}q_{\tau\varphi}q_{\theta\chi})=\frac{1}{\det(Q)}e_{\alpha\varphi\chi}q_{\theta\varphi}q_{\tau\chi}$$

Используя формулу (3.6.92), теперь покажем справедливость формулы (3.6.88). А именно

$$[Q\vec{a},Q\vec{b}]_\alpha=e_{\alpha\varphi\chi}(Q\vec{a})_\varphi(Q\vec{b})_\chi=e_{\alpha\varphi\chi}q_{\varphi\theta}a_\theta q_{\chi\tau}b_\tau=(e_{\alpha\varphi\chi}Q^\top_{\theta\varphi}Q^\top_{\tau\chi})a_\theta b_\tau=$$

$$(\det(Q^\top))Q^{\top-1}_{\alpha\xi}e_{\xi\theta\tau}a_\theta b_\tau=(\det(Q))Q^{-1\top}_{\alpha\xi}[\vec{a},\vec{b}]_\xi=(\det(Q))(Q^{-1\top}[\vec{a},\vec{b}])_\alpha.$$

3.6.10 Изменение компоненты связности группы Лоренца.

Если мы совершим преобразование $\widetilde{T}_p$ функции тока с элементом p из компоненты связности единицы P_e группы Пуанкаре P, то получим другое состояние частицы (которое в случае симметрии может совпадать с исходным). Если же мы применим преобразование $\widetilde{T}_p$ с $p\notin P_e$, то согласно п. 3.4.7 придем к новой, вообще говоря, другой частице. Чтобы рассмотреть этот случай, согласно формуле (2.4.29) и построениям п. 3.2.1 достаточно рассмотреть сначала преобразования Лоренца $p\in P_g$ с матрицами G_i вида (2.4.28).

Введём обозначение

$$G_{\sigma\varepsilon}\equiv\begin{pmatrix}\sigma & 0\;\;0\;\;0\\ 0 & \\ 0 & \varepsilon E\\ 0 & \end{pmatrix},\tag{3.6.94}$$

здесь $\sigma=\pm1$, $\varepsilon=\pm1$, E — единичная матрица 3×3. Тогда матрица $G_i=G_{+-}$, например, запишется в виде (3.6.94) при $\sigma=+1$, $\varepsilon=-1$. Согласно п. 1 при $A=G_{\sigma\varepsilon}$ получаем для матрицы R выражение

$$R=\varepsilon E,\tag{3.6.95}$$

а для нового вектора скорости агвидной частицы

$$\widetilde{\vec{l}}=\sigma\varepsilon\vec{l}.\tag{3.6.96}$$

Функция плотности квазитока согласно п. 3.6.2 в несветовом случае будет преобразовываться по правилу

$$\widetilde{jtf}\,(\vec{x})=\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{\vec{l}}^\top\\ -\widetilde{\vec{l}} & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma & 0\;\;0\;\;0\\ 0 & \\ 0 & \varepsilon E\\ 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{1-|\vec{l}|^2} & \frac{\vec{l}^\top}{1-|\vec{l}|^2}\\ \frac{\vec{l}}{1-|\vec{l}|^2} & E+\frac{\vec{l}\vec{l}^\top}{1-|\vec{l}|^2}\end{pmatrix}jtf(\varepsilon\vec{x}),$$

т.е. по правилу

$$\widetilde{jtf}(\vec{x})=G_{\sigma\varepsilon}jtf(\varepsilon\vec{x}).\tag{3.6.97}$$

или в компонентах

$$\begin{gathered}\widetilde{jtf}_0(\vec{x})=\sigma jtf_0(\varepsilon\vec{x}),\\ \widetilde{\overrightarrow{jtf}}\,(\vec{x})=\varepsilon\,\overrightarrow{jtf}\,(\varepsilon\vec{x}).\end{gathered}\tag{3.6.98}$$

Функция плотности псевдотока согласно п. 5 будет преобразовываться по правилу

$$\widetilde{jsf}\,(\vec{x})=\begin{pmatrix}1 & 0\;\;0\;\;0\\ -\widetilde{\vec{l}} & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma & 0\;\;0\;\;0\\ 0 & \\ 0 & \varepsilon E\\ 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\;\;0\;\;0\\ \vec{l} & E\end{pmatrix}jsf(\varepsilon\vec{x}),$$

т.е. по правилу

$$\widetilde{jsf}\,(\vec{x}) = G_{\sigma\varepsilon} jsf(\varepsilon\vec{x}), \tag{3.6.99}$$

или в компонентах

$$\begin{aligned} \widetilde{jsf}_{\,0}(\vec{x}) &= \sigma jsf_0(\varepsilon\vec{x}), \\ \overrightarrow{\widetilde{jsf}}(\vec{x}) &= \varepsilon\, \overrightarrow{jsf}\,(\varepsilon\vec{x}). \end{aligned} \tag{3.6.100}$$

Итак, вместе с каждой агвидной частицей, применяя преобразование Лоренца с матрицей $G_{\sigma\varepsilon}$, мы получаем ещё три частицы, что может порождать квартеты частиц с симметричными характеристиками.

§3.7 Характеристики агвидных частиц. Заряд.

В п. 3.3.1 мы получили простые явные формулы для трансформации Радона и скалярной трансформации Пуанкаре агвидной функций, что позволит нам вычислить в настоящем параграфе коэффициенты векторного и тензорного взаимодействия агвидных частиц.

3.7.1 Свойство трансформации Пуанкаре агвидной частицы.

Лемма 3.7.1 *Если $\varphi(x)$ — агвидная функция, то для любой её первой частной производной $\frac{\partial\varphi}{\partial x_r}(x)$ трансформации Радона и Пуанкаре обращаются в нуль.*

Доказательство. Согласно лемме 3.3.1 трансформация Радона $\overset{\frown}{\varphi}(\xi,t)$ для агвидной функции не зависит от переменной t, т.е. $\frac{\partial \overset{\frown}{\varphi}}{\partial t}(\xi,t) = 0$. Тогда по свойству трансформации Радона (см. [27], с.21) $\overset{\frown}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_r}\right)}(\xi,t) = \xi_r \frac{\partial \overset{\frown}{\varphi}}{\partial t}(\xi,t) = 0$. ♢

3.7.2 Заряд агвидной частицы не зависит от состояния.

Для определения коэффициентов векторного взаимодействия агвидной частицы воспользуемся формулой (3.4.5) и представлением (3.6.63)

$$c\tilde{j} = G^{-1}\overset{\frown}{j} = G^{-1}A^{-1}\overset{\frown}{js} \tag{3.7.1}$$

Так как $\vec{js}(x) = \vec{jt}\,(x) = \mathit{rot}\,\vec{S}(x)$, то по лемме 3.7.1

$$\overset{\frown}{\vec{js}} = 0. \tag{3.7.2}$$

Согласно формуле (3.3.30)

$$\overset{\frown}{j}_{\,0} = \frac{e}{|\langle\xi, l\rangle|}, \tag{3.7.3}$$

где константа e есть заряд частицы в исходном состоянии

$$e = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} jf_0(\vec{x})\, dx_1dx_2dx_3 = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} j_0(x_0,x_1,x_2,x_3)\, dx_1dx_2dx_3. \tag{3.7.4}$$

Подставляя (3.7.3, 3.7.4) в (3.7.1), получим для 4-вектора $c\tilde{j}$

$$c\tilde{j} = \frac{e}{\langle \xi, l \rangle} G^{-1} A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{e}{(G^{-1}l)_0} G^{-1} l = \tilde{l}.$$

Итак,

$$c\tilde{j} = e\tilde{l}, \tag{3.7.5}$$

где $\tilde{l}$ — 4-вектор скорости частицы в данном состоянии. Формула (3.7.5) доказывает, что *заряд агвидной частицы не зависит от состояния* $c\tilde{j}_0 = cj_0 = e$ и является характеристической константой частицы.

3.7.3 Зарядовый центр частицы. В случае заряженной агвидной частицы ($e \neq 0$) уточним понятие центра частицы, а именно центром будем считать зарядовый центр. В самом деле, фиксируем некоторое состояние агвидной частицы с функцией плотности заряда $j_0(x)$. Проведём сдвиг центра, т.е. перейдём от функции плотности заряда $jf_0(\vec{x})$ к функции плотности заряда $jf'_0(\vec{x}) = jf_0(\vec{x} + \vec{c})$, где $\vec{c} \in \mathbf{R}^3$ — постоянный вектор сдвига, выбранный из условия

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} jf'_0(\vec{x})\, \vec{x}\, dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

или эквивалентно

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} jf_0(\vec{x})\, (\vec{x} - \vec{c}\,)\, dx_1 dx_2 dx_3 = 0,$$

т.е.

$$\vec{c} = \frac{1}{e} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} jf_0(\vec{x})\, \vec{x}\, dx_1 dx_2 dx_3. \tag{3.7.6}$$

Введём вектор $\vec{d} \in \mathbf{R}^3$

$$\vec{d} \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} jf_0(\vec{x})\, \vec{x}\, dx_1 dx_2 dx_3 \tag{3.7.7}$$

— вектор *дипольного момента* частицы в данном состоянии. Заметим, что условие $\vec{d} = 0$ сохраняется при линейном невырожденном преобразовании аргумента функции. А именно, если $F \in M(3)$ невырожденная матрица, то

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi(F\vec{x})\vec{x}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi(\vec{x}) F^{-1} \vec{x} \frac{1}{|\det(F)|}\, dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$F^{-1} \frac{1}{|\det(F)|} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi(\vec{x})\vec{x}\, dx_1 dx_2 dx_3,$$

т.е. для функций $\varphi(\vec{x})$ и $\varphi_F(\vec{x}) \equiv \varphi(F(\vec{x}))$ условия

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi(\vec{x})\, \vec{x}\, dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

и

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi_{F}(\vec{x})\, \vec{x}\, dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

эквивалентны.

Мы пришли к выводу, что для заряженной частицы выбором в качестве зарядового центра можно добиться обращения в нуль дипольного момента. Для нейтральной же частицы, т.е. при $e = 0$ сдвиг центра не влияет на величину дипольного момента, который становится в этом случае характеристикой частицы.

3.7.4 Правило преобразования коэффициентов тензорного взаимодействия скалярной частицы.

Перейдём к изучению коэффициентов тензорного взаимодействия $kj_{r\alpha}$. Матрицу 4×3 коэффициентов тензорного взаимодействия $kj_{r\alpha}$ обозначим $kj(4\times 3)$ и запишем в виде

$$kj(4\times 3) = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} jf(\vec{x})\vec{x}^{\top}\, dx_1 dx_2 dx_3. \tag{3.7.8}$$

В этом пункте рассмотрим случай скалярной частицы, для которой функция тока $j(x)$ имеет вид (3.6.64). В этом случае формула (3.7.8) даёт

$$kj(4\times 3) = l \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} jf_0(\vec{x})\vec{x}^{\top}\, dx_1 dx_2 dx_3 = l\vec{d}^{\top}. \tag{3.7.9}$$

Чтобы получить правило преобразования коэффициентов тензорного взаимодействия скалярной частицы, согласно формуле (3.7.9), достаточно найти значение 4-вектора скорости $\tilde{l} \in \mathbf{R}^4$ в новом состоянии. Поскольку формула преобразования 4-вектора скорости уже получена — формула (3.6.20), выведем здесь формулу преобразования дипольного момента, исходя из формулы (3.6.62) преобразования заряда,

$$\tilde{\vec{d}} = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} jf_0(\vec{x})\vec{x}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \langle \xi, l\rangle \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} jf_0(R\vec{x})\vec{x}\, dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$\frac{\langle \xi, l\rangle}{|\langle \xi, l\rangle|} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} jf_0(\vec{x})R^{-1}\vec{x}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \operatorname{sign}(\langle \xi, l\rangle)R^{-1}\vec{d},$$

т.е. в случае $\langle \xi, l\rangle > 0$ для скалярной частицы

$$\tilde{\vec{d}} = R^{-1}\vec{d}. \tag{3.7.10}$$

Для коэффициентов тензорного взаимодействия в новом состоянии получаем

$$k\tilde{j}(4\times 3) = \tilde{l}\,\tilde{\vec{d}}^{\top},$$

где 4-вектор скорости в новом состоянии $\tilde{l}$ выражен через 4-вектор скорости в старом состоянии l формулой (3.6.20), а 3-вектор дипольного момента в новом состоянии $\vec{d}$ выражается через 3-вектор дипольного момента в старом состоянии $\tilde{\vec{d}}$ формулой (3.7.10). Согласно предыдущего пункту, если дипольный момент скалярной частицы в некотором состоянии равен нулю, то он равен нулю в любом состоянии. Таким образом, у заряженной скалярной частицы коэффициенты тензорного взаимодействия равны нулю в любом состоянии. У нейтральной же скалярной частицы, согласно формуле (3.7.5) обращаются в нуль коэффициенты векторного взаимодействия.

Вычислив коэффициенты векторного и тензорного взаимодействия скалярной частицы, мы в терминологии §4.3 с точностью до величин порядка $O(\mu^2)$, где μ — радиус ядра частицы, вычислили функционал nt взаимодействия частицы со внешним полем $w(x)$. При $e \neq 0$ мы получили

$$\mathrm{nt} = e\langle\tilde{l}, w(b)\rangle, \tag{3.7.11}$$

а при $e = 0$

$$\mathrm{nt} = \left\langle \widetilde{\vec{d}}, \frac{\partial}{\partial\vec{b}}\langle\tilde{l}, w(b)\rangle \right\rangle, \tag{3.7.12}$$

где $b(x_0)$ — 4-вектор центра частицы, $\tilde{l} = \dot{b}(x_0)$ — 4-вектор скорости частицы в данном состоянии.

3.7.5 Правило преобразования спина.

Введём вектор спина в данном состоянии агвидной частицы

$$\vec{S} \equiv \iint\limits_{\mathbf{R}^3} \vec{sf}(\vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3, \tag{3.7.13}$$

или, используя обозначение (3.3.5) оператора интегрирования по пространственным переменным,

$$\vec{S} = I\,\vec{sf}\ . \tag{3.7.14}$$

Правило преобразования спиновой функции при изменении состояния (3.6.52) приводит к следующему правилу преобразования спина

$$\widetilde{\vec{S}} = I\widetilde{\vec{sf}} = \frac{1}{\det(R)} I R^{\top}\ \vec{sf}\,(R\vec{x}) = \frac{1}{\det(R)} R^{\top} I\ \vec{sf}\,(R\vec{(x)}) = \frac{1}{|\det(R)|\det(R)} R^{\top}\vec{S}$$

или

$$\widetilde{\vec{S}} = \frac{1}{|\det(R)|\det(R)} R^{\top}\vec{S}. \tag{3.7.15}$$

В случае, когда исходное состояние — состояние покоя, т.е. $\vec{l} = 0$, матрица $R^{\top} = Q^{\top}B$ для левого представления матрицы $G(p)$, и формула преобразования спина будет

$$\widetilde{\vec{S}} = \frac{1}{|\xi_0(p)|\xi_0(p)} Q^{\top}B\vec{S}. \tag{3.7.16}$$

3.7.6 Моменты пространственной составляющей $\vec{js}\,(x)$ вектора псевдотока.

Рассмотрим теперь моменты пространственной составляющей $\vec{js}\,(x)$ вектора псевдотока. Поскольку вектор $\vec{js}\,(x)$ является ротором спиновой функции, то согласно лемме 3.7.1 скалярная трансформация Пуанкаре равна нулю, в частности,

$$I\ \vec{js} = 0. \tag{3.7.17}$$

Образуем матрицу первых моментов $kjs \in M(3)$ вида

$$kjs = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} j\vec{sf}\,(\vec{x})\vec{x}^{\top}\, dx_1 dx_2 dx_3 = I\left(\vec{js}\ \ \vec{x}^{\top}\right). \tag{3.7.18}$$

Подставим выражение вектора $\overrightarrow{jsf}(\vec{x})$ через $\vec{sf}(\vec{x})$ — формула (3.6.63) и получим

$$kjs_{\alpha\nu} = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} e_{\alpha\tau\psi}\frac{\partial\, sf_{\psi}}{\partial x_{\tau}}(\vec{x})x_{\tau}\, dx_1dx_2dx_3 = \tag{3.7.19}$$

$$-e_{\alpha\tau\psi}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} sf_{\psi}(\vec{x})\delta_{\nu\tau}\, dx_1dx_2dx_3 = -e_{\alpha\nu\psi}S_{\psi}.$$

При изменении состояния вектор $\overrightarrow{jsf}(\vec{x})$ преобразуется в вектор $\widetilde{\overrightarrow{jsf}}(\vec{x})$ по формуле (3.6.61). При этом сохраняется выражение функции $\widetilde{\overrightarrow{jsf}}(\vec{x})$ через спиновую функцию, поэтому формулы (3.7.17, 3.7.19) остаются в силе с заменой $\vec{S}$ на $\widetilde{\vec{S}}$, т.е.

$$I\widetilde{\vec{js}} = 0, \tag{3.7.20}$$

$$\widetilde{kjs}_{\alpha\nu} = -e_{\alpha\nu\psi}\widetilde{S}_{\psi}. \tag{3.7.21}$$

3.7.7 Коэффициенты тензорного взаимодействия для произвольной агвидной частицы. Теперь мы можем вычислить коэффициенты тензорного взаимодействия для произвольной агвидной частицы. Пусть в данном состоянии $\vec{S}(x)$ спиновая функция частицы, $\vec{js}(x) = rot\,\vec{S}(x)$ и $j_0(x)$ — плотность заряда. Согласно формуле (3.7.14) представим функцию тока $j(x)$ как сумму двух функций тока $j = j' + j''$, где $j' = lj_0(x)$ — скалярная, а $j'' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{js}(x) \end{pmatrix}$ — киперная составляющие. В таком случае справедливо представление

$$kj = kj' + kj'' \tag{3.7.22}$$

Согласно формуле (3.7.9) п.3.7.4

$$kj'(4\times 3) = l\vec{d}^{\top}, \tag{3.7.23}$$

где

$$\vec{d} = I(j_0\vec{x}). \tag{3.7.24}$$

Для матрицы $kjs''(3\times 3)$ согласно п.3.7.6 имеем

$$kjs''(3\times 3)_{\alpha\nu} = -e_{\alpha\nu\psi}S_{\psi}. \tag{3.7.25}$$

Перейдём теперь к другому состоянию частицы и проведём для функции тока $\tilde{j}(x)$ снова разбиение на скалярную и киперную составляющие $\tilde{j}(x) = \widetilde{j'}(x) + \widetilde{j''}(x)$, где $\widetilde{j'}(x) = \tilde{l}\,\tilde{j}_0(x)$, $\widetilde{j''}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{\vec{js}}(x) \end{pmatrix}$. Для матрицы $\widetilde{kjs}''(3\times 3)$ сохраняется представление (3.7.25) с заменой вектора спина $\vec{S}$ на новый вектор спина $\widetilde{\vec{S}}$ вида (3.7.15). Формула (3.7.23) сохраняет свою справедливость с заменой l на $\tilde{l}$ и $\vec{d}$ на $\widetilde{\vec{d}}$. Осталось вычислить новое значение дипольного момента $\widetilde{\vec{d}}$ через старые значения дипольного момента и спина. Для этого используем представление нового значения функции плотности заряда через старое значение вектора псевдотока (3.6.62). Согласно формуле (3.6.62)

$$I\left(\widetilde{jsf}_0\,\vec{x}\right)=\langle\xi,l\rangle I\left(jsf_0(R\vec{x})\vec{x}\right)+I\left(\langle\vec{\xi},\overrightarrow{jsf}\,(R\vec{x})\rangle\vec{x}\right)=$$

$$\langle\xi,l\rangle R^{-1}I\left(jsf_0(R\vec{x})R\vec{x}\right)+R^{-1}I\left(\langle\vec{\xi},\overrightarrow{jsf}\,(R\vec{x})\rangle R\vec{x}\right)=$$

$$\operatorname{sign}(\langle\xi,l\rangle)R^{-1}\vec{d}+\frac{1}{|\det(R)|}R^{-1}I\left(\langle\vec{\xi},\overrightarrow{jsf}\,(\vec{x})\rangle\vec{x}\right).$$

В координатном представлении

$$I\left(\widetilde{jsf}_0\,x_\lambda\right)=\operatorname{sign}(\langle\xi,l\rangle)(R^{-1}\vec{d})_\lambda+\frac{1}{|\langle\xi,l\rangle|}R^{-1}_{\lambda\nu}I\left(\xi_\alpha\,jsf_{\,\alpha}(\vec{x})x_\nu\right)=$$

$$\operatorname{sign}(\langle\xi,l\rangle)(R^{-1}\vec{d})_\lambda+\frac{1}{|\langle\xi,l\rangle|}R^{-1}_{\lambda\nu}\xi_\alpha\,kjs_{\alpha\nu}=\operatorname{sign}(\langle\xi,l\rangle)(R^{-1}\vec{d})_\lambda-\frac{1}{|\langle\xi,l\rangle|}R^{-1}_{\lambda\nu}\xi_\alpha\,e_{\alpha\nu\psi}S_\psi=$$

$$\operatorname{sign}(\langle\xi,l\rangle)R^{-1}_{\lambda\nu}\left(d_\nu+\frac{e_{\nu\alpha\psi}\xi_\alpha S_\psi}{\langle\xi,l\rangle}\right)=\operatorname{sign}(\langle\xi,l\rangle)\,R^{-1}\left(\vec{d}+\frac{1}{\langle\xi,l\rangle}[\vec{\xi},\vec{S}]\right).$$

Итак, мы получили представление нового дипольного момента в виде

$$\tilde{\vec{d}}=\operatorname{sign}(\langle\xi,l\rangle)R^{-1}\left(\vec{d}+\frac{1}{\langle\xi,l\rangle}[\vec{\xi},\vec{S}]\right). \tag{3.7.26}$$

В силу тождества (3.6.55)

$$R^{-1}_{\lambda\nu}e_{\nu\alpha\psi}\frac{\xi_\alpha S_\psi}{\langle\xi,l\rangle}=\frac{1}{\langle\xi,l\rangle^2}e_{\lambda\nu\gamma}R_{\alpha\nu}R_{\psi\gamma}\xi_\alpha S_\psi= \tag{3.7.27}$$

$$\operatorname{sign}(\langle\xi,l\rangle)\left[R^\top\vec{\xi},\frac{1}{|\det(R)|\det(R)}R^\top\vec{S}\right]_\nu=\operatorname{sign}(\langle\xi,l\rangle)\left[R^\top\vec{\xi},\tilde{\vec{S}}\right]_\nu,$$

а в силу представления (3.6.13)

$$R^\top\vec{\xi}=Q^\top B(E+\vec{\beta}\,\vec{l}^\top)\vec{\xi}=Q^\top(\xi_0\vec{\xi}+\langle\vec{\xi},\vec{l}\rangle\vec{\xi})=\langle\xi,l\rangle Q^\top\vec{\xi}. \tag{3.7.28}$$

Поэтому формулу (3.7.26) можно переписать в эквивалентном виде

$$\tilde{\vec{d}}=\operatorname{sign}(\langle\xi,l\rangle)R^{-1}\vec{d}+[Q^\top\vec{\xi},\tilde{\vec{S}}]\langle\xi,l\rangle. \tag{3.7.29}$$

Формула (3.7.26) приводится также к виду

$$\tilde{\vec{d}}=(R^{-1}\vec{d}+\frac{\operatorname{sign}(\langle\xi,l\rangle)}{\langle\xi,l\rangle}Q^\top[\vec{\xi},\vec{S}]). \tag{3.7.30}$$

В самом деле, в силу ортогональности векторов $[\vec{\xi},\vec{S}]$ и $\vec{\xi}$ и формул (4.2.70) для матрицы R^{-1} и (3.2.12) для матрицы B имеем

$$R^{-1}[\vec{\xi},\vec{S}]=Q^\top B[\vec{\xi},\vec{S}]=Q^\top[\vec{\xi},\vec{S}].$$

Из формулы (3.7.26) следует также, что

$$\langle\tilde{\vec{d}},\tilde{\vec{S}}\rangle = \frac{\langle\vec{d},\vec{S}\rangle}{\langle\xi,l\rangle^2}, \qquad (3.7.31)$$

ибо, подставляя формулы (3.7.26) и (3.7.15), имеем

$$\langle\tilde{\vec{d}},\tilde{\vec{S}}\rangle = \left\langle R^{-1}\left(\vec{d}+\frac{1}{\langle\xi,l\rangle}[\vec{\xi},\vec{S}]\right), \frac{1}{\langle\xi,l\rangle^2}R^\top\vec{S}\right\rangle \operatorname{sign}^2(\langle\xi,l\rangle) =$$

$$\frac{1}{\langle\xi,l\rangle^2}\left\langle\vec{d}+\frac{1}{\langle\xi,l\rangle}[\vec{\xi},\vec{S}],\vec{S}\right\rangle = \frac{1}{\langle\xi,l\rangle^2}\langle\vec{d},\vec{S}\rangle.$$

Отсюда следует, что если вектора дипольного момента и спины в каком-то состоянии ортогональны, то они ортогональны в любом состоянии.

В общем случае мы получим следующее значение функционала nt из §6.3 с точностью до величин порядка $O(\mu^2)$:

$$\mathrm{nt} = e\langle\tilde{l},w(b)\rangle + \langle\tilde{\vec{d}},\, grad\,(\langle\tilde{l},w(b)\rangle)\rangle + \langle\tilde{\vec{S}},\, rot\,\vec{w}(b)\rangle. \qquad (3.7.32)$$

В случае, когда стандартное состояние — состояние покоя, т.е. $\vec{l}=0$ и $p\in P_e$ формулы преобразования спина и дипольного момента принимают вид:

$$\tilde{\vec{S}} = (1-(\tilde{\vec{l}})^2)Q^\top B\vec{S}, \qquad (3.7.33)$$

$$\tilde{\vec{d}} = Q^\top B^{-1}\vec{d}+[\tilde{\vec{l}},Q^\top\vec{S}], \qquad (3.7.34)$$

и формула (3.7.31) принимает вид

$$\langle\tilde{\vec{d}},\tilde{\vec{S}}\rangle = (1-(\tilde{\vec{l}})^2)\langle\vec{d},\vec{S}\rangle.$$

Для заряженной частицы при $e\neq0$ при выборе центра частицы из условия $\vec{d}=0$ формула (3.7.32) принимает тогда вид

$$\mathrm{nt} = e\langle\tilde{l},w(\tilde{b})\rangle + \left\langle\tilde{\vec{S}},\, rot\,\vec{w}(\tilde{b}) - \frac{1}{1-(\tilde{\vec{l}})^2}\left[\tilde{\vec{l}},\, grad\,\langle\tilde{l},w(\tilde{b})\rangle\right]\right\rangle = \qquad (3.7.35)$$

$$e\langle\tilde{l},w(\tilde{b})\rangle + \left\langle\vec{S},(1-(\tilde{\vec{l}})^2)BQ\,rot\,\vec{w}(\tilde{b}) - Q\left[\tilde{\vec{l}},\, grad\,\langle\tilde{l},w(\tilde{b})\rangle\right]\right\rangle.$$

Для нейтральной частицы при $e=0$ выбором центра частицы дипольный момент не уничтожается и формула (3.7.32) принимает вид:

$$\mathrm{nt} = \langle Q^\top B^{-1}\vec{d},\, grad\,\langle\tilde{l},w(\tilde{b})\rangle\rangle + \left\langle\vec{S},(1-(\tilde{\vec{l}})^2)BQ\,rot\,\vec{w}(\tilde{b}) - Q\left[\tilde{\vec{l}},\, grad\,\langle\tilde{l},w(\tilde{b})\rangle\right]\right\rangle. \qquad (3.7.36)$$

Здесь $\tilde{b}$ — 4-вектор центра частицы, а $\tilde{l}=\frac{d}{dx_0}\tilde{b}$ — 4-вектор скорости центра в преобразованном состоянии.

3.7.8 Киперная частица.

Рассмотрим киперную частицу, т.е. частицу имеющую абсолютно нейтральное состояние. Выберем абсолютно нейтральное состояние. В абсолютно нейтральном состоянии заряд частицы $e = 0$, следовательно, он будет равен нулю и в любом состоянии агвидной частицы и 4-вектор нулевых моментов $c\tilde{j} = 0$ в любом состоянии киперной частицы. Таким образом, киперная агвидная частица нейтральна и следовательно Её моменты первого порядка kj выражаются через два 3-вектора характеристических констант — через дипольный момент $\tilde{\vec{d}}$ и спин $\tilde{\vec{S}}$. В силу выбора стандартного состояния как абсолютно нейтрального, в стандартном состоянии $\vec{d} = 0$ и по формулам (3.7.16) и (3.7.30) в произвольном состоянии вектора дипольного момента $\tilde{\vec{d}}$ и спина $\tilde{\vec{S}}$ следующим образом выражаются через вектор спина в стандартном состоянии $\vec{S}$:

$$\tilde{\vec{S}} = \frac{\operatorname{sign}(\langle\xi, l\rangle)}{\langle\xi, l\rangle^2} R^\top \vec{S}, \tag{3.7.37}$$

$$\tilde{\vec{d}} = \frac{1}{|\langle\xi, l\rangle|} Q^\top [\vec{\xi}, \vec{S}]. \tag{3.7.38}$$

В силу (3.7.29) вектора $\tilde{\vec{d}}$ и $\tilde{\vec{S}}$ связаны соотношением

$$\tilde{\vec{d}} = \langle\xi, l\rangle [Q^\top \vec{\xi}, \tilde{\vec{S}}], \tag{3.7.39}$$

отсюда вектора $\tilde{\vec{d}}$ и $\tilde{\vec{S}}$ ортогональны в любом состоянии.

Итак, для киперной частицы все моменты нулевого порядка равны нулю, а все моменты первого порядка выражаются через 3 характеристические числовые константы — координаты вектора спина $\vec{S}$ в абсолютно нейтральном состоянии. Дипольный момент киперной частицы в абсолютно нейтральном состоянии равен нулю, но в других состояниях может быть отмечен от нуля, ибо порождённое спином по формуле (3.7.38). Однако, дипольный момент порожденный спином, ортогонален спину в том же состоянии согласно формуле (3.7.39). Мы установили следующие свойства характеристик киперной агвидной частицы:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ e = 0, \\ 2)\ \tilde{\vec{d}} \perp \tilde{\vec{S}}, \\ 3)\ \text{существует состояние, в котором}\ \ \tilde{\vec{d}} = 0. \end{array}\right\} \tag{3.7.40}$$

Здесь и далее для векторов евклидова пространства $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соотношение $\vec{a} \perp \vec{b}$ обозначает ортогональность, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ — коллинеарность.

Заметим, что из формулы преобразовании спина (3.7.16) следует, что для любой агвидной частицы, если спин $\vec{S} \neq 0$ в каком-то состоянии, то он не равен нулю и в любом другом состоянии, т.е. выбором состояния нельзя обратить спин в нуль.

3.7.9 Аппроксимация нейтральной частицы киперной частицей.

Агвидная частица при нулевом заряде в моментной теории первого порядка имеет 4 характеристические числовые константы; заряд e и вектор спина $\vec{S}$, — через которые выражается её взаимодействие с внешним полем. В случае нейтральной частицы $e = 0$ существует 6 числовых параметров, определяющих взаимодействие в моментной теории первого порядка, это — вектора дипольного момента $\vec{d}$ и спина $\vec{S}$ в стандартном состоянии. Вектор спина не уничтожим при изменении состояния — если $\vec{S} \neq 0$, то и $\tilde{\vec{S}} \neq 0$. Возникает вопрос: когда выбором состояния можно обратить в нуль дипольный момент? Если дипольный момент обращается в некотором состоянии в нуль, то существует киперная частица, имеющая совпадающие моменты нулевого и первого порядка с данной частицей, т.е. в моментной теории первого порядка исходная частица будет взаимодействовать как соответствующая киперная частица, имеющая лишь 3 характеристические константы взаимодействия — вектор спина $\vec{S}$.

Пусть $\vec{d}$ и $\vec{S}$ — вектора дипольного момента и спина нейтральной агвидной частицы в некотором состоянии, которое мы выберем за стандартное. Согласно формуле (3.7.26) в другом состоянии

$$\tilde{\vec{d}} = R^{-1}\left(\vec{d} + \frac{1}{\langle \xi, l\rangle}[\vec{\xi}, \vec{S}]\right)\operatorname{sign}(\langle \xi, l\rangle). \tag{3.7.41}$$

Условие обращения вектора $\tilde{\vec{d}}$ в нуль, таким образом, эквивалентно условию

$$\vec{d} = \frac{1}{\langle \xi, l\rangle}[\vec{S}, \vec{\xi}], \tag{3.7.42}$$

т.е. существованию такого вектора $\vec{\beta} \in \mathbf{R}^3, |\vec{\beta}| < 1$, что

$$\vec{d} = \frac{1}{(1 + \langle \vec{\beta}, \vec{l}\rangle)}[\vec{S}, \vec{\beta}]. \tag{3.7.43}$$

Итак, мы пришли к вопросу о разрешимости векторного уравнения (3.7.43) относительно вектора $\vec{\beta} \in \mathbf{R}^3$, $|\vec{\beta}| < 1$ при заданных векторах $\vec{d}$ и $\vec{S}$. Из уравнения (3.7.43) следует, что необходимое условие его разрешимости есть ортогональность векторов $\vec{d}$ и $\vec{S}$. Предполагаем далее, что $\vec{d} \perp \vec{S}$ и существует решение уравнения (3.7.43) — вектор $\vec{\beta} \in \mathbf{R}^3$, тогда умножая соотношение (3.7.43) векторно на вектор $\vec{S}$, имеем

$$[\vec{S}, \vec{d}] = \frac{1}{1 + \langle \vec{\beta}, \vec{l}\rangle}(\vec{S}\langle \vec{S}, \vec{\beta}\rangle - \vec{\beta}\langle \vec{S}, \vec{S}\rangle)$$

Если $S = |\vec{S}| \neq 0$, то решение $\vec{\beta}$ уравнения (3.7.43) должно иметь вид

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{S}}{S}\left\langle \frac{\vec{S}}{S}, \vec{\beta}\right\rangle + \left[\frac{\vec{d}}{S}, \frac{\vec{S}}{S}\right](1 + \langle \vec{\beta}, l\rangle). \tag{3.7.44}$$

Далее ограничимся рассмотрением двух частных подслучаев.

I. Пусть частица является досветовой и стандартное состояние есть состояние покоя, т.е. $\vec{l} = 0$. Тогда соотношение (3.7.44) принимает вид

$$\vec{\beta}_\perp = \left[\frac{\vec{d}}{S}, \frac{\vec{S}}{S}\right], \tag{3.7.45}$$

где

$$\vec{\beta}_\perp \equiv \vec{\beta} - \frac{\vec{S}}{S}\left\langle \frac{\vec{S}}{S}, \vec{\beta}\right\rangle. \tag{3.7.46}$$

Решение системы (3.7.43) существует иф

$$\frac{d}{S} < 1, \tag{3.7.47}$$

где $d \equiv |\vec{d}|$.

Вывод 3.7.1 *Для нейтральной досветовой агвидной частицы существует состояние с нулевым дипольным моментом иф в состоянии покоя: 1)$\vec{d} \perp \vec{S}$, 2)$|\vec{d}| < |\vec{S}|$.*

II. Рассмотрим подслучай нейтральной световой агвидной частицы, у которой в стандартном состоянии: 1)$\vec{S} \neq 0$, 2)$\vec{S} \parallel \vec{l}$, 3)$\vec{d} \perp \vec{S}$. Тогда соотношение (3.7.44) принимает вид

$$\vec{\beta}_{\perp} = \left[\frac{\vec{d}}{S}, \frac{\vec{S}}{S}\right](1 + \sigma\beta_{\parallel}), \tag{3.7.48}$$

где $\vec{\beta}_{\perp}$ — задаётся формулой (3.7.46), а $\sigma = \mathrm{sign}(\langle\vec{S}, \vec{l}\rangle)$. Осталось выбрать $\beta_{\parallel} \in \mathbf{R}$ так, чтобы

$$\beta_{\perp}^2 + \beta_{\parallel}^2 < 1,$$

т.е.

$$\frac{d^2}{S^2}(1 + \sigma\beta_{\parallel})^2 + \beta_{\parallel}^2 < 1. \tag{3.7.49}$$

Неравенство (3.7.49) выполняется иф

$$\beta_{\parallel} \in \sigma\left(\left]-1, \frac{S^2 - d^2}{S^2 + d^2}\right[\right). \tag{3.7.50}$$

При $S \neq 0$ множество $\sigma(]-1, \frac{S^2-d^2}{S^2+d^2}[) \neq \emptyset$.

Вывод 3.7.2 *Если в стандартном состоянии для нейтральной световой агвидной частицы выполнены условия: 1)$\vec{S} \neq 0$, 2)$\vec{S} \parallel \vec{l}$, 3)$\vec{d} \perp \vec{S}$, — то существует состояние с $\tilde{\vec{d}} = 0$.*

3.7.10 Свойства спина и дипольного момента световой частицы.

В предыдущем пункте при рассмотрении световой частицы мы ввели дополнительные предложения на направления спина и дипольного момента, а именно направленность спина по вектору скорости и ортогональность дипольного момента вектору скорости в стандартном состоянии. Покажем, что эти свойства сохраняются при изменении состояния.

Лемма 3.7.2 *Если у световой агвидной частицы в некотором состоянии спин коллинеарен скорости, то и в любом состоянии спин коллинеарен скорости.*

Доказательство. Пусть в некотором состоянии, которое мы примем за стандартное, $\vec{S} \parallel \vec{l}$. В новом состоянии вектор скорости $\tilde{\vec{l}}$ согласно формулам (3.6.70), (3.6.71) равен

$$\tilde{\vec{l}} = R^{-1}(\xi_0\vec{l} + \vec{\xi}) = (Q^{\top}B - \tilde{\vec{l}}\vec{\xi}^{\top})(\xi_0\vec{l} + \vec{\xi}) = Q^{\top}B(\xi_0\vec{l} + \vec{\xi}) - \tilde{\vec{l}}(\xi_0\langle\vec{\xi}, \vec{l}\rangle + \langle\vec{\xi}, \vec{\xi}\rangle).$$

Поэтому

$$\tilde{\vec{l}} \parallel Q^{\top}B(\xi_0\vec{l} + \vec{\xi})$$

или эквивалентно в силу формулы (3.2.15)

$$\tilde{\vec{l}} \parallel Q^{\top}(B\vec{l} + \vec{\xi}). \tag{3.7.51}$$

Вектор спина в новом состоянии по формуле (3.7.16) равен

$$\widetilde{\vec{S}} = \frac{\operatorname{sign}(\langle \xi, l\rangle)}{\langle \xi, l\rangle^2} R^\top \vec{S}$$

и в силу условия $\vec{l} \parallel \vec{S}$ будет

$$\widetilde{\vec{S}} \parallel R^\top \vec{l}. \tag{3.7.52}$$

Используем представление (3.6.69) для матрицы R и условие $|\vec{l}|^2 = 1$, получим что вектор $\widetilde{\vec{S}}$ коллинеарен вектору

$$R^\top \vec{l} = Q^\top (B + \vec{\xi}\,\vec{l}^\top)\vec{l} = Q^\top (B\vec{l} + \vec{\xi}). \tag{3.7.53}$$

Соотношения (3.7.51, 3.7.52, 3.7.53) доказывают утверждение леммы. ♢

Перейдём теперь к расположению трёх векторов $\vec{l}$, $\vec{S}$, $\vec{d}$.

Лемма 3.7.3 *Если в некотором состоянии нейтральной световой агвидной частицы $\vec{S} \parallel \vec{l}$ и $\vec{d} \perp \vec{l}$, то и в любом состоянии $\widetilde{\vec{S}} \parallel \widetilde{\vec{l}}$ и $\widetilde{\vec{d}} \perp \widetilde{\vec{l}}$.*

Доказательство. В силу леммы 2 требует доказательство лишь соотношение $\widetilde{\vec{d}} \perp \widetilde{\vec{l}}$. По условию $|\vec{l}| = 1$ и следовательно $|\widetilde{\vec{l}}| = 1$. По формуле (3.6.70)

$$R^{-1\top} = BQ - \vec{\xi}\,\widetilde{\vec{l}}^{\,\top},$$

поэтому

$$R^{-1\top}\widetilde{\vec{l}} = BQ\widetilde{\vec{l}} - \vec{\xi}\langle \widetilde{\vec{l}}, \widetilde{\vec{l}}\rangle = BQ\widetilde{\vec{l}} - \vec{\xi}. \tag{3.7.54}$$

По формуле (3.6.63)

$$BQ\widetilde{\vec{l}} = \vec{\xi} + \frac{1}{\langle \xi, l\rangle}\vec{l}, \tag{3.7.55}$$

поэтому

$$R^{-1\top}\widetilde{\vec{l}} = \frac{1}{\langle \xi, l\rangle}\vec{l}. \tag{3.7.56}$$

Согласно формуле преобразования дипольного момента (3.7.26) имеем

$$\langle \widetilde{\vec{d}}, \widetilde{\vec{l}}\,\rangle = \left\langle R^{-1}(\vec{d} + \frac{1}{\langle \xi, l\rangle}[\vec{\xi}, \vec{S}]), \widetilde{\vec{l}}\right\rangle \operatorname{sign}(\langle \xi, l\rangle) = \left\langle \vec{d} + \frac{1}{\langle \xi, l\rangle}[\vec{\xi}, \vec{S}]), R^{-1\top}\widetilde{\vec{l}}\right\rangle \operatorname{sign}(\langle \xi, l\rangle) = \tag{3.7.57}$$

$$\frac{1}{|\langle \xi, l\rangle|}\left\langle \vec{d} + \frac{1}{\langle \xi, l\rangle}[\vec{\xi}, \vec{S}], \vec{l}\right\rangle = \frac{1}{|\langle \xi, l\rangle|}\left(\langle \vec{d}, \vec{l}\,\rangle + \frac{1}{\langle \xi, l\rangle}\langle \vec{\xi}, [\vec{S}, \vec{l}\,]\rangle\right).$$

Но по условию $\langle \vec{d}, \vec{l}\,\rangle = 0$ и $[\vec{S}, \vec{l}\,] = 0$. ♢

3.7.11 Предельное поведение дипольного момента и спина досветовой частицы при приближении скорости к скорости света.

Рассмотрим агвидную частицу, у которой стандартное состояние есть состояние покоя. Рассмотрим её состояния с $p \in P_e$ такие, что $Q = E$, $\vec{\beta} = \beta\vec{n}$, где $\vec{n} \in \mathbf{R}^3$, $|\vec{n}| = 1$ есть постоянный вектор, а параметр $\beta \in [0, 1[$. Т.е. состояния с одним и тем же направлением скорости $\vec{l} = \vec{\beta} = \beta\vec{n}$, отличающиеся лишь величиной скорости β при отсутствии пространственного вращения.

Рассмотрим сначала случай нейтральной частицы с дипольным моментом $\vec{d}$ в стандартном состоянии и спином $\vec{S}$. Разобьём вектор $\vec{d}$ на сумму $\vec{d} = \vec{d}_\parallel + \vec{d}_\perp$ параллельной и перпендикулярной вектору $\vec{n}$ составляющих:

$$\vec{d}_\parallel \equiv \langle\vec{d}, \vec{n}\rangle\vec{n}, \tag{3.7.58}$$

$$\vec{d}_\perp \equiv \vec{d} - \vec{d}_\parallel, \tag{3.7.59}$$

аналогично $\vec{S} = \vec{S}_\parallel + \vec{S}_\perp$ где

$$\vec{S}_\parallel \equiv \langle\vec{S}, \vec{n}\rangle\vec{n}, \tag{3.7.60}$$

$$\vec{S}_\perp \equiv \vec{S} - \vec{S}_\parallel. \tag{3.7.61}$$

Согласно формуле (3.7.34)

$$\tilde{\vec{d}}(\beta) = B^{-1}\vec{d} + [\tilde{\vec{l}}, \vec{S}].$$

По свойствам (3.2.13, 3.2.14) матрицы B имеем

$$\tilde{\vec{d}} = \sqrt{1-\beta^2}\,\vec{d}_\parallel + \vec{d}_\perp + [\tilde{\vec{l}}, \vec{S}] = \vec{d}_\perp + \beta[\vec{n}, \vec{S}] + \sqrt{1-\beta^2}\,\vec{d}_\parallel. \tag{3.7.62}$$

Отсюда

$$\lim_{\beta\to 1} \tilde{\vec{d}}(\beta) = \vec{d}_\perp + [\vec{n}, \vec{S}]. \tag{3.7.63}$$

Вывод 3.7.3 *При приближении скорости к скорости света дипольный момент нейтральной агвидной частицы стремится к постоянному вектору (3.7.63), ортогональному вектору скорости.*

Рассмотрим теперь поведение спина частицы, опуская предположение нейтральности. По формуле (3.7.33)

$$\tilde{\vec{S}}(\beta) = (1 - (\tilde{\vec{l}})^2)B\vec{S} = (1-\beta^2)B\vec{S}. \tag{3.7.64}$$

По свойствам (3.2.13, 3.2.14) матрицы B получаем

$$\tilde{\vec{S}} = (1-\beta^2)(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{S}_\parallel + \vec{S}_\perp) = \sqrt{1-\beta^2}\vec{S}_\parallel + (1-\beta^2)\vec{S}_\perp. \tag{3.7.65}$$

Угол α между прямой, проходящей через вектор $\tilde{\vec{S}}$, и направлением движения

$$\alpha(\beta) = \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{1-\beta^2}\,|\vec{S}_\perp|}{|\vec{S}_\parallel|}). \tag{3.7.66}$$

При $|\vec{S}_\parallel| \neq 0$

$$\lim_{\beta\to 1} \alpha(\beta) = 0. \tag{3.7.67}$$

Вывод 3.7.4 *При приближении скорости к скорости света спин агвидной частицы стремится к нулю, а направление спина в случае $\langle\vec{S},\vec{n}\rangle \neq 0$ стремится к направлению линии движения, а в случае $\langle\vec{S},\vec{n}\rangle = 0$ всегда ортогонально направлению движения.*

Если мы имеем множество агвидных частиц движущихся параллельно одной и той же прямой без пространственных поворотов, то при стремлении их скоростей к скорости света направления спинов стремятся к коллинеарности, если отсутствуют спины, ортогональные направлению движения. Таким образом представляется естественным рассматривать световые частицы со спиновой функцией $\vec{s}f(\vec{x})$ коллинеарной скорости движения.

Введём следующее понятие.

Определение 3.7.1 *Состояние агвидной частицы назовём бравым, если существует постоянный вектор $\vec{g} \in \mathbf{R}^3$, $\vec{g} \neq 0$, что*

$$\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3 \;\Big|\; \overrightarrow{sf}(\vec{x}) \parallel \vec{g}.$$

Из правила преобразования спиновой функции при изменении состояния (14.67) следует, что если одно состояние частицы является бравым, то и любое другое состояние также бравое. Агвидную частицу будем называть *бравой*, если у неё существует бравое состояние.

Спиновую частицу бравого состояния будем записывать в виде

$$\overrightarrow{sf}(\vec{x}) = gf(\vec{x})\,\vec{k}, \tag{3.7.68}$$

где $\vec{k} \in \mathbf{R}^3$, $|\vec{k}| = 1$, — направляющий вектор спина, а $gf(\vec{x})$ — скалярная плотность спина. Правило преобразования спиновой функции (3.6.67) даёт следующее правило преобразования направляющего вектора спина и скалярной плотности спина

$$\tilde{\vec{k}} = \frac{R^\top \vec{k}}{|R^\top \vec{k}|}, \tag{3.7.69}$$

$$\widetilde{gf}(\vec{x}) = \frac{|R^\top \vec{k}|}{\det(R)} gf(R\vec{x}). \tag{3.7.70}$$

Выясним теперь условия коллинеарности векторов $\tilde{\vec{k}}$ и $\tilde{\vec{l}}$. Согласно (3.6.69, 3.7.69)

$$\tilde{\vec{k}} \parallel R^\top \vec{k} = Q^\top (B + \vec{\xi}\,\vec{l}^{\,\top})\vec{k}$$

и согласно (3.6.80) условие $\tilde{\vec{k}} \parallel \tilde{\vec{l}}$ эквивалентно условию

$$Q^\top (B\vec{k} + \vec{\xi}\langle\vec{l},\vec{k}\rangle) \parallel Q^\top (\vec{\xi} + B\vec{l}),$$

что эквивалентно условию

$$(B\vec{k} + \vec{\xi}\langle\vec{l},\vec{k}\rangle) \parallel (B\vec{l} + \vec{\xi}\,)$$

или условию

$$(\vec{k} + \vec{\beta}\langle\vec{l},\vec{k}\rangle) \parallel (\vec{l} + \vec{\beta}), \tag{3.7.71}$$

так как $B^{-1}\vec{\xi} = \vec{\beta}$.

Потребуем теперь, чтобы условие (3.7.71) выполнялось во всех состояниях частицы, т.е. для всех $\vec{\beta} \in \mathbf{R}^3$, $|\vec{\beta}| < 1$. Тогда должно быть

$$\vec{k} \parallel \vec{l} \tag{3.7.72}$$

и $\vec{l} = \gamma\vec{k}$. Далее условие (3.7.71) принимает вид

$$\forall\vec{\beta} \in \mathbf{R}^3, |\vec{\beta}| < 1 \;\Big|\; (\vec{k} + \gamma\vec{\beta}) \parallel (\gamma\vec{k} + \vec{\beta}),$$

откуда должно быть

$$\gamma\vec{k} + \vec{\beta} = \lambda(\vec{k} + \gamma\vec{\beta})$$

и $\gamma = \lambda$, $1 = \lambda\gamma$. Что влечет $\gamma = \pm 1$ и $|\vec{l}| = 1$. Мы приходим к следующему выводу.

Вывод 3.7.5 *Для бравой частицы во всех состояниях верно $\tilde{\vec{k}} \parallel \tilde{\vec{l}}$ иф $\vec{k} = \gamma\vec{l}$, $\gamma = \pm 1$ в стандартном состоянии. Причём тогда во всех состояниях $\tilde{\vec{k}} = \gamma\tilde{\vec{l}}$.*

Определение 3.7.2 *Состояние агвидной частицы назовём супербравым, если оно бравое и направляющий вектор спина и вектор скорости коллинеарны.*

Агвидную частицу назовём *ординарной*, если у неё существует супербравое состояние. Заметим что световая агвидная частица ординарна иф каждое её состояние супербравое.

Супербравая частица обладает следующим свойством.

Лемма 3.7.4 *Если досветовая агвидная частица имеет абсолютно нейтральное супербравое состояние, то она имеет и абсолютно нейтральное супербравое состояние покоя.*

Доказательство. Пусть некоторое состояние досветовой агвидной частицы абсолютно нейтральное и супербравое, но со скоростью $\vec{l} \neq 0$. Применим к этому состоянию преобразование к другому состоянию с $p \in P_e$ и $Q = E$, $\vec{\beta} = -\vec{l}$. По формуле преобразования скорости (3.6.80)

$$\tilde{\vec{l}} = \frac{1}{\langle \xi, l \rangle}(\xi_0(-\vec{l}) + \xi_0\vec{l}) = 0, \tag{3.7.73}$$

т.е. новое состояние — состояние покоя. Согласно предыдущему новое состояние является бравым, а так как скорость $\tilde{\vec{l}} = 0$, то и супербравым. По формуле преобразования плотности заряда (3.6.61)

$$\widetilde{jf}_0(\vec{x}) = \langle \xi, l \rangle jf_0(R\vec{x}) + \langle \vec{\xi}, \, rot \;\, \vec{sf} \,\rangle\Big|_{R\vec{x}}.$$

По условию $jf_0 = 0$ и $\vec{sf} = gf\,\vec{k}$, откуда

$$\widetilde{jf}_0(\vec{x}) = -\xi_0 l \langle \vec{k}, [\vec{\nabla}, gf\vec{k}] \rangle\Big|_{R\vec{x}} = +\xi_0 l \langle \vec{k}, [\vec{k}, \vec{\nabla} gf] \rangle\Big|_{R\vec{x}} = 0.$$

Итак, новое состояние также абсолютно нейтрально. $\diamondsuit$

Часть II

Развитие математической базы

Глава 4

Симметрия

Действуя на 4-функцию v операторами $T_p, \quad p \in P$ получаем, вообще говоря, разные функции $u = T_p(v)$. Однако, возможно при некотором $p \in P$ выполняется равенство

$$v = T_p(v). \tag{4.0.1}$$

Все такие элементы $p \in P$ образуют группу, называемую *сохраняющей группой со-*

стояния v — $\Gamma(v)$. Если теперь, наоборот, зафиксировать подгруппу $S \subset P$, то все элементы $v \in C_4(\mathbf{R}^4)$, для которых верно (4.0.1) при всех $p \in S$ образуют линейное пространство, называемое сохраняющимся пространством $\Pi(S)$. Если взять в качестве S группу Лоренца, то пространство симметрий $\Pi(S)$ состоит только из пассивных частиц и не представляет физического интереса ибо лоренц-симметричная частица не взаимодействует с частицами и полями. Если взять в качестве S группу пространственных вращений, то $\Pi(S)$ состоит из всех сферически симметричных функций. В данной главе развивается формальная теория, позволяющая по подгруппам $S \subset P$ строить сохраняющиеся пространства и наоборот. Исходным пунктом теории является линейное представление группы на векторном пространстве.

§4.1 Симметрия, порождённая представлением группы

В этом параграфе мы изложим общую концепцию симметрии, порождаемой представлением группы.

4.1.1 Сохраняющая группа $\Gamma(W)$ и сохраняющееся множество $\Pi(S)$. Рассматриваются абстрактная группа Gr и множество V. Пусть $Aut(V)$ группа преобразований множества V и $T : Gr \to Aut(V)$ гомоморфизма группы Gr в группу $Aut(V)$, т. е. представление группы Gr. Преобразование $T(g) : V \to V$ будем обозначать $T_g \equiv T(g)$.

Пусть $g \in Gr$, $v \in V$. Рассмотрим равенство

$$T_g(v) = v, \tag{4.1.1}$$

утверждающее, что элемент v — неподвижная точка отображения T_g. При фиксированном элементе $v \in V$ множество $\Gamma(v) \subset Gr$ всех элементов $g \in Gr$ для которых выполнено (4.1.1) назовём сохраняющим элемент v множеством. Множество $\Gamma(v)$ — подгруппа группы Gr, которую мы будем называть сохраняющей подгруппой. Аналогичным образом для подмножества $W \subset V$ определим сохраняющее множество, как множество таких элементов $g \in Gr$, для которых все точки множества W неподвижны при отображении T_g, т. е.

$$\Gamma(W) = \bigcap_{v \in W} \Gamma(v). \tag{4.1.2}$$

Множество $\Gamma(W)$ есть подгруппа группы Gr , которую мы будем называть *сохраняющей группой* множества W.

Наоборот, при фиксированном элементе $g \in Gr$ обозначим через $\Pi(g) \subset V$ множество всех элементов $v \in V$, для которых выполнено (4.1.1) и назовём *сохраняющимся множеством* для g. Если $S \subset Gr$ некоторое подмножество, то через $\Pi(S)$ обозначим множество точек неподвижных для каждого отображения T_g , $g \in S$, т. е.

$$\Pi(S) = \bigcap_{g \in S} \Pi(g) \tag{4.1.3}$$

$\Pi(S)$ — *сохраняющееся* множество для множества S.

По определению множеств $\Gamma(W)$ и $\Pi(S)$, если e единичный элемент группы Gr, то

$$\Pi(e) = V, \tag{4.1.4}$$

$$\Gamma(V) \supset \{e\}, \tag{4.1.5}$$

причём $\Gamma(V)$ — ядро гомоморфизма $T : Gr \to Aut(V)$. Множество $W \subset V$ назовём *крупным*, если группа $\Gamma(W) = \{e\}$.

В случае пустого множества $\emptyset$ по определению положим

$$\Gamma(\emptyset) \equiv Gr, \quad \Pi(\emptyset) \equiv V. \tag{4.1.6}$$

4.1.2 Свойства введенных операций $\Gamma(W)$, $\Pi(S)$ для произвольных подмножеств $W \subset V$, $S \subset Gr$.

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства антимонотонности

$$(W_1 \subset W_2) \Rightarrow (\Gamma(W_1) \supset \Gamma(W_2)), \tag{4.1.7}$$

$$(S_1 \subset S_2) \Rightarrow (\Pi(S_1) \supset \Pi(S_2)). \tag{4.1.8}$$

Для множества $S \subset Gr$ обозначим через $group(S)$ наименьшую подгруппу группы Gr, содержащую множество S. Точка по определению множества $\Pi(S)$ справедливо равенство

$$\Pi(S) = \Pi(group(S)). \tag{4.1.9}$$

В самом деле включение $\Pi(S) \supset \Pi(group(S))$ следует из (4.1.8). Наоборот, если элемент $v \in \Pi(S))$, то для любого элемента $g \in S$ верно (4.1.1), а значит и для обратного элемента g^{-1} верно

$$T_{g^{-1}}(v) = v$$

Группа $group(S)$ состоит из единичного элемента и конечных произведений элементов из множества S и множества S^{-1}, поэтому элемент $v \in \Pi(S)$ будет неподвижным для всех отображений T_g, $g \in group(S)$. Доказано обратное включение $\Pi(S) \subset \Pi(group(S))$ и равенство (4.1.9).

Для любых множеств W, S, справедливы включения

$$\Pi\Gamma(W) \supset W, \tag{4.1.10}$$

$$\Gamma\Pi(S) \supset S. \tag{4.1.11}$$

Вопрос же когда в (4.1.10) вместо включений можно поставить равенства решается леммой.

Лемма 4.1.1 *Множество $W \subset V$ удовлетворяет равенству*

$$\Pi\Gamma(W) = W \tag{4.1.12}$$

Тогда и только тогда, когда существует множество $S \subset Gr$, такое что

$$W = \Pi(S). \tag{4.1.13}$$

Доказательство. Если выполнено (4.1.12) то можно положить $S = \Gamma(W)$ и будет верно (4.1.13). Если выполнено (4.1.13) то в силу (4.1.11)

$$\Gamma(W) = \Gamma\Pi(S) \supset S.$$

Далее согласно (4.1.8)

$$\Pi\Gamma(W) \subset \Pi(S) = W,$$

Но для любого множества W верно (4.1.10). Лемма доказана $\diamondsuit$

Следствие 4.1.1 *Для любого множества $S \subset Gr$ верно*

$$\Pi\Gamma\Pi(S) = \Pi(S). \tag{4.1.14}$$

Вопрос когда в формуле (4.1.11) вместо включение можно поставить равенство решается леммой.

Лемма 4.1.2 *Множество $S \subset Gr$ удовлетворяет равенству*

$$\Gamma\Pi(S) = S \tag{4.1.15}$$

тогда и только тогда, когда существует множество $W \subset V$, такое, что

$$S = \Gamma(W). \tag{4.1.16}$$

Доказательство. Необходимость (4.1.16) непосредственно следует (4.1.15) при $W = \Pi(S)$. Наоборот, если верно (4.1.16), то в силу (4.1.10)

$$\Pi(S) = \Pi\Gamma(W) \supset W$$

А в силу (4.1.7)

$$\Gamma\Pi(S) \subset \Gamma(W) = S.$$

Так как всегда верно (4.1.11), лемма 4.1.2 доказана. $\diamondsuit$

Следствие 4.1.2 *Для любого множества $W \subset V$ верно*

$$\Gamma\Pi\Gamma(W) = \Gamma(W). \tag{4.1.17}$$

Множество $W \subset V$ назовём *совершенным*, если для него выполнено (4.1.12). Лемма 4.1.1 описывает совершенные множества W . Множество $S \subset Gr$ назовём *совершенным*, если выполнено (4.1.15). Лемма 4.1.2 описывает совершенное множество S .

В частности, каждое совершенное множество S — подгруппа группа Gr .

Лемма 4.1.3 *Для любых множеств $W \subset V, S \subset Gr$ и элемента $g \in Gr$ верны равенства*

$$\Pi(gSg^{-1}) = T_g(\Pi(S)), \tag{4.1.18}$$

$$\Gamma(T_g(W)) = g\Gamma(W)g^{-1}. \tag{4.1.19}$$

Доказательство. Условие $v \in \Pi(gSg^{-1})$ означает

$$\forall f \in S \;\Big|\; T_{gfg^{-1}}(v) = v$$

или эквивалентно

$$\forall f \in S \;\Big|\; T_f(T_{g^{-1}}(v) = T_{g^{-1}}(v). \tag{4.1.20}$$

Последнее означает, что $T_{g^{-1}}(v) \in \Pi(S)$ и $v \in T_g(\Pi(S))$. Рассуждение обратимо, что доказывает(4.1.18).

Если $f \in \Gamma(T_g(W))$, то

$$\forall v \in W \;\Big|\; T_f T_g(v) = T_g(v)$$

или эквивалентно

$$\forall v \in W \;\Big|\; T_{g^{-1}} T_f T_g(v) = v.$$

Последнее влечёт включение $g^{-1}fg \in \Gamma(W)$ или включение $f \in g\Gamma(W)g^{-1}$. Рассуждение обратимо, что доказывает (4.1.19). $\diamondsuit$

Следствие 4.1.3 *Для любых множеств $W \subset V$, $S \subset Gr$ и элемента $g \in Gr$ верны равенства*

$$\Gamma\Pi(gSg^{-1}) = g\Gamma\Pi(S)g^{-1}, \tag{4.1.21}$$

$$\Pi\Gamma(T_g(W)) = T_g(\Pi\Gamma(W)). \tag{4.1.22}$$

Пусть W_1, W_2 — подмножества множества V. Будем говорить, что множество W_2 g-подобно множеству W_1, и обозначать $W_2 \overset{g}{\sim} W_1$, если

$$W_2 = T_g(W_1). \tag{4.1.23}$$

Если S_1, S_2 — подмножества группы Gr, то будем говорить, что множество S_2 *g-подобно* множеству S_1 и обозначать $S_2 \overset{g}{\sim} S_1$, если

$$S_2 = gS_1g^{-1}. \tag{4.1.24}$$

Два множества будем называть *подобными*, если существует элемент $g \in Gr$, что они g-подобны. Подобие множеств будем обозначать $W_2 \sim W_1$ или $S_2 \sim S_1$. Отношение подобия между подмножествами есть отношение эквивалентности.

Из леммы 4.1.3 следует, что

$$(W_2 \overset{g}{\sim} W_1) \Rightarrow (\Gamma(W_2) \overset{g}{\sim} \Gamma(W_1)), \tag{4.1.25}$$

$$(S_2 \sim S_1) \Rightarrow (\Pi(S_2) \overset{g}{\sim} \Pi(S_1)). \tag{4.1.26}$$

Более того, для *совершенных* подмножеств W_2, W_1 из V

$$(W_2 \overset{g}{\sim} W_1) \Leftrightarrow (\Gamma(W_2) \overset{g}{\sim} \Gamma(W_1)), \tag{4.1.27}$$

и для *совершенных* подмножеств S_2, S_1 из Gr

$$(S_2 \overset{g}{\sim} S_1) \Leftrightarrow (\Pi(S_2) \overset{g}{\sim} \Pi(S_1)). \tag{4.1.28}$$

В самом деле, если $W_2 \overset{g}{\sim} W_1$, то в силу (4.1.25) $\Gamma(W_2) \overset{g}{\sim} \Gamma(W_1)$. Если $\Gamma(W_2) \overset{g}{\sim} \Gamma(W_1)$, то $\Pi\Gamma(W_2) \overset{g}{\sim} \Pi\Gamma(W_1)$ или $W_2 \overset{g}{\sim} W_1$, так как множества совершенны. Аналогично с учётом (4.1.26) из g-подобия $\Pi(S_2) \overset{g}{\sim} \Pi(S_1)$ вытекает g-подобие $\Gamma\Pi(S_2) \overset{g}{\sim} \Gamma\Pi(S_1)$ или $S_2 \overset{g}{\sim} S_1$ для совершенных множеств S_2, S_1.

Итак, для совершенных множеств W_2, W_1 подобие множеств W_2, W_1 и множеств $\Gamma(W_2), \Gamma(W_1)$ эквивалентно, и для совершенных множеств S_2, S_1 их подобие и подобие множеств $\Pi(S_2), \Pi(S_1)$ эквивалентно.

Если множества подобны, то они совершенны или несовершенны одновременно. В самом деле, если подмножества W_2 и W_1 множества V подобны и множество W_1 совершенно, то существует элемент $g \in Gr$, что $W_2 = T_g(W_1)$, поэтому

$$\Pi\Gamma(W_2) = \Pi\Gamma(T_g(W_1)) = T_g(\Pi\Gamma(W_1)) = T_g(W_1) = W_2,$$

т. е. множество W_2 совершенно. Если подмножества S_2, S_1 множества Gr подобны и множество S_1 совершенно, то существует элемент $g \in Gr$, что $S_2 = gS_1g^{-1}$ и

$$\Gamma\Pi(S_2) = \Gamma\Pi(gS_1g^{-1}) = g\Gamma\Pi(S_1)g^{-1} = gS_1g^{-1} = S_2,$$

т. е. множество S_2 совершенно.

Для непустого множества $W \subset V$ определим множество $Z(W) \subset Gr$ как множество таких элементов $g \in Gr$ что $W \overset{g}{\sim} W$. Множество $Z(W)$ является группой, которую мы назовём *группой симметрий* множества W. Для множества W, состоящего из одного элемента, $W = \{v\}$, множества $\Gamma(W)$ и $Z(W)$ совпадают. В общем случае

$$\Gamma(W) \subset Z(W). \tag{4.1.29}$$

Для пустого множества $W = \emptyset$ полагаем $Z(\emptyset) \equiv Gr$.

Группа симметрий $Z(W)$ обладает следующими свойствами.

Лемма 4.1.4 *Для любого множества $W \subset V$ верно*

$$Z(W) = Z(V \setminus W)$$

и для любых множеств $W_1 \subset V$, $W_2 \subset V$ верно

$$Z(W_1 \bigcap W_2) \supset Z(W_1) \bigcap Z(W_2),$$

$$Z(W_1 \bigcup W_2) \supset Z(W_1) \bigcap Z(W_2).$$

Доказательство. Каждое отображение T_g биекция множества V на себя, поэтому

$$T_g(W \bigcup (V \setminus W)) = T_g(W) \bigcup T_g(V \setminus W) = W \bigcup (V \setminus W),$$

причём, $T_g(W) \bigcap T_g(V \setminus W) = \emptyset$. Если $T_g(W) = W$, то получаем справедливость первого утверждения леммы.

Для доказательства второй формулы введём три дизъюнктных множества

$$A \equiv W_1 \bigcap W_2, \quad B_1 \equiv W_1 \setminus A, \quad B_2 \equiv W_2 \setminus A.$$

Если $g \in Z(W_1)$, то

$$T_g(B_1 \bigcup A) = T_g(B_1) \bigcup T_g(A) = B_1 \bigcup A.$$

Если $g \in Z(W_2)$, то

$$T_g(B_2 \bigcup A) = T_g(B_2) \bigcup T_g(A) = B_2 \bigcup A.$$

Возьмём при $g \in Z(W_1) \bigcap Z(W_2)$ пересечение и объединение последних двух соотношений:

$$(T_g(B_1) \bigcup T_g(A)) \bigcap (T_g(B_2) \bigcup T_g(A)) = (B_1 \bigcup A) \bigcap (B_2 \bigcup A)$$

и

$$(T_g(B_1) \bigcup T_g(A)) \bigcup (T_g(B_2) \bigcup T_g(A)) = (B_1 \bigcup A) \bigcup (B_2 \bigcup A).$$

В силу дизъюнктности множеств A, B_1, B_2 и множеств $T_g(A), T_g(B_1), T_g(B_2)$ последние соотношения приводят к виду

$$T_g(A) = A$$

и

$$T_g(A \bigcup B_1 \bigcup B_2) = A \bigcup B_1 \bigcup B_2. \ \diamondsuit$$

Для непустого множества $S \subset Gr$ определим множество $N(S) \subset Gr$ как множество таких элементов $g \in Gr$, что $S \overset{g}{\sim} S$. Множество $N(S)$ — группа. Для пустого множества $S = \emptyset$, по определению $N(\emptyset) = Gr$. Группу $N(S)$ также назовём *группой симметрий* множества S. Группы симметрий множества S и множества обратных элементов S^{-1} совпадают

$$N(S) = N(S^{-1}). \tag{4.1.30}$$

Справедливо также соотношение

$$N(S) \subset N(group(S)) \tag{4.1.31}$$

для любого множества $S \subset Gr$. В самом деле, если $g \in N(S)$, то $g \in N(S^{-1})$. Неединичный элемент $f \in group(S)$ может быть записан как конечное произведение $f = f_1 f_2 \dots f_k$, элементов f_i, принадлежащих множеству S или множеству S^{-1}. Тогда справедливо представление

$$gfg^{-1} = gf_1 f_2 \dots f_k g^{-1} = (gf_1 g^{-1})(gf_2 g^{-1}) \dots (gf_k g^{-1}).$$

Так как каждый из элементов $gf_i g^{-1}$ принадлежит по условию множеству S или множеству S^{-1}, то $gfg^{-1} \in group(S)$. Доказано включение (4.1.31).

Для g — подобных множеств группы симметрий также g — подобны. В самом деле, если $W_2 \overset{g}{\sim} W_1$, т. е. $W_2 = gW_1 g^{-1}$ и $f \in Z(W_1)$, то $fW_1 f^{-1} = W_1$, откуда $gfg^{-1}gW_1 g^{-1}gf^{-1}g^{-1} = gW_1 g^{-1}$. Соотношения $fW_1 f^{-1} = W_1$ и $gfg^{-1}W_2(gfg^{-1})^{-1} = W_2$ эквивалентны, т. е. $gZ(W_1)g^{-1} = Z(W_2)$. В случае $S_2 \overset{g}{\sim} S_1$, т. е. $S_2 = gS_1 g^{-1}$ условие $f \in N(S_1)$ эквивалентно равенству $fS_1 f^{-1} = S_1$, что эквивалентно равенству $gfg^{-1}gS_1 g^{-1}gf^{-1}g^{-1} = gS_1 g^{-1}$. Итак, включение $f \in N(S_1)$ эквивалентно включению $gfg^{-1} \in N(S_2)$, т. е. $N(S_2) \overset{g}{\sim} N(S_1)$.

Пусть $H \subset Aut(V)$ некоторая подгруппа группы автоморфизмов множества V. Для подмножества $D \subset Aut(V)$ множество всех преобразований из группы H, коммутирующих с каждым преобразованием из множества D, обозначим $Z_H(D)$ — это группа, называемая централизатором множества D в группе H.

Если преобразование $T \in H$ коммутирует с преобразованием T_g, то если $V \in \Pi(g)$, то и $T(v) \in \Pi(g)$. Для множества $S \subset Gr$ поэтому, если точка $v \in \Pi(S)$, то для любого $T \in Z_H(T(S))$ верно $T(v) \in \Pi(S)$. Таким образом, множество $\Pi(S)$ вместе с каждой точкой содержит её орбиту под действием группы $Z_H(T(S))$. Введём группу

$$Zm_H \equiv Z_H(T(Gr)). \tag{4.1.32}$$

По построению для любого множества $S \subset Gr$ справедливо включение $Z_H(T(S)) \subset Zm_H$, поэтому справедлива лемма.

Лемма 4.1.5 *Всякое совершенное множество $W \subset V$ вместе с точкой v содержит её орбиту под действием группы Zm_H.*

4.1.3 Случай линейного представления.

Рассмотрим теперь случай линейного представления, когда множество V — линейное пространство и $T : Gr \to Is(V)$ — гомоморфизм группы Gr в группу линейных изоморфизмов $Is(V)$ пространства V. Каждое отображение $T_g : V \to V$ будет линейным оператором, поэтому множество $\Pi(g)$ — множество неподвижных точек линейного оператора T_g, будет линейным подпространством в V, и следовательно и любое множество $\Pi(S)$, $S \subset Gr$

будет линейным подпространством в V как пересечение линейных подпространств согласно формуле (4.1.3). В частности, для линейного представления любое множество $\Pi(S)$ содержит нуль, следовательно, не пусто. Итак, всякое совершенное множество $W \subset V$ — линейное подпространство в V, всякое совершенное множество $S \subset Gr$ — подгруппа группы Gr.

Для ненулевого скаляра λ и любого множества $W \subset V$ справедливы равенства

$$\Gamma(\lambda W) = \Gamma(W), \tag{4.1.33}$$

$$Z(\lambda W) = Z(W), \tag{4.1.34}$$

так как для элемента $v \in V$ условия $T_g(\lambda v) = \lambda v$ и $T_g(V) = V$ эквивалентны и для подмножества $W \subset V$ условия $T_g(\lambda W) = \lambda W$ и $T_g(W) = W$ эквивалентны.

Выбрав группу $H = Is(V)$, мы видим, что группа Zm_H в данном случае содержит подгруппу всех операторов умножения на скаляр вида λE, $\lambda \neq 0$, E — единичный оператор, что объясняет равенство (4.1.33).

Обозначим через $\operatorname{lin}(W)$ линейную оболочку множества $W \subset V$. Тогда для любого множества $W \subset V$ справедливы соотношения

$$\Gamma(W) = \Gamma(\operatorname{lin}(W)), \tag{4.1.35}$$

$$Z(W) \subset Z(\operatorname{lin}(W)). \tag{4.1.36}$$

В самом деле, так как $W \subset \operatorname{lin}(W)$, то в силу (4.1.7) $\Gamma(W) \supset \Gamma(\operatorname{lin}(W))$. С другой стороны, если $g \in \Gamma(W)$, то для любого элемента $v \in W$ верно $T_g(v) = v$, а следовательно, для линейной комбинации $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, где λ_i — скаляры, а $v_i \in W$ верно $T_g(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T_g(v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, т. е. $g \in \Gamma(\operatorname{lin}(W))$. Если же $g \in Z(W)$, то отображение T_g переводит элементы множества W в элементы множества W. Тогда и линейная комбинация элементов множества W перейдет в линейную комбинацию элементов множества W, что доказывает (4.1.36).

Для линейного представления нуль является неподвижной точкой каждого отображения T_g, поэтому

$$\Gamma(0) = Gr, \tag{4.1.37}$$

$$\Pi(Gr) \supset \{0\}. \tag{4.1.38}$$

Если $\Pi(Gr)$ нетривиальное линейное подпространство, то представление назовём *сократимым*. Всякое неприводимое представление несократимо. Подмножество $S \subset Gr$ назовём *крупным*, если подпространство $\Pi(S)$ тривиально. Несократимость линейного представления означает что точка нуль — совершенное подмножество.

Каждый ненулевой элемент $v \in V$ является несовершенным, ибо совершенное множество обязано содержать вместе с элементом $v \in V$ его линейную оболочку. Таким образом, по группе $\Gamma(v)$ нельзя однозначно восстановить элемент $v \in V$. Рассмотрим вопрос о возможности восстановления элемента $v \in V$ по группе $\Gamma(v)$ с точностью до умножения на скаляр. С этой целью введём следующее понятие: элемент $v \in V$ назовём *псевдосовершенным*, если линейное пространство $\operatorname{lin}(v)$ совершенно. Представление назовём *псевдосовершенным*, если каждый элемент пространства V псевдосовершенен.

Так как подобные множества эквивалентны по совершенству, то для проверки псевдосовершенства элемента $v \neq 0$ достаточно проверить псевдосовершенство элемента, $v' \in V$ такого что одномерные подпространства $\operatorname{lin}(v)$ и $\operatorname{lin}(v')$ подобны. Если отношение подобия разбивает множество одномерных подпространств пространства V на конечное число классов, то проверка псевдосовершенства пространства V сведётся к проверке псевдосовершенства конечного числа элементов — по одному элементу для каждого класса эквивалентности.

4.1.4 Редукция представления группы Gr на подгруппу $Sr \subset Gr$. Редуцируем представление группы Gr на множестве V на подгруппу $Sr \subset Gr$. За отображениями T_g для редуцированного представления сохраним то же обозначение, что и у исходного представления. Для подмножества $W \subset V$ сохраняющее множество редуцированного представления обозначим $\Gamma(Sr; W)$. Для подмножества $S \subset Sr$ сохраняющееся множество редуцированного представления обозначим $\Pi(Sr; S)$. По построению для любых подмножеств $W \subset V$ и $S \subset Sr$ справедливы равенства

$$\Gamma(Sr; W) = \Gamma(W) \bigcap Sr, \tag{4.1.39}$$

$$\Pi(Sr; S) = \Pi(S). \tag{4.1.40}$$

Будем называть некоторое множество Sr-*совершенным*, если оно совершенно в редуцированном представлении с группой Sr.

Если для подгрупп Sr_1, Sr_2 группы Gr справедливо включение $Sr_1 \subset Sr_2$, то всякое Sr_1-совершенное подмножество $W \subset V$, будет и Sr_2-совершенным и всякое Sr_2-совершенное подмножество $S \subset Sr_1$ будет и Sr_1-совершенным. В самом деле, если $\Pi(Sr_1; \Gamma(Sr_1; W)) = W$, то

$$W = \Pi(\Gamma(Sr_1; W)) \supset \Pi(\Gamma(Sr_2; W)) = \Pi(Sr_2; \Gamma(Sr_2; W)) \supset W,$$

что доказывает первое утверждение. С другой стороны, если $\Gamma(Sr_2; \Pi(Sr_2; S)) = S$, то

$$S = \Gamma(Sr_2; \Pi(S)) \supset \Gamma(Sr_1; \Pi(S)) = \Gamma(Sr_1; \Pi(Sr_1; S)) \supset S,$$

что доказывает второе утверждение.

Рассмотрим теперь две подобные подгруппы

$$Sr_2 = gSr_1g^{-1}, \tag{4.1.41}$$

где $g \in Gr$. Тогда для любого множества $W \subset V$ имеем согласно (4.1.39)

$$\Gamma(Sr_2; W) = \Gamma(W) \bigcap Sr_2 = \Gamma(T_gT_{g^{-1}}(W)) \bigcap (gSr_1g^{-1}) =$$

$$(g\Gamma(T_{g^{-1}}(W))g^{-1}) \bigcap (gSr_1g^{-1}) = g(\Gamma(Sr_1; T_{g^{-1}}(W))g^{-1},$$

т. е. справедлива формула

$$\Gamma(gSr_1g^{-1}; W) = g\Gamma(Sr_1; T_{g^{-1}}(W))g^{-1}. \tag{4.1.42}$$

Пусть теперь $S_1 \subset Sr_1$ и $S_2 = gS_1g^{-1}$, тогда

$$\Pi(Sr_2; S_2) = \Pi(S_2) = \Pi(gS_1g^{-1}) = T_g(\Pi(S_1)) = T_g(\Pi(Sr_1; S_1)),$$

т. е. справедлива формула

$$\Pi(Sr_2; S_2) = T_g(\Pi(Sr_1; S_1)). \tag{4.1.43}$$

Введём семейство изоморфизмов группы Gr на себя $Y_g : Gr \to Gr$, $g \in Gr$ вида

$$Y_g(f) \equiv gfg^{-1}, f \in Gr. \tag{4.1.44}$$

Тогда формулы (4.1.42, 4.1.43) можно соответственно записать в виде.

$$\Gamma(Y_g(Sr), T_g(W)) = Y_g(\Gamma(Sr; W)), \tag{4.1.45}$$

$$\Pi(Y_g(Sr); Y_g(S)) = T_g(\Pi(Sr; S)). \tag{4.1.46}$$

Применяя последовательно формулы (4.1.45) и (4.1.46) получим для любого множества $W \subset V$

$$\Pi(Y_g(Sr); \Gamma(Y_g(Sr); T_g(W))) = T_g(\Pi(Sr; \Gamma(Sr; W))). \tag{4.1.47}$$

Из формулы (4.1.47) вытекает, что множество $W \subset V$ будет Sr-совершенным тогда и только тогда, когда множество $T_g^{-1}(W)$ будет $Y_g(Sr)$-совершенным. Итак, между совершенными подмножествами для подгрупп Sr и $Y_g(Sr)$ установлено взаимно — однозначное соответствие.

Обозначим через $O(Sr; x)$ орбиту точки $x \in V$ в данном представлении

$$O(Sr; x) \equiv \{x' \in V \mid \exists f \in Sr,\ x' = T_f(x)\} = \{T_g(x) \mid g \in Sr\}. \tag{4.1.48}$$

Для любых: точки $x \in V$, подгруппы $Sr \subset Gr$ и $g \in Gr$ справедливо соотношение

$$O(Y_g(Sr); x) = T_g(O(Sr; T_{g^{-1}}(x))). \tag{4.1.49}$$

В самом деле

$$O(Y_g(Sr); T_g(x)) = T_g(Sr; x)), \tag{4.1.50}$$

ибо

$$T_{Y_g(Sr)}(T_g(x)) = T_g T_{Sr} T_{g^{-1}}(T_g(x)) = T_g T_{Sr}(x) = T_g(O(Sr; x)).$$

Но соотношения (4.1.50) и (4.1.49) эквивалентны.

Далее в этом пункте рассматриваем линейное представление группы Gr на векторном пространстве V. Пусть $Sr_2 = Y_g(Sr_1)$. Представление с подобными группами Sr_2 и Sr_1 сократимы или несократимы одновременно, так как несократимость линейного представления означает совершенство множества, состоящего из нуля, а при линейном преобразовании T_g нуль переходит в нуль. Представления с подобными группами Sr_2 и Sr_1 псевдосовершенны или непсевдосовершенны одновременно, ибо псевдосовершенство линейного представления означает совершенство всех одномерных подпространств векторного пространства V, а изоморфизм T_g переводит все одномерные подпространства на все одномерные подпространства взаимно — однозначно.

4.1.5 Общекатегорный случай.

Построенная в этом параграфе схема для случая, когда отображения T_g изоморфизмы в теории множеств объекта V или морфизмы в теории векторных пространств естественно распространяется на общекатегорный случай. В обозначениях и терминологии теории категорий мы следуем [4].

Пусть Cat фиксированная категория, которую мы предполагаем конкретной, с совокупностью объектов $Ob(Cat)$. Пусть $V \in Ob(Cat)$ фиксированный объект данной категории и $Is(V)$ — группа изоморфизмов объекта V категории Cat. Представлением группы Gr в категории Cat называется групповой морфизм $T : Gr \to Is(V)$. При фиксированном $g \in Gr$ морфизм $T(g) \in Is(V)$ обозначаем $T_g \equiv T(g)$.

В этом параграфе мы уже рассмотрели случаи, когда категория Cat есть категория множеств и когда категория Cat есть категория векторных пространств. Введём также одно специальное представление в категории групп. А именно, в качестве объекта V в категории групп возьмём саму группу $Gr = V$ и сопоставим каждому элементу $g \in Gr$ изоморфизм $T_g : Gr \to Gr$ вида 4.1.44, $T_g \equiv Y_g$.

Зафиксируем представление группы Gr на объекте V категории Cat. В конкретной категории Cat аналогично п.1 для каждого подобъекта W объекта V определяется сохраняющая группа $\Gamma(W)$ — подобъект объекта Gr в категории групп и по каждой группе $S \subset Gr$ определяется сохраняющийся подобъект $\Pi(S)$ объекта V. Объекты W и $\Gamma(W)$, а также S и $\Pi(S)$ назовём *сопряжёнными* и морфизмы T_g и Y_g, и назовём *сопряжёнными*. Для перехода к сопряжённым объектам введём обозначения: $\Gamma(W) \equiv W^+$, $\Pi(S) \equiv S^+$, для перехода к сопряжённым морфизмам обозначения: $T_g^+ \equiv Y_g$, $Yg^+ \equiv T_g$.

Обратим внимание на то, что при любом представлении группы Gr на объекте любой категории Cat морфизм Y_g один и тот же и определяется лишь самой группой Gr.

Пусть теперь A, B — объекты одной из двух категорий $\mathcal{G}$ или Cat, т. е. либо подгруппы группы Gr либо подобъекты объекта V, а I_g обозначает один из двух морфизмов T_g или Y_g. Тогда результаты п. 2 могут быть записаны в виде следующих формул:

$$(A \subset B) \to (A^+ \supset B^+), \tag{4.1.51}$$

$$A^{++} \supset A, \tag{4.1.52}$$

$$(A^{++}) = A) \Leftrightarrow (\exists B \,|\, A = B^+), \tag{4.1.53}$$

$$A^{+++} = A^+, \tag{4.1.54}$$

$$(I_g(A))^+ = I_g^+(A^+). \tag{4.1.55}$$

Совершенный объект определяется равенством $A^{++} = A$. Между совершенными подобъектами $W \subset V$ и совершенными подобъектами $S \subset Gr$ существует взаимно-однозначное соответствие, устанавливаемое операцией перехода к сопряжённому объекту.

4.1.6 Случай антипредставления. Наряду с представлениями групп мы будем в ряде случаев пользоваться антипредставлениями. *Антипредставлением* группы Gr на объекте $V \in Ob(Cat)$ называется антигомоморфизм $Ta : Gr \to Is(V)$. В отличие от представления $T : Gr \to Is(V)$, для которого $T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2)$ для антипредставления

$$Ta(g_1 g_2) = Ta(g_2)Ta(g_1). \tag{4.1.56}$$

Антипредставление всегда можно свести к представлению следующим образом.

Пусть $inv : Gr \to Gr$ инволютивный антиизоморфизм группы Gr на себя. Мы будем использовать два примера таких отображений

Пример 4.1.1

Gr — произвольная группа $inv(g) \equiv g^{-1}$ для любого элемента $g \in Gr$.

Пример 4.1.2

$Gr = \mathrm{GL}\,(n)$, отображение $inv(G) = G^\top$ для любой матрицы $G \in \mathrm{GL}\,(n)$.

Для любого антипредставления $Ta : Gr \to Is(V)$ рассмотрим суперпозицию

$$T = Ta \circ inv. \tag{4.1.57}$$

Отображение $T : Gr \to Is(V)$ будет представлением, причём справедливо и равенство

$$Ta = T \circ inv, \tag{4.1.58}$$

выражающее исходное антипредставление через построенное представление. Наоборот, имея представление T группы Gr на объекте $V \in Ob(Cat)$, с помощью инволюции inv можно построить соответствующее антипредставление по формуле (4.1.58) и будет справедлива формула (4.1.57).

Рассмотрим теперь представление и антипредставление группы Gr на объекте V, связанные с помощью инволюции inv формулами (4.1.57), (4.1.58). Сравним соотношения

$$T(g)(v) = v, \tag{4.1.59}$$

$$Ta(g)(v) = v, \tag{4.1.60}$$

Исходя из равенства (4.1.59), мы в данном параграфе построили сохраняющее множество $\Gamma(W) \subset Gr$ для множества $W \subset V$ и сохраняющееся множество $\Pi(S) \subset V$ для множества $S \subset Gr$. Аналогично по соотношению (4.1.60) определим сохраняющее множество $\Gamma a(W) \subset Gr$ для множества $W \subset V$ и сохраняющее множество $\Pi a(S) \subset V$ для множества $S \subset Gr$. В силу (4.1.57, 4.1.58) для любых множеств $W \subset V$ и $S \subset Gr$ справедливы соотношения

$$\Gamma a(W) = inv(\Gamma(W)), \tag{4.1.61}$$

$$\Pi a(S) = \Pi(inv(S)). \tag{4.1.62}$$

Соотношения (4.1.61, 4.1.62) позволяют перенести всю развитую в этом параграфе теорию с представлений на антипредставления. Более того, существование инволютивного антиизоморфизма inv для любой группы Gr позволяет ограничиться изучением представлений.

4.1.7 Переход к линейному представлению. По любому представлению группы Gr в конкретной категории Cat с помощью функтора линеаризации F строится линейное представление группы Gr в категории векторных пространств Vec над действительным полем $\mathbf{R}$.

Сначала введём функтор линеаризации F_Δ из категории Cat в категорию Vec. Для этого зафиксируем векторное пространство $\Delta \in Ob(Vec)$ и сопоставим каждому объекту $V \in Ob(Cat)$ векторное пространство $F_\Delta(V) \in Ob(Vec)$ всех отображений в категории множеств объекта V в объект Δ. Если V_1, V_2 — два объекта в категории Cat и $p \in Hom(V_1, V_2)$ их морфизм, то ему сопоставляется морфизм $F_\Delta(v_1, v_2)(p) : F_\Delta(V_2) \to F_\Delta(V_1)$ в категории Vec, который каждое отображение $\varphi : V_2 \to \Delta$ переводит в отображение $T\Psi : V_1 \to \Delta$ по правилу $\psi \equiv \varphi(p)$ взятия суперпозиции. Построенный функтор, задаваемый объектом $\Delta \in Ob(Vec)$ является контравариантным, т. е. если $p_1 : V_1 \to V_2$, $P_2 : V_2 \to V_3$, то $T_{p_1 p_2} = T_{p_2} T_{p_1}$, где $V_1, V_2, V_3, \in Ob(Cat)$.

Если задано представление T_g группы Gr на объекте V категории Cat, то функтор линеаризации F_Δ даёт линейное антипредставление группы Gr на объекте $F_\Delta(V)$ с операторами изоморфизма $T'_g : F_\Delta(V) \to F_\Delta(V)$, определенными правилом $T'_g \equiv$

$F_\Delta(v,v)(T_g)$, сопоставляющими каждому отображению $\varphi : V \to \Delta$ отображение $\psi \equiv T'_g(\varphi)$, т.е. суперпозицию $\psi = \varphi(T_g)$. С помощью оператора инволюции на группе Gr мы получим линейное представление $T''_g \equiv T'_{inv(g)}$ группы Gr на векторном пространстве $F_\Delta(v)$.

В большинстве случаев мы будем вместо объекта $F_\Delta(V)$ рассматривать его подобъект $K_\Delta(V) \subset F_\Delta(V)$, являющийся инвариантным векторным подпространством для семейства операторов $F_\Delta(v,v)(T_g)$, т.е. рассматривать линейное подпредставление группы Gr на векторном подпространстве $K_\Delta(V)$.

Пример 4.1.3

Пусть $\Delta = \mathbf{R}$, Cat — категория, объекты которой векторные пространства, а морфизмы — их афинные отображения, $V = \mathbf{R}^n$. Пусть группа $Gr = Is(V) = Is(\mathbf{R}^n)$ — группа афинных изоморфизмов $\mathbf{R}^n$ на себя, т. е. $T_g = g$. Пространство F_Δ в данном случае есть $F_\Delta(v) = F(\mathbf{R}^n)$ — векторное пространство числовых— функций на $\mathbf{R}^n$. Операторы $T'_g : F(\mathbf{R}^n) \to F(\mathbf{R}^n)$ линейного антипредставления действуют по правилу

$$T'_g(\varphi)(x) = \varphi(g(x)),$$

а операторы линейного представления

$$T''_g(\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}(x)),$$

при выборе инволюции $inv(g) = g^{-1}$.

Пример 4.1.4

Пусть $\Delta = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^4$, Cat — категория векторных пространств и афинных отображений, $Gr \equiv P$ — группа Пуанкаре преобразований $\mathbf{R}^4$. В этом случае операторы линейного антипредставления мы обозначаем, $R_p \equiv T'_g$, $g = p$, т. е. для $\varphi \in F(\mathbf{R}^4)$

$$R_p(\varphi(x)) \equiv \varphi(p(x)). \tag{4.1.63}$$

Любое из линейных подпространств: $C^{(k)}(\mathbf{R}^4), L_p(\mathbf{R}^4), D'(\mathbf{R}^4), S'(\mathbf{R}^4)$ пространства $F(\mathbf{R}^4)$ является инвариантным для операторов R_p и на нём можно рассматривать подпредставления.

§4.2 Об одном представлении группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на линейном пространстве матриц $M(n)$

4.2.1 Представление $T_G(A) \equiv GAG^\top$ группы $Gr = \mathrm{GL}\,(n)$ на векторном пространстве квадратных матриц $V = M(n)$.

Положим теперь в схеме предыдущего параграфа $Gr = \mathrm{GL}\,(n)$ — группа по умножению всех невырожденных квадратных матриц $G \in M(n)$, векторное пространство $V = M(n)$ — пространство всех квадратных матриц и линейный оператор

$$T_G(A) \equiv GAG^\top. \tag{4.2.1}$$

Полученное линейное представление является приводимым. Согласно п. 2.4.3 линейные пространства $Ms(n)$ симметрических матриц и $Ma(n)$ кососимметрических матриц — инвариантные подпространства представления, т.е. при любом $G \in \mathrm{GL}\,(n)$

$$T_G(Ms(n)) = Ms(n), \quad T_G(Ma(n)) = Ma(n) \tag{4.2.2}$$

(формулы (2.4.33)). При этом всё пространство $M(n)$ является прямой суммой пространств $M(n) = Ms(n) \oplus Ma(n)$. Если матрица $A \in M(n)$ невырождена, то множество матриц $\Omega(A)$ при данном представлении состоит из невырожденных матриц (теорема 2.4.1), т.е. совпадает с группой $\Gamma(A)$ при данном представлении. В общем случае

$$\Gamma(A) = \Omega(A) \cap \mathrm{GL}\,(n). \tag{4.2.3}$$

Разлагая матрицу A на сумму симметричной и кососимметричной матриц $A = C + D$, из формул (4.2.3) и (2.4.36) получаем

$$\Gamma(A) = \Gamma(C) \cap \Gamma(D). \tag{4.2.4}$$

Если матрица $A \in M(n)$ невырождена, то группа $\Gamma(A)$ является группой Ли по теореме 2.4.1.

Из формулы (4.2.4) следует, что линейное пространство $\Pi\Gamma(\,\mathrm{lin}\,(A)) \subset M(n)$ содержит линейную оболочку матриц $C, D \in M(n)$

$$\Pi\Gamma(\,\mathrm{lin}\,(A)) \supset \,\mathrm{lin}\,(C, D) \tag{4.2.5}$$

и может быть одномерным лишь в случае, когда $C = 0$ или $D = 0$. Итак, элемент $A \in M(n)$ может быть псевдосовершенным, лишь, если матрица A симметрична или кососимметричная.

Данный вывод вытекает также из следующих соображений. Пусть $H = Is(M(n))$ — группа линейных изоморфизмов линейного пространства $M(n)$. Обозначим централизатор подгруппы $T(\,\mathrm{GL}\,(n))$ в группе H через Zmi. Централизатор Zmi содержит скалярные кратного единичного оператора $\lambda E,\ \lambda \neq 0$ и содержит оператор транспонирования, так как

$$(T_G(A))^\top = GA^\top G^\top = T_G(A^\top). \tag{4.2.6}$$

Согласно лемме (4.1.4) совершенные подмножество в $M(n)$ должно содержать вместе с каждым элементом его орбиту под действием группы Zmi. В частности, совершенное множество $W \subset M(n)$ вместе с матрицей $A = C + D$ должно содержать и матрицу $A^\top = C - D$ и их линейную оболочку, т.е. $W \supset \,\mathrm{lin}\,(C, D)$.

Наша задача показать, что всякая симметричная матрица $A \in M(n)$ псевдосовершенна, т.е.

$$\Pi\Gamma(\,\mathrm{lin}\,(A)) = \,\mathrm{lin}\,(A). \tag{4.2.7}$$

Так как в данном представлении согласно §2.4 (формула (2.4.14)) каждая симметричная матрица подобна матрице вида $Z_{p,q,r}$, а подобные матрицы эквивалентны по псевдосовершенству, то достаточно проверить псевдосовершенство матрицы $Z_{p,q,r}$.

4.2.2 Представление $T'_G(A) \equiv GAG^{-1}$ группы $Gr = \mathrm{GL}\,(n)$ на векторном пространстве квадратных матриц $V = M(n)$.

При той же группе $Gr = \mathrm{GL}\,(n)$ и линейном пространстве $M(n)$ существует и другое естественное линейное представление $T' : \mathrm{GL}\,(n) \to Is(M(n))$ вида

$$T'_G(A) \equiv GAG^{-1}. \tag{4.2.8}$$

Соотношение $T'_G(A) = A$ принимает в этом случае вид $GAG^{-1} = A$ или эквивалентный вид соотношения коммутирования

$$AG = GA. \tag{4.2.9}$$

При этом множества $\Gamma(W)$ и $\Pi(G)$ будут определяться симметрично. Однако соотношение (4.2.9) будет рассматриваться более симметрично, если мы не будем требовать невырожденности матрицы G, т.е. откажемся от представления (4.2.8), а будем изучать, исходя из соотношения (4.2.9), свойства множеств коммутирующих матриц по схеме п. 4.1.2.

4.2.3 Централизатор $Kom(A)$ подмножества A алгебры $\mathcal{A}\ell$.

Алгеброй в данном тексте мы называем ассоциативную алгебру с единицей под полем вещественных чисел в терминологии [53]. Таким образом, подалгебра в наших терминах по определению содержит единичный элемент. Для алгебры $\mathcal{A}\ell$ через $\Lambda \subset \mathcal{A}\ell$ обозначим тривиальную подалгебру $\Lambda = \{\lambda E \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$, где $E \in \mathcal{A}\ell$ единичный элемент.

Для элемента алгебры $A \in \mathcal{A}\ell$ определим его централизатор

$$Kom(A) \equiv \{G \in \mathcal{A}\ell \mid GA = AG\}. \tag{4.2.10}$$

Соответственно, для подмножества $W \subset \mathcal{A}\ell$ определим централизатор

$$Kom(W) \equiv \bigcap_{A \in W} Kom(A). \tag{4.2.11}$$

В силу п. 4.2.2 операция построения централизатора аналогична операциям построения множеств $\Gamma(W)$ и $\Pi(S)$ §4.1. А именно, справедливы свойства:

$$(W_1 \subset W_2) \Rightarrow Kom(W_1) \supset Kom(W_2), \tag{4.2.12}$$

$$Kom(Kom(W)) \supset W, \tag{4.2.13}$$

$$Kom(GWG^{-1}) = GKom(W)G^{-1}, \tag{4.2.14}$$

если G — обратимый элемент алгебры.

В самом деле, условие $D \in Kom(GWG^{-1})$ означает

$$\forall A \in W \mid DGAG^{-1} = GAG^{-1}D,$$

что эквивалентно условию

$$\forall A \in W \mid G^{-1}DGA = AG^{-1}DG,$$

т.е. включению $G^{-1}DG \in Kom(W)$, что доказывает (4.2.14).

Лемма 4.2.1 *Подмножество $W \subset \mathcal{A}\ell$ удовлетворяет условию*

$$KomKom(W) = W, \tag{4.2.15}$$

тогда и только тогда, когда существует подмножество $S \subset \mathcal{A}\ell$, что

$$W = Kom(S). \tag{4.2.16}$$

Доказательства требует лишь достаточность, следующая из соотношений

$$KomKom(W) \supset W, \quad KomKom(S) \supset S, \quad KomKomKom(S) \subset KomS. \ \diamondsuit$$

Следствие 4.2.1 *Для любого подмножества* $W \subset \mathcal{A}\ell$

$$KomKomKom(W) = Kom(W). \tag{4.2.17}$$

Для любого подмножества $W \subset \mathcal{A}\ell$ множество $Kom(W)$ является *подалгеброй* алгебры $\mathcal{A}\ell$. Для пустого множества положим по определению $Kom(\emptyset) \equiv \mathcal{A}\ell$.

Для любого подмножества $W \subset \mathcal{A}\ell$ через $alg\,(W)$ обозначим наименьшую подалгебру, содержащую множество W. Для любого обратимого элемента $G \in \mathcal{A}\ell$.

$$alg\,(GWG^{-1}) = G\,alg\,(W)G^{-1}. \tag{4.2.18}$$

Важным свойством централизатора является совпадение множеств

$$Kom(W) = Kom(\,alg\,(W)) \tag{4.2.19}$$

для любого подмножества $W \subset \mathcal{A}\ell$. В самом деле, включение $Kom(W) \supset Kom(\,alg\,(W))$ следует из (4.2.12). А обратное включение $Kom(\,alg\,(W)) \supset Kom(W)$ следует из того, что если элемент $G \in \mathcal{A}\ell$ коммутирует с любым элементом из множества W, то он коммутирует и с любым полиномом от этих элементов. Итак, при вычислении централизатора множества W достаточно вычислить централизатор любого множества W', порождающего ту же подалгебру $alg\,(W') = alg\,(W)$.

Предположим далее, что алгебра $\mathcal{A}\ell$ конечномерна и определим для каждого подмножества $W \subset \mathcal{A}\ell$ два натуральных числа $rank(W) = \dim(\,alg\,(W))$ — размерность алгебры $alg\,(W)$ и $h(W)$ — наименьшее натуральное число такое, что всякий моном степени $k \geq h(W)$ от переменных, принадлежащих множеству W, представим в виде полинома степени менее $h(W)$ от переменных, принадлежащих множеству W. Другими словами, линейная оболочка всех мономов степени менее $h(W)$ от элементов из множества W совпадает с линейным пространством $alg\,(W)$. Подалгебру $alg\,(W)$ мы будем называть также *алгебраическим замыканием* множества W. На конечномерной алгебре $\mathcal{A}\ell$ существует нормирование (см.[53]), задающее топологию на множестве $\mathcal{A}\ell$, в которой каждое линейное подпространство замкнуто. Назовём *функциональным замыканием* множества W подмножество $fun(W) \subset \mathcal{A}\ell$, являющееся замыканием множества $alg\,(W)$ в топологическом пространстве $\mathcal{A}\ell$. Так как $alg\,(W)$ — конечномерное линейное пространство, то оно и замкнуто в $\mathcal{A}\ell$, т.е. $alg\,(W) = fun(W)$ — в конечномерном случае алгебраическое замыкание совпадает с функциональным.

Далее мы рассматриваем случай, когда алгебра $\mathcal{A}\ell = M(n)$ есть алгебра квадратных вещественных матриц. В этом случае для любой матрицы $A \in M(n)$

$$KomKom(A) = \,alg\,(A)$$

(см.[46], с.205), но существует подалгебра $W \subset \mathcal{A}\ell$ — подалгебра нижних треугольных матриц, для которой

$$KomKom(W) \neq W$$

(см.[51], с.289).

Для любого множества матриц $W \subset M(n)$

$$Kom(W^\top) = (Kom(W))^\top, \tag{4.2.20}$$

ибо соотношение $AG = GA$ и соотношение $G^\top A^\top = A^\top G^\top$ эквивалентны ($A, G \in M(n)$).

4.2.4 Связь сохраняющегося множества $\Pi(S)$ и централизатора $Kom(S)$.

Пусть $B \in M(n)$ невырожденная матрица. Тогда группа $\Omega(B) = \Gamma(B)$ состоит из невырожденных матриц, и для любой матрицы $A \in M(n)$ соотношение

$$GAG^{\top} = A \tag{4.2.21}$$

при $G \in \Gamma(B)$ в силу леммы 2.4.3 эквивалентно соотношению

$$GA(B^{-1}G^{-1}B) = A$$

или

$$G(AB^{-1}) = (AB^{-1})G \tag{4.2.22}$$

Из эквивалентности соотношений (4.2.21) и (4.2.22) вытекает лемма.

Лемма 4.2.2 *Для любого множества $W \subset M(n)$ и невырожденной матрицы $B \in M(n)$ выполняется соотношение*

$$\Gamma(W) \bigcap \Gamma(B) = \Gamma(B) \bigcap Kom(WB^{-1}). \tag{4.2.23}$$

Следствие 4.2.2 *Если множество $W \subset M(n)$ содержит невырожденную матрицу B, то*

$$\Gamma(W) = \Gamma(B) \bigcap Kom(WB^{-1}). \tag{4.2.24}$$

Из эквивалентности соотношений (4.2.21) и (4.2.22) также вытекает лемма.

Лемма 4.2.3 *Если B — невырожденная матрица и $S \subset \Gamma(B)$, то*

$$\Pi(S) = Kom(S)B. \tag{4.2.25}$$

Следствие 4.2.3 *Для невырожденной матрицы B*

$$\Pi\Gamma(B) = Kom(\Gamma(B))B. \tag{4.2.26}$$

Формула (4.2.25) даёт важную информацию о строение сохраняющегося множества $\Pi(S)$ и сводит вычисление сохраняющегося подпространства $\Pi(S)$ к вычислению централизатора $Kom(S)$. Вычисление же централизатора любого множестваS сводится к вычислению централизатора от конечного множества элементов $S' \subset M(n)$, порождающего ту же алгебру $alg\,(S) = alg\,(S')$.

4.2.5 Свойства алгебры Ли связной группы Ли.

В дальнейшем мы будем использовать следующее свойство матричных групп.

Лемма 4.2.4 *Пусть $S \subset M(n)$ связная подгруппа, $Q \subset M(n)$ — замкнутая подгруппа и Q содержит некоторую окрестность единицы группы S. Тогда $Q \supset S$.*

Доказательство. Множество $Q \cap S$ замкнуто в S, ибо множество Q замкнуто в объемлющем пространстве $M(n)$. Пусть $U \subset S$ — окрестность единицы группы S, такая, что $U \subset Q$. Если точка $G \in Q \cap S$, то $GU \subset Q \cap S$, т.е. множество $Q \cap S$ открыто в S. В силу связности группы S множество $Q \cap S$ открытое и замкнутое в S совпадает со всем множеством S. $\diamondsuit$

Следствие 4.2.4 *Если две связные подгруппы матриц $S_1 \subset M(n)$ и $S_2 \subset M(n)$ совпадают в некоторой окрестности единицы, то они и совпадают $S_1 = S_2$.*

Рассмотрим теперь группу Ли $S \subset M(n)$ и обозначим через $l(S) \subset M(n)$ её касательное пространство в единице. Множество $l(S)$ — линейное подпространство в $M(n)$, более того — алгебра Ли. Если S_e связная компонента единицы группы Ли S, то касательные пространства $l(S)$ и $l(S_e)$ совпадают. Таким образом, разные группы Ли могут иметь совпадающие алгебры Ли. Однако, в классе связных матричных групп Ли соответствие между группами Ли $S \subset M(n)$ и алгебрами Ли $l(S) \subset M(n)$ взаимнооднозначно. Действительно, для любой матрицы $A \in M(n)$ определена её экспонента $\exp(A) \in \mathrm{GL}\,(n)$. Если у групп Ли $S_1 \subset M(n)$, $S_2 \subset M(n)$ касательные пространства совпадают $l(S_1) = l(S_2)$, то совпадают и их образы при экспоненциальном отображении $\exp(l(S_1)) = \exp(l(S_2))$. Но множества $\exp(l(S_1)) \subset S_1$ и $\exp(l(S_2)) \subset S_2$ содержат некоторые окрестности единицы групп S_1 и S_2, соответственно. По следствию 4.2.4 группы Ли S_1 и S_2 совпадают.

Вообще говоря, экспонента от алгебры Ли $l(S)$ не накрывает всей компоненты единицы группы Ли матриц S, т.е. имеет место включение $\exp(l(S)) \subset S$, которое может быть строгим для некоторых связных групп Ли $S \subset M(n)$. Однако, следующие алгебры совпадают.

Лемма 4.2.5 *Если $S \subset M(n)$ связная группа Ли, то $alg\,(l(S)) = alg\,(S)$.*

Доказательство. Если матрица $A \in l(S)$, то существует однопараметрическая группа $G(\alpha) \subset S$, что $A = \lim\limits_{\triangle\alpha \to 0} \frac{G(\alpha)-G(0)}{\triangle\alpha}$. Но матрица $\frac{1}{\triangle\alpha}(G(\alpha) - G(0)) \in alg\,(S)$, а так как множество $alg\,(S)$ замкнуто в $M(n)$, то и предел $A \in alg\,(S)$. Мы доказали включение $l(S) \subset alg\,(S)$, и следовательно включение $alg\,(l(S)) \subset alg\,(S)$.

Перейдём к доказательству обратного включения. Так как $alg\,(l(S)) = fun(l(S))$, то $alg\,(l(S)) \supset \exp(l(S))$. Но множество $\exp(l(S))$ содержит некоторую окрестность единицы группы S. Алгебра $alg\,(l(S))$ является замкнутой в $M(n)$ полугруппой по умножению, поэтому в силу леммы 4.2.4 справедливо включение $alg\,(l(S)) \supset S$, а следовательно, и включение $alg\,(l(S)) \supset alg\,(S)$. $\diamondsuit$

Касательное многообразие матричной группы Ли S обладает следующим свойством.

Лемма 4.2.6 *Для любого элемента G группы Ли $S \subset M(n)$ справедливо равенство*

$$Gl(S)G^{-1} = l(S)$$

Доказательство. Для любого фиксированного элемента $G_f \in S$ отображение, переводящее элемент $G \in S$ в элемент $G_f G G_f^{-1}$, — групповой изоморфизм группы S на себя, поэтому касательное отображение осуществляет линейный изоморфизм касательного пространства группы S в единице на себя. $\diamondsuit$

Пусть теперь $B \in \mathrm{GL}\,(n)$ — невырожденная матрица и $S \subset \Gamma(B)$ замкнутая подгруппа группы Ли $\Gamma(B)$, являющаяся, следовательно, также группой Ли по теореме Картана (см.[53], с. 242). Если группа S состоит из конечного числа компонент связности $S = \bigcup\limits_{i=0}^{m} S_i$ и компонента связности S_0 содержит единицу, то $alg\,(S) = alg\,(l(S), \bigcup\limits_{i=1}^{m} G_i)$, где $G_i \in S_i$ — произвольно выбранные элементы. Выбирая в касательном пространстве $l(S)$ конечное число элементов $Q_1, Q_2, \dots Q_k$ так, чтобы $alg\,(Q_1, Q_2, \dots Q_k) \supset l(S)$ мы получим конечное множество элементов, порождающее алгебру $alg\,(S)$.

$$alg\,(S) = alg\,(Q_1, Q_2, \dots Q_k, G_1, G_2, \dots G_m). \tag{4.2.27}$$

Согласно п. 4.2.4

$$\Pi(S) = Kom(Q_1, Q_2, \dots Q_k, G_1, G_2, \dots G_m)B. \tag{4.2.28}$$

Вычисление же централизатора от конечного множества матриц сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с n^2 неизвестных.

4.2.6 Вычислим централизаторы множеств $Ms(n)$ и $Ma(n)$ в алгебре $M(n)$.

Во-первых, покажем что

$$Kom(Ms(n)) = \Lambda. \tag{4.2.29}$$

При $n = 1$ это утверждение верно. В случае $n \geq 2$ рассмотрим условие коммутации произвольной матрицы A с матрицей G^i у которой элемент с индексами ii равен единицы, а остальные равны нулю. Оно имеет вид

$$G^i A = A G^i$$

откуда вытекает, что все элементы i-той строки, кроме G^i_{ii} равны нулю и все элементы i-того столбца, кроме G^i_{ii} равны нулю. Итак, матрица $A \in Kom(Ms(n))$ диагональная. Введём симметричную матрицу $G^{ij}, i \neq j$, у которой элементы $G^{ij}_{ij} = G^{ij}_{ji} = 1$, остальные равны нулю. Условие коммутации матрицы G^{ij} с диагональной матрицей $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ даёт $\lambda_i = \lambda_j$. Доказано (4.2.29).

Во-вторых, покажем, что

$$Kom(Ma(n)) = \Lambda. \tag{4.2.30}$$

при $n \neq 2$.

При $n = 1$ выполняется равенства $Ma(n) = \emptyset$ и (4.2.30) верно по определению. При $n > 2$ рассмотрим условие коммутации матрицы A с антисимметричной матрицей $G^{ij}_a, i \neq j$ у которой элементы $G^{ij}_{ij} = 1, G^{ij}_{ji} = -1$, а остальные элементы равны нулю. Условие коммутации

$$G^{ij}_a A = A G^{ij}_a$$

приводит к соотношениям для элементов матрицы A:

$$A_{ii} = A_{jj}, \tag{4.2.31}$$

$$A_{ik} = 0 = A_{ki}, \tag{4.2.32}$$

при $k \neq i, k \neq j$.

Из условий (4.2.31, 4.2.32) при $n > 2$ следует (4.2.30).

При $n = 2$ равенство (4.2.30) при этом $Kom(Ma(2))$ есть двумерное линейное пространство, состоящее из линейных комбинаций матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и единичной матрицы $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Централизатор множества $Ma(n)$ не изменяется при умножении этого множества на симметричную невырожденную матрицу ($n \neq 2$).

Лемма 4.2.7 *Если* $B \in M(n)$ *симметричная невырожденная матрица, то при* $n \neq 2$

$$Kom(Ma(n)B) = \Lambda, \tag{4.2.33}$$

$$Kom(BMa(n)) = \Lambda. \tag{4.2.34}$$

Доказательство. Сначала докажем соотношение (4.2.33) для случая $B = Z_k$ — матрица, введённая в п. 2.4.3. Если $n > 2$, то для антисимметричной матрицы G_a^{ij} матрица $G_a^{ij} Z_k$ есть либо $\pm G_a^{ij}$, либо $\pm G^{ij}$, поэтому условие коммутации матрицы A с матрицей $G_a^{ij} B$ даёт соотношения (4.2.31, 4.2.32), откуда получаем

$$Kom(Ma(n)Z_k) = \Lambda, \quad n > 2. \tag{4.2.35}$$

Для произвольной симметричной невырожденной матрицы B существуют невырожденная матрица $W \in M(n)$, что справедливо представление (см. п. 2.4.3)

$$B = W Z_k W^{\top}. \tag{4.2.36}$$

Далее в силу соотношения (4.2.2)

$$Ma(n) = W^{-1\top} Ma(n) W^{-1}, \tag{4.2.37}$$

поэтому из (4.2.36), (4.2.37) получаем

$$Kom(Ma(n)B) = Kom(W^{-1\top} Ma(n) W^{-1} W Z_k W^{\top}) = Kom(W^{-1\top} Ma(n) Z_k W^{\top}).$$

Далее благодаря (4.2.14), (4.2.35)

$$Kom(W^{-1\top} Ma(n) Z_k W^{\top}) = W^{-1\top} Kom(Ma(n) Z_k) W^{\top} = W^{-1\top} \Lambda W^{\top} = \Lambda.$$

Соотношение (4.2.33) доказано.

Соотношение (4.2.34) вытекает из соотношения (4.2.33) и равенств

$$B Kom(Ma(n)B) B^{-1} = Kom(BMa(n)BB^{-1}) = Kom(BMa(n)). \ \diamondsuit$$

4.2.7 Симметричная невырожденная матрица как псевдосовершенный элемент представления.

Пусть B симметричная невырожденная матрица. Покажем, что она является псевдосовершенным элементом рассматриваемого представления, т.е.

$$\Pi\Gamma(B) = \operatorname{lin}(B) \tag{4.2.38}$$

Согласно следствию 4.2.3 достаточно доказать, что централизатор

$$Kom(\Gamma(B)) = \Lambda. \tag{4.2.39}$$

Поскольку любой централизатор содержит тривиальную алгебру Λ, требуется лишь оценка сверху для централизатора $Kom(\Gamma(B))$. Согласно формуле (4.2.19)

$$Kom(\Gamma(B)) = Kom(\operatorname{alg}(\Gamma(B))). \tag{4.2.40}$$

Так как алгебраическое замыкание в конечномерной алгебре совпадает с функциональным, то

$$\mathit{alg}\,(\Gamma(B)) = \mathit{fun}(\Gamma(B)). \tag{4.2.41}$$

Но функциональное замыкание содержат касательное пространство в единице $l(\Gamma(B))$ группы Ли $\Gamma(B)$

$$\mathit{fun}(\Gamma(B)) \supset l(\Gamma(B)). \tag{4.2.42}$$

Из (4.2.40–4.2.42) следует оценка

$$\mathit{Kom}(\Gamma(B)) \subset \mathit{Kom}(l(\Gamma(B))). \tag{4.2.43}$$

Описание матриц K из касательного пространства группы Ли $\Gamma(B)$ получается дифференцированием в единице соотношения

$$G(\alpha)BG(\alpha)^{\top} = B \tag{4.2.44}$$

по параметру α:

$$KB + BK^{\top} = 0, \tag{4.2.45}$$

где

$$K = \frac{d}{d\alpha}G(\alpha)\bigg|_{\alpha=0}, \quad G(0) = E. \tag{4.2.46}$$

Поскольку матрица B симметрична, условие (4.2.45) эквивалентно условию

$$(KB)^{\top} = -KB$$

или

$$KB \in \mathit{Ma}(n).$$

Итак,

$$l(\Gamma(B)) = \mathit{Ma}(n)B^{-1}. \tag{4.2.47}$$

Согласно лемме 4.2.6 при $n \neq 2$

$$\mathit{Kom}(\mathit{Ma}(n)B^{-1}) = \Lambda, \tag{4.2.48}$$

что вместе с (4.2.43) доказывает (4.2.39).

Перед тем как перейти к случаю $n = 2$ заметим, что если в данном представлении матрицы B_2 и B_1 G-подобны, т.е. $B_2 = T_G(B_1)$, то согласно лемме 4.1.3

$$\Gamma(B_2) = \Gamma(T_G(B_1)) = G\Gamma(B_1)G^{-1},$$

следовательно

$$\mathit{Kom}(\Gamma(B_2)) = G\mathit{Kom}(\Gamma(B_1))G^{-1}. \tag{4.2.49}$$

Итак, для подобных элементов $B_1, B_2 \in M(n)$ условия

$$\mathit{Kom}(\Gamma(B_2)) = \Lambda$$

и

$$\mathit{Kom}(\Gamma(B_1)) = \Lambda$$

эквивалентны.

Сделанное замечание позволяет в случае $n = 2$ рассмотреть лишь две невырожденные симметричные матрицы: единичную $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и матрицу $Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Отличие случая $n = 2$ от случая более высокой размерности заключается в том, что для оценки сверху централизатора $Kom(\,alg\,(\Gamma(B)))$ кроме касательного пространства в единице используем также неодносвязность группы Ли $\Gamma(B)$.

По рецепту п. 4.2.5 сначала запишем алгебру

$$alg\,(\Gamma(B)) = alg\,(l(\Gamma(B)), -E, Z_1, -Z_1), \tag{4.2.50}$$

где $E, -E, Z_1, -Z_1$ представители всех компонент связности группы $\Gamma(B)$ при $B = E$ или $B = Z_1$. Касательное пространство $l(\Gamma(B))$ в данном случае согласно формуле (4.2.47) одномерно. Поэтому в силу (4.2.47), если $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то при $B = E$

$$alg\,(\Gamma(B)) = alg\,(\Phi, Z_1), \tag{4.2.51}$$

а при $B = Z_1$

$$alg\,(\Gamma(B)) = alg\,(\Psi, Z_1). \tag{4.2.52}$$

Так как $\Psi = \Phi Z_1$ и $\Phi = \Psi Z_1$, то

$$alg\,(\Phi, Z_1) = alg\,(\Psi, Z_1). \tag{4.2.53}$$

Непосредственно проявляется, что

$$Kom(\,alg\,(\Phi, Z_1)) = \Lambda,$$

что доказывает (4.2.39).

Зафиксируем полученный результат.

Лемма 4.2.8 *Для симметричной невырожденной матрицы $B \in M(n)$ верны соотношения (4.2.38), (4.2.39), (4.2.47).*

4.2.8 Симметричная вырожденная матрица как псевдосовершенный элемент представления.

Пусть теперь B симметричная вырожденная матрица и $k = rang(B) < n$ её ранг. Сначала рассмотрим случай, когда матрица B специального вида $B = Z^n_{p,q,r},\ p + q = k,\ r = n - k$. Согласно п. 2.4.3 в этом случае группа $\Gamma(B)$ состоит из всех блочных матриц G вида

$$G = \begin{pmatrix} G' & K \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \tag{4.2.54}$$

где $G' \in \Gamma(Z^k_p),\ Q \in \mathrm{GL}\,(r),\ K \in M(k \times r)$.

Если матрица $A \in M(n)$ коммутирует с матрицей G вида (4.2.54), то записывая матрицу A в блочном виде $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, где $A_{11} \in M(k),\ A_{22} \in M(r),\ A_{12} \in M(k \times r),\ A_{21} \in M(r \times k)$, мы получаем условие коммутации $GA = AG$ в следующей форме

$$G'A_{11} + KA_{21} = A_{11}G', \tag{4.2.55}$$

$$QA_{22} = A_{21}K + A_{22}Q, \tag{4.2.56}$$

$$G'A_{12} + KA_{22} = A_{11}K + A_{12}Q, \tag{4.2.57}$$

$$QA_{21} = A_{21}G'. \tag{4.2.58}$$

В частном случае $K = 0$ получаем в силу (4.2.55), что матрица $A_{11} \in M(k)$ коммутирует со всеми матрицами $G' \in \Omega(Z_p^k)$, что согласно предыдущему пункту влечет $A_{11} = \lambda' E_k$, а матрица $A_{22} \in M(r)$ коммутирует со всеми матрицами $Q \in \mathrm{GL}\,(k)$, т.е. $A_{22} = \lambda'' E_r$. В соотношениях (4.2.57, 4.2.58) положим $K = 0$, $Q = \lambda E_r$, тогда при любом $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$ получаем

$$G'A_{12} = \lambda A_{12} \tag{4.2.59}$$

$$A_{21}G' = \lambda A_{21}. \tag{4.2.60}$$

Так как (4.2.59, 4.2.60) должны выполняться при фиксированных A_{12}, A_{22}, G' — при любом $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$, то это возможно лишь при $A_{12} = 0$, $A_{21} = 0$. Итак, мы доказали, что матрица $A \in Kom(\Gamma(Z_{p,q,r}^n))$ имеет вид $A = \begin{pmatrix} \lambda E_k' & 0 \\ 0 & \lambda'' E_r \end{pmatrix}$. Подставив это выражение в систему (4.2.55–4.2.58), мы получим условие

$$\lambda'' K = \lambda' K, \tag{4.2.61}$$

которое должно выполняться для любой матрицы $K \in M(k \times r)$, что возможно лишь при $\lambda' = \lambda''$. Итак, доказано соотношение

$$Kom(\Gamma(Z_{p,q,r}^n)) = \Lambda. \tag{4.2.62}$$

Перейдем теперь к описанию множества $\Pi\Gamma(Z_{p,q,r}^n)$. Для матрицы $G \in \Gamma(Z_{p,q,r}^n)$ вида (4.2.54) и блочной матрицы A условие $GAG^\top = A$ в блочном виде есть

$$G'A_{11}G'^\top + KA_{21}G'^\top + G'A_{12}K^\top + KA_{22}K^\top = A_{11}, \tag{4.2.63}$$

$$QA_{22}Q^\top = A_{22}, \tag{4.2.64}$$

$$G'A_{12}Q^\top + KA_{22}Q^\top = A_{12}, \tag{4.2.65}$$

$$QA_{22}G'^\top + QA_{22}K^\top = A_{21}. \tag{4.2.66}$$

В системе (4.2.63–4.2.66) положим $K = 0$ и $Q = \lambda E_r$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$. Получим, что для каждого $G' \in \Omega(Z_p^k)$ выполнено условие

$$G'A_{11}G'^\top = A_{11}, \tag{4.2.67}$$

что согласно предыдущему пункту влечет $A_{11} = \lambda' Z_p^k$, $\lambda' \in \mathbf{R}$. Соотношение (4.2.64) принимает вид

$$(\lambda^2 - 1)A_{22} = 0, \tag{4.2.68}$$

откуда $A_{22} = 0$ при $|\lambda| \neq 1$. Соотношения (4.2.65), (4.2.66) принимают вид

$$\lambda G'A_{12} = A_{12}, \tag{4.2.69}$$

$$\lambda A_{21}G'^\top = A_{21}, \tag{4.2.70}$$

и должны выполняться при фиксированных G', A_{12}, A_{21} при любом $\lambda \neq 0$. Это возможно лишь при $A_{12} = 0$, $A_{21} = 0$.

Итак, мы убедились что

$$\Pi\Gamma(Z^n_{p,q,r}) = \operatorname{lin}(Z^n_{p,q,r}). \tag{4.2.71}$$

Мы вычислили $Kom(\Gamma(B))$ и $\Pi\Gamma(B)$ для симметричной матрицы $B = Z^n_{p,q,r}$, но поскольку любая симметричная матрица B в данном представлении подобна некоторой матрице вида $Z^n_{p,q,r}$, то теперь нетрудно вычислить величины $Kom(\Gamma(B))$ и $\Pi\Gamma(B)$ для любой симметричной матрицы.

Пусть

$$B = WZ^n_{p,q,r}W^\top, \tag{4.2.72}$$

где $W \in \mathrm{GL}(n)$. Тогда по следствию 4.1.3

$$\Pi\Gamma(B) = W(\Pi\Gamma(Z^n_{p,q,r}))W^\top = W(\operatorname{lin}(Z^n_{p,q,r}))W^\top = \operatorname{lin}(B).$$

По лемме 4.1.3

$$\Gamma(B) = W\Gamma(Z^n_{p,q,r})W^{-1}.$$

и по формуле (4.2.14)

$$Kom\Gamma(B) = Kom(W\Gamma(Z^n_{p,q,r})W^{-1}) = W Kom(\Gamma(Z^n_{p,q,r}))W^{-1} = W\Lambda W^{-1} = \Lambda.$$

Результаты данного пункта закрепим в теореме.

Теорема 4.2.1 *Для любой симметричной матрицы $B \in Ms(n)$ справедливы равенства (4.2.39) и (4.2.38).*

4.2.9 Связная окрестность единицы группы Ли.

Вернёмся к вопросам п. 4.2.5 о свойствах связной компоненты единицы группы Ли.

Для группы Gr и её подмножеств $U \subset Gr$, $W \subset Gr$ через $UW \subset Gr$ обозначим подмножество всех произведений вида $g_1g_2 \in Gr$, где $g_1 \in U, g_2 \in W$, в частности, вводим обозначение $UU = U^2$, $\underbrace{UU\ldots U}_{n} = U^n$. Если множество $U \subset Gr$ содержит единичный элемент группы $e \in U$, то последовательность множеств U^n монотонна: $U^n \subset U^{n+1}, n = 1, 2, \ldots$. В этом случае определим множество

$$U^\infty \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n. \tag{4.2.73}$$

Далее мы используем следующее свойство топологических групп.

Лемма 4.2.9 *Пусть U — связная симметричная окрестность единицы топологической группы S, тогда U^∞ — подгруппа группы S, являющаяся связной компонентой единицы.*

Доказательство. Множество U^2 открыто и связано, как объединение открытых связных множеств $U^2 = \bigcup Ug$, содержащих единицу $g \in U$ (см.[38], с.141). По индукции проверяется, что каждое тождество $U^{n+1} = \bigcup_{a\in U} U^n g$ есть объединение открытых связных множеств, содержащих единицу, поэтому каждое множество $U^n, n = 1, 2, \ldots$ открыто, связно и содержит единицу. Отсюда вытекает, что объединение $U^\infty \equiv \bigcup_{n=1}^\infty U^n$ открыто, связно, содержит единицу. Но подмножество $U^\infty \subset S$ является подгруппой группы S, локально замкнуто, а следовательно, и замкнуто в S

(см.[5], с.23). Таким образом, подгруппа U^∞ — связная компонента единицы топологической группы S. $\Diamond$

Пусть топологическая группа S является группой Ли, тогда существует симметричная связная окрестность единицы $U \subset S$, на которой экспоненциальное отображение является гомеоморфизмом, причём логарифм переводит множество U в открытую абсолютно выпуклую окрестность нуля в линейном пространстве $l(S)$ — касательном пространстве в единице группы S (см.[53], с.73). Таким образом, каждый элемент $g \in U$ соединим с единичным элементом однопараметрической подгруппой $g = \exp(t\Gamma)|_{t=1}$, $\Gamma \in l(S)$. В силу леммы 4.2.10 связная компонента единицы S_e группы Ли S представима в виде $S_e = U^\infty$, откуда следует, то каждый элемент $g \in S_e$ представим в виде

$$g = g_1 g_2 \dots g_n, \quad g_1 \in U, \ g_2 \in U, \ \dots g_n \in U \tag{4.2.74}$$

при некотором натуральном n. Окрестность единицы U в группе S с указанными свойствами назовём *канонической.*

4.2.10 Свойства сохраняющегося множества $\Pi(S)$.

Так как мы рассматриваем линейное представление, то для любого множества $W \subset M(n)$ множество $\Gamma(W) \subset \mathrm{GL}\,(n)$ является группой матриц, а множество $\Pi(S) \subset M(n)$ — линейным пространством матриц для любого множества $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$. Множества $\Gamma(W) \subset \mathrm{GL}\,(n)$ и $\Pi(S) \subset M(n)$ являются, вообще говоря, не любой подгруппой и любым линейным подпространством, а совершенными в данном представлении объектами.

В силу эквивалентности равенств $GAG^\top = A$ и $GA^\top G^\top = A^\top$ справедливы соотношения

$$\Pi(S) = \Pi^\top(S), \tag{4.2.75}$$

$$\Gamma(W) = \Gamma(W^\top), \tag{4.2.76}$$

для любых подмножеств $W \subset M(n)$, $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$. Назовём множество матриц $W \subset M(n)$ *самосопряжённым,* если

$$W = W^\top. \tag{4.2.77}$$

Таким образом, в рассматриваемом представлении множество $\Pi(S) \subset M(n)$ является самосопряжённым линейным подпространством при любом множестве $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$. Для любого подмножества $W \subset M(n)$ обозначим через $\mathrm{lit}\,(W) \subset M(n)$ наименьшее линейное самосопряжённое линейное пространство, его содержащее,

$$\mathrm{lit}\,(W) = \mathrm{lin}\,(W \cup W^\top). \tag{4.2.78}$$

Для рассматриваемого представления справедливо следующее усиление равенства (4.1.35). Для любого подмножества $W \subset M(n)$ верно

$$\Gamma(W) = \Gamma(\mathrm{lit}\,(W)). \tag{4.2.79}$$

В самом деле, в силу (4.2.76),(4.1.35), (4.2.78)

$$\Gamma(W) = \Gamma(W \cup W^\top) = \Gamma(\mathrm{lin}\,(W \cup W^\top)) = \Gamma(\mathrm{lit}\,(W)).$$

Рассмотрим теперь следующую связь между свойствами множеств $\Pi(S)$ и $\Pi(S^\top)$.

Лемма 4.2.10 *Для любого множества* $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ *верно включение*

$$\Pi(S)\Pi(S^\top)\Pi(S) \subset \Pi(S). \qquad (4.2.80)$$

Доказательство. Пусть $A_1, A_3 \in \Pi(S)$, $A_2 \in \Pi(S^\top)$ и $Q \in S$, тогда выполнены условия

$$QA_1Q^\top = A_1, \qquad (4.2.81)$$

$$Q^\top A_2Q = A_2, \qquad (4.2.82)$$

$$QA_3Q^\top = A_3. \qquad (4.2.83)$$

Условие (4.2.82) эквивалентно условию

$$Q^{T-1}A_2Q^{-1} = A_2. \qquad (4.2.84)$$

Перемножив (4.2.81), (4.2.84), (4.2.83) получим

$$QA_1A_2A_3Q^\top = A_1A_2A_3,$$

т.е. $A_1A_2A_3 \subset \Pi(S)$. $\diamondsuit$

Подмножество матриц $W \subset M(n)$ назовём *оддой*, если оно удовлетворяет трём условиям:

$$1)\,\mathrm{lin}\,(W) = W, \quad 2) W = W^\top, \quad 3) WWW \subset W. \qquad (4.2.85)$$

В этих терминах из леммы вытекает.

Следствие 4.2.5 *Если* $S = S^\top$, *то множество* $\Pi(S)$ *является оддой.*

Для любой невырожденной матрицы A согласно лемме 2.4.2 справедливо равенство

$$\Gamma(A^{-1}) = \Gamma^\top(A). \qquad (4.2.86)$$

Поэтому для подмножества $W \subset \mathrm{GL}\,(n)$ верно соотношение

$$\Gamma(W^{-1}) = \Gamma^\top(W). \qquad (4.2.87)$$

В частности,

$$(W = W^{-1}) \Longrightarrow (\Gamma(W) = \Gamma^\top(W)). \qquad (4.2.88)$$

Для множества матриц $W \subset M(n)$ обозначим через $odd(W) \subset M(n)$ наименьшую одду, содержащую множество W. Рассмотрим вопрос: для каких множеств $W \subset M(n)$ равенство (4.2.79) можно усилить до равенства

$$\Gamma(W) = \Gamma(odd(W)). \qquad (4.2.89)$$

Так как $\Gamma(W) = \Gamma(\Pi\Gamma(W))$, то для выполнения (4.2.89) достаточно, чтобы

$$\Gamma(W) = \Gamma^\top(W), \qquad (4.2.90)$$

ибо в этом случае по следствию (4.2.5) множество $\Pi\Gamma(W)$ является одной и $\Pi\Gamma(W) \supset odd(W) \supset W$. Тогда для выполнения (4.2.89) достаточно существования множества $W_1 \subset \mathrm{GL}\,(n)$, такого, что $W_1^{-1} = W_1$ и $\mathrm{lit}\,(W) = \mathrm{lit}\,(W_1)$, так как в этом случае $\Gamma(W) = \Gamma(W_1)$, но $\Gamma(W_1) = \Gamma^\top(W_1^{-1}) = \Gamma^\top(W_1)$. Отсюда вытекает, что если $W \subset \mathrm{GL}\,(n)$ и $W = W^{-1}$, то верно (4.2.89).

4.2.11 Вычисление сохраняющегося множества $\Pi\Gamma_e(B)$ и централизатора $Kom(\Gamma_e(B))$ группы $\Gamma_e(B)$ для симметричной матрицы B.

Обозначим через $\Gamma_e(W) \subset \Gamma(W)$ компоненту связности единицы группы $\Gamma(W)$ для множества $W \subset M(n)$. В этом пункте мы получим результаты о структуре группы $\Gamma_e(B)$ для симметричной матрицы B, аналогичные результатам пунктов 4.2.7, 4.2.8. По определению группы $\Gamma_e(B)$ верно равенство касательных многообразий

$$l(\Gamma_e(W)) = l(\Gamma(W)). \tag{4.2.91}$$

Начнем со случая симметричной невырожденной матрицы B, тогда согласно (4.2.47, 4.2.91)

$$l(\Gamma_e(B)) = Ma(n)B^{-1}. \tag{4.2.92}$$

Согласно лемме 4.2.5

$$alg\,(\Gamma_e(B)) = alg\,(l(\Gamma_e(B)))$$

и

$$Kom(\Gamma_e(B)) = Kom(\,alg\,(\Gamma_e(B))) = Kom(\,alg\,(l(\Gamma_e(B)))) =$$
$$Kom(l(\Gamma_e(B))) = Kom(Ma(n)B^{-1}).$$

Согласно лемме 4.2.6 при $n \neq 2$ получаем

$$Kom(\Gamma_e(B)) = \Lambda. \tag{4.2.93}$$

Из соотношения (4.2.93) и леммы 4.2.3 следует

$$\Pi\Gamma_e(B) = \operatorname{lin}(B). \tag{4.2.94}$$

Итак, при $B \in Ms(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$ при $n \neq 2$ верны соотношения (4.2.93, 4.2.94). Покажем, следуя пункту 4.2.8, что соотношения (4.2.93, 4.2.94) верны и для вырожденной матрицы $B \in Ms(n)$ при $rank(B) \neq 2$.

Согласно п. 2.4.3 матрица $B \in Ms(n)$ представима в виде

$$B = WZ_{p,q,r}W^{\top}, \tag{4.2.95}$$

где W некоторая невырожденная матрица, $p + q \equiv k = rank(B)$ и группа $\Gamma_e(Z_{p,q,r})$ состоит из всех матриц вида (4.2.54), где $G' \in \Gamma_e(Z_p^k)$, $K \in M(k \times r)$, $Q \in \mathrm{GL}_e(r)$. Далее повторяя рассуждения п. 4.2.8, нетрудно убедиться в справедливости теоремы.

Теорема 4.2.2 *Если матрица $B \in Ms(n)$ и $rank(B) \neq 2$, то верны соотношения (4.2.93, 4.2.94).*

В случае $rank(B) = 2$ теорема 4.2.2, вообще говоря, неверна, как показывает пример.

Пример 4.2.1

Пусть $n = 2,\ B = E,\ \Gamma_e(B) = SO(2)$. Тогда

$$Kom(\Gamma_e(B)) = Koml(\Gamma_e(B)) = Kom\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = alg\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \neq \Lambda, \tag{4.2.96}$$

$$\Pi(\Gamma_e(B) = Kom(\Gamma_e(B)) = alg\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \neq \operatorname{lin}(E) = \Lambda. \tag{4.2.97}$$

4.2.12 Каждая кососимметрическая матрица псевдосовершенна.

В данном пункте мы убедимся, что каждая кососимметрическая матрица псевдосовершенна, что будет вытекать из следующей теоремы.

Теорема 4.2.3 *Для любой кососимметрической матрицы B справедливы соотношения (4.2.93) и (4.2.94).*

Следствие 4.2.6 *Для любой кососимметричной матрицы B справедливы соотношения (4.2.39) и (4.2.38).*

Сначала рассмотрим случай невырожденной кососимметричной матрицы B, тогда касательное пространство группы $\Gamma_e(B)$ описывается следующим образом.

Лемма 4.2.11 *Если $B \in Ma(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$, то*

$$l(\Gamma_e(B)) = Ms(n)B^{-1}. \tag{4.2.98}$$

Доказательство. Согласно п. 4.2.7 включение $K \in l(\Gamma_e(B))$ эквивалентно выполнению соотношения (4.2.45). Но для кососимметрической матрицы B соотношение (4.2.45) эквивалентно соотношению

$$KB - (KB)^\top = 0$$

т.е. включению $KB \in Ms(n)$ или включению $K \in Ms(n)B^{-1}$. $\diamondsuit$

Изучение группы $\Gamma_e(B)$ для произвольной кососимметрической матрицы B сводится к изменению группы $\Gamma_e(B)$ для следующей кососимметричной матрицы вида

$$Y_{k,r} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \text{\Large 0} & & & \\ & & -1 & 0 & & & & & & \\ & & \text{\Large 0} & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & & & \text{\Large 0} & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \text{\Large 0} \end{pmatrix}, \tag{4.2.99}$$

у которой на диагонали сначала идут $\frac{k}{2}$ клеток вида

$$Y \equiv \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}, \tag{4.2.100}$$

затем r нулей и все остальные элементы нулевые, $k + r = n$, $k = rank(B)$, ибо существует матрица $W \in \mathrm{GL}\,(n)$ такая, что

$$B = WY_{k,r}W^\top \tag{4.2.101}$$

(см. [52], с. 125). В случае $r = 0$ обозначим $Y_{k,0} \equiv Y_k$. Число k всегда чётное, $Y_2 \equiv Y$. Если матрица B кососимметричная и невырождена, то $r = 0$, $k = n$, число n чётное и справедливо представление

$$B = WY_kW^\top. \tag{4.2.102}$$

Исходя из представления (4.2.102) докажем лемму, аналогичную лемме 4.2.6.

Лемма 4.2.12 *Если $B \in Ma(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$, то*

$$Kom(Ms(n)B) = \Lambda, \tag{4.2.103}$$

$$Kom(BMs(n)) = \Lambda. \tag{4.2.104}$$

Доказательство. В силу условия $B \in Ma(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$ число $n = k$ чётное и справедливо представление (4.2.102). Докажем сначала, что

$$Kom(Ms(n)Y_n) = \Lambda \tag{4.2.105}$$

при $n = 2m,\ m \in \mathbf{N}$.

Будем записывать матрицы $A \in M(2m)$ в блочном виде, т.е. элементами матрицы A считаем матрицы из $M(2)$. Введём следующие четыре матрицы, у которых все клетки кроме i-той клетки диагонали нули, а i-тая клетка диагонали имеет соответственно вид: у матрицы G_i^1 — $\Psi_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; у матрицы G_i^2 — $\Psi_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; у матрицы G_i^3 — $\Psi_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; у матрицы G_i^4 — $\Psi_4 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $i = 1, 2, \ldots m$. Так как матрицы G_i^1, G_i^2, G_i^3 симметричны, то множество $Ms(n)Y_n$ содержит матрицы $G_i^3, G_i^4, G_i^1 - G_i^2,\ i = 1, 2, \ldots m$ и их линейные комбинации, в частности, матрицы G_i^5, у которой все клетки нулевые кроме i-той клетки диагонали равной $\Psi_5 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и матрицу G_i^6, у которой все клетки нулевые, кроме i-той клетки диагонали равной $\Psi_6 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Условие коммутации матрицы $A \in M(2m)$ с матрицей G_i^5 даёт

$$a_{sl} = 0 \quad \text{при} \quad s \neq l \quad \text{или при} \quad s = l \neq i, \tag{4.2.106}$$

$$\Psi_i^5 a'_{ii} = a'_{ii} \Psi_i^5, \tag{4.2.107}$$

где a'_{sl} есть матрица из $M(2)$ или

$$\begin{pmatrix} a'_{ii,21} & a'_{ii,22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a'_{ii,11} \\ 0 & a'_{ii,21} \end{pmatrix}. \tag{4.2.108}$$

Условие коммутации с матрицей G_i^6 даёт

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a'_{ii,11} & a'_{ii,12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{ii,12} & 0 \\ a'_{ii,22} & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, матрица A должна иметь диагональный вид с клетками на диагонали вида $\lambda_i E_2$.

Чтобы убедиться, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m$, введём симметричную матрицу $G_{ij},\ i \neq j$, у которой $a'_{ij} = a'_{ji} = E_2$, а остальные клетки нулевые, тогда у матрицы $G_{ij}Y_n$ все клетки, кроме клеток с номерами (i, j) и (j, i) нулевые, и условие коммутации клеточной диагональной матрицы A с матрицей $G_{ij}Y_n$ имеет вид

$$AG_{ij}Y_n = G_{ij}Y_nA,$$

или

$$AG_{ij}Y = G_{ij}YA.$$

Откуда следует $\lambda_i Y = \lambda_j Y$, т.е. $A = \lambda E_n$. Доказано соотношение (4.2.105).

Умножим соотношение (4.2.105) справа на матрицу $W^\top$ и слева на матрицу $W^{\top-1}$, получаем

$$\Lambda = W^{\top-1} Kom(Ms(n)Y_n)W^\top = Kom(W^{\top-1}Ms(n)W^{-1}WY_nW^\top) = Kom(Ms(n)B),$$

что доказывает соотношение (4.2.103). Умножая соотношение (4.2.103) справа на B^{-1} и слева на B получим (4.2.104). $\diamondsuit$

Теперь мы в состоянии получить основой результат данного пункта.

Доказательство теоремы 4.2.3. Сначала рассмотрим случай $B = Ma(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$. Тогда

$$Kom(\Gamma_e(B)) = Kom(\,alg\,(\Gamma_e(B))) = Kom\,alg\,(l(\Gamma_e(B))) = Kom(l(\Gamma_e(B))).$$

Если $B \in Ma(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$, то и $B^{-1} \in Ma(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$, поэтому из лемм 4.2.11, 4.2.12 следует соотношение (4.2.93). Из соотношения (4.2.93) и леммы 4.2.3 вытекает соотношение (4.2.94).

Теперь рассмотрим случай $B = Y_{k,r}$. В этом случае согласно п. 2.4.3 группа $\Gamma_e(B)$ состоит из всех матриц G вида (4.2.54) с $G' \in \Gamma_e(Y_k)$, $Q \in \mathrm{GL}_e(r)$, $K \in M(k \times r)$. Опираясь на доказанное и повторяя рассуждения п. 4.2.8, получим

$$Kom\Gamma_e(Y_{k,r}) = \Lambda, \tag{4.2.109}$$

$$\Pi\Gamma_e(Y_{k,r}) = \mathrm{lin}\,(Y_{k,r}). \tag{4.2.110}$$

Умножая соотношение (4.2.109) слева на матрицу W , справа на матрицу W^{-1} получаем соотношение (4.2.93), а умножая соотношение (4.2.110) слева на W справа на $W^\top$, получаем соотношение (4.2.94). $\diamondsuit$

§4.3 Алгебраические свойства множеств $\Gamma m(W)$ и $\Pi m(S)$

Описанное в предыдущем параграфе линейное представление группы $Gr = \mathrm{GL}\,(n)$ на векторном пространстве $M(n)$ будем далее отличать от других представлений добавлением буквы m в обозначение оператора и множеств, а именно $T_G \to Tm_G$, $\Gamma(W) \to \Gamma m(W)$, $\Pi(S) \to \Pi m(S)$. Связную компоненту единицы группы $\Gamma m(W)$ будем обозначать $\Gamma me(W)$. В этом параграфе наша задача — разработать алгебраическую процедуру построения множества $\Gamma me(W) \subset \mathrm{GL}\,(n)$ по множеству $W \subset M(n)$ и множества $\Pi m(S) \subset M(n)$ по множеству $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$. Поскольку для группы Ли $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ процедура построения касательного пространства $l(S)$ известна и для связной группы Ли S процедура построения группы S по её касательному пространству описана, то мы в данном параграфе заменяем описание группы Ли описанием её касательного пространства. Построение же алгебры Ли $l(\Gamma m(W))$ по множеству $W \subset M(n)$ и сохраняющегося множества $\Pi m(S)$ по алгебре Ли $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений.

4.3.1 Описание множества $l(\Gamma m(A))$. Сохраняющее множество $\Gamma m(W)$ и сохраняющееся множество $\Pi m(W)$ рассматриваемого представления определяются с помощью соотношения

$$GAG^\top = A, \tag{4.3.1}$$

где $G \in \mathrm{GL}\,(n), A \in M(n)$. Следующая лемма переводит это соотношение в касательное многообразие.

Лемма 4.3.1 *Пусть* $G = G(\alpha) = \exp(\alpha Q)$*, где* $Q \in M(n)$, $\alpha \in \mathbf{R}$. *Тогда соотношение (4.3.1) верно при всех* $\alpha \in \mathbf{R}$, *тогда и только тогда, когда*

$$QA + AQ^\top = 0. \tag{4.3.2}$$

Доказательство. Дифференцируя соотношение (4.3.1) по α при $\alpha = 0$, получаем (4.3.2). Матричная функция $X(\alpha) \equiv G(\alpha)AG^\top(\alpha)$ является решением линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

$$\frac{d}{d\alpha}X(\alpha) = QX(\alpha) + X(\alpha)Q^\top$$

и удовлетворяет начальным условиям $X(0) = A$. В силу единственности решения задачи Коши при условии (4.3.2) будет $X(\alpha) = A$ при всех $\alpha \in \mathbf{R}$. $\diamondsuit$

Замечание 4.3.1 *Так как* $X(\alpha) \equiv G(\alpha)AG^\top(\alpha)$ *аналитическая функция* $\alpha \in \mathbf{C}$ *на всей комплексной плоскости, то если (4.3.1) верно при значениях* α *из некоторого интервала чисел, то оно верно и при всех* $\alpha \in \mathbf{R}$.

Следствие 4.3.1 *Множество* $l(\Gamma m(A))$ *совпадают со множеством решений уравнения (4.3.2) относительно* $Q \in M(n)$.

Итак, мы перешли от отношения (4.3.1) к соотношению (4.3.2). Построим теперь теорию, аналогичную теории §4.1, начиная не с соотношения (4.3.1), а с соотношения (4.3.2).

4.3.2 Множества $H(W)$ и $L(N)$ и их свойства.

Введём аналогично множествам $\Gamma(W)$ и $\Pi(S)$ из §4.1 множества $H(W)$ и $L(N)$ и исследуем их свойства. Перепишем равенство (4.3.2) в эквивалентной форме

$$QA = -AQ^\top \tag{4.3.3}$$

более удобной в некоторых случаях. Для матрицы $A \in M(n)$ введём множество матриц $Q \in M(n)$, удовлетворяющих соотношению (4.3.3), т.е.

$$H(A) \equiv \{Q \in M(n) \mid QA = -AQ^\top\}. \tag{4.3.4}$$

Для множества матриц $W \subset M(n)$ множество $H(W)$ определим как множество матриц $Q \in M(n)$, удовлетворяющих (4.3.3) при любой матрицы $A \in W$, т.е.

$$H(W) \equiv \bigcap_{A \in W} H(A). \tag{4.3.5}$$

Аналогично, при фиксированной матрице $Q \in M(n)$, множество матриц $A \in M(n)$, удовлетворяющих соотношению (4.3.3) обозначим $L(Q)$, т.е.

$$L(Q) \equiv \{A \in M(n) \mid QA = -AQ^\top\}. \tag{4.3.6}$$

Для множества матриц $N \subset M(n)$ множество матриц $A \in M(n)$, удовлетворяющих (4.3.3) при любой матрице $Q \in N$ обозначим $L(N)$, т.е.

$$L(N) \equiv \bigcap_{Q \in N} L(Q). \tag{4.3.7}$$

Соотношение (4.3.3) обладает следующими алгебраическими свойствами.

Лемма 4.3.2 *1) Пусть соотношение (4.3.3) выполнено при данной матрицы $A \in M(n)$ для всех матриц Q из множества N, тогда оно верно и для всех матриц $Q \in \operatorname{lin}(N)$ и всех матриц $Q \in N_1$, где $N_1 \equiv [N, N]$ — множество всех коммутаторов элементов из N.*

2)Пусть соотношение (4.3.3) выполнено для данной матрицы $Q \in M(n)$ и всех матриц A из множества W, тогда оно выполнено и для всех матриц $A \in \operatorname{lin}(W)$.

Доказательство. Так как соотношение (4.3.3) линейно по Q при фиксированном A и линейно по A при фиксированном Q, то отсюда следуют утверждения леммы о линейных оболочках. Пусть теперь Q_1 и Q_2 удовлетворяют соотношению (4.3.3) при фиксированной матрице A, тогда

$$(Q_1Q_2 - Q_2Q_1)A = -Q_1AQ_2^\top + Q_2AQ_1^\top = AQ_1^\top Q_2^\top - AQ_2^\top Q_1^\top = -A(Q_1Q_2 - Q_2Q_1)^\top.$$

♢

Согласно доказанной лемме при данной матрице $A \in M(n)$ множество $H(A)$ — алгебра Ли и при фиксированной матрице $Q \in M(n)$ множество $L(Q)$ — линейное пространство. Из формул (4.3.5), (4.3.7) следует, что для любого множества $W \subset M(n)$ множество $H(W)$ — алгебра Ли , а множество $L(W)$ — линейное пространство.

По определению для любых подмножеств W_1, W_2 множества $M(n)$

$$(W_1 \subset W_2) \Rightarrow (H(W_1) \supset H(W_2)) \bigwedge (L(W_1) \supset L(W_2)). \tag{4.3.8}$$

Кроме того

$$H(0) = M(n),\ L(0) = M(n),\ H(E) = Ma(n),\ L(E) = \{0\}. \tag{4.3.9}$$

По определению полагаем

$$H(\emptyset) = M(n), L(\emptyset) = M(n). \tag{4.3.10}$$

Для любого подмножества $N \subset M(n)$ обозначим через $ali(N) \subset M(n)$ наименьшую подалгебру Ли в $M(n)$, содержащую множество N, т.е. алгебру Ли, порождённую множеством N. Алгебра Ли $ali(N)$ может быть построена из множества N следующей процедурой. Сначала строятся коммутаторы всех пар элементов, взятых из N и добавляются по множеству N, получается множество N_1. Далее эта же процедура применяется по множеству N_1 - получается множество N_2 и так далее. Берется объединение $N_\infty \equiv \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} N_k,\ N_0 \equiv N$. Тогда $ali(N) = \operatorname{lin}(N_\infty)$.

Лемма 4.3.3 *Для любых подмножеств $W \subset M(n), N \subset M(n)$*

$$H(W) = H(\operatorname{lin}(W)), \tag{4.3.11}$$

$$L(N) = L(ali(N)). \tag{4.3.12}$$

Доказательство. В силу (4.3.8) требуют доказательства лишь включения

$$H(W) \subset H(\operatorname{lin}(W)), \tag{4.3.13}$$

$$L(N) \subset L(ali(N)). \tag{4.3.14}$$

В силу леммы 4.3.2, если $Q \in H(W)$, то $Q \in H(\operatorname{lin}(W))$, т.е. верно включение (4.3.13). В силу леммы 4.3.2, если $A \in L(N)$, то $A \in L(N_1)$, далее, если $A \in L(N_1)$, то $A \in L(N_2)$ и т.д., получаем $A \in L(N_\infty)$. Снова в силу леммы 4.3.2, тогда $A \in L(\operatorname{lin}(N_\infty)) = L(ali(N))$. Доказано включение (4.3.14). $\diamondsuit$

По определению множеств $H(W)$ и $L(N)$ при любых множествах $W \subset M(n)$, $N \in M(n)$ справедливы включения

$$H(L(N)) \supset N, \tag{4.3.15}$$

$$L(H(W)) \supset W. \tag{4.3.16}$$

Применяя свойство (4.3.8) к (4.3.15, 4.3.16), получаем

$$L(H(L(N))) \subset L(N), \tag{4.3.17}$$

$$H(L(H(W))) \subset H(W), \tag{4.3.18}$$

что вместе со свойствами (4.3.15, 4.3.16) даёт

$$L(H(L(N))) = L(N), \tag{4.3.19}$$

$$H(L(H(W))) = H(W). \tag{4.3.20}$$

для любых множеств W и N. Множество W назовём *нижним совершенным*, если

$$L(H(W)) = W, \tag{4.3.21}$$

множество N назовём *верхним совершенным*, если

$$H(L(N)) = L(N). \tag{4.3.22}$$

В силу (4.3.19) множество W является нижним совершенным тогда и только тогда, когда существует множество N, что

$$W = L(N). \tag{4.3.23}$$

В силу (4.3.20) множество N является верхним совершенным тогда и только тогда, когда существует множество W, что

$$N = H(W). \tag{4.3.24}$$

Нижние и верхние совершенные множества W, N находятся во взаимно-однозначном соответствии с помощью формул (4.3.23, 4.3.24).

Лемма 4.3.3 позволяет свести построение множеств $H(W)$ и $L(N)$ для любых множеств W и N к решению конечных систем линейных алгебраических уравнений следующим образом. Возьмём конечное множество W_c из k элементов, такое что $\operatorname{lin}(W_c) = \operatorname{lin}(W)$ (такое множество всегда существует с $k = \dim(\operatorname{lin}(W))$), тогда $W_c = \{A_1, A_2, \ldots A_k\}$ и $H(W)$ есть множество матриц $Q \in M(n)$, удовлетворяющих следующей системе линейных алгебраических уравнений

$$QA_i + A_iQ^\top = 0,\ i = 1, 2, \ldots k. \tag{4.3.25}$$

Для построения множества $L(N)$ выберем конечное множество из N_c из m элементов $N_c = \{Q_1, Q_2, \ldots Q_m\}$, такое, что $ali(N_c) = ali(N)$ (такое множество всегда существует с $m \leq \dim(ali(N))$),тогда $L(N)$ есть множество матриц $A \in M(n)$, удовлетворяющих следующей системе линейных алгебраических уравнений

$$Q_jA + AQ_j^\top = 0,\ j = 1, 2, \ldots m. \tag{4.3.26}$$

4.3.3 Описание множеств $l(\Gamma m(W))$ и $\Pi m(S)$ через множества $H(W)$ и $L(l(S))$ соответственно.

Лемма 4.3.4 *Для любого множества $W \subset M(n)$ справедливо равенство*

$$l(\Gamma m(W)) = H(W). \tag{4.3.27}$$

Доказательство. Согласно лемме 4.3.1 для любой матрицы $A \in W$ справедливо равенство

$$l(\Gamma m(A)) = H(A),$$

поэтому и

$$l(\Gamma m(W)) = l(\bigcap_{A\in W} \Gamma(A)) = \bigcap_{A\in W} l(\Gamma m(A)) = \bigcap_{A\in W} H(A) = H(W).$$

♢

Лемма 4.3.5 *Для связной группы Ли S и фиксированной матрицы $A \in M(n)$ следующие соотношения эквивалентны:*

$$\forall G \in S \mid GAG^\top = A, \tag{4.3.28}$$

$$\forall Q \in l(S) \mid QA + AQ^\top = 0. \tag{4.3.29}$$

Доказательство. Согласно лемме 4.3.1 соотношение (4.3.28) эквивалентно соотношению

$$\forall Q \in l(S)\ \forall \alpha \in \mathbf{R} \mid \exp(\alpha Q) A \exp^\top(\alpha Q) = A, \tag{4.3.30}$$

но соотношение (4.3.30) эквивалентно соотношению

$$\forall Q \in l(S) \mid \exp(Q) A \exp^\top(Q) = A. \tag{4.3.31}$$

Так как из принадлежности $Q \in l(S)$ следует принадлежность $\exp(Q) \in S$, то из соотношения (4.3.28) следует соотношение (4.3.31). Осталось доказать обратное следование. Так как множество $\exp(l(S))$ содержит некоторую каноническую окрестность единицы S_1 группы S, то из соотношения (4.3.31) следует соотношение

$$\forall G \in S_1 \mid GAG^\top = A. \tag{4.3.32}$$

Но по определению канонической окрестности (п. 4.2.9) любой элемент $G \in S$ представим в виде произведения $G = G_1, G_2 \ldots G_k$, где $G_i \in S_1,\ i = 1, 2, \ldots k$. Из (4.3.32) тогда получаем

$$GAG^\top = G_1 G_2 \ldots G_k A G_k^\top G_{k-1}^\top \ldots G_1^\top = A.$$

Мы убедились, что из соотношения (4.3.32) следует соотношение (4.3.28). Итак, соотношения (4.3.28) и (4.3.29) эквивалентны. ♢

Но соотношение (4.3.28) есть определение включения $A \in \Pi m(S)$, а соотношение (4.3.29) — включения $A \in L(l(S))$. Получаем

Следствие 4.3.2 *Для связной группы Ли $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ справедливо равенство*

$$\Pi m(S) = L(l(S)). \tag{4.3.33}$$

Равенства (4.3.27) и (4.3.33) сводят построение множеств $\Gamma me(W)$ и $\Pi m(S)$ к построению множеств $H(W)$ и $L(l(S))$, а последняя задача уже сведена нами к решению систем линейных алгебраических уравнений.

4.3.4 Линейное пространство квадратных матриц как прямая сумма линейных подпространств симметричных и кососимметричных матриц.

Линейное пространство матриц является прямой суммой линейных подпространств симметричных и кососимметричных матриц $M(n) = Ms(n) \oplus Ma(n)$, каждое из которых — инвариантное подпространство представления Tm. Введём проекторы Ps и Pa на подпространства $Ms(n)$ и $Ma(n)$ соответственно. Любой элемент $A \in M(n)$ однозначно записывается в виде

$$A = Ps(A) + Pa(A). \tag{4.3.34}$$

Для любых матриц $G \in M(n)$, $A \in M(n)$ справедливо соотношение

$$(GAG^\top = A) \Longleftrightarrow (GPs(A)G^\top = Ps(A)) \bigwedge (GPa(A)G^\top = Pa(A)). \tag{4.3.35}$$

Поэтому для любого множества $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$

$$(A \in \Pi m(S)) \Longleftrightarrow (Ps(A) \in \Pi m(S)) \bigwedge (Pa(A) \in \Pi m(S)) \tag{4.3.36}$$

и справедливо разложение линейного пространства $\Pi m(S) \subset M(n)$ в прямую сумму

$$\Pi m(S) = Ps(\Pi m(S)) \oplus Pa(\Pi m(S)), \tag{4.3.37}$$

где

$$Ps(Pm(S)) = \Pi m(S) \cap Ms(n), Pa(\Pi m(S)) = \Pi m(S) \cap Ma(n). \tag{4.3.38}$$

Из соотношения (4.3.35) такое следует, что для любой матрицы $A \in M(n)$

$$\Gamma m(A) = \Gamma m(Ps(A)) \cap \Gamma m(Pa(A)) \tag{4.3.39}$$

и для любого множества $W \subset M(n)$

$$\Gamma m(W) = \Gamma m(Ps(W)) \cap \Gamma m(Pa(W)) \tag{4.3.40}$$

Из последнего соотношения вытекает, что

$$\Gamma m(W) = \Gamma m(W^\top). \tag{4.3.41}$$

4.3.5 Структура множеств $L(N)$ и $H(W)$.

Кроме соотношения $GAG^\top = A$ разложение (4.3.34) играет аналогичную роль для соотношения (4.3.2).

Для любых матриц $Q \in M(n), A \in M(n)$ справедливо соотношение

$$(QA + AQ^\top = 0) \Longleftrightarrow (QPs(A) + Ps(A)Q^\top = 0) \bigwedge (QPa(A) + Pa(A)Q^\top = 0), \tag{4.3.42}$$

из которого следует, что

$$(A \in L(Q)) \Longleftrightarrow (Ps(A) \in L(Q)) \bigwedge (Pa(A) \in L(Q)). \tag{4.3.43}$$

Для любого множества $N \in M(n)$ выполняется

$$(A \in L(N)) \Longleftrightarrow (Ps(A) \in L(N)) \bigwedge (Pa(A) \in L(N)), \tag{4.3.44}$$

т.е. линейное подпространство $L(N)$ допускает разложение

$$L(N) = Ps(L(N)) \oplus Pa(L(N)), \tag{4.3.45}$$

где

$$Ps(L(N)) = L(N) \cap Ms(n),\ Pa(L(N)) = L(N) \cap Ma(n). \tag{4.3.46}$$

Из соотношения (4.3.42) также вытекает, что для любой матрицы $A \in M(n)$

$$H(A) = H(Ps(A)) \cap H(Pa(A)), \tag{4.3.47}$$

и следовательно для любого множества $W \subset M(n)$

$$H(W) = H(Ps(W)) \cap H(Pa(W)) \tag{4.3.48}$$

и

$$H(W^\top) = H(W). \tag{4.3.49}$$

Мы приходим к выводу, что для того, чтобы построить множество $L(N)$ достаточно построить множества $Ps(L(N))$ и $Pa(L(N))$ с учётом формул (4.3.46), а для того, чтобы построить множество $H(W)$ достаточно построить множества $H(Ps(W))$ и $H(Pa(W))$.

В случаях, когда матрица A симметрична или кососимметрична, соотношение (4.3.2) может быть записано в эквивалентной форме. А именно, для любой матрицы $Q \in M(n)$ при $C \in Ms(n)$ справедливо соотношение

$$(QC + CQ^\top = 0) \Longleftrightarrow (QC \in Ma(n)), \tag{4.3.50}$$

а при $D \in Ma(n)$ — соотношение

$$(QD + DQ^\top = 0) \Longleftrightarrow (QD \in Ms(n)), \tag{4.3.51}$$

В самом деле, соотношение (4.3.2) эквивалентно соотношению (4.3.3), которое при $A = C \in Ms(n)$ приводятся к виду

$$QC = -CQ^\top = -(QC)^\top,$$

а при $A = D \in Ma(n)$ — к виду

$$QD = -DQ^\top = (QD)^\top,$$

что доказывает (4.3.50) и (4.3.51).

В случае, когда $C \in Ms(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$ из соотношения (4.3.50) следует

$$H(C) = Ma(n)C^{-1}, \tag{4.3.52}$$

а в случае $D \in Ma(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$ из соотношения (4.3.51) следует

$$H(D) = Ms(n)D^{-1}. \tag{4.3.53}$$

В общем случае из формул (4.3.42), (4.3.50), (4.3.51) получаем для любого множества $W \subset M(n)$ соотношение

$$H(W) = \{Q \in M(n) \mid (QPs(W) \subset Ma(n)) \bigwedge (QPa(W) \subset Ms(n)\}. \tag{4.3.54}$$

В случае, когда $Q \in \mathrm{GL}\,(n)$, из соотношений (4.3.50, 4.3.52) получаем

$$Ps(L(Q)) = Ms(n) \cap Q^{-1}Ma(n),\ Pa(L(Q)) = Ma(n) \cap Q^{-1}Ms(n). \tag{4.3.55}$$

В общем случае для любого множества $N \subset M(n)$ верны соотношения

$$Ps(L(N)) = \{C \in Ms(n) \mid NC \subset Ma(n)\}, \tag{4.3.56}$$

$$Pa(L(N)) = \{D \in Ma(n) \mid ND \subset Ms(n)\}. \tag{4.3.57}$$

4.3.6 Дополнительные алгебраические свойства множеств $H(W)$ и $L(N)$. Для любых множеств $W \subset M(n), N \subset M(n)$ мы установили, что множество $H(W) \subset M(n)$ является алгеброй Ли, а множество $L(N) \subset M(n)$ — линейным подпространством. Проведём теперь рассмотрения, аналогичные рассмотрениям п. 4.2.10, о дополнительных алгебраических свойствах множеств $H(W)$ и $L(N)$.

Из определяющего соотношения (4.3.3) следует, что линейное пространство $L(N)$ самосопряжённое, т.е.

$$L(N) = L^{\top}(N) \tag{4.3.58}$$

для любого множества N. Из соотношений (4.3.11) и (4.3.49) вытекает, что для любого множества $W \subset M(n)$ верно соотношение

$$H(W) = H(lit(W)), \tag{4.3.59}$$

ибо

$$H(W) = H(W^{\top} \cup W) = H(\operatorname{lin}(W^{\top} \cup W)) = H(lit(W)).$$

Лемма 4.3.6 *Для любого множества $N \subset M(n)$ справедливо включение*

$$L(N)L(N^{\top})L(N) \subset L(N). \tag{4.3.60}$$

Доказательство. Пусть $A_1 \in L(N), A_2 \in L(N^{\top}), A_3 \in L(N), Q \in N$. Тогда верны равенства

$$QA_1 = -A_1 Q^{\top}, \tag{4.3.61}$$

$$Q^{\top} A_2 = -A_2 Q, \tag{4.3.62}$$

$$QA_3 = -A_3 Q^{\top}. \tag{4.3.63}$$

Из равенств (4.3.61 - 4.3.63) получаем

$$Q(A_1A_2A_3) = -A_1Q^{\top}A_2A_3 = A_1A_2QA_3 = -(A_1A_2A_3)Q^{\top},$$

т.е. $A_1A_2A_3 \in L(N)$. $\diamondsuit$

Следствие 4.3.3 *Если $N = N^{\top}$, то множество $L(N)$ — одда.*

Рассмотрим вопрос: для каких множеств $W \subset M(n)$ соотношение (4.3.59) можно усилить до соотношения

$$H(W) = H(odd(W)). \tag{4.3.64}$$

Согласно следствию 4.3.3 для этого достаточно, чтобы

$$H(W) = H^{\top}(W). \tag{4.3.65}$$

В самом деле

$$H(W) = H(L(H(W))) \tag{4.3.66}$$

и в силу (4.3.65) множество $L(H(W)) \subset M(n)$ является оддой, поэтому справедливы включения

$$W \subset odd(W) \subset L(H(W)). \tag{4.3.67}$$

Из (4.3.66), (4.3.67) вытекает (4.3.64).

Для любого множества $W \subset \mathrm{GL}\,(n)$ справедливо равенство

$$H(W^{-1}) = H^{\top}(W), \tag{4.3.68}$$

ибо при $A \in \mathrm{GL}\,(n)$ соотношения

$$QA = -AQ^{\top} \tag{4.3.69}$$

и

$$Q^{\top}A^{-1} = -A^{-1}Q \tag{4.3.70}$$

эквивалентны. В силу сказанного для выполнения соотношения (64) достаточно существования такого множества $W_1 \subset \mathrm{GL}\,(n)$, что $W_1 = W_1^{-1}$ и $lit(W) = lit(W_1)$, ибо тогда $H(W) = H(W_1) = H(W_1^{-1}) = H^{\top}(W_1) = H^{\top}(W)$. В частности, для выполнения (4.3.64) достаточно, чтобы $W = W^{-1}$.

4.3.7 Свойств множеств $H(W)$ и $L(N)$, аналогичных свойствам множеств $\Gamma m(W)$ и $\Pi m(S)$.

Сформулируем теперь ряд свойств множеств $H(W)$ и $L(N)$, аналогичных соответствующим свойствам множеств $\Gamma m(W)$ и $\Pi m(S)$. Начнем со свойств подобия.

Лемма 4.3.7 *Если $C \in \mathrm{GL}\,(n)$, то для любых множеств $W \subset M(n), N \subset M(n)$ верны равенства*

$$H(CWC^{\top}) = CH(W)C^{-1}, \tag{4.3.71}$$

$$L(CNC^{-1}) = CL(N)C^{\top}. \tag{4.3.72}$$

Доказательство. Равенства

$$Q(CAC^{\top}) + (CAC^{\top})Q^{\top} = 0, \tag{4.3.73}$$

и

$$(C^{-1}QC)A + A(C^{-1}QC)^{\top} = 0 \tag{4.3.74}$$

эквивалентны при $C \in \mathrm{GL}\,(n)$ для матриц $A \in M(n), Q \in M(n)$. Но первое равенство означает включение $Q \in H(CAC^{\top})$, а второе — $C^{-1}QC \in H(A)$. Итак, включения $Q \in H(CAC^{\top})$ и $Q \in CH(A)C^{-1}$ эквивалентны, откуда вытекает (4.3.71).

Равенства

$$(CQC^{-1})A + A(C^{-1\top}Q^{\top}C^{\top}) = 0 \tag{4.3.75}$$

и

$$Q(C^{-1}AC^{-1\top}) + (C^{-1}AC^{-1\top})Q^{\top} = 0 \tag{4.3.76}$$

также эквивалентны для матриц $A \in M(n), Q \in M(n)$, т.е. эквивалентны включения $A \in L(CQC^{-1})$ и $C^{-1}AC^{-1\top} \in L(Q)$. Итак, включения $A \in L(CQC^{-1})$ и $A \in CL(Q)C^{\top}$ эквивалентны, откуда вытекает (4.3.72). $\diamondsuit$

Справедлива связь операций H и L со взятием централизатора множеств, аналогичная леммам 4.2.2, 4.2.3 из §4.2.

Лемма 4.3.8 *Если $B \in \mathrm{GL}\,(n)$, то для множества $W \subset M(n)$, такого что $B \in W$, верно*

$$H(W) = H(B) \cap Kom(WB^{-1}), \tag{4.3.77}$$

а для множества $N \subset H(B)$ верно

$$L(N) = Kom(N)B. \tag{4.3.78}$$

Доказательство. Если $Q \in H(B)$, то

$$Q^\top = B^{-1}QB, \tag{4.3.79}$$

поэтому для матрицы $A \in M(n)$ соотношения

$$QA = -AQ^\top \tag{4.3.80}$$

и

$$QAB^{-1} = AB^{-1}Q \tag{4.3.81}$$

эквивалентны. Итак, эквивалентны при $Q \in H(B)$ включения $Q \in H(A)$ и $Q \in Kom(AB^{-1})$, откуда следует соотношение (4.3.77).

С другой стороны эквивалентность соотношений (4.3.80, 4.3.81) при $Q \in H(B)$ означает эквивалентность включений $A \in L(Q)$ и $AB^{-1} \in Kom(Q)$ или $A \in L(Q)$ и $A \in Kom(Q)B$. Откуда следует (4.3.78). ♢

Так как для любой матрицы $B \in M(n)$ согласно лемме 4.3.4 верно $H(B) = l(\Gamma m(B))$, а множество $l(\Gamma m(B))$ для невырожденной симметричной или кососимметричной матрицы B описано в §4.2, то на основании §4.2

$$\forall B \in Ms(n) \cap \mathrm{GL}\,(n) \mid H(B) = Ma(n)B^{-1}, \tag{4.3.82}$$

$$\forall B \in Ma(n) \cap \mathrm{GL}\,(n) \mid H(B) = Ms(n)B^{-1}, \tag{4.3.83}$$

Теоремы 4.2.2 и 4.2.3 в силу леммы 4.3.4 и следствия 4.3.1 влекут справедливость теоремы.

Теорема 4.3.1 *Если $B \in Ma(n)$ или $B \in Ms(n)$ и $rank(B) \neq 2$, то верны соотношения*

$$Kom(H(B)) = \Lambda, \tag{4.3.84}$$

$$L(H(B)) = \mathrm{lin}\,(B). \tag{4.3.85}$$

Доказательство. Согласно лемме 4.3.4 имеем

$$H(B) = l(\Gamma me(B)). \tag{4.3.86}$$

Далее

$$Kom(H(B)) = Kom(\,alg\,(H(B))) = Kom(\,alg\,(l(\Gamma me(B)))) =$$

$$Kom(\,alg\,(\Gamma me(B))) = Kom(\Gamma me(B)).$$

Далее утверждение (4.3.84) вытекает из теорем 4.2.2, 4.2.3.

Из соотношения (4.3.86) и следствия 4.3.1 вытекает

$$\Pi m(\Gamma me(B)) = L(H(B)). \tag{4.3.87}$$

Но соотношение (4.3.87) влечет соотношение (4.3.85) по теоремам 4.2.2, 4.2.3. ♢

4.3.8 Структура множества $H(W)$ в случае множества W, состоящего из двух матриц.

В предыдущем пункте мы описали множество $H(B)$ для случая невырожденной симметричной или кососимметричной матрицы B. Заменим теперь матрицу $B \in M(n)$ на множество матриц $W \subset M(n)$. Как уменьшится множество $H(W)$, если множество матриц увеличится с одной матрицы до двух? Может ли оно совсем исчезнуть в том смысле, чтобы $H(W) = \{0\}$, т.е. в линейном подпространстве $H(W) \subset M(n)$ остался лишь один элемент?

Итак, далее в этом пункте рассматриваем множество $W \equiv \{A, B\}$ состоящее из двух матриц. По определению

$$H(W) = H(\{A, B\}) = H(A) \cap H(B).$$

Потребуем далее, чтобы $B \in Ms(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$, тогда в силу (4.3.77), (4.3.82) верно равенство

$$H(W) = Ma(n)B^{-1} \cap Kom(AB^{-1} \tag{4.3.88}$$

или эквивалентное равенство

$$H(W)B = Ma(n) \cap Kom(AB^{-1})B. \tag{4.3.89}$$

Лемма 4.3.9 *Если* $A \in Ms(n),\ B \in Ms(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$, *то из условия*

$$Kom(AB^{-1}) = alg\,(AB^{-1}). \tag{4.3.90}$$

следует условие

$$H(\{A, B\}) = \{0\}. \tag{4.3.91}$$

Доказательство. В силу (4.3.90) множество $Kom(AB^{-1})$ состоит из полиномов от матрицы (AB^{-1}). При умножении монома нулевой степени $(AB^{-1})^0 = E$ на матрицу B справа мы получаем симметричную матрицу B. При умножении монома первой степени (AB^{-1}) на матрицу B справа получаем симметричную матрицу $(AB^{-1})B = A$. При умножении монома натуральной степени $(AB^{-1})^k$ справа на матрицу B получаем симметричную матрицу. Итак, $Kom(AB^{-1})B \subset Ms(n)$, а так как $Ma(n) \cap Ms(n) = \{0\}$, то из (4.3.89) вытекает (4.3.91). $\diamondsuit$

Если характеристический многочлен от переменной λ вида $\det(AB^{-1} - \lambda E)$ не имеет кратных корней, то согласно [46] с.207 выполнено (4.3.90). В силу равенства

$$\det(A - \lambda B) = \det((AB^{-1} - \lambda E)B) = \det(AB^{-1} - \lambda E) \det B$$

и условия $\det B \neq 0$ многочлены $\det(A - \lambda B)$ и $\det(AB^{-1} - \lambda E)$ отличаются на ненулевой постоянный множитель. Поэтому справедлива

Лемма 4.3.10 *Если* $A \in Ms(n), B \in Ms(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$ *и многочлен* $\det(A - \lambda B)$ *не имеет кратных корней, то верно (4.3.91).*

Рассмотрим теперь частный случай, когда матрица $A = E$ единичная, тогда по формуле (4.3.88)

$$H(W) = Ma(n) \cap Kom(A). \tag{4.3.92}$$

Для симметричной матрицы A существует ортогональная матрица $G \in \Gamma m(E)$ и диагональная матрица $D \in M(n)$, что

$$A = GDG^{\top}, \tag{4.3.93}$$

причём диагональные элементы матрицы D есть корни характеристического многочлена $\det(A - \lambda E)$. Поставим (4.3.93) в (4.3.92) и используем тот факт, что для ортогональной матрицы G верно $G^{\top} = G^{-1}$, получим

$$H(W) = Ma(n) \cap G(Kom(D))G^{-1}$$

или эквивалентно

$$G^{-1}H(W)G = G^{\top}Ma(n)G \cap Kom(D) = Ma(n) \cap Kom(D). \tag{4.3.94}$$

Если теперь характеристический многочлен $\det(A-\lambda E)$ имеет кратные корни, то диагональная матрица D имеет равные диагональные элементы, но тогда существует не нулевая кососимметричная матрица, принадлежащая централизатору, и соотношение (4.3.94) влечет $H(W) \neq \{0\}$. Доказана следующая лемма.

Лемма 4.3.11 *Если* $A \in Ms(n)$, *то* $H(\{A, E\}) = \{0\}$ *тогда и только тогда, когда многочлен* $\det(A - \lambda E)$ *не имеет кратных корней.*

4.3.9 Описание множества $X = X(B_1, B_2, A) \equiv H(B_1)A \cap AH(B_2)$.

Рассмотрим ещё одну задачу с использованием свойств множества $H(B)$. Пусть $B_1 \in M(n), B_2 \in M(m), A \in M(n \times m)$. Введём множество

$$X = X(B_1, B_2, A) \equiv H(B_1)A \cap AH(B_2). \tag{4.3.95}$$

По построению X линейное подпространство пространства матриц $M(n \times m)$. Введём также множество

$$X_1 = X_1(B_1, B_2, A) \equiv H(B_1) \cap H(AB_2A^{\top}). \tag{4.3.96}$$

По построению X_1 линейное подпространства пространства матриц $M(n)$.

Лемма 4.3.12 *Для любых* $B_1 \in M(n), B_2 \in M(m), A \in M(n \times m)$ *справедливо включение*

$$X \subset X_1A. \tag{4.3.97}$$

Доказательство. Пусть $A' \in X$, тогда существуют матрицы $Q_1 \in H(B_1), Q_2 \in H(B_2)$, что

$$Q_1A = A' = AQ_2. \tag{4.3.98}$$

Умножим равенство $Q_1A - AQ_2 = 0$ на матрицу $B_2A^{\top}$ справа, получим

$$Q_1AB_2A^{\top} - AQ_2B_2A^{\top} = 0. \tag{4.3.99}$$

Включение $Q_2 \in H(B_2)$ означает, что

$$Q_2B_2 = -B_2Q_2^{\top}. \tag{4.3.100}$$

Подставим (4.3.100) в (4.3.99) и получим

$$Q_1 AB_2 A^\top + AB_2 Q_2^\top A^\top = 0. \tag{4.3.101}$$

Используя равенство (4.3.98), из (4.3.101) получаем

$$Q_1(AB_2A^\top) + (AB_2A^\top)Q_1^\top = 0,$$

что означает включение $Q_1 \in H(AB_2A^\top)$.

Итак, мы получим, что $Q_1 \in H(B_1) \cap H(AB_2A^\top) = X_1$, тогда $A' = Q_1 A \in X_1 A$. $\diamondsuit$

Множество $X(B_1, B_2, A)$ как функция своих аргументов обладает следующим свойством.

Лемма 4.3.13 *Если* $B_1 \in \mathrm{GL}\,(n), B_2 \in \mathrm{GL}\,(n)$*, то верно равенство*

$$X(B_1, B_2, A) = X^\top(B_2^{-1}, B_1^{-1}, A^\top). \tag{4.3.102}$$

Доказательство. Транспонируем равенство (4.3.95)

$$X^\top(B_1, B_2, A) = A^\top H^\top(B_1) \cap H^\top(B_2)A^\top = H^\top(B_2)A^\top \cap A^\top H^\top(B_1).$$

и замечаем, что в силу (4.3.68) верны равенства $H^\top(B_2) = H(B_2^{-1}), H^\top(B_2) = H^\top(B_1^{-1})$. $\diamondsuit$

В условиях леммы 4.3.13 применим лемму 4.3.12 и получим

$$\begin{gathered} X = X^\top(B_2^{-1}, B_1^{-1}A^\top) \subset (X_1(B_2^{-1}, B_1^{-1}, A^\top)A^\top)^\top = AX_1^\top(B_2^{-1}, B_1^{-1}A^\top) = \\ A(H(B_2^{-1}) \cap H(A^\top B_1^{-1}A))^\top = A(H^\top(B_2^{-1}) \cap H^\top(A^\top B_1^{-1}A)) = \\ A(H(B_2) \cap H^\top(A^\top B_1^{-1}A)). \end{gathered} \tag{4.3.103}$$

Введём множество

$$X_2 = X_2(B_1, B_2, A) = H(B_2) \cap H^\top(A^\top B_1^{-1}A), \tag{4.3.104}$$

которое является линейным подпространством в $M(n)$. Согласно (4.3.103) справедливо включение

$$X \subset AX_2. \tag{4.3.105}$$

При получении включения (4.3.105) с помощью леммы 4.3.13 мы опирались на невырожденность матрицы B_2, однако, это предположение излишне.

Лемма 4.3.14 *Если* $B_1 \in \mathrm{GL}\,(n)$*, то при любых* $B_2 \in M(n), A \in M(n \times m)$ *верно (4.3.105).*

Доказательство. Пусть $A' \in X$, тогда существуют матрицы $Q_1 \in H(B_1), Q_2 \in H(B_2)$, что верно (4.3.98). Умножая равенство (4.3.98) на матрицу $A^\top B_1^{-1}$ слева, получаем

$$A^\top B_1^{-1} Q_2 A - A^\top B_1^{-1} A Q_2 = 0. \tag{4.3.106}$$

Поскольку $Q_1 \in H(B_1)$,то $Q_1^\top \in H^\top(B_1) = H(B_1^{-1})$ и верно

$$Q_1^\top B_1^{-1} + B_1^{-1} Q_1 = 0. \tag{4.3.107}$$

Подставим (4.3.107) в (4.3.106) и используем (4.3.98), получим

$$Q_2^\top(A^\top B_1^{-1}A) + (A^\top B_1^{-1}A)Q_2 = 0,$$

т.е. $Q_2^\top \in H(A^\top B_1 A)$. Мы получили, что $Q_2 \in H(B_2) \cap H^\top(A^\top B_1^{-1}A)$, поэтому $A' = AQ_2 \in AX_2$. $\diamondsuit$

Объединением лемм 4.3.12, 4.3.14 получаем следующее описание множества X.

Лемма 4.3.15 *Если $B_1 \in \mathrm{GL}\,(n)$, то*

$$X = X_1 A \cap AX_2. \tag{4.3.108}$$

Доказательство. Включение $X \subset X_1 A \cap AX_2$ следует из определения (4.3.95), ибо $X_1 \subset H(B_1), X_2 \subset H(B_2)$. Включение $X \supset X_1 A \cap AX_2$ следует из лемм 4.3.12, 4.3.14. $\diamondsuit$

4.3.10 Достаточные условия тривиальности подпространств X_1 и X_2.

Добавим достаточные условия тривиальности подпространств X_1 и X_2. В этом пункте предполагается $B_1 \in Ms(n) \cap \mathrm{GL}\,(n), B_2 \in Ms(n)$.

По определяющей формуле (4.3.96)

$$X_1(B_1, B_2, A) = H(B_1) \cap H(AB_2A^\top) = H(\{B_1, AB_2A^\top\}) \tag{4.3.109}$$

Достаточное условие равенства $H(\{B_1, AB_2A^\top\}) = \{0\}$ даётся леммой 4.3.10. Введём полином от переменной λ:

$$g_1(\lambda) \equiv \det(AB_2A^\top + \lambda B_1). \tag{4.3.110}$$

Согласно лемме 4.3.10, если у полинома $g_1(\lambda)$ нет кратных корней, то $X_1(B_1, B_2, A) = \{0\}$.

Рассмотрим теперь в предположении $B_2 \in \mathrm{GL}\,(m)$ множество

$$X_2 = H(B_2) \cap H^\top(A^\top B_1^{-1} A) = H^\top(B_2^{-1}) \cap H^\top(A^\top B_1^{-1} A) = H^\top(\{B_2^{-1}, A^\top B_1^{-1} A\}). \tag{4.3.111}$$

Введём многочлен от переменной λ

$$g_2(\lambda) \equiv \det(A^\top B_1^{-1} A - \lambda B_2^{-1}). \tag{4.3.112}$$

Согласно лемме 4.3.10, если у полинома $g_2(\lambda)$ нет кратных корней, то $X_2(B_1, B_2, A) = \{0\}$.

Мы убедились в справедливости утверждения.

Лемма 4.3.16 *Пусть $B_1 \in Ms(n) \cap \mathrm{GL}\,(n), B_2 \in Ms(n)$, тогда:*

1) если у полинома $g_1(\lambda)$ нет кратных корней, то $X_1 = \{0\}$;

2) если $B_2 \in \mathrm{GL}\,(m)$ и у полинома $g_2(\lambda)$ нет кратных корней, то $X_2 = \{0\}$.

Полиномы $g_1(\lambda)$ и $g_2(\lambda)$ являются функциями матриц B_1, B_2, A, т.е. $g_i(\lambda) = g_i(B_1, B_2, A; \lambda), i = 1, 2$.

Следующий вопрос, который нас интересует — существование матрицы $A \in M(n \times m)$ для которой полином $g_1(B_1, B_2, A; \lambda)$ не имеет кратных корней.

Симметричные матрицы B_1, B_2 допускают представления

$$B_1 = UD_1U^\top,\ B_2 = VD_2V^\top, \tag{4.3.113}$$

где матрицы U и V ортогональные, а матрицы D_1 и D_2 диагональные. Пусть $D \in \mathrm{GL}\,(n \times m)$ произвольная диагональная невырожденная матрица. Возьмём матрицу $A \in M(n \times m)$ вида

$$A = UDV^\top. \tag{4.3.114}$$

Полином $g_1(\lambda)$ в этом случае приводится к следующей форме

$$g_1(\lambda) = \det(UDV^\top VD_2V^\top VD^\top U^\top + \lambda UD_1U^\top) = \det(DD_2D^\top + \lambda D_1). \qquad (4.3.115)$$

Полином (4.3.115) имеет n корней вида

$$\lambda_{1i} = \begin{cases} d_i^2 \frac{d_{2i}}{d_{1i}} & , \ 1 \le i \le \min\{m,n\}; \\ 0 & , \ \min\{n,m\} < i \le n. \end{cases} \qquad (4.3.116)$$

Где d_i, d_{2i}, d_{1i} — соответственно диагональные элементы матриц D, D_1, D_2. Если $rank(B_2) \ge n-1$, то за счет выбора матрицы A можно добиться того, чтобы все корни (4.3.116) были различные.

Лемма 4.3.17 *Если $B_1 \in Ms(n) \cap \mathrm{GL}\,(n), B_2 \in Ms(m)$ и $rank B_2 \ge n-1$, то существует матрица $A \in \mathrm{GL}\,(n\times m)$, что у полинома $g_1(\lambda)$ нет кратных корней.*

Предположим дополнительно, что $B_2 \in Ms(m) \cap \mathrm{GL}\,(m)$, тогда в тех же обозначениях полинома $g_2(\lambda)$ получим

$$g_2(\lambda) = \det(VD^\top U^\top UD_1^{-1}U^\top UDV^\top + \lambda VD_2^{-1}V^\top) = \det(D^\top D_1^{-1}D + \lambda D_2^{-1}). \quad (4.3.117)$$

Корни полинома (4.3.117) имеют вид

$$\lambda_{2i} = \begin{cases} d_i^2 \frac{d_{1i}}{d_{2i}} & , \ 1 \le i \le \min\{m,n\}; \\ 0 & , \ \min\{n,m\} < i \le n. \end{cases} \qquad (4.3.118)$$

В случае, если $n \ge m-1$ выбором матрицы $A \in M(n\times m)$ можно добиться того, чтобы все m корней полинома $g_2(\lambda)$ были различны. Доказана следующая лемма.

Лемма 4.3.18 *Если $B_1 \in Ms(n) \cap \mathrm{GL}\,(n), B_2 \in Ms(m) \cap \mathrm{GL}\,(m), m \ge m-1$, то существует матрица $A \in \mathrm{GL}\,(n\times m)$, что у полинома $g_2(\lambda)$ нет кратных корней.*

Объединяя леммы 4.3.15-4.3.18 получаем теорему.

Теорема 4.3.2 *Если $B_1 \in Ms(n) \cap \mathrm{GL}\,(n), B_2 \in Ms(m) \cap \mathrm{GL}\,(m)$, то существует матрица $A \in \mathrm{GL}\,(n\times m)$, что*

$$X(B_1, B_2, A) = \{0\}. \qquad (4.3.119)$$

4.3.11 Многочлены $g_1(\lambda)$ и $g_2(\lambda)$ в случае $n = m$.

Сравним многочлены $g_1(\lambda)$ и $g_2(\lambda)$ в случае $n = m$, когда $B_i \in \mathrm{GL}\,(n), \quad i = 1,2, \quad A \in M(n)$. Сначала предположим, что $A \in \mathrm{GL}\,(n)$, тогда

$$g_1(\lambda) = \det(AB_2A^\top + \lambda B_1) = \det B_1 \det(AB_2A^\top B_1^{-1} + \lambda E) =$$

$$\det B_1 \det(AB_2)\det(A^\top B_1^{-1} + \lambda(AB_2)^{-1}) = \det B_1 \det B_2 \det A \det(A^\top B_1^{-1} + \lambda B_2^{-1}A^{-1}) =$$

$$\det B_1 \det B_2 \det(A^\top B_1^{-1}A + \lambda B_2^{-1}) = \det B_1 \det B_2 g_2(\lambda).$$

Итак, при $A \in \mathrm{GL}\,(n)$ мы доказали формулу

$$g_1(B_1, B_2, A; \lambda) = \det B_1 \det B_2 \ g_2(B_1, B_2, A; \lambda) \qquad (4.3.120)$$

Но при фиксированных B_1, B_2, λ величины $g_i(B_1, B_2, A; \lambda), \ i = 1,2$ суть полиномы на пространстве $M(n)$ и если для полиномов верно равенство (4.3.120) на открытом множестве $\mathrm{GL}\,(n) \subset M(n)$, что оно верно и всюду на $M(n)$. Итак, при любых $B_1 \in \mathrm{GL}\,(n), B_2 \in \mathrm{GL}\,(n), A \in M(n)$ верно равенство (4.3.120), т.е. полиномы $g_1(\lambda)$ и $g_2(\lambda)$ отличаются на постоянный множитель.

§4.4 Представление группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на линейном пространстве $\mathbf{R}^n$

4.4.1 Представление $T_G(x) = Gx$ группы $Gr = \Omega(B)$ на векторном пространстве $V = \mathbf{R}^n$. Рассмотрим линейное представление группы $Gr = \Omega(B)$, где B — симметричная невырожденная матрица, на векторном пространстве $V = \mathbf{R}^n$ вида

$$T_G(x) = Gx. \tag{4.4.1}$$

при $G \in \Omega(B)$. Для каждой точки $x \in \mathbf{R}^n$ нас будет интересовать группа $\Gamma(x)$, орбита этой точки и вопрос об её псевдосовершенстве.

Введённое представление является несократимым, ибо матрица $-E \in \Omega(B)$, и условие $(-E)x = x$ влечет $x = 0$. Параллельно мы будем рассматривать редуцирование введенного представления на подгруппу $\Omega_e(B) \subset \Omega(B)$.

Сначала в пунктах 4.4.2-4.4.4 мы рассмотрим случай матрицы B специального вида $B = Z_p^n$.

4.4.2 Орбиты представления с группой $\Omega(Z_p^n)$. Перейдем к описанию орбит представления с группой $\Omega(Z_p^n)$. Введём целое число $q = n - p$, тогда $\Omega(Z_p^n) = O(p, q)$ — группа псевдоортогональных матриц. Связная компонента единицы в этом случае $\Omega_e(Z_p^n) = SO(p, q)$.

При $B = E$ каждая орбита группы $O(n, 0) \equiv O(n)$ — ортогональной группы совпадает со множеством уровня квадратичной формы $\langle x, Bx\rangle$. Причём при $n = 1$ орбиты группы $SO(n, 0) \equiv SO(n)$ состоят из одной точки и не совпадают с орбитами группы $O(1)$, состоящими в случае орбит, не содержащих нуль, из двух точек, а при $n \geq 2$ орбиты групп $SO(n)$ и $O(n)$ совпадают.

В случае $p > 0$, $q > 0$, сначала рассмотрим подслучай $n = 2$, $p = 1$, $q = 1$. Тогда $\Omega(B) = O(1, 1)$ есть группа преобразований Лоренца на плоскости. Линии уровня квадратичной формы $\langle x, Bx\rangle$ есть линии $(x_0^2) - (x_1^2) = C$ и при $C \neq 0$ каждая линия уровня является орбитой группы $O(1, 1)$, а при $C = 0$ линия уровня состоит из двух орбит: одна орбита — лишь точка $x = 0$, вторая — все ненулевые точки, лежащие на линии уровня $(x_0^2) - (x_1^2)$.

Для группы $SO(1, 1) \subset O(1, 1)$ орбиты при $C \neq 0$ совпадают с компонентами связности кривой $(x_0^2) - (x_1^2) = C$, т.е. каждая линия уровня квадратичной формы $\langle X, Bx\rangle$ есть при $C \neq 0$ объединение двух орбит. Линия уровня $C = 0$ состоит из трёх орбит : 1) одноточечной $x = 0$, 2) прямой $x_0 = x_1$ с выколотым нулем, 3) прямой $x_0 = -(x_1)$ с выколотым нулем.

Рассмотрим случай $p > 0$, $q > 0$ и введём двумерное пространство $X \subset \mathbf{R}^n$ специального вида, состоящее из векторов $x \in \mathbf{R}^n$, у которых отличны от нуля лишь p-ая и $(p+1)$-ая координаты. Сужение преобразований $G \in O(p, q)$ на пространство X даёт двумерные преобразования $G|_X$, составляющие рассмотренную выше двумерную группу Лоренца O(1,1). Пространство $\mathbf{R}^n$ представим в виде прямой суммы $\mathbf{R} = \mathbf{R}^p + \mathbf{R}^q$ пространств $\mathbf{R}^p$ и $\mathbf{R}^q$. Произвольный вектор $x \in \mathbf{R}^n$ представим в виде суммы $x = x' + x''$, $x' \in \mathbf{R}^p$,$x'' \in \mathbf{R}^q$.

При любом натуральном p для данного вектора $x' \in \mathbf{R}^p$ существует преобразование $Q' \in SO(p)$ такое, что у вектора $y' = Q'x'$ все координаты, кроме y'_p равны нулю. Выбирая $Q' \in O(p)$ можно добиться также, чтобы $y'_p \geq 0$. В случае $p \geq 2$ условия $y'_p \geq 0$ можно добавить, выбирая $Q' \in SO(p)$.

Аналогично, для вектора $x'' \in \mathbf{R}^q$ выбираем преобразование $Q'' \in SO(q)$, так чтобы у вектора $y'' = Q''x''$ все координаты, кроме первой, были нулевые. При $q \geq 1$ можно выбрать $Q'' \in O(q)$ так, чтобы $y_1'' \geq 0$. В случае $q \geq 2$ условия $y_1'' \geq 0$ можно добиться, выбирая $Q'' \in SO(q)$.

Для каждой точки $x \in \mathbf{R}^n$ мы построили преобразование $G \in O(p,q)$, $G = \begin{pmatrix} Q' & 0 \\ 0 & Q'' \end{pmatrix}$, которое переводит точку x в точку $y = Gx \in X$. Следовательно, каждая точка орбиты x может быть получена из некоторой точки y плоскости X действием преобразования $G^{-1} \in O(p,q)$. Поскольку орбиты для действия групп $SO(1,1)$, $O(1,1)$ на плоскости $\mathbf{R}^2$ уже описаны, мы получаем следующий вывод из проведенных рассуждений.

Лемма 4.4.1 *Орбиты группы $\Omega(B)$ совпадают с множеством уровня*

$$\langle x, Bx\rangle = C. \tag{4.4.2}$$

при $C \neq 0$. При $C = 0$ множество уровня (4.4.2) является объединением не более двух орбит: нулевой и оставшегося множества.

Лемма 4.4.2 *Орбиты группы $\Omega_e(B)$ совпадают с компонентами связности множества уровня (4.4.2) при $C \neq 0$, а при $C = 0$ множество уровня (4.4.2) есть объединение нулевой орбиты и орбит, являющихся компонентами связности оставшегося множества.*

4.4.3 Описание группы $\Gamma(x)$ для ненулевого элемента $x \in \mathbf{R}^n$. Поскольку группа $\Gamma(x)$ совпадает с группой $\Gamma(\operatorname{lin}(x))$ и элементы, лежащие на одной орбите, подобны, то с точностью до подобия для описания группы $\Gamma(x)$ для любого элемента $x \in \mathbf{R}^n$ достаточно построить сохраняющие группы для трёх фиксированных точек.

Обозначим через X^+, X^-, X^0 подмножества векторного пространства $\mathbf{R}^n$, на которых квадратичная форма

$$\Phi(x) \equiv \langle x, Bx\rangle. \tag{4.4.3}$$

соответственно положительна, отрицательна и равна нулю, $\mathbf{R}^n = X^+ \cup X^- \cup X^0$. Мы считаем,что всегда $p \geq 1$, поэтому множество X^+ всегда не пусто. Выберем вектор $a^+ \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in X^+$ и в случае $q \geq 1$ выберем вектор $a^- \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in X^-$ и вектор $a^0 \in X^0$, у которого $a_p^0 = 1$, $a_{p+1}^0 = 1$, а остальные координаты равны нулю. Если ненулевой вектор $x \in X^i$, $i = +,-,0$, то существует число $\lambda \neq 0$, что $\Phi(\lambda x) = \Phi(a^i)$, поэтому точки λx и a^i лежат на одной орбите и существует матрица $W \in \Omega(B)$, что $\lambda x = T_W(a^i) = Wa^i$, откуда

$$\Gamma(x) = \Gamma(\operatorname{lin}(\lambda x)) = \Gamma(T_w(\operatorname{lin}(a^i))) = W\Gamma(a^i)W^{-1}. \tag{4.4.4}$$

Будем обозначать через q^i вектор-столбец матрицы $G \in M(n)$, $i = 1,2,...n$. Принадлежность $G \in \Omega(B)$ характеризуется следующим образом.

Лемма 4.4.3 *Матрица $G \in \Omega(B)$, $B = Z_p^n$, тогда и только тогда, когда*

$$\forall i = 1,2,...n \ \ \forall j = 1,2,...n \ \mid \ \langle q^i, B - qi\rangle = b_{ij}. \tag{4.4.5}$$

Доказательство. Матрица Z_p^n инволютивна, поэтому согласно следствию 2.4.1 включение $G \in \Omega(B)$ эквивалентно включению $G^\top \in \Omega(B)$ или равенству

$$G^\top BG = B. \tag{4.4.6}$$

Пусть $e^i \in \mathbf{R}^n$ столбец, у которого i-тый элемент единицы, остальные нуль. Условие (4.4.6) эквивалентно условиям

$$\forall i = 1, 2, ...n \;\; \forall j = 1, 2, ...n \;\mid\; \langle e^i, G^\top BGe^j\rangle = \langle e^i, Be^j\rangle.$$

что совпадает с (4.4.5). $\diamondsuit$

Группа $\Gamma(a^+)$ состоит из матриц $G \in \Omega(Z_p^n)$, удовлетворяющих условию

$$Ga^+ = a^+, \tag{4.4.7}$$

где $a^+ = e^1$. Поэтому из (4.4.7) следует, что первый столбец матрицы G есть $g^1 = e^1$. Соотношения (4.4.5) в таком случае приводят при $i = 1$, $j = 2, 3, ...n$ к условиям $g_{1j} = 0$. Учитывая это, при $i, j = 2, 3, ...n$ условия (4.4.5) для матрицы G можно записать в виде

$$\langle \bar g^i, \bar B \bar g^j\rangle = \bar b_{ij}, \quad i, j = 2, 3, \cdots n, \tag{4.4.8}$$

где матрицы $\bar B, \bar G \in M(n-1)$ получены из матриц $B, G \in M(n)$ вычёркиванием первой строки и первого столбца. Согласно лемме 4.4.3 из (4.4.8) следует, что $\bar G \in \Omega(Z_{p-1}^{n-1})$. Итак, группа матриц $\Gamma(a^+)$ состоит из матриц $G \in M(n)$ вида

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \bar G & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{4.4.9}$$

где $\bar G \in \Omega(Z_{p-1}^{n-1})$.

Представление групп $\Omega(Z_{p-1}^{n-1})$ на пространстве $x \in \mathbf{R}^{n-1}$ несократимо, поэтому, если $x \in \Pi\Gamma(a^+)$, то

$$\bar x = 0, \tag{4.4.10}$$

где вектор $\bar x \in \mathbf{R}^{n-1}$ получен из вектора $x \in \mathbf{R}^n$ отбрасыванием первой координаты. Итак, $\Pi\Gamma(a^+) = \operatorname{lin}(a^+)$, т.е. точка $a^+ \in \mathbf{R}^n$ псевдосовершенная для данного представления.

Аналогично рассматривается случай элемента $a^- \in \mathbf{R}^n$, для которого группа $\Gamma(a^-)$ состоит из матриц $G \in M(n)$ вида

$$G = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \bar G & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.4.11}$$

где матрица$G \in \Omega(Z^(n-1)_p$. При этом $\Pi\Gamma(a^-) = \operatorname{lin}(a^-)$ и точка $a^- \in \mathbf{R}^n$ — псевдосовершенная точка представления.

Перейдем к описанию группы $\Gamma(a^0)$. Начнем со случая $n = 2$, $p = 1$, $q = 1$. Условие

$$Ga^0 = a^0 \tag{4.4.12}$$

для четырех компонент связности Ω_{++}, Ω_{+-}, Ω_{-+}, Ω_{--} группы Ω имеют, соответственно, вид

$$cht - sht = 1; \quad t \in \mathbf{R}, \tag{4.4.13}$$

$$\begin{cases} cht + sht = 1, \quad t \in \mathbf{R}, \\ -(sht + cht) = 1; \end{cases} \tag{4.4.14}$$

$$\begin{cases} -cht - sht = 1, \quad t \in \mathbf{R}, \\ sht + cht = 1; \end{cases} \tag{4.4.15}$$

$$-(cht - sht) = 1; \quad t \in \mathbf{R}. \tag{4.4.16}$$

Системы (4.4.14-4.4.16) решения не имеют, а система (4.4.13) имеет единственное решение $t = 0$. Итак, группа $\Gamma(a^0)$ состоит только из одного единичного элемента. Соотношение $\Pi(\Gamma(a^0)) = \operatorname{lin}(a^0)$ в таком случае для элемента a^0 не выполняется, ибо

$$\Pi(\Gamma(a^0)) = \Pi(e) = \mathbf{R}^2 \neq \operatorname{lin}(a^0).$$

Перейдем к случаю $n > 2$, $p \geq 1$, $q > 1$. Соотношение (4.4.12) является тогда следующим ограничением для двух столбцов q^p,q^{p+1} матрицы $G \in \Omega(B)$

$$g^p + g^{p+1} = a^0. \tag{4.4.17}$$

Для любого столбца $x \in \mathbf{R}^n$ обозначим через $\bar{x} \in \mathbf{R}^{n-2}$ столбец, получающийся из столбца x вычёркиванием p-той и $p+1$-ой координат. Аналогично для матриц $G \in M(n)$, $B \in M(n)$ через $\bar{G} \in M(n-2)$, $\bar{B} \in M(n-2)$ обозначим матрицы, полученные из исходных вычёркиванием строк и столбцов с номерами p, $p+1$. Из условия (4.4.17) $\bar{g}^{p+1} = -\bar{g}^p$. Возьмём в качестве $\bar{g}^p$ произвольный вектор $f \in \mathbf{R}^{n-2}$, тогда оставшиеся две компоненты векторов g^p и g^{p+1} однозначно восстанавливаются из соотношения (4.4.17) и соотношений ортогональности. В самом деле, обозначим через $\underline{g} \in \mathbf{R}^2$ вектор, получающийся из вектора $g \in \mathbf{R}^n$ вычёркиванием всех компонент, кроме p-той и $p+1$-ой. Аналогично, через $\underline{G} \in M$, $\underline{B} \in M$ обозначим матрицы, полученные из матриц $G \in M(n)$, $B \subset M(n)$ вычёркиванием всех строк и столбцов, кроме имеющих номера p, $p+1$. Тогда соотношения ортонормированности векторов g^p, g^{p+1} и соотношение (4.4.17) дают следующие 3 соотношения:

$$\begin{cases} \langle \bar{g}^p, \bar{B}\bar{g}^p \rangle + \langle \underline{g}^p, \underline{B}\underline{g}^p \rangle = 1, \\ \langle \bar{g}^p, \bar{B}\bar{g}^p \rangle + \langle \underline{a}^0 - \underline{g}^p, \underline{B}(\underline{a}^0 - \underline{g}^p) \rangle = -1, \\ -\langle \bar{g}^p, \bar{B}\bar{g}^P \rangle + \langle \underline{g}^p, \underline{B}(\underline{a}^0 - \underline{g}^p) \rangle = 0. \end{cases} \tag{4.4.18}$$

Три соотношениях (4.4.18) эквивалентны двум соотношениям

$$\begin{cases} \langle \underline{g}^p, \underline{B}\underline{a}^0 \rangle = 1, \\ \langle \underline{g}^p, \underline{B}\underline{g}^p \rangle = 1 - 2C, \end{cases} \tag{4.4.19}$$

где

$$C \equiv 1/2 \langle \bar{g}^p, \bar{B}\bar{g}^p \rangle. \tag{4.4.20}$$

Из двух соотношений (4.4.19) однозначно определяется двумерный вектор

$$\underline{g}^p = \begin{pmatrix} 1 - C \\ -C \end{pmatrix}. \tag{4.4.21}$$

Итак, по произвольно заданному вектору $\bar{g}^p = f \in \mathbf{R}^{n-2}$ однозначно определяются вектора g^p и $g^{p+2} = a^0 - g^p$. Каждый из остальных столбцов матрицы $G \in \Omega(B)$ должен быть ортогонален столбцам g^p, g^{p+1}, а, следовательно, их сумме — столбцу a^0. Условие ортогональности вектору a^0

$$\langle g^i, Ba^0 \rangle = g^i_p - g^i_{p+1} = 0$$

означает лишь, что $g^i_p = g^i_{p+1}$, при $i \neq p$, $i \neq (p+1)$. Тогда для $n-2$ столбцов g^i, $i \neq p$, $i \neq (p+1)$ условие ортогональности их между собой и нормированности сводится к соответствующим условиям на усечённые столбцы $\bar{g}^i$:

$$\langle \bar{g}^i, \bar{B}\bar{g}^j \rangle = \bar{b}_{ij}, \quad i,j \neq p; \quad i,j \neq (p+1). \tag{4.4.22}$$

Возьмём теперь произвольную матрицу $\bar{G} \in \Omega(\bar{B})$ размера $(n-2) \times (n-2)$ и произвольный вектор $f \in \mathbf{R}^{n-2}$ и определим у каждого вектора g^i, $i \neq p, p+1$, оставшуюся свободную компоненту g^i_p из условия ортогональности

$$\langle g^i, Bg^p \rangle = 0,$$

т.е.

$$\langle \bar{g}^i, \bar{B}\bar{g}^p \rangle + \langle \underline{g}^i, \underline{B}\underline{g}^p \rangle = 0$$

или эквивалентно

$$g^i_p + \langle \bar{g}^i, \bar{B}f \rangle = 0.$$

Откуда

$$g^i_p = -\langle \bar{g}^i, \bar{B}f \rangle. \tag{4.4.23}$$

Мы получим следующее описание группы $\Gamma(a^0)$ при $n > 2$. Каждая матрица $G \in \Gamma(a^0)$ однозначно определяется заданием матрицы $G \in \Omega(Z^{n-2}_{p-1})$ размерности $(n-2) \times (n-2)$ и вектора $f \in \mathbf{R}^{n-2}$ следующим образом. Вектор g^p получится из вектора $f \equiv \bar{g}^p \in \mathbf{R}^{n-2}$ и вектора $\underline{g}^p \in \mathbf{R}^2$ вида $\underline{g}^p = \begin{pmatrix} 1-C \\ -C \end{pmatrix}$,

где $C = \frac{1}{2}\langle f, \bar{B}f \rangle$. Вектор $g^{p+1} = a^0 - g^p$, а вектора $\bar{g}^i \in \mathbf{R}^{n-2}$ достраиваются до векторов $g^i \in \mathbf{R}^n$ добавлением двух компонент $g^i_{p+1} = g^i_p = -\langle \bar{g}^i, \bar{B}f \rangle$.

Проверим, что при $p > 0$, $q > 0$, $n > 2$ выполняется соотношение

$$\Pi(\Gamma(a^0)) = \operatorname{lin}(a^0). \tag{4.4.24}$$

Представление группы $\Omega(Z^{n-2}_{p-1})$ на пространстве $\mathbf{R}^{n-2}$ несократимо, поэтому если $x \in \Pi(\Gamma(a^0))$, то $\bar{x} = 0$. Для оставшихся компонент $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_p \\ x_{p+1} \end{pmatrix}$ при любой матрице $G \in \Gamma(a^0)$ должны выполняться соотношения

$$x_p(1-C) + x_{p+1}C = x_p$$

$$-x_pC + x_{p+1}(1+C) = x_{p+1}.$$

Из последних соотношений, выбирая вектор f с $\langle f, \bar{B}f \rangle = 2C \neq 0$, получаем $x_p = x_{p+1}$, т.е. $x \in \operatorname{lin}(a^0)$. Соотношение (24) доказано.

Результаты о псевдосовершенстве точек пространства $\mathbf{R}^n$ при данном представлении соберем в следующей лемме.

Лемма 4.4.4 *Если $n \neq 2$ или $n = 2$, $p = 2$, то все точки $x \in \mathbf{R}^n$ псевдосовершенны. Если $n = 2$, $p = 1$, $q = 1$, то точки $x \in X^+$, $x \in X^-$ псевдосовершенны, а точки $x \in X^0$, $x \neq 0$ не псевдосовершенны.*

4.4.4 Редукция представления группы $\Omega(B)$ на подгруппу $\Omega_e(B)$. В этом пункте мы рассмотрим редуцирование представления группы $\Omega(B)$ на подгруппу $\Omega_e(B)$ — связную компоненту единицы. Мы сохраним то же обозначение T_G, $G \in \Omega_e(B)$ для операторов представления. Тот же смысл сохранится за операцией построения сохраняющегося множества $\Pi(S) \subset \mathbf{R}^n$, для подмножества $S \subset \Omega_e(B)$. Операцию перехода от подмножества $W \subset \mathbf{R}^n$ к сохраняющему множеству для редуцированного представления обозначим $\Gamma e(W) = \Gamma(W) \cap \Omega_e(B)$. Рассмотрим те же вопросы, что и в предыдущем пункте для данного представления: 1) несократимость представления, 2) группа $\Gamma e(x)$, 3) псевдосовершенство точек $x \in \mathbf{R}^n$.

Далее в этом пункте $B = Z_p^n$, $p > 0$.

Лемма 4.4.5 *Представление группы $\Omega_e(Z_p^n)$ несократимо при $n > 1$.*

Доказательство. При $n = 2$ и $q = 0$ группа $\Omega_e(Z_2^2)$ полна, так как не существует ненулевого вектора, неподвижного при любом ортогональном повороте плоскости. В случае $n = 2$, $p = 1$, $q = 1$ матрица $G \in \Omega_e(Z_1^2)$ имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} cht & sht \\ sht & cht \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R} \tag{4.4.25}$$

и соотношение $Gx = x$ возможно при $t \neq 0$ лишь при $x = 0$, т.е. представление группы $\Omega_e(Z_1^2)$ несократимо. Из несократимости представления группы $\Omega_e(Z_p^n)$ при $n = 2$ вытекает его несократимость при любом $n > 2$, так как при $n > 2$ группа $\Omega_e(Z_p^n)$ содержит каноническим образом группы $\Omega_e(Z_p^2) \subset M(2)$. $\diamondsuit$

Пусть множества X^i и точки a^i, $i = +, -, 0$ те же, что и в пункте 4.4.3. Тогда если ненулевая точка $x \in X^i$, то существует $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$, что $\Phi(\lambda x) = \Phi(a^i)$. Переходя, если требуется от λ к $(-\lambda)$ можно добиться при $n > 2$, чтобы точки λx и a^i принадлежали одной компоненте связности множества уровня квадратичной формы $\Phi(x) = Const$. Согласно лемме 4.4.2 тогда точки λx и a^i лежат на одной орбите, т.е. существует матрица $Q \in \Omega_e(B)$, что $\lambda x = Qa^i$. Последнее влечет $\Gamma e(x) = Q\Gamma e(a^i)Q^{-1}$. Итак, для построения группы $\Gamma e(x)$ для любого $x \in \mathbf{R}^n$ при $n > 2$ достаточно построить группу $\Gamma e(x)$ для трёх элементов a^i, $i = +, -, 0$. При $n = 2$ проведенные рассуждения справедливы при $p = 2$ для всех x, а при $p = 1$ для $x \in X^+$ и $x \in X^-$.

Чтобы построить группу $\Gamma e(a^i)$, достаточно выделить связную компоненту единицы в группе $\Gamma(a^i)$, построенной в п. 4.4.3. Таким образом группа $\Gamma e(a^+)$ состоит из всех матриц $G \in M(n)$ вида

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \bar{G} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{4.4.26}$$

где $\bar{G} \in \Omega_e(Z_{p-1}^{n-1})$, а группа $\Gamma e(a^-)$ из всех матриц вида

$$G = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \bar{G} & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.4.27}$$

где $\bar{G} \in \Omega_e(Z_p^{n-1})$. Так как при $k > 1$ группа $\Omega_e(Z_p^k)$ по лемме 4.4.5 несократима, то при $n > 2$

$$\Pi(\Gamma e(a^i)) = \operatorname{lin}(a^i), \quad i = +, -.$$

Согласно п. 4.4.3 при $n > 2$ группа $\Gamma e(a^0)$ описывается следующим образом. Для матрицы $G \in M(n)$ через $\bar{G} \in M(n-2)$ обозначим матрицу, полученную из матрицы G вычёркиванием строк и столбцов с номерами p, $p+1$, а через $\underline{G} \in M(2)$ — матрицу, составленную из элементов, стоящих на пересечении строк и столбцов с номерами p, $p+1$. $g^i \in \mathbf{R}^n$ обозначает i-тый столбец матрицы G. Для вектора $x \in \mathbf{R}^n$ обозначим через $\bar{x} \in \mathbf{R}^{n-2}$ вектор, полученный вычёркиванием координат с номерами p, $(p+1)$, а через $\underline{x} \in \mathbf{R}^2$ обозначим вектор, составленный из компонент с номерами p, $p+1$. Матрица $G \in \Gamma e(a^+)$ фиксируется заданием произвольного вектора $f \in \mathbf{R}^{n-2}$ и матрицы $\bar{G} \in \Omega_e(Z_{p-1}^{n-2})$ по рецепту п. 4.4.3.

При $n > 3$ представление группы $\Omega_e(Z_{p-1}^{n-2})$ несократимо, поэтому если $x \in \Pi(\Gamma e(a^0))$, то $\bar{x} = 0$. Итак, при $x \in \Pi(\Gamma e(a^0))$ должно выполняться условие

$$\forall f \in \mathbf{R}^{n-2} \ \mid \ x_p f - x_{p+1} f = 0,$$

откуда $x_p = x_{p+1}$, т.е. $x \in \operatorname{lin}(a^0)$ и точка $a^0 \in \mathbf{R}^n$ псевдосовершенна. Рассмотрим случай $n = 3$, $p = 1$, $q = 2$. Тогда группа $\Omega_e(\bar{B})$ состоит лишь из единичного элемента, вектор $f \in \mathbf{R}^{n-2}$ состоит из одного числа $f = t \in \mathbf{R}$, группа $\Gamma e(a^0)$ состоит из матриц $G \in M(3)$ следующего вида:

$$G(t) = \begin{pmatrix} 1 + t^2/2 & -t^2/2 & t \\ t^2/2 & 1 - t^2/2 & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Условие

$$\forall t \in \mathbf{R} \ \mid \ G(t)x = x$$

для вектора $x \in \mathbf{R}^3$ влечет $x_1 = x_2$, $x_3 = 0$, т.е. $x \in \operatorname{lin}(a^0)$.

В случае $n = 2$, $p = 2$ все ненулевые вектора $x \in \mathbf{R}^2$ принадлежат множеству X^+ и группа $\Gamma e(x)$ состоит лишь из единичного элемента. В таком случае $\Pi(\Gamma e(x)) = \mathbf{R^2} \neq \operatorname{lin}(x)$. В случае $n = 2$, $p = 1$, $q = 1$ группа $\Omega_e(B)$ состоит из всех матриц $G(t)$ вида (4.4.25) и при любом $x \neq 0$ верно $\Gamma e(x) = e$, согласно доказательству леммы 4.4.5. Итак, при $n = 2$ для любого ненулевого вектора $x \in \mathbf{R}^2$ группа $\Gamma e(x)$ состоит лишь из единичного элемента и $\Pi(\Gamma e(x)) = \mathbf{R}^2 \neq \operatorname{lin}(x)$.

Зафиксируем полученные результаты в лемме.

Лемма 4.4.6 *Представление группы $\Omega_e(Z_p^n)$ псевдосовершенно при $n \geq 3$.*

4.4.5 Общий случай симметричной невырожденной матрицы B.

Перенесем теперь результаты, полученные для матрицы B специального вида $B = Z_p^n$, на общий случай симметричной невырожденной матрицы B. Для этого рассмотрим более широкое линейное представление, чем введённое в п. 4.4.1. А именно положим $Gr = \operatorname{GL}(n)$, а векторное пространство $V = \mathbf{R}^n$ и операторы (4.4.1) оставим теми же. Рассмотренное в предыдущих пунктах 4.4.1–4.4.4 представление будет редуцированием введенного представления на подгруппу $\Omega(B) \subset \operatorname{GL}(n)$. Для введенного представления мы сохраним обозначения для множеств $\Gamma(W)$, $\Pi(S)$ и операторов T_G.

Согласно §2.4 существует невырожденная матрица $Q \in \mathrm{GL}\,(n)$, что $B = QZ_p^n Q^\top$, где p — положительный индекс инерции квадратичной формы с матрицей B. Тогда по лемме 2.4.1

$$\Omega(B) = Q\Omega(Z_p^n)Q^{-1} \tag{4.4.28}$$

и в обозначениях п. §4.1.5

$$\Omega(B) = Y_Q(\Omega(Z_p^n)), \tag{4.4.29}$$

т.е. подгруппу $Sr2 \equiv \Omega(B)$ и $Sr1 \equiv \Omega(Z_p^n)$ группы $Gr = \mathrm{GL}\,(n)$ подобны.

К подобным подгруппам $Sr2$ и $Sr1$ применим теорию п. 4.1.4 для построения групп $\Gamma(\Omega(B);x)$ и выяснения вопроса о псевдосовершенстве представления с группой $\Omega(B)$. Согласно формуле (4.1.45) для любого $x \in \mathbf{R}^n$

$$\Gamma(\Omega(B);x) = Y_Q(\Gamma(\Omega(Z_p^n);T_{Q^{-1}}(x))), \tag{4.4.30}$$

где группа $\Gamma(\Omega(Z_p^n);x')$ для любого элемента $x' \in \mathbf{R}^n$ описана в п. 4.4.3 данного параграфа. Из леммы 4.4.4 и соотношения (4.4.29) согласно п. 4.1.4 вытекает

Лемма 4.4.7 *Представление с группой $\Omega(B)$ псевдосовершенно кроме случая $n = 2$, $p = 1$.*

Перейдем к описанию орбит представления с группой $\Omega(B)$. Из леммы 4.4.1 и формулы (4.1.49) вытекает

Лемма 4.4.8 *Орбиты группы $\Omega(B)$ совпадает со множествами уровня*

$$\langle x, B^{-1}x\rangle = C \tag{4.4.31}$$

при $C \neq 0$. При $C = 0$ множество уровня (4.4.31) является объединением не более двух орбит: нулевой и оставшегося множества.

Доказательство. Орбита точки $x \in \mathbf{R}^n$ под действием группы $\Omega(B)$ связана с орбитой точки $T_{Q^{-1}}(x) \in \mathbf{R}^n$ под действием группы $\Omega(Z_p^n)$ соотношением (4.1.49), согласно которому включение $z \in O(\Omega(B);x)$ эквивалентно включению $T_{Q^{-1}}(z) \in O(\Omega(Z_p^n);T_{Q^{-1}}(x))$. Но последнее включение по лемме 4.4.1 эквивалентно тому, что точка $T_{Q^{-1}}(z) = Q^{-1}z$ удовлетворяет уравнению

$$\langle Q^{-1}z, Z_p^n Q^{-1}z\rangle = \langle Q^{-1}x, Z_p^n Q^{-1}x\rangle. \tag{4.4.32}$$

Осталось заметить, что $Q^{-1\top}Z_p^nQ^{-1} = (QZ_p^nQ^\top)^{-1} = B^{-1}$ и записать при фиксированном $x \in \mathbf{R}^n$ уравнение (4.4.32) относительно z в эквивалентном виде

$$\langle z, B^{-1}z\rangle = \langle x, B^{-1}x\rangle. \quad \diamondsuit \tag{4.4.33}$$

Если теперь вместо группы $\Omega(B)$ взять её связную компоненту $\Omega_e(B)$, то из соотношения (4.4.28) следует, что

$$\Omega_e(B) = Y_Q(\Omega_e(Z_p^n)), \tag{4.4.34}$$

т.е. подгруппа $\Omega_e(B)$ подобна подгруппе $\Omega_e(Z_p^n)$. Тогда из п. 4.1.4 следует, во-первых, что представление с группой $\Omega_e(B)$ несократимо при $n > 1$ в силу леммы 5, во-вторых, что для любой точки $x \in \mathbf{R}^n$

$$\Gamma(\Omega_e(B);x) \equiv Y_Q(\Gamma(\Omega_e(Z_p^n);Q^{-1}x)), \tag{4.4.35}$$

в-третьих, в силу леммы 4.4.6 представление с группой $\Omega_e(B)$ при $n \geq 3$ псевдосовершенно, в-четвёртых, в силу леммы 4.4.2 орбиты группы $\Omega_e(B)$ совпадают с компонентами связности множества уровня (31) при $C \neq 0$, а при $C = 0$ множество уровня (4.4.31) есть объединение нулевой орбиты и орбит, являющихся компонентами связности оставшегося множества.

4.4.6 Свойства представления группы $\Gamma m^\top(Z^n_{p,q,r})$**.** В этом пункте матрица B симметрична и возможно вырождена. Наша цель перенести на этот случай часть результатов данного параграфа. Рассмотрим наряду с полугруппой $\Omega(B)$ полугруппу $\Omega^\top(B) \subset M(n)$ и группу $\Gamma m^\top(B) = \Omega^\top(B) \cap \mathrm{GL}\,(n)$. Группа $\Gamma m^\top(B)$ состоит из всех невырожденных матриц $G \in \mathrm{GL}\,(n)$, удовлетворяющих алгебраическому уравнению

$$G^\top BG = B \tag{4.4.36}$$

поэтому является замкнутой подгруппой группы $\mathrm{GL}\,(n)$ и, следовательно, подгруппой Ли. Группа $\Gamma m^\top(B)$ есть группа сохраняющих квадратичную форму $\langle x, Bx\rangle$ невырожденных линейных преобразований линейного пространства $\mathbf{R}^n$.

Для невырожденной матрицы B согласно лемме 7.2

$$\Gamma m^\top(B) = \Gamma m(B^{-1}). \tag{4.4.37}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $B = Z^n_{p,q,r}$ — матрица специального вида (см. п. 2.4.3). Согласно п. 2.4.3 формула (2.4.26), в этом случае группа $\Gamma m^\top(Z^n_{p,q,r})$ состоит из всех блочных матриц G вида

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}, \tag{4.4.38}$$

где $G_{11} \in \Gamma m^\top(Z^{p+q}_p)$, $G_{21} \in M(r \times (p+q))$, $G_{22} \in \mathrm{GL}\,(r)$.

Из формулы (4.4.38) следует, что если мы редуцируем представление группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на $\mathbf{R}^n$ на подгруппу $\Gamma m^\top(Z^n_{p,q,r})$, то полученное представление будет несократимым и псевдосовершенным. В самом деле, если для элемента $x \in \mathbf{R}^n$ при любом $G \in \Gamma m^\top(Z^n_{p,q,r})$ верно

$$Gx = x, \tag{4.4.39}$$

то выбирая $G_{21} = 0$, $G_{22} = \lambda E$, $\lambda \neq 0$, и полагая $x = \bar{x} + \underline{x}$, где

$$\bar{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{p+q} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{p+q+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{4.4.40}$$

из (39) получим

$$G_{11}\bar{x} = \bar{x}, \quad \underline{x} = 0 \tag{4.4.41}$$

при любом $G_{11} \in \Gamma m^\top(Z^{p+q}_p) = \Gamma m(Z^{p+q}_p) = \Omega(Z^{p+q}_p)$. Поскольку согласно п. 4.4.1 представление на $\mathbf{R}^{p+q}$ с группой $\Omega(Z^{p+q}_p)$ несократимо, то и $\bar{x} = 0$, т.е. $x = 0$. Мы убедились в несократимости представления с группой $\Gamma m^\top(Z^n_{p,q,r})$.

Чтобы убедиться в псевдосовершенстве представления с группой $\Gamma m^\top(Z^n_{p,q,r})$ зафиксируем произвольный ненулевой вектор $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и представим его в виде (4.4.40). Условие (4.4.39) в блочном представлении (4.4.38) матрицы G принимает вид

$$G_{11}\bar{x}_0 = \bar{x}_0, \tag{4.4.42}$$

$$G_{21}\bar{x}_0 + G_{22}\underline{x}_0 = \underline{x}_0. \qquad (4.4.43)$$

В случае $\bar{x}_0 = 0$ условие (4.4.42) выполнено при любом G_{11} и группа $\Gamma(\Gamma m^\top(Z^n_{p,q,r}); x_0)$ состоит из всех блочных матриц вида (4.4.38) у которых $G_{11} \in \Gamma m^\top(Z^{p+q}_p)$, $G_{21} \in M(r \times (p+q))$, $G_{22} \in \Gamma(\mathrm{GL}\,(r); \underline{x}_0)$. В силу несократимости представлений для групп $\Omega(Z^{p+q}_p)$ и $Gr(r)$ получаем $\Pi(\Gamma(\Gamma m^\top(Z^n_{p,q,r}); x_0)) = \mathrm{lin}\,(x_0)$. В случае $\bar{x}_0 \neq 0$ группа $\Gamma(\Gamma m^\top(Z^n_{p,q,r}); x_0)$ содержит подгруппу матриц вида (4.4.38) при $G_{11} \in \Gamma(\Omega(Z^{p+q}_p); \bar{x}_0)$, $G_{21} = 0$, $G_{22} = E_r$ и подгруппу матриц вида $G_{11} = E_{p+q}$, $G_{21} = 0$, $G_{22} \in \Gamma(\mathrm{GL}\,(r); \underline{x}_0)$. Поэтому, если для вектора x верно (4.4.39) при любой матрице $G \in \Gamma(\Gamma m^\top(Z^n_{p,q,r}); x_0)$, то выполнены и утверждения

$$\forall G_{11} \in \Gamma(\Omega(Z^{p+q}_p); \bar{x}_0) \ \mid \ G_{11}\bar{x} = \bar{x}, \qquad (4.4.44)$$

$$\forall G_{22} \in \Gamma(\mathrm{GL}\,(r); \underline{x}_0) \ \mid \ G_{22}\underline{x} = \underline{x}. \qquad (4.4.45)$$

В силу псевдосовершенства представлений для групп $\Omega(Z^{p+q}_p)$ и $\mathrm{GL}\,(r)$ из (4.4.44), (4.4.45) следует $\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}_0$, $\underline{x} = \underline{\lambda}\underline{x}_0$, где $\bar{\lambda}, \underline{\lambda} \in \mathbf{R}$. В случае $\underline{x}_0 = 0$ мы получаем, что $x = \bar{\lambda}x_0$. В случае же $\underline{x}_0 \neq 0$ существует матрица $G^\lambda_{21} \in M(r \times (p+q))$, такая что $G^\lambda_{21}\bar{x}_0 = \frac{1}{2}\underline{x}_0$. Матрица вида (4.4.39) с $G_{11} = E_{p+q}$, $G_{22} = \frac{1}{2}E_2$, $G_{21} = G^\lambda_{21}$ принадлежит группе $\Gamma(\Gamma m^\top(Z^n_{p,q,r}); x_0)$, поэтому для $x \in \Pi(\Gamma(\Gamma m^\top(Z^n_{p,q,r}); x_0))$ должно быть выполнено соотношение (4.4.43)

$$\frac{1}{2}\bar{\lambda}\underline{x}_0 + \frac{1}{2}\underline{\lambda}\underline{x}_0 = \underline{\lambda}\underline{x}_0,$$

откуда $\frac{1}{2}(\bar{\lambda} + \underline{\lambda}) = \underline{\lambda}$ и $\bar{\lambda} = \underline{\lambda}$. Итак, $x = \bar{\lambda}x_0$. Представление с группой $\Gamma m^\top(Z^n_{p,q,r})$ псевдосовершенно.

Рассмотрим теперь орбиту ненулевого элемента $x_0 \in \mathbf{R}^n$ под действием группы $\Gamma m^\top(Z^n_{p,q,r})$. Представим пространство $\mathbf{R}^n$ в виде прямой суммы пространств $\bar{L} = \mathbf{R}^{p+q}$ и $\underline{L} = \mathbf{R}^r$, так что вектора $\bar{x} \in \bar{L}$ и $x \in \underline{L}$ есть проекции $\bar{P}x$ и $\underline{P}x$ вектора $x \in \mathbf{R}^n$ на пространства $\bar{L}$ и $\underline{L}$. Для вектора $x_0 \in \mathbf{R}^n$, в случае $\bar{x}_0 \neq 0$ его орбита в $\mathbf{R}^n$ является прямым произведением орбиты элемента $\bar{x}_0$ в $\mathbf{R}^{p+q}$ под действием группы $\Gamma m^\top(Z^{p+q}_p)$ и пространства $\underline{L}$:

$$O(\Gamma m^\top(Z^n_{p,q,r}); x_0) = O(\Gamma m^\top(Z^{p+q}_p); \bar{x}_0) \times \underline{L}, \qquad (4.4.46)$$

а в случае $\underline{x}_0 \neq 0$, $\bar{x}_0 = 0$ орбита состоит из произведения нулевого вектора в $\bar{L}$ на множество ненулевых векторов из $\underline{L}$, т.е.

$$O(\Gamma m^\top(Z^n_{p,q,r}); x_0) = (\{\bar{0}\} \times \underline{L}) \setminus \{0\}, \qquad (4.4.47)$$

т.е. в этом случае орбита состоит из всех ненулевых векторов, у которых первые $(p+q)$ координат равны нулю.

Проведённое описание орбит позволяет сделать следующий важный вывод: орбиты группы $\Gamma m^\top(Z^n_{p,q,r})$ совпадают со множествами уровня

$$\Phi(Z^n_{p,q,r}; x) = C \qquad (4.4.48)$$

функции

$$\Phi(Z^n_{p,q,r}; x) \equiv \langle x, Z^n_{p,q,r}x\rangle \qquad (4.4.49)$$

при $C \neq 0$. А при $C = 0$ множество уровня (4.4.48) состоит из трёх орбит: 1) орбиты, состоящей лишь из нуля, 2) орбиты, являющиеся произведением множества уровня $\Phi(Z^{p+q}_p; \bar{x}) = 0$ в $\bar{L}$ без нулевой точки на множество $\underline{L}$, 3) орбиты вида (4.4.47).

Редуцируем теперь рассматриваемое представление на ещё более узкую подгруппу — на связную компоненту единицы $\Gamma me^\top(B)$ группы $\Gamma m^\top(B)$. Матрицы $G \in \Gamma me^\top(B)$ это все матрицы, допускающие блочное представление (4.4.38), в котором $G_{11} \in \Gamma me^\top(Z_p^{p+q})$, $G_{21} \in M(r \times (p+q))$, $G_{22} \in \mathrm{GL}\,(r)$. Введём далее для удобства число $k = p+q$. Из вышеприведенных рассуждений для группы $\Gamma m^\top(B)$ и леммы 4.4.5 следует, что при $k > 1$ представление с группой $\Gamma me^\top(B)$ несократимо.

Рассуждениями, приведёнными выше для группы $\Gamma m^\top(B)$, из леммы 4.4.6 извлекается факт псевдосовершенства представления группы $\Gamma me^\top(B)$ при $k \geq 3$.

Орбита ненулевого элемента $x_0 \in \mathbf{R}^n$ при $\bar{x}_0 \neq 0$ имеет вид

$$O(\Gamma me^\top(Z_{p,q,r}^n); x_0) = O(\Gamma me^\top(Z_p^k); \bar{x}_0) \times L, \tag{4.4.50}$$

а в случае $\bar{x}_0 = 0$ орбита состоит из подпространства $\underline{L}$ с выкинутым нулем. Орбиты представления с группой $\Gamma me^\top(Z_p^k) = \Omega_e(Z_p^k)$ на пространстве $\mathbf{R}^k = \bar{L}$ описаны в лемме 4.4.2. Итак, орбиты группы $\Gamma me^\top(Z_{p,q,r}^n)$ совпадают с компонентами связности множества уровня (4.4.48) при $C \neq 0$, а при $C = 0$ множество уровня является объединением орбиты, состоящей из нулевого элемента, орбиты, состоящей из подпространства $\underline{L}$ с выкинутым нулем и орбит, являющихся компонентами связности оставшегося множества.

4.4.7 Общий случай симметричной ненулевой матрицы $B \in Ms(n)$.

Перенесем теперь полученные в предыдущем пункте результаты с матрицы $B = Z_{p,q,r}^n$ на общий случай симметричной ненулевой матрицы $B \in Ms(n)$. Согласно §2.4 существует невырожденная матрица $Q \in M(n)$, что

$$B = QZ_{p,q,r}^n Q^\top, \tag{4.4.51}$$

следовательно

$$\Gamma m(B) = Q \Gamma m(Z_{p,q,r}^n) Q^{-1}$$

и

$$\Gamma m^\top(B) = Q^{-1\top} \Gamma m^\top(Z_{p,q,r}^n) Q^\top. \tag{4.4.52}$$

Итак группы $\Gamma m^\top(B)$ и $\Gamma m^\top(Z_{p,q,r}^n)$ подобны, поэтому их представления несократимы и псевдосовершенны одновременно.

Пусть $k = p+q$ — ранг матрицы B, $r = n-k$, p и q положительный и отрицательный индексы инерции. На основании п. 4.4.6 представление с группой $\Gamma m^\top(B)$ несократимо и верна следующая лемма.

Лемма 4.4.9 *Представление с группой $\Gamma m^\top(B)$ псевдосовершенно кроме случая $k = 2$, $p = 1$.*

Умножим равенство (4.4.52) справа на элемент $x_0 \in \mathbf{R}$. Получим следующую связь орбит

$$O(\Gamma m^\top(B); x_0) = Q^{-1\top} O(\Gamma m^\top(Z_{p,q,r}^n); Q^\top x_0). \tag{4.4.53}$$

Таким образом, включения $z \in O(\Gamma m^\top(B); x_0)$ и $Q^\top z \in O(\Gamma m^\top(Z_{p,q,r}^n); Q^\top x_0)$ эквивалентны. В случае, если $\Phi(Z_{p,q,r}^n; Q^\top x_0) = C \neq 0$ орбита $O(\Gamma m^\top(Z_{p,q,r}^n); Q^\top x_0)$ совпадает с множеством уровня $\Phi(Z_{p,q,r}^n; x) = C$. Согласно (4.4.51)

$$\Phi(Z_{p,q,r}^n; Q^\top z) = \langle Q^\top z, Z_{p,q,r}^n Q^\top z \rangle = \langle z, QZ_{p,q,r}^n Q^\top z \rangle = \langle z, Bz \rangle. \tag{4.4.54}$$

Получаем, что при $C \neq 0$ орбита $O(\Gamma m^\top(B); x_0)$ совпадает со множеством уровня квадратичной формы $\Phi(B; x)$.

Лемма 4.4.10 *Орбиты представления с группой $\Gamma m^\top(B)$ совпадают с множествами уровня квадратичной формы*

$$\langle x, Bx\rangle = C \tag{4.4.55}$$

при $C \neq 0$, а при $C = 0$ множество уровня является объединением трёх орбит: 1) орбиты, состоящей из нуля, 2) ядра оператора B с выкинутым нулем, 3) оставшегося множества.

Из соотношения (4.4.52) следует подобие групп

$$\Gamma me^\top(B) = Q^{-1\top}\Gamma me^\top(Z^n_{p,q,r})Q^\top. \tag{4.4.56}$$

Откуда следует, что представления с группами $\Gamma me^\top(B)$ и $\Gamma me^\top(Z^n_{p,q,r})$ несократимы или псевдосовершенны одновременно. В силу результатов п. 4.4.6 представление с группой $\Gamma me^\top(B)$ несократимо при $k > 1$ и псевдосовершенно при $k \geq 3$. Из равенства (4.4.56) следует связь орбит

$$O(\Gamma me^\top(B); x_0) = O^{-1\top}O(\Gamma me^\top(Z^n_{p,q,r}); Q^\top x_0) \tag{4.4.57}$$

и справедливость следующей леммы.

Лемма 4.4.11 *Орбиты группы $\Gamma me^\top(B)$ совпадают с компонентами связности множества уровня (4.4.55) при $C \neq 0$, а при $C = 0$ множество уровня является объединением нулевой орбиты, ядра оператора B с выкинутым нулем и орбит, являющихся компонентами связности оставшегося множества.*

§4.5 Представление группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на линейном пространстве скалярных функций $F(\mathbf{R}^n)$

4.5.1 Представление Tsi и антипредставление Ts. Рассмотрим множество V и представление $T_g = T(g)$ группы Gr в группу преобразований $Aut(V)$ множества V. Каждое $T_g : V \to V$ есть преобразование множества V. Обозначим через $F(V)$ линейное пространство числовых функций, определённых на V, а через $F_k(V)$ — обозначим линейное пространство функций на V со значениями в $\mathbf{R}^k$.

Если $p : V_1 \to V_2$ отображение множества V_1 во множество V_2, то сопоставляя функции $f_2 \in F(V_2)$ функцию $f_1 \in F(V_1)$ по формуле

$$f_1(v) \equiv f_2(p(v)), \tag{4.5.1}$$

мы получим линейный оператор $T_p : F(V_2) \to F(V_1)$. Переход от множества V к линейному пространству $F(V)$ и от отображения множеств $p : V_1 \to V_2$ к линейному отображению векторных пространств $T_p : F(V_2) \to F(V_1)$ есть контравариантный функтор из категории множеств в категорию векторных пространств.

В общем случае пусть V — объект некоторой конкретной категории Cat и $T(g)$ — представление группы Gr на объекте V категории Cat, т.е. групповой морфизм $T : Gr \to Is(V)$. Тогда линейные отображения $Ts_g : F(V) \to F(V)$, определенные правилом

$$Ts_g(f)(v) = f(T_g(v)) \tag{4.5.2}$$

для функции $f \in F(V)$ образуют антипредставление группы Gr на объекте $F(V)$ категории векторных пространств, так как функтор линеаризации контравариантный. Определяя линейные изоморфизмы $Tsi_g : F(V) \to F(V)$ по правилу,

$$Tsi_g(f)(v) \equiv f(T_{g^{-1}}(v)), \tag{4.5.3}$$

т.е.

$$Tsi_g = Ts_{g^{-1}}, \tag{4.5.4}$$

мы получим представление группы Gr на объекте $F(V)$ категории векторных пространств. Таким образом, $Ts_{g_1g_2}(f) = Ts_{g_2}Ts_{g_1}(f)$, но $Tsi_{g_1g_2}(f) = Tsi_{g_1}Tsi_{g_2}(f)$ при $f \in F(V)$.

Представление Tsi обладает перед антипредставлением Ts тем преимуществом, что переносит график функции $f \in F(V)$ в том же направлении, в котором отображение T_g переносит элементы множества V, в частности, если точка $v \in V$ была точкой максимума функции $f(v)$, то точка $g(v)$ будет точкой максимума функции $Tsi_g(f)$.

4.5.2 Три линейных представления группы $\mathrm{GL}\,(n)$**.** Фиксируем в качестве группы Gr группу невырожденных матриц $Gr = \mathrm{GL}\,(n)$ и рассмотрим три линейных представления этой группы.

1) Представление на линейном пространстве матриц § 4.2, которое мы будем называть Tm представлением, и операции перехода к сохраняющим и сохраняющимся множествам будем обозначать $\Gamma m(W)$ и $\Pi m(S)$.

2) Представление на линейном пространстве $\mathbf{R}^n$ параграфа 4.3, за которым мы сохраним те же обозначения и будем называть T-представлением.

3) Представление на линейном пространстве $F(\mathbf{R}^n)$, которое мы обозначаем Tsi, а операции перехода к сохраняющим и сохраняющимся множествам обозначаем $\Gamma si(W)$ и $\Pi si(S)$. Если Ts — антипредставление, то справедливы следующие связи:

$$Ts(g) = Tsi(g^{-1}), \tag{4.5.5}$$

$$\Gamma s(W) = \Gamma si(W), \tag{4.5.6}$$

$$\Pi s(S) = \Pi si(S^{-1}) \tag{4.5.7}$$

для любых: элемента $g \in \mathrm{GL}\,(n)$, множества $W \subset F(\mathbf{R}^n)$ и множества $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$.

В дальнейшем мы будем часто рассматривать редукцию введенных трёх представлений группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на подгруппы Ли вида $\Gamma m(B) = \Omega(B) \cap \mathrm{GL}\,(n)$ и $\Gamma me(B) = \Omega_e(B) \cap \mathrm{GL}\,(n)$, где B — симметричная матрица.

4.5.3 Свойства трёх введенных представлений. Пусть $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ некоторые подмножество, $\varphi \in F(\mathbf{R}^n)$ некоторая функция. Нас интересует вопрос: при каких условиях функция φ неподвижна под действием любого отображения $Tsi(g)$, $g \in S$? Сформулируем следующее утверждение.

Лемма 4.5.1 *Следующие утверждения эквивалентны:*

$$\varphi \in \Pi si(S), \tag{4.5.8}$$

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}^n \mid \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0)\} \supset O(S^{-1}; x_0). \tag{4.5.9}$$

Через $O(S;x) \subset \mathbf{R}^n$ мы обозначаем орбиту точки x под действием преобразований T_g, $g \in S$.

Доказательство. Принадлежность $\varphi \in \Pi si(S)$ означает, что при $G \in S$ функции $\varphi(x)$ и $\varphi(G^{-1}x)$ равны, т.е. значения функции $\varphi(x)$ в точках x и $G^{-1}x$ совпадают при всех $G \in S$, что и утверждается формулой (4.5.9). $\diamondsuit$

Из формулы (4.5.7) следует, что включение $\varphi \in \Pi s(S)$ эквивалентно выполнению условия

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}^n \mid \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0)\} \supset O(S;x_0). \tag{4.5.10}$$

В случае, когда множество $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ подгруппа, $S = S^{-1}$ и $O(S^{-1};x) = O(s;x)$, поэтому верно.

Следствие 4.5.1 *Для подгруппы $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ и функции $\varphi \in F(\mathbf{R}^n)$ утверждения (4.5.8) и (4.5.10) эквивалентны.*

Таким образом, утверждение $\varphi \in \Pi si(S)$ или эквивалентное утверждение $\Gamma si(\varphi) \supset S$ означают, что множества уровня $\varphi(x) = C$ функции φ вместе с каждой точкой $x \in \mathbf{R}^n$ содержат её орбиту $O(S^{-1};x)$.

Пусть теперь $Q \subset \mathbf{R}^n$ некоторое подмножество и $Z(Q) \subset \mathrm{GL}\,(n)$ группа его симметрии в T-представлении (см. §4.1). Введём характеристическую функцию $\chi_Q(x) \in F(\mathbf{R}^n)$ подмножества $Q \subset \mathbf{R}^n$, т.е. $\chi_Q(x) \equiv 1$ при $x \in Q$, $X_\varphi(x) \equiv 0$ при $x \in \mathbf{R}^n \setminus Q$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 4.5.2 *Следующие группы совпадают*

$$Z(Q) = \Gamma si(\chi_Q). \tag{4.5.11}$$

Доказательство. Если $g \in Z(Q)$, то отображение $T_g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ отображает множество Q на себя. Так как отображение T_g взаимно-однозначно, то тогда и множество $\mathbf{R}^n \setminus Q$ отображается на себя, следовательно, функции $\chi_Q(x)$ и $\chi_Q(gx) \equiv Ts_g(\chi_Q)(x)$ совпадают. Отсюда $g \in \Gamma s(\chi_Q) = \Gamma si(\chi_Q)$ и доказано включение $Z(Q) \subset \Gamma si(\varphi_Q)$.

Наоборот, если $g \in \Gamma si(\chi_Q) = \Gamma s(\chi_Q)$, то $\chi_Q(x) = \chi_Q(gx)$, что означает, что $gQ = Q$ и $g \in Z(Q)$. $\diamondsuit$

Итак, симметрия тел в пространстве $\mathbf{R}^n$ сводится к сохранению функций в пространстве $F(\mathbf{R}^n)$, что позволяет применить при построении группы симметрий функциональный анализ.

При редукции представлений с группой $Gr = \mathrm{GL}\,(n)$ на некоторую её подгруппу $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ в силу соотношений

$$Z(S;Q) = Z(Q) \cap S = \Gamma si(\chi_Q) \cap S = \Gamma si(S;\chi_Q)$$

утверждение леммы 4.5.2 сохраняет силу а следующей форме

$$Z(S;Q) = \Gamma si(S;\chi_Q). \tag{4.5.12}$$

Для группы $\mathrm{GL}\,(n)$ в T — представлении пространство $\mathbf{R}^n$ распадается на две орбиты орбиту $O_1 = \{o\}$, состоящую только из нуля, и орбиту $O_2 = \mathbf{R}^n \setminus O_1$ состоящую из всех ненулевых элементов. Согласно лемме 4.5.1 линейное пространство $\Pi si(\mathrm{GL}\,(n))$ двумерно и состоит из линейных комбинаций функции $X_0(x)$ — характеристической функции множества O_1 и $1(x)$ — функции равной 1 на всем пространстве $\mathbf{R}^n$, итак, условие $\varphi \in \Pi si(\mathrm{GL}\,(n))$ эквивалентно представлению $\varphi = \lambda_1\chi_0(x) + \lambda_2 1(x)$, где $\lambda_1 \in \mathbf{R}$, $\lambda_2 \in \mathbf{R}$. В Tsi — представление пространство $C^k(\mathbf{R}^n)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ непрерывно дифференцируемых функций является инвариантным. Инвариантным является и пространство непрерывных функций, имеющих нулевой предел в бесконечности $C_0(\mathbf{R}^n)$. Рассматривая подпредставление представления Tsi на $C_0(\mathbf{R}^n)$, мы уже получим, что векторное пространство $\Pi si(\mathrm{GL}\,(n))\,|_{C_0(\mathbf{R}^n)}$ нульмерно, т.е. подпредставление $Tsi\,|_{C_0(\mathbf{R}^n)}$ несократимо.

Пусть $B \in M_s(n)$ ненулевая симметрическая матрица. Обозначим через $\underline{L}$ ядро соответствующего линейного оператора $B : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Через $\chi_B(x)$ обозначим характеристическую функцию подмножества $\underline{L} \subset \mathbf{R}^n$. Рассмотрим группу Ли $\Gamma^T_m(B) \subset \mathrm{GL}\,(n)$.

Лемма 4.5.3 *Включение* $\Gamma si(\varphi) \supset \Gamma^T_m(B)$ *для функции* $\varphi \in F(\mathbf{R}^n)$ *справедливо тогда и только тогда, когда существуют константы* $\lambda_1 \in \mathbf{R}$*,* $\lambda_2 \in \mathbf{R}$ *и отображение* $\Psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$*, что*

$$\varphi(x) = \psi(\Phi(B; x)) + \lambda_1 \chi_0(x) + \lambda_2 \chi_B(x). \tag{4.5.13}$$

Справедливость леммы 4.5.3 вытекает из описания орбит группы $\Gamma m^\top(B)$, даваемого леммой (4.3.11).

Следствие 4.5.2 *Если функция* $\varphi(x)$ *непрерывна в нуле, то* $\Gamma si(\varphi) \supset \Gamma m^\top(B)$ *тогда и только тогда, когда существует отображение* $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$*, что*

$$\varphi(x) = \psi(\Phi(B; x)). \tag{4.5.14}$$

Рассмотрим теперь группу $\Gamma me^\top(B)$ и проведём описание функций $\varphi \in F(\mathbf{R}^n)$, таких, что $\Gamma si(\varphi) \supset \Gamma me^\top(B)$. Для этого сначала введём два открытых множества

$$X^+ \equiv \{x \in \mathbf{R}^n \mid \Psi(B; x) > 0\}, \quad X^- \equiv \{x \in \mathbf{R}^n \mid \Psi(B; x) < 0\} \tag{4.5.15}$$

и замкнутое нигде не плотное в $\mathbf{R}^n$ множество

$$X^0 \equiv \{x \in \mathbf{R}^n \mid \Psi(B; x) = 0\}. \tag{4.5.16}$$

Множество X^+ или односвязно или состоит не более чем из двух компонент связности X_1, X_2 поэтому допускает представление $X^+ = X_1 \cup X_2$, где X_1, X_2 — компоненты его связности, в частности, возможно $X_2 = \emptyset$. Множество X^- или односвязно или состоит не более чем из двух компонент связности X_3, X_4, поэтому $X^- = X_3 \cup X_4$, где возможно $X_4 = \emptyset$. Множество X^0 представим в виде объединения множеств: $X_5 \equiv \{0\}$, X_6 есть ядро $\underline{L}$ оператора B без нуля, компонент связности X_7, X_8, X_9, X_{10} оставшегося множества — их не более 4. Из описания орбит группы $\Gamma me^\top(B)$ вытекает.

Лемма 4.5.4 *Включение* $\Gamma si(\varphi) \supset \Gamma me^\top(B)$ *для функции* $\varphi \in F(\mathbf{R}^n)$ *справедливо тогда и только тогда, когда на каждом множестве* X_1*,* X_2*,* X_3*,* X_4 *она допускает представление*

$$\varphi(x) = \psi_i(\Phi(B; x)), i = 1, 2, 3, 4, \tag{4.5.17}$$

где $\psi_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *некоторое отображение, а на множествах* X_5*,* X_6*,..*X_{10} *постоянна.*

Следствие 4.5.3 *Если функция* $\varphi(x)$ *непрерывна в нуле, то* $\Gamma si(\varphi) \supset \Gamma me^\top(B)$ *тогда и только тогда, когда на каждом множестве* X_1*,* X_2*,* X_3*,* X_4 *справедливо представление (17), а на множестве* X^0 *функция* $\varphi(x)$ *постоянна.*

4.5.4 Частичное описание класса $\Pi si(S)$**.** В предыдущем пункте мы описали сохраняющееся множество $\Pi si(S)$ для случая, когда $S = \Gamma m^\top(B) \subset \mathrm{GL}\,(n)$, где $B \in Ms(n)$ и убедились, что оно состоит из всех функций $\varphi(x) \in F(\mathbf{R}^n)$ вида (13), а в случае, если $\varphi(x)$ — непрерывная в нуле функция и $\varphi \in \Pi si(\Gamma m^\top(B))$, то функция $\varphi(x)$ является функцией от квадратичной формы $\varphi(x) = \psi(\Phi(B;x))$. Развивая соображения такого рода, мы попытаемся получить описание класса $\Pi si(S)$ через некоторый набор квадратичных форм, основываясь на следующей лемме.

Пусть $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ некоторое подмножество.

Лемма 4.5.5 *Для симметричной матрицы A включения $\Phi(A;x) \in \Pi s(S)$ и $A \in \Pi m(S^\top)$ эквивалентны.*

Доказательство. Включение $\Phi(A;x) \in \Pi s(S)$ означает, что

$$\forall G \in S \mid \langle Gx, AGx\rangle = \langle x, Ax\rangle$$

или

$$\forall G \in S \mid G^T AG = A. \tag{4.5.18}$$

Но соотношение (4.5.18) эквивалентно соотношению

$$\forall G \in S^\top \mid GAG^\top = A,$$

означающему принадлежность $A \in \Pi m(S^\top)$. $\diamondsuit$

Следствие 4.5.4 *Пусть $A_1, A_2, ...A_k \in \Pi m(S^\top) \cap Ms(n)$ и $\psi : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ произвольное отображение, тогда функция*

$$\varphi(x) \equiv \psi(\Phi(A_1;x), \Phi(A_2;x), ...\Phi(A_k;x)) \tag{4.5.19}$$

принадлежит $\Pi s(S)$.

Возникает вопрос: в каком случае в форме (4.5.19) можно записать любую функцию $\varphi \in \Pi s(S)$ с точностью до двумерного фактор-пространства, натянутого на функции $\chi_0(x)$ и $\chi_B(x)$? В следующем параграфе мы частичный ответ на этот вопрос для случая, когда множество S — подгруппа Ли группы $\mathrm{GL}\,(n)$. Предварительно заметим, что если множество S группа, то $S = S^{-1}$ и поэтому $\Pi si(S) = \Pi si(S^{-1}) = \Pi s(S)$ в силу (4.5.7).

§4.6 Скалярные функции, сохраняемые группой Ли преобразований

В этом параграфе даётся описание множества функций $\varphi \in \Pi si(S)$, где $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ группа Ли. Для этого нам требуется провести некоторые предварительные построения.

4.6.1 Свойства функции $r(L,x) \equiv \dim(Lx)$ для линейного подпространства $L \subset M(n)$. Свойства L-основного множества $Bs(L)$ и L-исключительного множества $Es(L)$.

Пусть $L \subset M(n)$ линейное подпространство квадратных вещественных матриц $n \times n$. Для каждого элемента $x \in \mathbf{R}^n$ рассмотрим линейное пространство $Lx \subset \mathbf{R}^n$ и введём функцию

$$r(L,x) \equiv \dim(Lx) \tag{4.6.1}$$

равную размерности линейного пространства Lx. Функция $r(L,x)$ принимает значения $0, 1, 2 \dots n$, причём $r(L,0) = 0$.

Отметим следующее простейшие свойства функции $r(L,x)$, вытекающие из определения (4.6.1). Для матрицы $A \in M(n)$

$$r(L, Ax) = r(LA, x). \tag{4.6.2}$$

Для любого числа $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$

$$r(L, \lambda x) = r(L, x). \tag{4.6.3}$$

Для любой матрицы $A \in \mathrm{GL}\,(n)$

$$r(AL, x) = r(L, x). \tag{4.6.4}$$

Для вычисления функции $r(L,x)$ можно поступить следующим образом. В линейном подпространстве $L \subset M(n)$ выберем базис из m линейно независимых матриц $A_1, A_2, \dots A_m \in L$, тогда любая матрица $A \in L$ представима в виде $A = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i$, где $\lambda_i \in \mathbf{R}$. Таким образом, при любом $x \in \mathbf{R}^n$ вектор Ax является линейной комбинацией векторов $A_1x, A_2x, \dots A_mx$ и размерность линейного подпространства $Lx \subset \mathbf{R}^n$ равна рангу системы векторов $A_1x, A_2x, \dots A_mx$

$$r(L,x) = rank(A_1x, \dots A_mx). \tag{4.6.5}$$

При фиксированном линейном пространстве $L \subset M(n)$ величина $r(L,x)$ как функция x обладает следующим свойством.

Лемма 4.6.1 *Множество*

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid r(L,x) \geq r(L,x_0)\} \tag{4.6.6}$$

содержит открытую окрестность точки x_0.

Доказательство. Согласно формуле (4.6.5) существует $k = r(L,x_0)$ матриц $A_1, A_2, \dots A_k \in L$, что в точке x_0 $rank(A_1x_0, A_2x_0, \dots A_kx_0) = k$. Но ранг системы векторов $A_1x_0, \dots A_kx_0$ равен некоторому минору k-того порядка матрицы, построенной из столбцов их координат. Но в силу непрерывной зависимости векторов $A_1x, \dots A_kx$ от вектора x указанный минор будет отличен от нуля и в некоторой окрестности U точки $x_0 \in \mathbf{R}^n$, поэтому в окрестности U

$$r(L,x) = rank(A_1x, A_2x, \dots A_mx) \geq rank(A_1x_0, A_2x_0, \dots A_kx_0) = k.$$

$\diamondsuit$

Следствие 4.6.1 *при любом* $C \in \mathbf{R}$ *множества уровня* $\{x \in \mathbf{R}^n \mid r(L,x) \geq C\}$ *и* $\{x \in \mathbf{R}^n \mid r(L,x) > C\}$ *открыты в* $\mathbf{R}^n$.

Таким образом, функция $r(L,x)$ является полунепрерывной снизу на $\mathbf{R}^n$ по аргументу x.

Так как функция $r(L,x)$ принимает лишь конечное число значений, то она достигает своего точного верхнего значения на $\mathbf{R}^n$. Назовём величину

$$r_*(L) \equiv \sup_{x \in \mathbf{R}^n} r(L,x), \tag{4.6.7}$$

индексом пространства $L \subset M(n)$. Введём множество

$$Bs(L) \equiv \{x \in \mathbf{R}^n \mid r(L,x) = r_*(L)\}, \tag{4.6.8}$$

которое назовём L-*основным* и дополнительное множеством

$$Es(L) \equiv \{x \in \mathbf{R}^n \mid r(L,x) < r_*(L)\}, \tag{4.6.9}$$

которое назовём L-*исключительным*. В силу следствия 4.6.1 множество $Bs(L) \subset \mathbf{R}^n$ открыто, множество $Es(L) = \mathbf{R}^n \setminus Bs(L)$ замкнуто. В силу свойства (4.6.3) множество $Es(L)$ вместе с каждой точкой $x \in Es(L)$, $x \neq 0$, содержит прямую, проходящую через точку x, и нуль, т.е. множество $Es(L)$ — замкнутый конус, а множество $Bs(L)$ вместе с каждой точкой $x \in Bs(L)$ содержит все точки прямой, проходящей через точку x и нуль, кроме нуля. Важную информацию о строении множества $Bs(L)$ даёт лемма.

Лемма 4.6.2 *Любая прямая в* $\mathbf{R}^n$, *имеющая общую точку с множеством* $Bs(L)$, *может содержать не более* $r_*(L)$ *точек множества* $Es(L)$.

Доказательство. Пусть прямая $Q \subset \mathbf{R}^n$ проходит через точку $x_0 \in Bs(L)$. Тогда существует $k = r(L)$ матриц $A_1, A_2, \ldots A_k \in L$, что

$$rank(A_1x_0, A_2x_0, \ldots A_kx_0) = r_*(L) = k \tag{4.6.10}$$

Все точки прямой Q можно записать в виде

$$x = x_0 + t\vec{l}, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{4.6.11}$$

где $\vec{l} \in \mathbf{R}^n$ направляющий вектор прямой. В силу условия (4.6.10) существует минор χ порядка k матрицы составленной из векторов $A_1x, A_2x, \ldots A_kx$, который в точке $x = x_0$ не равен нулю. Если мы подставим в минор выражение x через x_0 и t по формуле (4.6.11), то получим, что минор $\chi(t)$ является многочленом степени k по переменной $t \in \mathbf{R}$, причём $\chi(0) \neq 0$. Многочлен $\chi(t)$ может иметь не более k нулей по переменной t. Но при $\chi(t) \neq 0$ вектора $A_1x, A_2x, \ldots A_kx$ линейно независимы, т.е. тогда $x \in Bs(L)$. $\diamondsuit$

Следствие 4.6.2 *Множество* $Bs(L)$ *открыто и всюду плотно в* $\mathbf{R}^n$.

Введём также *особое* множество $Ss(L)$ — множество точек разрыва функции $r(L,x)$ на $\mathbf{R}^n$, По определению $Ss(L) \subset Es(L)$ и является замкнутым конусом. Так как множество $Bs(L)$ открыто и всюду плотно в $\mathbf{R}^n$, множество $Es(L)$ не имеет открытого ядра и поэтому $Es(L) = Ss(L)$. Т.е. функция $r(L,x)$ не имеет точек непрерывности $x \in \mathbf{R}^n$ со значениями $r(l,x) < r_*(L)$.

4.6.2 Свойства функции $r(l(S),x)$ для группы Ли $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$. Пусть $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ группа Ли и $l(S) \subset M(n)$ её касательные многообразие в единице. Множество $l(S)x \subset \mathbf{R}^n$ будет тогда касательным многообразием орбиты $O(S;x)$ в точке x, а функция $r(l(S),x)$ равна размерности касательного многообразия к орбите в точке x.

Лемма 4.6.3 *Функция $r(l(S),x)$ постоянна на орбите группы S.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathbf{R}^n$, $G \in S$, покажем что

$$r(l(S),Gx) = r(l(S),x). \tag{4.6.12}$$

Согласно свойству (4.6.2) функции $r(L,x)$ имеем

$$r(l(S),Gx) = r(l(S)G,x). \tag{4.6.13}$$

Согласно лемме (4.2.6)

$$l(S)G = Gl(S) \tag{4.6.14}$$

и согласно свойству (4.6.4) функции $r(L,x)$ получаем

$$r(l(S),Gx) = r(Gl(S),x) = r(l(S),x).$$

♢

Так как функция $r(l(S),x)$ постоянна на орбите любой точки, то ее значение в точках орбиты $O(S,x_0)$ назовём *размерностью орбиты.*

Из леммы 4.6.3 и определения множеств $Bs(l(S))$, $Es(l(S))$ вытекает, что множества $Bs(l(S))$ и $Es(l(S))$ вместе с каждой точкой $x \in \mathbf{R}^n$ содержат её орбиту $O(S;x)$. Таким образом, группы симметрий множеств $Bs(l(S))$ и $Es(l(S))$ содержат группу S

$$Z(Bs(l(S))) \supset S, \quad Z(Es(l(S))) \supset S. \tag{4.6.15}$$

Представим открытое множество $Bs(l(S))$ в виде объединения его компонент связности $Bs(l(S)) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} Bs_\alpha(l(S))$, где $Bs_\alpha(l(S))$ открытые связные не пустые не пересекающиеся множества. Если матрица G принадлежит компоненте связности единицы S_e группы S, то отображение $G : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ переводит биективно каждую компоненту связности $Bs_\alpha(l(S))$ в себя же. В общем случае $G \in S$ отображение $G : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ переводит биективно каждую компоненту связности $Bs_i(l(S))$, $i \in I$ в некоторую компоненту связности $Bs_j(l(S))$, $j \in I$, т.е. отображению G соответствует перестановка компонент связности. Из сказанного следует, что у каждой компоненты связности $Bs_i(l(S))$ группа симметрий содержит связную компоненту единицы S_e группы S:

$$Z(Bs_i(l(S))) \supset S_e. \tag{4.6.16}$$

4.6.3 Матрица $A \in M(n)$ и квадратичная форма $\Phi(A;x) \equiv \langle x, Ax\rangle$. Для каждой матрицы $A \in M(n)$ мы определим числовую функцию на $\mathbf{R}^n$ вида

$$\Phi(A;x) \equiv \langle x, Ax\rangle \tag{4.6.17}$$

Функция $\Phi(A;x)$ тождественно равна нулю на $\mathbf{R}^n$, когда матрица A кососимметрична $A \in Ma(n)$. Если мы согласно §2.4 разложим матрицу $A \in M(n)$ на сумму симметричной матрицы C и кососимметричной матрицы D

$$A = C + D, \tag{4.6.18}$$

то

$$\Phi(A;x) = \Phi(C;x) \tag{4.6.19}$$

и

$$grad\,\Phi(A;x) = 2Cx. \tag{4.6.20}$$

Линейное пространство матриц $M(n)$ является прямой суммой линейных подпространств симметричных и кососимметричных матриц $M(n) = Ms(n) \oplus Ma(n)$. Введём проекторы Ps и Pa на линейные подпространства $Ms(n)$ и $Ma(n)$ соответственно. Каждый элемент $A \in M(n)$ однозначно представим в виде (4.6.18), где

$$C = Ps(A), \quad D = Pa(A). \tag{4.6.21}$$

Пусть $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ некоторое подмножество. Рассмотрим линейное подпространство $\Pi m(S) \subset M(n)$. Согласно §2.4 включение $A \in \Pi m(S)$ эквивалентно двум включениям $Ps(A) \in \Pi m(S)$ и $Pa(A) \in \Pi m(S)$. Таким образом, линейное подпространство $\Pi m(S)$ является прямой суммой линейных подпространств

$$\Pi m(S) = Ps(\Pi m(S)) \oplus Pa(\Pi m(S)). \tag{4.6.22}$$

Введём обозначение

$$\Pi ms(S) \equiv Ps(\Pi m(S)) \tag{4.6.23}$$

для линейного подпространства симметричных матриц из $\Pi m(S)$. По построению справедливо включение

$$\Pi ms(S) \subset \Pi m(S), \tag{4.6.24}$$

из которого в силу определения множества $\Pi m(S)$ следует

$$\forall G \in S\ \forall A \in \Pi ms(S) \mid Tm_G(A) = A. \tag{4.6.25}$$

Равенство (4.6.25) влечет

$$\forall G \in S \mid Tm_G(\Pi ms(S)) = \Pi ms(S). \tag{4.6.26}$$

Так как это верно для произвольного множества $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$, то заменяя множество S на множество $S^\top$, получим

$$\forall G \in S^\top \mid Tm_G(\Pi ms(S^\top)) = \Pi ms(S^\top). \tag{4.6.27}$$

это эквивалентно утверждению

$$\forall G \in S \mid G^\top \Pi ms(S^\top) G = \Pi ms(S^\top). \tag{4.6.28}$$

Итак, формула (4.6.28) верна для любого множества $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$.

4.6.4 Свойства функции $r(\Pi ms(S^\top), x)$ для группы Ли $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$. Для множества $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ множество $L \equiv \Pi ms(S^\top) \subset M(n)$ является линейным подпространством и к нему применима теория п. 4.6.1. Введём функцию $r(\Pi ms(S^\top), x)$, индекс $r_*(\Pi ms(S^\top))$, основное множество $Bs(\Pi ms(S^\top))$ и особое множество $Es(\Pi ms(S^\top))$. Наряду со свойствами п. 4.6.1 введённые объекты обладают свойствами п. 4.6.2 в силу леммы.

Лемма 4.6.4 *Функция $r(\Pi ms(S^\top), x)$ постоянна на орбите множества S.*

Доказательство. Для любых $x \in \mathbf{R}^n$, $G \in S$ докажем равенство

$$r(\Pi ms(S^\top), Gx) = r(\Pi ms(S^\top), x). \tag{4.6.29}$$

Согласно свойству (4.6.2) функции $r(L, x)$ имеем

$$r(\Pi ms(S^\top), Gx) = r(\Pi ms(S^\top)G, x). \tag{4.6.30}$$

Согласно формуле (4.6.28)

$$\Pi ms(S^\top)G = G^{\top -1}G^\top \Pi ms(S^\top)G = G^{\top -1}\Pi ms(S^\top). \tag{4.6.31}$$

Согласно свойству (4.6.4) функции $r(L, x)$

$$r(G^{\top -1}\Pi ms(S^\top), x) = r(\Pi ms(S^\top), x). \tag{4.6.32}$$

Из (4.6.30-4.6.32) следует (4.6.29).

$\diamondsuit$

Из леммы 4.6.4 вытекает, что множество $Bs(\Pi ms(S^\top)$ и $Es(\Pi ms(S^\top))$ вместе с каждой точкой содержат её орбиту, т.е. их группы симметрии содержат множество S

$$Z(Bs(\Pi ms(S^\top))) \supset S, \quad Z(Es(\Pi ms(S^\top))) \supset S. \tag{4.6.33}$$

Далее в этом пункте предполагаем, что $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ группа Ли. В этом случае представим открытое множество $Bs(\Pi ms(S^\top))$ в виде объединения компонент связности $Bs(\Pi ms(S^\top)) = \bigcup\limits_{j \in J} Bs_j(\Pi ms(S^\top))$. Аналогично п. 4.6.2 можно утверждать что, если матрица G принадлежит компоненте связности единицы S_e группы S, то отображение $G : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ биекция каждой компоненты связности $Bs_j(\Pi ms(S^\top))$ на себя, а в общем случае отображение $G : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ соответствует перестановке компонент связности. В терминах групп симметрий для любой компоненты связности

$$Z(Bs_j(\Pi ms(S^\top))) \supset S_e. \tag{4.6.34}$$

Для группы Ли $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ касательное многообразие $l(S)$ удовлетворяет соотношению

$$l(S^\top) = (l(S))^\top. \tag{4.6.35}$$

Рассмотрим далее связь между свойствами линейных подпространств матриц $l(S) \subset M(n)$ и $\Pi ms(S^\top) \subset M(n)$.

Лемма 4.6.5 *Для любых матриц $Q \in l(S)$, $A \in \Pi ms(S^\top)$ и любого вектора $x \in \mathbf{R}^n$*

$$\langle Qx, Ax\rangle = 0. \tag{4.6.36}$$

Доказательство. Если матрица Q принадлежит алгебре Ли $l(S)$, то матрицы $G(\alpha) \equiv \exp(\alpha Q)$ при $\alpha \in \mathbf{R}$ принадлежат группе S. Дифференцируя соотношение

$$G^\top(\alpha)AG(\alpha) = A$$

по параметру α в точке $\alpha = 0$, получаем

$$Q^\top A + AQ = 0.$$

Следовательно,

$$0 = \langle x, (Q^\top A + AQ)x\rangle = \langle Qx, Ax\rangle + \langle Ax, Qx\rangle = 2\langle Qx, Ax\rangle.$$

$\diamondsuit$

Следствие 4.6.3 *При любом $x \in \mathbf{R}^n$ линейные подпространства $l(S)x \subset \mathbf{R}^n$ и $\Pi ms(S^\top)x \subset \mathbf{R}^n$ ортогональны и*

$$r(l(S), x) + r(\Pi ms(S^\top), x) \leq n. \qquad (4.6.37)$$

Следствие 4.6.4 *Для любой группы Ли $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$*

$$r_*(l(S)) + r_*(\Pi ms(S^\top)) \leq n. \qquad (4.6.38)$$

4.6.5 Основное множество Bs и исключительное множество Es группы Ли. Пусть $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ группа Ли. К линейным подпространствам $l(S)$ и $\Pi ms(S^\top)$ пространства $M(n)$ применим построение п. 4.6.1. Определим индексы $r_*(l(S))$, $r_*(\Pi ms(S^\top))$ определим $l(S)$-основное множество $Bs(l(S))$ и $\Pi ms(S^\top)$-основное множество $Bs(\Pi ms(S^\top))$ и назовём множество

$$Bs \equiv Bs(l(S)) \cap Bs(\Pi ms(S^\top)) \qquad (4.6.39)$$

основным, а множество

$$Es \equiv \mathbf{R}^n \setminus Bs = Es(l(S)) \cup Es(\Pi ms(S^\top)) \qquad (4.6.40)$$

исключительным для группы S.

На основании п.п. 4.6.1-4.6.4 основное множество Bs и исключительное множество Es обладают следующими свойствами.

Лемма 4.6.6 *Множество Es является замкнутым нигде не плотным в $\mathbf{R}^n$ конусом, содержащим вместе с каждой точкой её орбиту. Множество Bs открыто всюду плотно в $\mathbf{R}^n$, вместе с каждой точкой содержит её орбиту и прямую, проходящую через начало координат, без нуля. Если прямая в $\mathbf{R}^n$ имеет общую точку со множеством Bs, то на этой прямой может лежать не более $r_*(l(S))+r_*(\Pi ms(S^\top))$ точек множества Es.*

В силу неравенства (4.6.38) для любой группы Ли $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ сумма индексов линейных пространств $l(S)$ и $\Pi ms(S^\top)$ не превосходит размерности пространства $\mathbf{R}^n$. Группу Ли S, для которой справедливо строгое равенство

$$r_*(l(S)) + r_*(\Pi ms(S^\top)) = n, \qquad (4.6.41)$$

назовём *бинарной*.

4.6.6 Выражение множеств $\Pi m(S^\top)$ и $\Pi ms(S^\top)$ через централизаторы $Kom(S)$ и $Kom^\top(l(S))$. Построение по группе S множеств $\Pi m(S^\top)$ и $\Pi ms(S^\top) = Ps(\Pi m(S^\top))$ в важном для дальнейшего изложения случае, когда $S^\top \subset \Gamma m(B)$, где $B \in \mathrm{GL}\,(n)$, в силу леммы 4.2.3 сводится к построению централизатора

$$\Pi m(S^\top) = Kom^\top(S^\top) = Kom(S)B \qquad (4.6.42)$$

Причём в случае связной группы Ли S в силу леммы 4.2.5

$$\Pi ms(S^\top) = Ps(Kom^\top(l(S))B). \qquad (4.6.43)$$

4.6.7 Локальные и глобальные инварианты. Пусть $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ группа Ли. Для изучения свойств функций $\varphi \in \Pi si(S)$ согласно следствию 4.5.1 требуется знание свойств орбит группы S.

Орбита $O(S,x)$, рассматриваемая как подмножество в $\mathbf{R}^n$, не имеет точек самопересечения и самокасания. В самом деле, если точки x' и x'' совпадают, где $x' = G'x_0$, $x'' = G''x_0$, $G' \in S$, $G'' \in S$, но $G' \neq G''$, то $x' = G''(G')^{-1}x' = G_0 x'$, где элемент $G_0 \in S$ не единичный.

Если S_1 окрестность единицы в группе S, то

$$O(S_1;x') = O(S_1;G'x_0) = O(S_1G';x_0), \quad O(S_1;x'') = O(S_1;G''x_0) = O(S_1G'';x_0). \tag{4.6.44}$$

Множества $S_1G' \subset S$ и $S_1G'' \subset S$ — окрестности элементов $G' \in S$ и $G'' \in S$ соответственно. Итак, у совпадающих точек x' и x'' имеются на многообразии $O(S;x_0)$ совпадающие окрестности.

Множество всех числовых функций, заданных на множестве W, будем обозначать $F(W)$. Функцию $\varphi \in F(\mathbf{R}^n)$ будем называть инвариантом, если $\varphi \in \Pi si(S)$. Введём множество уровня для функции $\varphi \in F(W)$

$$X(\varphi;C) \equiv \{x \in W \mid \varphi(x) = C\}, \quad C \in \mathbf{R}. \tag{4.6.45}$$

Если на множестве W задано множество функций φ_i, $i \in I$, то введём вектор-функцию $\vec{\varphi}(x)$ с компонентами $\varphi_i(x)$ и множество уровня

$$X(\vec{\varphi};\vec{C}) \equiv \{x \in W \mid \vec{\varphi}(x) = \vec{C}\}. \tag{4.6.46}$$

По определению

$$X(\vec{\varphi};\vec{C}) = \bigcap_{i\in I} X(\varphi_i;C_i). \tag{4.6.47}$$

С помощью множеств уровня условие, что функция $\varphi \in F(\mathbf{R}^n)$ является инвариантом можно записать в форме

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}^n \mid X(\varphi;\varphi(x_0)) \supset O(S;x_0), \tag{4.6.48}$$

где орбита в данном случае равна $O(S;x_0) = Sx_0$.

Проведём теперь локализацию понятия инварианта по переменной x. А именно функцию $\varphi(x)$ назовём *инвариантом* на множестве W, если она определена на множестве W и выполнено условие

$$\forall x_0 \in W \mid X(\varphi;\varphi(x_0)) \cap W \supset O(S;x_0) \cap W. \tag{4.6.49}$$

В случае $W = \mathbf{R}^n$ получаем инвариант. Совокупность функций $\{\varphi_i\}$, $i \in I$ назовём *полным набором инвариантов (ПНИ)* на множестве W, если они определены на множестве W и выполнено условие

$$\forall x_0 \in W \mid X(\vec{\varphi};\vec{\varphi}(x_0)) \cap W = O(S;x_0) \cap W. \tag{4.6.50}$$

Совокупность функций $\{\varphi_i\}$, $i \in I$ назовём *базисом инвариантов (БИ)* в классе функций $N(W)$ на множестве W, если каждая функция φ_i — инвариант на множестве W и для любой функции $\varphi \in N(W)$, являющейся инвариантом на множестве W, существует функция $\psi(\vec{C})$, такая, что

$$\varphi(x) = \psi(\vec{\varphi}(x)). \tag{4.6.51}$$

Из определения следует, что любой ПНИ на множестве W является и БИ на множестве W в классе всех функций $F(W)$.

ПНИ(БИ) на W будем называть *минимальным*, если никакое собственное подмножество множества функций $\{\varphi_i\}$, $i \in I$ не является ПНИ(БИ) на W.

Перейдем теперь к локализации понятия инварианта по групповой переменной $G \in S$. Числовую функцию $\varphi(x)$ назовём *локальным инвариантом в точке* $x' \in \mathbf{R}^n$, если существует окрестность $U \subset \mathbf{R}^n$ точки x' и окрестность $S_1 \subset S$ единичного элемента e в группе S, что на множестве U функция $\varphi(x)$ определена и выполнено условие

$$\forall x_0 \in U \mid X(\varphi;\varphi(x_0)) \cap U \supset O(S;x_0) \cap U. \tag{4.6.52}$$

Если функция φ определена на множестве $W \subset \mathbf{R}^n$ и является локальным инвариантом в каждой точке множества W, то будем говорить, что функция φ *локальный инвариант (ЛИ)* на множестве W. Чтобы подчеркнуть отличие от локального инварианта на множестве W, мы иногда инвариант на множестве W будем называть *глобальным инвариантом* на множестве W.

Лемма 4.6.7 *Для того, чтобы функция $\varphi(x)$, непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности точки $x' \in \mathbf{R}^n$, являлась локальным инвариантом в точке x' необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности $U \subset \mathbf{R}^n$ точки x' выполнялось условие*

$$\forall x \in U \;\Big|\; \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x), l(S)x \right\rangle = 0. \tag{4.6.53}$$

Доказательство. Необходимость. Если $Q \in l(S)$, то при достаточно малом α экспонента $\exp(\alpha Q) \in S_1$ и $\exp(\alpha Q)x \in U$ при $x \in U$. Дифференцируя равенство

$$\varphi(\exp(\alpha Q)x) = Const$$

по α при $\alpha = 0$, получаем

$$\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x), Qx \right\rangle = 0, \tag{4.6.54}$$

что доказывает (53).

Достаточность. Пусть в некоторой открытой выпуклой окрестности U точки x' выполнено условие (4.6.53). Так как отображение $\psi(G,x) \equiv Gx$ произведения $\mathrm{GL}\,(n)\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$ непрерывно, то существует такой шар $U_1 \subset U$, $U_1 \ni x'$ и каноническая окрестность единицы S_1 группы S, что

$$S_1U_1 \subset U. \tag{4.6.55}$$

Покажем, что для любой точки $x_0 \in U_1$ выполнено условие

$$\forall G \in S_1 \mid \varphi(Gx_0) = \varphi(x_0). \tag{4.6.56}$$

Так как окрестность S_1 каноническая, то любой элемент $G \in S_1$ допускает представление $G = \exp(Q)$, $Q \in l(S)$, причём $G(\alpha) = \exp(\alpha Q)$ принадлежит S_1 при $\alpha \in [0,1]$. Введём функцию

$$\chi(\alpha) \equiv \varphi(G(\alpha)x_0).$$

По построению $\chi(0) = \varphi(x_0)$, $\chi(1) = \varphi(Gx_0)$ и

$$\frac{d}{d\alpha}\chi(\alpha) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}(G(\alpha)x_0), QG(\alpha)x_0 \right\rangle = 0 \tag{4.6.57}$$

при $\alpha \in [0,1]$ в силу (4.6.53, 4.6.55). Мы доказали соотношение(4.6.56), откуда

$$\forall x_0 \in U_1 \mid X(\varphi; \varphi(x_0)) \supset O(S_1; x_0),$$

следовательно

$$\forall x_0 \in U_1 \mid X(\varphi; \varphi(x_0)) \cap U_1 \supset O(S_1; x_0) \cap U_1.$$

$\diamondsuit$

Конечное множество функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_k(x)$,, определенных в некоторой окрестности U точки x', назовём *базисом локальных инвариантов (БЛИ) в классе функций N в точке* x', если каждая из них является локальным инвариантом в точке x' и любая функция φ класса N, являющаяся локальным инвариантом в точке x', в некоторой окрестности U точки x' допускает представление

$$\varphi(x) = \psi(\vec{\varphi}(x)),$$

где $\psi(\vec{C})$ — числовая функция k переменных. БЛИ в точке x' называется минимальным, если никакое собственное подмножество множества функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_k$ не является БЛИ в точке x'.

Если $W \subset \mathbf{R}^n$ — открытое множество, то глобальные свойства на W влекут соответствующие локальные, а именно: глобальный инвариант на W является и локальным инвариантом на W, глобальный базис инвариантов на W в классе N является и локальным базисом инвариантов в каждой точке $x_0 \in W$. Поставим обратный вопрос: при каких условиях локальный инвариант на W является глобальным инвариантом на W ? Ответ на этот вопрос даётся следующей леммой.

Лемма 4.6.8 *Пусть $S \subset \mathrm{GL}(n)$ связная группа Ли, $W \subset \mathbf{R}^n$ — открытое множество, группа симметрий которого содержит группу S, и функция $\varphi \in C^{(1)}(W)$. Для того, чтобы функция φ была инвариантом на множестве W необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall x \in W \Bigm| \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x), l(S)x \right\rangle = 0. \tag{4.6.58}$$

Доказательство. В силу леммы 4.6.7 требует доказательства лишь достаточность. Пусть $x_0 \in W$ и элемент G принадлежит канонической окрестности единицы S_1 группы S, покажем, что

$$\varphi(Gx_0) = \varphi(x_0). \tag{4.6.59}$$

Элемент G из канонической окрестности представим в виде $G = \exp(Q)$, $Q \in l(S)$, причём $G(\alpha) \equiv \exp(\alpha Q) \in S_1$ при $\alpha \in [0,1]$. Функция $\psi(\alpha) \equiv \varphi(G(\alpha)x_0)$, $\alpha \in [0,1]$, при $\alpha = 0$ принимает значения $\psi(0) = \varphi(x_0)$, а при $\alpha = 1$ значение $\psi(1) = \varphi(Gx_0)$ и производная $\frac{d}{d\alpha}\psi(\alpha) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}(G(\alpha)x_0), Q(G(\alpha)x_0) \right\rangle$ обращается при $\alpha \in [0,1]$ в нуль в силу условия (4.6.58). Доказано соотношение (4.6.59) при $G \in S_1$.

В силу п. 4.2.9 любой элемент $G \in S$ представляется в виде произведения элементов $G_i \in S_1$ из канонической окрестности $G = G_1 G_2 \dots G_k$. В силу справедливости (4.6.59) при $G \in S_1$ имеем

$$\varphi(Gx_0) = \varphi(G_1 G_2 \dots G_k x_0) = \varphi(G_2 G_3 \dots G_k x_0) = \dots = \varphi(x_0).$$

Итак,

$$\forall x_0 \in W \mid X(\varphi; \varphi(x_0)) \supset O(S; x_0),$$

т.е. функция φ инвариант на W. $\diamondsuit$

Следствие 4.6.5 *В условиях леммы 4.6.8, если функция φ локальный инвариант на множестве W, то она и глобальный инвариант на множестве W.*

Перейдем к вопросу о базисе локальных инвариантов.

Лемма 4.6.9 *Пусть точка $x_0 \in Bs(l(S))$, $k = n - r(l(S))$, функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_k(x)$, непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, являются ЛИ в точке x_0 и $rank\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0}(x_0), \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0}(x_0), \dots \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_0}(x_0)\right) = k$, тогда функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_k$ образует БЛИ в классе функций $C^{(1)}$ в точке x_0.*

Доказательство. Пусть функция $\varphi_0(x)$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Тогда в условиях леммы 4.6.9 в силу леммы 4.6.7 существует открытый шар U с центром в точке x_0, такой что: 1) на множестве U функции $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_k$ непрерывно дифференцируемы, 2) $rank\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x), \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x), \dots \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}(x)\right) = k$ во всех точках $x \in U$, 3) для каждой функции $\varphi_i(x)$, $i = 0, 1, 2, ..k$ во всех точках $x \in U$ градиент ортогонален линейному подпространству $l(S)x$:

$$\forall x \in U \; \Big| \; \left\langle \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x), l(S)x \right\rangle = 0. \tag{4.6.60}$$

В силу 2),3) при каждом x вектора $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x), \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x), \dots \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}(x)$ образуют базис в линейном пространстве векторов ортогональных подпространству $l(S)x$. В таком случае в силу 3) вектора $\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(x), \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x), \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x), \dots \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}(x)$ линейно зависимы в каждой точке $x \in U$:

$$\forall x \in U \; \Big| \; rank\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(x), \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x), \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x), \dots \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}(x)\right) = k. \tag{4.6.61}$$

По теореме о зависимости функций (теорема 14.4 из [32]) функция $\varphi_0(x)$ зависима от функции $\varphi_1, \varphi_2, ..\varphi_k$ в некоторой окрестности $U_1 \subset U$ точки x_0. $\diamondsuit$

4.6.8 Резюме результатов. Объединим теперь полученные в данном параграфе результаты. Пусть $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ группа Ли.

Тогда для любой матрицы $A \in \Pi ms(S^\top)$ функция $\Phi(A; x) = \langle x, Ax \rangle$ инвариант. Если группа S связна и $Bs_i(l(S))$ — компонента связности множества $Bs(l(S))$, то функция $\varphi \in C^{(1)}(Bs_i(l(S)))$ инвариант на множестве $Bs_i(l(S))$ тогда и только тогда, когда для всех $x \in Bs_i(l(S))$ верно $\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x), l(S)x \right\rangle = 0$.

Пусть q матриц $\{A_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \dots q$, $A_\alpha \in \Pi ms(S_\top)$, образуют базис линейного пространства $\Pi ms(S^\top)$. Если группа S бинарная, то функция $\Phi(A_1, x), \Phi(A_2, x) \dots \Phi(A_q, x)$ образует БЛИ в классе $C^{(1)}$ на множестве Bs. Более того в каждой точке $x_0 \in Bs$ существует k матриц из q матриц $a_1, A_2, \dots A_q$ такие, что соответствующие функции $\Phi(A, x)$ образуют минимальный БЛИ в точке x_0. Итак, если функция $\varphi \in \Pi si(S) \cap C^{(1)}(Bs)$, то для каждой точки $x_0 \in Bs$ найдётся окрестность $U \subset \mathbf{R}^n$, найдутся $k = r(\Pi ms(S^\top))$ матриц $A_1, A_2, \dots A_k \in \Pi ms(S^\top)$, найдётся непрерывно дифференцируемая функция $\psi(\vec{C})$, $\vec{C} \in \mathbf{R}^k$, что

$$\varphi(x) = \psi(\Phi(A_1, x), \Phi(A_2, x), \dots \Phi(A_k, x)). \tag{4.6.62}$$

Функция $\psi(\vec{C})$, вообще говоря, зависит от окрестности U, $\psi = \psi_U(\vec{C})$. Чтобы построить единую функцию ψ на множестве Bs или некотором его подмножестве W достаточно построить полный набор инвариантов вида $\Phi(A, x)$, $A \in \Pi ms(S^\top)$ на множестве W, что требует конкретного рассмотрения в каждом случае.

4.6.9 Случай линейного представления произвольной группы Ли Gr на векторном пространстве V конечной размерности n. Приведенные в этом параграфе конструкции распространяются на случай линейного представления произвольной группы Ли Gr на векторном пространстве V конечной размерности n.

Пусть $L(V)$ алгебра линейных операторов $A : V \to V$, пусть $Is(V)$ — группа обратимых линейных операторов и $T : Gr \to Is(V)$ групповой морфизм. При изучении орбит и инвариантных функций представления достаточно знать группу Ли $T(Gr) \subset Is(V)$. Потому далее пусть $S' \subset Is(V)$ группа Ли обратимых операторов.

Вводим координаты в векторном подпространстве V, т.е. фиксируем линейный изоморфизм $I : \mathbf{R}^n \to V$. Для любого линейного оператора $Q' \in L(V)$ определяем линейный оператор $A \equiv I^{-1}Q'I \in L(\mathbf{R}^n) = M(n)$, так что $Q'I = IA$. При этом группа Ли $S \equiv I^{-1}S'I$ будет подгруппой матриц из $\mathrm{GL}\,(n)$. Для касательных многообразий получаем соотношения $l(S) = I^{-1}l(S')I$. Определяем функции

$$r(l(S'), v) \equiv \dim(l(S')v) \tag{4.6.63}$$

и

$$r_*(l(S') \equiv \max_{v \in V} r(l(S'), v). \tag{4.6.64}$$

Они связаны с аналогичными функциями на $\mathbf{R}^n$ равенствами

$$r(l(S'), v) = r(l(S), I^{-1}v), \tag{4.6.65}$$

$$r_*(l(S') = r_*(l(S)), \tag{4.6.66}$$

так как

$$r(l(s'), v) = \dim(l(S')v) = \dim(I^{-1}l(S)II^{-1}v) = \dim(l(S)(I^{-1}v)) = r(l(S), I^{-1}v).$$

Изоморфизм $I : \mathbf{R}^n \to V$ линейных пространств удалённых изоморфизм $J : F(V) \to F(\mathbf{R}^n)$ линейных пространств числовых функций по правилу: если $f(v) \in F(V)$, то $g(x) = J(f)$ есть

$$g(x) \equiv f(Ix). \tag{4.6.67}$$

При этом, если для $G' \in S'$ выполнено условие инвариантности

$$\forall v \in V \mid f(G'v) = f(v), \tag{4.6.68}$$

то оно эквивалентно условию инвариантности для функции $g(x) = J(f)$ с $G = I^{-1}G'I$

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \mid g(Gx) = g(x). \tag{4.6.69}$$

Функция $f \in F(V)$ будет локальным инвариантом группы S' в точке $v \in V$ тогда и только тогда, когда функция $g = J(f)$ будет локальным инвариантом группы S в точке $x = I^{-1}v$.

Таким образом, введением координат на векторном пространстве V рассмотрение линейного представления и его инвариантов на произвольном конечномерном векторном пространстве сводится к рассмотрению тех же вопросов для случая $V = \mathbf{R}^n$.

§4.7 Симметрия функции и симметрия трансформации Фурье

Рассмотрим связь симметрии функции $\varphi(x)$ и симметрии её трансформации Фурье $\hat{\varphi}(\xi)$ для числовой функции $\varphi(x)$, определённой на $\mathbf{R}^n$.

4.7.1 Последовательное применение оператора трансформации Фурье F и оператора Ts_G. Мы рассматриваем в этом параграфе числовые функции из класса $S'(\mathbf{R}^n)$, обобщённых функций медленного роста на $\mathbf{R}^n$, следуя [24]. Пусть $F : S'(\mathbf{R}^n) \to S'(\mathbf{R}^n)$ оператор Фурье, переводящий функцию $\varphi(x) \in S'(\mathbf{R}^n)$ в функцию $\hat{\varphi}(\xi) \in S'(\mathbf{R}^n)$ по правилу

$$\hat{\varphi}(\xi) \equiv \underset{\mathbf{R}^n}{\int \ldots \int} \varphi(x) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, dx_1\, dx_2\, \ldots dx_n. \tag{4.7.1}$$

Согласно [24] операторы Ts_G антипредставления §4.5 будут операторами изоморфизма пространства $S'(\mathbf{R}^n)$ на себя и справедлива формула

$$FTs_G(\varphi) = \frac{1}{|\det(G)|} Ts_{G^{-1\top}} F(\varphi) \tag{4.7.2}$$

для $\varphi \in S'(\mathbf{R}^n)$. При переходе к представлению Tsi §4.5

$$FTsi_G(\varphi) = |\det(G)| Tsi_{G^{-1\top}} F(\varphi). \tag{4.7.3}$$

или в частном случае матрицы G с $|\det(G)| = 1$ получаем

$$FTsi_G(\varphi) = Tsi_{G^{-1\top}} F(\varphi). \tag{4.7.4}$$

Обозначим множество матриц $G \in M(n, \mathbf{R})$ с $|\det(G)| = 1$ через $UL(n)$, тогда в силу (4.7.4) для любой функции $\varphi \in S'(\mathbf{R}^n)$ и любой матрицы $G \in UL(n)$

$$(Tsi_G(\varphi) = \varphi) \Leftrightarrow (Tsi_{G^{-1\top}}(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}). \tag{4.7.5}$$

Поэтому для любой функции $\varphi \in S'(\mathbf{R}^n)$

$$\Gamma si(\varphi) \cap UL(n) = \Gamma si^{\top}(\hat{\varphi}) \cap UL(n) \tag{4.7.6}$$

и для любого множества $S \subset UL(n)$

$$F(\Pi si(S)) = \Pi si(S^{-1\top}). \tag{4.7.7}$$

4.7.2 Эквивалентность представлений $\varphi(x) = \psi(\Phi(B, x))$ и $\hat{\varphi}(\xi) = \mu(\Phi(B^{-1}; \xi))$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) \in S'(\mathbf{R}^n)$, представимую в виде суперпозиции

$$\varphi(x) = \psi(\Phi(B, x)) \tag{4.7.8}$$

квадратичной формы $\Phi(B, x)$ с симметричной невырожденной матрицей B, и функции одного переменного $\psi = \psi(\alpha)$. Согласно лемме 4.5.3 справедливо включение

$$\Gamma si(\varphi) \supset \Gamma m^{\top}(B). \tag{4.7.9}$$

и в силу (4.7.6) и включение
$$\Gamma si(\hat{\varphi}) \supset \Gamma m(B). \tag{4.7.10}$$
В силу леммы 2.4.2 $\Gamma m(B) = \Gamma m^{\top}(B^{-1})$, поэтому из (4.7.10) следует
$$\Gamma si(\hat{\varphi}) \supset \Gamma m^{\top}(B^{-1}). \tag{4.7.11}$$
В случае регулярной функции $\hat{\varphi}(\xi)$ из (4.7.11) согласно той же лемме 2.4.2 следует представление функции $\hat{\varphi}(\xi)$ в виде суперпозиции
$$\hat{\varphi}(\xi) = \mu(\Phi(B^{-1};\xi)), \tag{4.7.12}$$
где $\mu(\alpha)$ — числовая функция одного переменного. Итак, если обобщённая функция $\varphi(x)$ и её трансформация Фурье $\hat{\varphi}(\xi)$ регулярны, а матрица $B \in Ms(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$, то представления (4.7.8) и (4.7.12) эквивалентны.

Доказана следующая лемма.

Лемма 4.7.1 *Если обобщённая функция $\varphi(x) \in S'(\mathbf{R}^n)$ и её трансформация Фурье регулярны и матрица $B \in Ms(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$, то представления (4.7.8) и (4.7.12) эквивалентны.*

4.7.3 Трансформация Фурье однородной обобщённой функции.

Напомним, что функция $f(x) \in F(\mathbf{R}^n)$ называется однородной степени $\alpha \in \mathbf{R}$, если для любого $\lambda > 0$.
$$f(\lambda x) = \lambda^{\alpha} f(x). \tag{4.7.13}$$
Обобщённая функция $\varphi(x) \in D'(\mathbf{R}^n)$ называется обобщённой степени α, если
$$(\varphi(x), f\left(\frac{x}{\lambda}\right)) = \lambda^{\alpha+n}(\varphi(x), f(x)). \tag{4.7.14}$$
для любой основной функции $f(x) \in D(\mathbf{R}^n)$ (см. [28, с. 23]).

Пусть $\varphi(x) \in S'(\mathbf{R}^n)$ обобщённая функция медленного роста, однородная степени α, тогда для любой основной функции $f(x) \in S(\mathbf{R}^n)$ по определению трансформации Фурье
$$(\varphi, \hat{f}) = (\hat{\varphi}, f). \tag{4.7.15}$$
В силу формулы (4.7.2) при $G = \lambda E$, $\lambda > 0$
$$FTs_G(f) = \lambda^{-n} Ts_{G^{-1}} F(f),$$
то есть
$$f\widehat{(\lambda x)}(\xi) = \lambda^{-n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right),$$
или
$$\lambda^n \widehat{f(\lambda x)}(\xi) = \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right). \tag{4.7.16}$$
Подставим (4.7.16) в (4.7.15) и получим
$$(\varphi(x), \hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right)) = \lambda^n((\hat{\varphi}(\xi), f(\lambda\xi))). \tag{4.7.17}$$

Так как функция $\varphi(x)$ однородна, то

$$(\varphi(x), \hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right)) = \lambda^{\alpha+n}(\varphi(x), \hat{f}(x)) = \lambda^{\alpha+n}(\hat{\varphi}(\xi), f(\xi)). \tag{4.7.18}$$

Из (4.7.17, 4.7.18) получаем

$$(\hat{\varphi}(\xi), f(\lambda\xi)) = \lambda^{\alpha}(\hat{\varphi}(\xi), f(\xi))$$

или

$$(\hat{\varphi}(\xi), f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)) = \lambda^{-\alpha}(\hat{\varphi}(\xi), f(\xi)) = \lambda^{-(\alpha+n)+n}(\varphi(x), \hat{f}(x)). \tag{4.7.19}$$

Доказана следующая лемма.

Лемма 4.7.2 *Если $\varphi(x) \in S'(\mathbf{R}^n)$ однородная обобщённая функция степени α, то её трансформация Фурье $\hat{\varphi}(\xi)$ — однородная обобщённая функция степени $-(\alpha+n)$.*

§4.8 Линейное представление группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на пространстве вектор-функций $F_n(\mathbf{R}^n)$

Для группы $Gr = \mathrm{GL}\,(n)$ невырожденных матриц мы рассматриваем три бесконечномерных линейных представления: скалярное — на пространстве числовых функций на $\mathbf{R}^n$ — $F(\mathbf{R}^n)$, введённое в §4.5 с операторами

$$Tsi_G(\varphi)(x) \equiv \varphi(G^{-1}x) \tag{4.8.1}$$

и два векторных — на пространстве функций на $\mathbf{R}^n$ со значениями в $\mathbf{R}^n$ — $F_n(\mathbf{R}^n)$, определенные по правилам

$$Tvi_G(v)(x) \equiv G^{-1\top}v(G^{-1}x), \tag{4.8.2}$$

$$\widetilde{Tvi}_G(v)(x) \equiv Gv(G^{-1}x), \tag{4.8.3}$$

при $G \in \mathrm{GL}\,(n)$. Наряду с представлениями (4.8.1 – 4.8.3) мы рассматриваем три соответствующих антипредставления: скалярное

$$Ts_G(\varphi)(x) \equiv \varphi(Gx) \tag{4.8.4}$$

и векторные

$$Tv_G(v)(x) \equiv G^{\top}v(Gx), \tag{4.8.5}$$

$$\widetilde{Tv}_G(v)(x) \equiv G^{-1}v(Gx), \tag{4.8.6}$$

т.е. в терминах п. 4.1.6 инволюция на группе $\mathrm{GL}\,(n)$ в данном случае берется в виде $inv(G) \equiv G^{-1}$. В таком случае согласно формулам (4.1.9) и (4.1.62) для любого множества $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ справедливы равенства

$$\Pi si(S) = \Pi s(S), \quad \Pi vi(S) = \Pi v(S), \quad \widetilde{\Pi vi}(S) = \widetilde{\Pi v}(S), \tag{4.8.7}$$

в силу которых при изучении множеств $\Pi si(S), \Pi vi(S), \widetilde{\Pi vi}(S)$ мы можем пользоваться антипредставлениями.

4.8.1 Связи между сохраняющимися множествами $\Pi si(S)$, $\Pi vi(S)$.

Рассмотрим теперь связи между сохраняющимися множествами $\Pi si(S)$, $\Pi vi(S)$, $\widetilde{\Pi vi}(S)$ для фиксированного подмножества $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$.

Простейшее свойство для скалярного случая заключается в том, что если $\varphi \in \Pi s(S)$, а $\psi(\alpha)$ — числовая функция числового аргумента, то и суперпозиция $\psi(\varphi) \in \Pi s(S)$.

Лемма 4.8.1 *Справедливы утверждения:*

$$(\varphi \in \Pi s(S), v \in \Pi v(S)) \Rightarrow (\varphi v \in \Pi v(S)), \tag{4.8.8}$$

$$(u, v \in \Pi v(S), A \in \Pi m(S)) \Rightarrow (\langle u, Av\rangle \in \Pi s(S)), \tag{4.8.9}$$

$$(A \in \Pi m(S^\top)) \Rightarrow (Ax \in \Pi v(S)), \tag{4.8.10}$$

$$(\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^n) \cap \Pi s(S)) \Rightarrow (\,grad\,\varphi \in \Pi v(S)), \tag{4.8.11}$$

Доказательство. Утверждение (4.8.8) проверяется следующим образом. Если $G \in S$, то

$$Tv_G(\varphi v)(x) = G^\top \varphi(Gx)v(Gx) = (\varphi(Gx))(G^\top v(Gx)) = \varphi(x)v(x) = (\varphi v)(x).$$

Утверждение (4.8.9) также проверяется подстановкой

$$Ts_G(\langle u, Av\rangle)(x) = \langle u(Gx), Av(Gx)\rangle,$$

но в силу условия $A \in \Pi m(S)$ верно

$$GAG^\top = A,$$

поэтому

$$Ts(\langle u, Av\rangle)(x) = \langle G^\top u(Gx), AG^\top v(Gx)\rangle = \langle Tv_G(u), ATv_G(v)\rangle(x) = \langle u, Av\rangle(x).$$

Проверяем равенство (4.8.10). При $G \in S$ имеем

$$Tv_G(Ax) = (G^\top AG)x = Ax.$$

Проверяем равенство (4.8.11)

$$Tv_G(\,grad\,\varphi)(x) = G^\top(\,grad\,\varphi)(Gx) = \,grad\,(\varphi(Gx)) = (\,grad\,\varphi)(x),$$

если $grad\,\varphi(x)$ принимать как столбец. $\diamondsuit$

Аналогичными свойствами обладает сохраняющееся множество $\widetilde{\Pi v}(S)$.

Лемма 4.8.2 *Справедливы утверждения:*

$$(\varphi \in \Pi s(S), v \in \widetilde{\Pi v}(S)) \Rightarrow (\varphi v \in \widetilde{\Pi v}(S)), \tag{4.8.12}$$

$$(u, v \in \widetilde{\Pi v}(S), A \in \Pi m(S^\top)) \Rightarrow (\langle u, Av\rangle \in \Pi s(S)), \tag{4.8.13}$$

$$(A \in Kom(S)) \Rightarrow (Ax \in \widetilde{\Pi v}(S)), \tag{4.8.14}$$

$$(u \in \Pi v(S), v \in \widetilde{\Pi v}(S)) \Rightarrow (\langle u, v\rangle \in \Pi s(S)). \tag{4.8.15}$$

Доказательство. Свойство (4.8.12) проверяется подстановкой

$$\tilde{T}v_G(\varphi v)(x) = G^{-1}\varphi(Gx)v(Gx) = \varphi(Gx)G^{-1}v(Gx) = \varphi(x)v(x) = (\varphi v)(x).$$

Свойство (4.8.13) проверяется подстановкой с учётом соотношения

$$G^{\top -1}AG^{-1} = A,$$

следующего из включения $A \in \Pi m(S^{\top})$,

$$Ts_G(\langle u, Av\rangle)(x) = \langle u(Gx), Av(Gx)\rangle = \langle u(Gx), G^{\top -1}AG^{-1}v(Gx)\rangle =$$

$$\langle G^{-1}u(Gx), A(G^{-1}v(Gx))\rangle = \langle u(x), Av(x)\rangle.$$

Включение $A \in Kom(S)$ влечет равенство

$$G^{-1}AG = A$$

при $G \in S$, поэтому верно (4.8.14). Свойство (4.8.15) проверяется подстановкой

$$Ts_G(\langle u, v\rangle)x = \langle u(Gx), v(Gx)\rangle = \langle G^{\top}u(Gx), G^{-1}v(GX)\rangle = \langle u(x), v(x)\rangle.$$

$\diamondsuit$

4.8.2 Случай группы Ли $S = \Gamma m^{\top}(B)$, $B \in Ms(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$. Рассмотрим теперь случай, когда множество

$$S = \Gamma m^{\top}(B), \tag{4.8.16}$$

где B — симметричная невырожденная матрица. По формуле (4.2.38)

$$\Pi m(\Gamma m(B)) = \mathrm{lin}\,(B), \tag{4.8.17}$$

а по формулам (4.2.86, 4.2.38)

$$\Pi m(\Gamma m^{\top}(B)) = \Pi m(\Gamma m(B^{-1})). \tag{4.8.18}$$

По формуле (4.2.39)

$$Kom(\Gamma m(B)) = Kom(\Gamma m^{\top}(B)) = \Lambda. \tag{4.8.19}$$

Согласно формуле (4.8.10) леммы 4.8.1 и формулам (4.8.16, 4.8.17) в таком случае

$$Bx \in \Pi v(\Gamma m^{\top}(B)), \tag{4.8.20}$$

а согласно формуле (4.8.14) леммы 4.8.2 и формулам (4.8.16, 4.8.19)

$$x \in \widetilde{\Pi v}(\Gamma m^{\top}(B)). \tag{4.8.21}$$

Лемма 4.5.3 даёт описание функций $\varphi \in \Pi s(\Gamma m^{\top}(B))$ как функций, представленных в виде

$$\varphi(x) = \psi(\langle x, Bx\rangle) + \lambda\chi_0(x), \tag{4.8.22}$$

где $\psi(\alpha)$ — произвольная числовая функция числового аргумента, λ — произвольное число, $\chi_0(x)$ — характеристическая функция нуля. Оказывается множество функций $\Pi v(\Gamma m^{\top}(B))$ исчерпывается произведениями функций вида (4.8.20) и (4.8.22), а множество функций $\widetilde{\Pi v}(\Gamma m^{\top}(B))$ — произведениями функций вида (4.8.21) и (4.8.22).

Теорема 4.8.1 *Если* $S = \Gamma m^\top(B)$, $B \in Ms(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$, *то, кроме случая* $n = 2$, $\det(B) < 0$, *верны утверждения:*

1) множество функции $\Pi s(S)$ *состоит из всех функций* $\varphi(x)$ *вида (4.8.22);*

2) множество функций $\Pi v(S)$ *состоит из всех функций* $u(x)$ *вида*

$$u(x) = \psi(\langle x, Bx\rangle)\, Bx; \tag{4.8.23}$$

3) множество функций $\Pi v(S)$ *состоит из всех функций* $v(x)$ *вида*

$$v(x) = \psi(\langle x, Bx\rangle)\, x. \tag{4.8.24}$$

Доказательство. Пусть функция $u(x) \in \Pi v(S)$. Обозначим, следуя §4.4, через $\Gamma(x)$ группу матриц $G \in S$, оставляющих неподвижной точку x. По условию

$$Tv_G(v)(x) = v(x)$$

или

$$G^\top v(Gx) = G^\top v(x) = v(x)$$

Итак,

$$\forall G \in \Gamma(x) \mid G^\top v(x) = v(x). \tag{4.8.25}$$

Так как $G \in \Gamma m^\top(B) = \Gamma m(B^{-1})$, то

$$GB^{-1}G^\top = B^{-1},$$

откуда

$$G^\top = BG^{-1}B^{-1}. \tag{4.8.26}$$

Из (4.8.25, 4.8.26) получаем

$$\forall G \in \Gamma(x) \mid BG^{-1}B^{-1}v(x) = v(x)$$

или эквивалентно

$$\forall G \in \Gamma(x) \mid (B^{-1}v(x)) = G(B^{-1}v(x). \tag{4.8.27}$$

Так как матрица B^{-1} симметрична и невырождена, то по лемме 4.4.4 из соотношения (4.8.27) следует, что

$$B^{-1}(v(x)) = \varphi(x)\, x,$$

где $\varphi(x)$ — скалярная функция, или

$$v(x) = \varphi(x)\, Bx. \tag{4.8.28}$$

◇

Запишем теперь условие принадлежности функции (4.8.28) множеству $\Pi v(S)$:

$$\forall G \in \Gamma m^\top(x) \ \mid\ \varphi(Gx)\, G^\top BGx = \varphi(x)\, Bx. \tag{4.8.29}$$

Так как при $G \in \Gamma m^\top(B)$ верно $G^\top BG = B$, то из (4.8.29) следует

$$\forall G \in \Gamma m^\top(x) \mid (\varphi(Gx) - \varphi(x))Bx = 0, \tag{4.8.30}$$

откуда

$$\forall G \in \Gamma m^\top(x) \mid \varphi(Gx) = \varphi(x),$$

т.е. $\varphi(x) \in \Pi s(\Gamma m^{\top}(B))$. По лемме 4.5.3 тогда функция $\lambda(x)$ допускает представление вида (4.8.22), что доказывает представление (4.8.23).

Пусть теперь функция $v(x) \in \widetilde{\Pi v}(S)$, тогда

$$\forall G \in \Gamma(x) \mid G^{-1}v(Gx) = v(x)$$

или

$$\forall G \in \Gamma(x) \mid v(x) = Gv(x). \tag{4.8.31}$$

Из (4.8.31) в силу леммы 4.4.4 получаем

$$v(x) = \varphi(x)\, x, \tag{4.8.32}$$

где $\varphi(x)$ — скалярная функция. Запишем условие принадлежности функции (4.8.32) множеству $\widetilde{\Pi v}(S)$:

$$\forall G \in S \mid \varphi(Gx)\, G^{-1}Gx = \varphi(x)\, x,$$

откуда

$$\forall G \in S \mid \varphi(Gx) = \varphi(x), \tag{4.8.33}$$

т.е. $\varphi \in \Pi s(S)$. Из формул (4.8.32, 4.8.22) следует формула (4.8.24).

4.8.3 Случай $S = \Gamma me^{\top}(B)$.

Рассмотрим теперь те же вопросы, что и в предыдущем пункте, для случая, когда $S = \Gamma me^{\top}(B)$ — связная компонента единицы группы $\Gamma m^{\top}(B)$, $B \in Ms(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$. Сохраняющееся множество скалярных функций $\Pi s(S)$ описывается в этом случае леммой 4.5.4 из которой, в частности вытекает, что если матрица B положительно определена и $n \geq 2$, то для функции $\varphi(x) \in \Pi s(\Gamma me^{\top}(B))$ верно представление (4.8.22).

В общем случае из леммы 4.4.6 следует теорема.

Теорема 4.8.2 *Если $S = \Gamma me^{\top}(B)$, $B \in Ms(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$, $n \geq 3$, то:*

1) множество $\Pi v(S)$ состоит из всех функций $u(x)$, представимых в виде

$$u(x) = \varphi(x)\, Bx, \tag{4.8.34}$$

где $\varphi(x) \in \Pi s(S)$;

2) множество $\widetilde{\Pi v}(S)$ состоит из всех функций $v(x)$, представимых в виде

$$v(x) = \varphi(x)\, x, \tag{4.8.35}$$

где $\varphi(x) \in \Pi s(S)$.

Доказательство теоремы 4.8.2 строится на лемме 4.4.6 аналогично тому, как доказательство теоремы 4.8.1 строится на лемме 4.4.4.

Следствие 4.8.1 *Если $n \geq 3$ и матрица B положительно определена, то:*

1) функция $u(x) \in \Pi v(\Gamma me^{\top}(B))$ тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$u(x) = \psi(\langle x, Bx\rangle)\, Bx; \tag{4.8.36}$$

2) функция $v(x) \in \widetilde{\Pi v}(\Gamma me^{\top}(B))$ тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$v(x) = \psi(\langle x, Bx\rangle)\, x. \tag{4.8.37}$$

4.8.4 Последовательное применение оператора дифференцирования и преобразований Ts_G, Tv_G, $\widetilde{Tv}_G$. Рассмотрим теперь действие линейного дифференциального оператора первого порядка с постоянными коэффициентами на пространстве функций $u(x) \in C_n^{(1)}(\mathbf{R}^n)$. В этом пункте символ

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \tag{4.8.38}$$

обозначает оператор-строку, а символ

$$u(x) \equiv \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix} \tag{4.8.39}$$

— вектор-функцию.

Лемма 4.8.3 *Для любой функции $u \in C_n^{(1)}(\mathbf{R}^n)$ и любой матрицы $G \in \Gamma m(B)$ справедливо соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial x} B\, Tv_G\, u = Ts_G \frac{\partial}{\partial x} Bu. \tag{4.8.40}$$

Доказательство. Проверяем формулу (4.8.40) подстановкой вида операторов Tv_G и Ts_G:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} B\, Tv_G\, u\right)(x) = \frac{\partial}{\partial x} B\, G^\top u(Gx) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(B\, G^\top\right)_{ij} u_j(Gx) =$$

$$\left(B\, G^\top\right)_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x'_r}(Gx)\, G_{ri} = \left(G\, B\, G^\top\right)_{rj} \frac{\partial u_j}{\partial x'_r} = B_{rj} \frac{\partial u_j}{\partial x_r}\Big|_{(Gx)} = \left(Ts_G \frac{\partial}{\partial x} B\, u\right)(x).$$

♢

Лемма 4.8.4 *Для любой функции $v \in C_n^{(1)}(\mathbf{R}^n)$ и любой матрицы $G \in$ GL(n) справедливо соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial x} \widetilde{Tv}_G\, u = Ts_G \frac{\partial}{\partial x} u. \tag{4.8.41}$$

♢

Доказательство. Проверяем формулу (4.8.41) подстановкой вида операторов $\widetilde{Tv}$ и Ts:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \widetilde{Tv}_G\, u\right)(x) = \frac{\partial}{\partial x} G^{-1} u(Gx) = \frac{\partial}{\partial x_i} G^{-1}_{ij} u_j(Gx) =$$

$$G^{-1}_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x'_r}(x'_r)\, G_{ri}\Big|_{x'=Gx} = Ts_G \left(\frac{\partial}{\partial x} u\right)(x).$$

♢

4.8.5 Свойства симметрии градиента скалярной функции. Сопоставив каждой функции $\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^n)$ её градиент

$$grad\,\varphi \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\varphi\right)^{\top} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\top}\,\varphi, \tag{4.8.42}$$

мы получаем линейный оператор $grad\, : C^{(1)}(\mathbf{R}^n) \to C_n(\mathbf{R}^n)$. Он обладает следующим свойством

$$grad\; Ts_G = Tv_G\; grad\,. \tag{4.8.43}$$

В самом деле, для любой функции $\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^n)$ верно

$$grad\; Ts_G(\varphi) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\varphi(Gx)\right)^{\top} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\Big|_{Gx}\,G\right)^{\top} = G^{\top}\,\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\Big|_{Gx}\right)^{\top} = Tv_G\;(\,grad\,\varphi)\,.$$

Из свойства (4.8.43) следует, что для любой функции $\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^n)$

$$\Gamma vi(\,grad\,\varphi) \supset \Gamma si(\varphi). \tag{4.8.44}$$

Если S — подгруппа группы $\mathrm{GL}\,(n)$ и $\varphi \in \Pi si(S)$, то согласно (4.8.43)

$$grad\,\varphi(x) = Tv_G(\,grad\,\varphi) = G^{\top}\,grad\,\varphi\,\Big|_{Gx},$$

откуда

$$grad\,\varphi\,\Big|_{Gx} = G^{-1\top}\,grad\,\varphi(x). \tag{4.8.45}$$

Формула (4.8.45) выражает градиент функции во всех точках орбиты $O(S,x)$ через её градиент в фиксированной точке $x \in \mathbf{R}^n$.

§4.9 Симметрии состояний частицы

В §3.2 мы рассмотрели группу Пуанкаре преобразований векторного пространства $\mathbf{R}^n$ и в §3.3 ввели три линейных антипредставления группы Пуанкаре: скалярное — на векторном пространстве $F(\mathbf{R}^n)$ вида

$$R_p(\varphi)(x) \equiv \varphi(p(x)) \tag{4.9.1}$$

и два векторных антипредставления на векторном пространстве $F_4(\mathbf{R}^4)$ вида

$$T_p(v)(x) \equiv G^{\top}(p)v(p(x)) \tag{4.9.2}$$

и

$$\widetilde{T_p}(v)(x) \equiv G^{-1}(p)v(p(x)) \tag{4.9.3}$$

где $p \in P$ и преобразование $p(x)$ берётся в виде

$$p(x) = G(p)(x - a(p)), \quad G(p) \in \Omega(\Theta), \quad a(p) \in \mathbf{R}^4. \tag{4.9.4}$$

Согласно п. 4.1.6 рассмотрение антипредставлений R_p, T_p, $\widetilde{T_p}$ эквивалентно рассмотрению представлений, причём переход к представлениям производится с помощью инволюции $inv(p) \equiv p^{-1}$ на группе Пуанкаре. Если элемент группы Пуанкаре $p \in P$ записать виде

$$p(x) = Gx + a, \quad G \in \Omega(\Theta), \quad a \in \mathbf{R}^4, \tag{4.9.5}$$

то обратное преобразование будет иметь вид

$$p^{-1}(x) = G^{-1}(x - a), \tag{4.9.6}$$

этим и объясняется, что в представлении (4.9.4) $G(p)$ во многих случаях у нас рассматривается как обратная матрица.

Если $P_g \subset P$ группа Лоренца, рассматриваемая как подгруппа группы Пуанкаре, то редуцирование линейных антипредставлений R_p, T_p, $\widetilde{T_p}$ на подгруппу P_g даёт линейные антипредставления, свойства которых рассмотрены в §4.5–§4.8.

4.9.1 Основные классы симметрий. Для двух разных состояний частицы $p_1, p_2 \in P$ её функции состояния могут совпадать

$$T_{p_1}(v) = T_{p_2}(v), \tag{4.9.7}$$

это и есть проявление симметрии частицы. Сохраняющее и сохраняющееся множества для скалярного антипредставления R_p мы будем в данном параграфе отмечать буквой s, для антипредставления T_p — буквой v, а для антипредставления $\widetilde{T_p}$ — буквой v и волной сверху.

Каждой подгруппе $S \subset P$ будет соответствовать своё пространство симметрий. Симметрии, связанные с антипредставлением T_p, мы назовём *симметрии состояний*, с антипредставлением $\widetilde{T_p}$ — *симметрии токов* и с антипредставлением R_p — скалярные симметрии. Выделим в подгруппе $P_e \subset P$ следующие подмножества: группу трансляций P_n, группу вращений P_{gse}, группу Лоренца (узкую) P_{ge}. Выделим также три дискретные подгруппы T, P, C группы Пуанкаре P, состоящие каждая из двух элементов, один из которых единичный, а второй соответствует преобразованию Лоренца с матрицей G_i, $i = -+, +-, --$ вида (2.4.28).

Функции, симметричные относительно группы вращений P_{gse}, мы назовём *сферически симметричными*, симметричные относительно группы Лоренца P_{ge} — *лоренц-симметричными*. Дискретные симметрии назовём соответственно T, P, C-*симметриями.*

Поскольку функция v может быть симметрична относительно группы $S \subset P$, а функция $T_p(v)$ уже не быть симметричной относительно нее, то речь до сих пор шла о симметрии состоящий частицы. Чтобы говорить о симметрии частиц мы вернемся к стандартному состоянию и под *группой симметрий частицы* будем понимать *группу симметрий* её *стандартного состояния.*

Пространство симметрий для группы трансляций P_n состоит из всех констант, как в скалярном, так и в векторном случае. Описание пространства симметрий для группы вращений P_{gse} и группы Лоренца P_{ge} требует дополнительного рассмотрения.

4.9.2 Скалярное антипредставление с операторами R_p. Рассмотрим сначала скалярное антипредставление с операторами R_p. Для него лоренц-симметричные функции с группой симметрий P_{ge} описывается леммой 4.5.4. Таким образом, пространство скалярных лоренц-симметричных функций состоит из всех функций $\varphi(x)$, задаваемых с помощью трёх произвольных функций одного переменного: функции ψ^-, определенной на $]-\infty, 0[$, функций ψ^{++} и ψ^{+-}, определенных на $]0, \infty[$ так ,что при $x \neq 0$ верно

$$\varphi(x) = \begin{cases} \psi^{++}(\langle x, \Theta x\rangle), & \text{если } \langle x, \Theta x\rangle \geq 0, \quad x_0 > 0; \\ \psi^{+-}(\langle x, \Theta x\rangle), & \text{если } \langle x, \Theta x\rangle \geq 0, \quad x_0 < 0; \\ \psi^{-}(\langle x, \Theta x\rangle), & \text{если } \langle x, \Theta x\rangle < 0. \end{cases} \tag{4.9.8}$$

Рассмотрим теперь подгруппу вращений P_{gse} группы Лоренца. Поскольку каждое преобразование $G \in P_{gse}$ сводится к трёхмерному пространственному повороту и сохраняет временную координату, то согласно лемме 4.5.4 все скалярные сферически симметричные функции имеют вид

$$f(x) = \psi(x_0, \vec{x}^2) \tag{4.9.9}$$

где $\psi(\alpha, \beta)$ произвольная функции двух переменных.

Если взять однопараметрическую группу пространственных вращений S вокруг фиксированной оси, например, оси x_1, то при таких вращениях координаты x_0 и x_1 не изменяются и лемма 4.5.4 позволяет указать следующий общий вид вращательно-симметричной функции $f \in \Pi s(S)$

$$f(x) = \psi(x_0, x_1, x_2^2 + x_3^2), \tag{4.9.10}$$

где $\psi(\alpha, \beta, \gamma)$ — произвольная функция трёх переменных.

Нетрудно описать пространства T, P, C-симметрий. А именно, функция $f(x) \in \Pi s(T)$ характеризуется чётностью по временной переменной

$$f(-x_0, \vec{x}) = f(x_0, \vec{x}),$$

функция $f(x) \in \Pi s(P)$ характеризуется чётностью по пространственным переменным

$$f(x_0, -\vec{x}) = f(x_0, \vec{x}).$$

и функция $f(x) \in \Pi s(C)$ характеризуется равенством

$$f(-x) = f(x).$$

4.9.3 Векторные симметрии, соответствующие антипредставлению T_p. Перейдем к векторным симметриям, соответствующим антипредставлению T_p. Если функция $v(x) \in \Pi v(P_{ge})$ и непрерывна всюду кроме нуля, то она допускает представление

$$v(x) = \varphi(x)\Theta x, \tag{4.9.11}$$

где $\varphi \in \Pi s(P_{ge})$, т.е. скалярная функция $\varphi(x)$ имеет вид (4.9.7) в силу теоремы 4.8.2. Но в таком случае функция $v(x)$ является 4-градиентом от скалярной функции в каждой из областей X^{++}, X^{+-}, X^-. Таким образом, в терминологии п. 3.7.1 функция $v(x)$ вида (4.9.11) является пассивной и не даёт вклада в плотность лагранжиана Лоренца и во взаимодействие.

Пространство сферически симметричных функций $\Pi v(P_{gse})$ характеризуется тем, что для 4-функции $v(x) \in \Pi v(P_{gse})$ выполнены равенства

$$\forall Q \in \Omega_e(E_3) \mid v_0(x_0, Q\vec{x}) = v_0(x_0, \vec{x}),$$

$$\forall Q \in \Omega_e(E_3) \mid Q^\top \vec{v}(x_0, Q\vec{x}) = \vec{v}_0(x_0, \vec{x}).$$

Первое равенство означает скалярную сферическую симметрию функции $v_0(x_0, \vec{x})$, откуда по лемме 4.5.4

$$v_0(x_0, \vec{x}) = \psi_0(x_0, |\ \vec{x}\ |), \tag{4.9.12}$$

где $\psi_0(\alpha, \beta)$ — функция двух переменных. Второе равенство означает сферическую симметрию 3-вектор-функции $\vec{v}(x_0, \vec{x})$ по векторному аргументу $\vec{x}$, поэтому по теореме 4.8.2 справедливо представление

$$\vec{v}(x_0, \vec{x}) = \lambda(x_0, |\ \vec{x}\ |)\vec{x}, \tag{4.9.13}$$

где $\lambda(\alpha, \beta)$ — произвольная функция двух переменных.

Итак, общий вид сферически симметричной функции $v(x) \in \Pi v(P_{gse})$ определяется двумя произвольными функциями двух переменных $\psi(\alpha, \beta)$, $\lambda(\alpha, \beta)$:

$$v(x) = \psi(x_0, |\ \vec{x}\ |) + \lambda(x_0, |\ \vec{x}\ |). \tag{4.9.14}$$

Перейдем к рассмотрению вращательной симметрии. Пусть $S \subset \Omega_e(\Theta)$ группа вращений вокруг оси x_3. Тогда для 4-функции $v(x)$ условие $v(x) \in \Pi v(S)$ сводится к следующим трем требованиям при любой матрице $Q \in \Omega_e(E_2)$:

$$v_0(x_0, Q\vec{x}, x_3) = v_0(x_0, \vec{x}, x_3), \tag{4.9.15}$$

$$v_3(x_0, Q\vec{x}, x_3) = v_3(x_0, \vec{x}, x_3), \tag{4.9.16}$$

$$Q^\top \vec{v}(x_0, Q\vec{x}, x_3) = \vec{v}(x_0, \vec{x}, x_3), \tag{4.9.17}$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ — двумерные вектора. Условия (4.9.15),(4.9.16) — условия скалярной инвариантности функций, по лемме 4.5.4 эквивалентны следующим представлениям $v_i(x_0, \vec{x}, x_3) = \psi_i(x_0, \rho, x_3)$, где $\rho \equiv \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, а $\psi_i(\alpha, \beta, \gamma)$ — произвольная функция трёх действительных переменных, $i = 0, 3$. Условие (4.9.17) можно переписать с учётом $Q \in \Omega_e(E_2)$ в виде:

$$\forall Q \in \Omega_e(E_2) \mid \vec{v}(x_0, Q\vec{x}, x_3) = Q\vec{v}(x_0, \vec{x}, x_3). \tag{4.9.18}$$

Зададим произвольную 2-вектор-функцию трёх переменных $\vec{\psi}(\alpha, \beta, \gamma)$ и положим $\vec{v}(x_0, \rho, 0, x_3) = \vec{\psi}(x_0, \rho, x_3)$, $\rho \geq 0$. Тогда в силу требования (4.9.18) при $\rho > 0$

$$\vec{v}(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \vec{\psi}(x_0, \rho, x_3). \tag{4.9.19}$$

Итак, произвольная вращательно-симметричная 4-функция $v(x) \in \Pi v(S)$ задаётся 4 произвольными функциями 3 переменных $\psi_i(x_0, \rho, x_3)$, $i = 0, 1, 2, 3$. При этом $\vec{v}_i(x_0, x_1, x_2, x_3) = \psi_i(x_0, \rho(x_1, x_2), x_3)$, $i = 0, 3$, а для функции v_1, v_2 верно представление (4.9.19).

Сформулируем также условия T, P, C-симметрии для векторного случая. Условие T-симметрии для 4-функции $v(x) = (v_0, \vec{v})$, есть

$$v_0(x_0, \vec{x}) = -v_0(-x_0, \vec{x}), \tag{4.9.20}$$

$$\vec{v}(x_0, \vec{x}) = \vec{v}(-x_0, \vec{x}), \tag{4.9.21}$$

где $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, \vec{x})$. Условие P-симметрии есть

$$v_0(x_0, \vec{x}) = v_0(x_0, -\vec{x}), \tag{4.9.22}$$

$$\vec{v}(x_0, \vec{x}) = -\vec{v}(x_0, -\vec{x}). \tag{4.9.23}$$

Условие C-симметрии

$$v(x) = -v(-x). \tag{4.9.24}$$

4.9.4 Симметрии токов. Рассмотрим вопрос о симметрии токов, т.е. о векторных симметриях, соответствующих антипредставлению $\widetilde{T_p}$.

На основании теоремы 4.8.2 лоренц-симметричные токи $j(x)$ характеризуются представлением

$$j(x) = \lambda(x)x, \tag{4.9.25}$$

где $\lambda(x) \in \text{Пs}(P_{ge})$. В свою очередь для функции $\lambda(x) \in \text{Пs}(\Omega_e(\Theta))$ согласно лемме 4.5.4 справедливо представление (4.9.7).

Функция $j(x) \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)$, принадлежащая пространству токов J, согласно п. 2.2.2 должна удовлетворять также условию

$$\widetilde{K_j} \equiv \delta_{kl}\frac{\partial j_k}{\partial x_l} = 0. \tag{4.9.26}$$

Условие (4.9.26) с учётом формул (4.9.7), (4.9.25) приводит к следующему уравнению для скалярной функции одной переменной $\psi(\alpha)$, входящей в представление (4.9.7):

$$4\psi(\alpha) + 2\psi'(\alpha)\alpha = 0.$$

Откуда следует, что $\psi(\alpha) = \frac{c}{\alpha^2}$, $c \in \mathbf{R}$.

Мы убедились, что все лоренц-симметричные токи $j(x) \in J$ имеют вид

$$j(x) = \frac{c}{\langle x, \Theta x\rangle^2}x. \tag{4.9.27}$$

Перейдем к описанию сферически симметричных токов $j(x) \in \widetilde{\text{Пv}}(P_{gse})$. Согласно лемме 4.5.4 и теореме 4.8.2 для функции $j(x) \in \widetilde{\text{Пv}}(P_{gse})$ справедливо представление

$$j(x) = \psi_0(x_0, |\,\vec{x}\,|)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \psi_1(x_0, |\,\vec{x}\,|)\begin{pmatrix}0\\\vec{x}\end{pmatrix}, \tag{4.9.28}$$

где $\psi_0(\alpha,\beta), \psi_1(\alpha,\beta)$ — произвольные функции двух переменных. Для выполнения условия $j(x) \in J$ функции $\psi_i(\alpha,\beta)$, $i = 0, 2$, должны быть связаны соотношением

$$\frac{\partial\psi_0(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial\psi_1(\alpha,\beta)}{\partial\beta} + 3\psi_1 = 0. \tag{4.9.29}$$

Так как для матрицы $G \in \Omega(E_n)$ обратная матрица G^{-1} и транспонированная $G^\top$ совпадают, то все вращательно-симметричные токи имеют то же представление, что и в пункте 4.9.3, т.е. задаются четырьмя произвольными функциями трёх переменных $\psi_i(x_0, \rho, x_3)$, $i = 0, 1, 2, 3$, так что $j_i(x) = \psi_i(x_0, \rho, x_3)$, $i = 0, 3$ и вектор

$$\vec{j}(x) \equiv \begin{pmatrix} j_1(x)\\ j_2(x)\end{pmatrix}$$

задаётся равенством

$$\vec{j}(x) = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} x_1 & -x_2\\ x_2 & x_1\end{pmatrix}\vec{\psi}(x_0, \rho, x_3),$$

где $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

4.9.5 Симметрия функции состояния и симметрия функции тока. Рассмотрим функцию $v(x) \in C_4^{(2)}(\mathbf{R}^4)$, соответствующую состоянию системы, и функцию

$$j(x) \equiv (Av)(x) \tag{4.9.30}$$

— функцию тока, где оператор $A : C_4^{(2)}(\mathbf{R}^4) \to C_4(\mathbf{R}^4)$ базовый оператор системы. Тогда согласно формуле (2.5.43) справедлива связь

$$AT_p v = \widetilde{T_p} Av$$

или

$$AT_p v = \widetilde{T_p} j. \tag{4.9.31}$$

Из формулы (4.9.31) следует, что если функция состояния обладает группой симметрий $S \subset P$, то соответствующий ток $j = Av$ обладает той же группой симметрии, т.е.

$$(v \in \Pi v(S)) \Rightarrow (Av \in \widetilde{\Pi v}(S)),$$

или справедливо включение

$$A\left(C_4^{(2)}(\mathbf{R}^4) \cap \Pi v(S)\right) \subset \widetilde{\Pi v}(S).$$

Возникает обратный вопрос. Пусть функция $j(x) \in J$ обладает группой симметрий S, т.е. $j \in J \cap \widetilde{\Pi v}(S)$, существует ли функция $v(x) \in \Pi v(S)$, что $Av = j$? Дадим положительный ответ на этот вопрос для случая, когда $S \subset P_g$ подгруппа группы Лоренца.

Определим по току $j(x)$ функцию состояния $v(x)$, т.е. решение уравнения $Av = j$ формулой (2.2.54) в образах Фурье:

$$\hat{v}(\xi) = \frac{-1}{\langle \xi, \Theta\xi \rangle} \Theta \hat{j}(\xi). \tag{4.9.32}$$

Если мы к функции $j(x)$ применим оператор $\widetilde{T_p}$, то её трансформация Фурье преобразуется следующим образом

$$\widehat{\widetilde{T_p}(j)}(\xi) = e^{i\langle \xi, a \rangle} G^{-1} \hat{j}(G^{-1\top}\xi). \tag{4.9.33}$$

Но если $G \in \Omega(\Theta)$, то матрицы $G^{-1}, G^{\top}, G^{-1\top}$ также принадлежат $\Omega(\Theta)$, поэтому правая часть (4.9.32) преобразуется по правилу

$$\frac{-1}{\langle \xi, \Theta\xi \rangle} \Theta \widehat{\widetilde{T_p}(j)}(\xi) = e^{i\langle \xi, a \rangle} \frac{-1}{\langle \xi, \Theta\xi \rangle} G^{\top} \Theta \hat{j}(G^{-1\top}\xi) = e^{i\langle \xi, a \rangle} G^{\top} \left(\frac{-1}{\langle \xi', \Theta\xi' \rangle} \Theta \hat{j}(\xi') \right) \Bigg|_{\xi' = G^{-1\top}\xi}. \tag{4.9.34}$$

Что означает, что функция $v(x)$ с образом Фурье (4.9.32) в оригиналах подвергается преобразованию T_p. Итак, если функции $v(x)$ и $j(x)$ имеют образы Фурье, связанные соотношением (4.9.32), то $\Gamma v(v) = \widetilde{\Gamma v}(j)$, если формула (4.9.32) задаёт некоторую функцию $v(x)$, хотя бы в обобщённых смысле.

4.9.6 Сферически симметричные функции, являющиеся решениями однородной базовой системы уравнений. Как мы уже говорили, лоренц-симметричные функции состояния $v(x)$ не дают вклада в действие. Рассмотрим теперь сферически симметричные функции $v(x)$, которые являются решениями однородной базовой системы уравнений (2.2.7). Общий вид сферически-симметричной функции $v(x)$ даётся формулой (4.9.14), которую мы перепишем в следующем эквивалентном виде

$$v(x) = \begin{pmatrix} \psi(x_0, |\vec{x}|) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + grad_4 \int\limits_c^{|\vec{x}|} \alpha\lambda(x_0, \alpha)\, d\alpha - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} \int\limits_c^{|\vec{x}|} \alpha\lambda(x_0, \alpha)\, d\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из последней формулы вытекает, что сферически-симметричная функция состояния допускает следующее общее представление

$$v(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x_0, |\vec{x}|) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + grad_4\, f(x_0, |\vec{x}|),$$

где $\varphi(\alpha, \beta)$, $f(\alpha, \beta)$ — произвольные функции двух переменных. Поскольку пассивная функция $grad_4 f(x_0, |\vec{x}|)$ не даёт вклада в действие, то физический интерес представляют лишь сферически симметричные решения при $f \equiv 0$, т.е.

$$v(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x_0, |\vec{x}|) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.9.35}$$

Подставим теперь функцию вида (4.9.35) в базовую систему уравнений (2.2.9, 2.2.10), получим:

$$-\triangle\varphi(x_0, |\vec{x}|) = 0, \tag{4.9.36}$$

$$grad_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(x_0, |\vec{x}|) = 0. \tag{4.9.37}$$

Уравнение (4.9.37) даёт, что $\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(x_0, |\vec{x}|) = \gamma(x_0)$. Далее получаем

$$\varphi(x_0, |\vec{x}|) = \int\limits_0^{x_0} \gamma(x_0)\, dx_0 + \psi(|\vec{x}|). \tag{4.9.38}$$

Функция $\psi(|\vec{x}|)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа $\triangle\psi(|\vec{x}|) = 0$ и убывать на бесконечности, поэтому $\psi(\alpha) = \frac{c}{\alpha}$. Отметим, что решение вида

$$v(x) = \begin{pmatrix} \int\limits_0^{x_0} \gamma(x_0)\, dx_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

соответствует нулевым физическим смещениям и не даёт вклада в действие, поэтому с учётом сделанных замечаний общий вид сферически симметричного решения однородной базовой системы будет

$$v(x) = C \begin{pmatrix} \frac{1}{|\vec{x}|} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = Const. \tag{4.9.39}$$

Решение (4.9.39) не ограничено в нуле, но в малой окрестности нуля функция $v(x)$, описывающая состояние частицы, не подчиняется однородным базовым уравнениям, а подчиняется точным нелинейным уравнениям или неоднородным базовым уравнениям с некоторым током $j(x) \in J$. Если функция тока $j(x)$ сферически симметрична, то согласно п. 4.9.3 функция состояния $v(x)$ также будет сферически симметрична и на больших расстояниях от начала координат близка к сферически симметричному решению базовой системы вида (4.9.39). Таким образом, для функции состояний частиц симметрии должны выполняться приближенно. Поэтому введём понятие *псевдосимметрии.*

Будем говорить, что группа $S \subset P$ группа *псевдосимметрий* функции $v(x)$, если справедливо представление $v(x) = u(x) + \varepsilon(x)$, причём S — группа симметрий функции $u(x)$, а функция $\varepsilon(x)$ пренебрежимо мала.

Заметим, что введённое понятие не является вполне строгим, пока не уточнено понятие "малости"функции $\varepsilon(x)$.

Глава 5

Зависимость функций и инварианты

§ 5.1. Свойства ранга векторного поля

§ 5.2. Зависимость функций

§ 5.3. Алгебра Ли векторных полей

§ 5.4. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с одной неизвестной функцией и локальные инварианты

В этой главе рассматривается векторное поле как отображение $v : W \to \mathbf{R}^s$ открытого множества $W \subset \mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^s$, $s \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$. Для системы векторных полей $V \equiv \{v^i\}_{i \in I}$ вводится понятие ранга системы $\operatorname{rank} V(x)$ в точке $x \in W$ как размерности линейной оболочки множества векторов $V(x) = \{v^i(x)\}_{i \in I} \subset \mathbf{R}^s$. Вводится понятие ранга системы векторных полей $r_*(V) \equiv \max\limits_{x \in W} \operatorname{rank} V(x)$ на множестве W. Вводится основное множество $Bt(V)$ как множество тех точек $x \in W$, где величина $\operatorname{rank} V(x)$ достигает максимального значения. Дополнительное множество $Et(V)W \setminus Bt(V)$ называется исключительным, а множество $St(V)$ точек разрыва функции $\operatorname{rank} V(x)$ называется особым. Изучаются топологические свойства и свойства симметрии функции $\operatorname{rank} V(x)$, а также структура множеств $Bt(V), Et(V), St(V)$. В частности, показано, что если $W = \mathbf{R}^n$ и все отображения $v^i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^s$, $i \in I$ аналитичны, то основное множество $Bt(V)$ открыто и всюду плотно в $\mathbf{R}^n$ (§ 5.1).

В § 5.2 изучаются числовые отображения $\varphi^i : W \to \mathbf{R}$, $i \in I$ класса $C^{(1)}(W)$ и исследуется связь понятий зависимости системы функций $\Phi \equiv \{\varphi^i\}_{i \in I}$ и ранга системы векторных полей $\{\frac{\partial \varphi^i}{\partial x}\}_{i \in I}$ в точке x. Вводится понятие индекса зависимости системы функций в точке $x \in W$ как $\operatorname{dep}(\Phi, x) \equiv \operatorname{rank} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ и индекса зависимости системы функций Φ на множестве W как $\operatorname{dep}_*(\Phi) \equiv r_*\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)$. Определяются основное множество $Bd(\Phi) \equiv Bt\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)$ исключительное множество $Ed(\Phi) \equiv Et\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)$ и особое множество $Sd(\Phi) \equiv St\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)$. Показано, что k функций $\Phi \equiv (\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^k)$ зависимы в точке $x \notin Sd(\Phi)$ иф $\operatorname{dep}(\Phi, x) < k$. Вводится понятие базиса для системы функций Φ в точке x и даётся критерий базисности подсистемы функций $\Phi' \subset \Phi$ в точке

$x \notin Sd(\Phi)$ в форме равенства $\operatorname{dep}(\Phi', x) = \operatorname{dep}(\Phi, x)$.

В § 5.3 рассматриваются алгебры Ли векторных полей и их изоморфизмы. В частности, вводится алгебра Ли $ALC_k^{(\infty)}(W)$ бесконечно-дифференцируемых векторных полей $f : W \to \mathbf{R}^k$ на открытом подмножестве $W \subset \mathbf{R}^k$ со скобкой Ли $f^3 \in ALC_k^{(\infty)}(W)$ двух векторных полей $f^1 \in ALC_k^{(\infty)}(W)$ и $f^2 \in ALC_k^{(\infty)}(W)$ вида

$$f^3 \equiv [f^1, f^2](x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(f_i^2(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f^1(x) - f_i^1(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f^2(x) \right).$$

Строятся два примера линейных отображений $J : C_m^{(\infty)}(\mathbf{R}^n) \to C_k^{(\infty)}(\mathbf{R}^k)$, для которых множество значений — подалгебра Ли в алгебре Ли $ALC_k^{(\infty)}$. В частности, показано что для матрицы $B \in Ma(k)$ отображение $J_B : C_1^{(\infty)}(W) \to C_k^{(\infty)}(W),\ W \in \mathbf{R}^k$ вида $J_B(f) \equiv B \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^\top$ есть морфизм алгебры Ли, состоящей из скалярных функций $f \in C_1^{(\infty)}(W)$ со скобкой Ли элементов f^1 и f^2 вида

$$[f^1, f^2] \equiv \left\langle \left(\frac{\partial f^1}{\partial x}\right)^\top, B\left(\frac{\partial f^2}{\partial x}\right)^\top \right\rangle,$$

в алгебру Ли $ALC_k^{(\infty)}(W)$.

С помощью введённых понятий в § 5.4 описывается множество решений системы линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка с одной неизвестной скалярной функцией $u(x)$ вида

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) f^i(x) = 0,\ i \in I,$$

где $f^i \in C_k^{(\infty)}(W),\ i \in I$.

§5.1 Свойства ранга векторного поля

Пусть $W \subset \mathbf{R}^n$ открытое подмножество и $v : W \to \mathbf{R}^s$ непрерывное отображение, то есть функция класса $C_s(W)$ или непрерывное векторное поле на W. В этом параграфе мы рассмотрим некоторые свойства ранга системы векторных полей на W. Все векторные поля в пунктах 5.1.1–5.1.5 предполагаются непрерывными.

5.1.1 Конечное число векторных полей. Рассмотрим набор из k векторных полей $v^1(x), v^2(x), \dots v^k(x)$ на множестве W. Обозначим через $V(x) \equiv (v^1(x), v^2(x), \dots v^k(x))$ набор из k векторов $v^i(x) \equiv \begin{pmatrix} v_1^i(x) \\ v_2^i(x) \\ \vdots \\ v_s^i(x) \end{pmatrix}$, которые мы будем записывать в виде столбцов. Таким образом $V(x)$ можно рассматривать как матрицу из s строк и k столбцов, то есть $V(x)$ есть непрерывное отображение $V : W \to M(s \times k)$. Введём ранг системы векторов $v^1(x), v^2(x), \dots v^k(x)$ в линейном пространстве $\mathbf{R}^s$:

$$rank\, V(x) \equiv rank\, \{v^1(x), v^2(x), \dots v^k(x)\}. \tag{5.1.1}$$

По определению ранг будет равен размерности линейного пространства $lin\,\{v^1(x), v^2(x), \dots v^k(x)\} \subset \mathbf{R}^s$ и равен рангу матрицы $V(x)$:

$$rank\,V(x) = \,dim\;lin\,(V(x)) = \,rank\,\|v^i_j\|. \tag{5.1.2}$$

Таким образом, ранг может принимать значения $0, 1, 2, \dots \min\{s, k\}$ и является числовой функцией на W. Поэтому точки непрерывности функции $rank\,V(x)$ совпадают с точками её локального постоянства.

Из непрерывности функций $v^i(x)$ вытекает

Утверждение 5.1.1 *Для каждой точки $x_0 \in W$ существует окрестность $U \subset W$, такая что*

$$\forall x \in U \;\;|\;\; rank\,V(x) \geq \,rank\,V(x_0).$$

Доказательство. Существует минор порядка $rank\,V(x_0)$ матрицы $V(x_0)$ не равный нулю в точке x_0. В силу непрерывной зависимости элементов матрицы $V(x)$ от x, данный минор не равен нулю в некоторой окрестности U точки x_0. $\diamondsuit$

Таким образом функция $rank\,V(x)$ полунепрерывна снизу на W, более того множество вида

$$\{x \in W \;\;|\;\; rank\,V(x) \geq C\}$$

открыто при любых $C \in \mathbf{R}$.

Наибольшее значение функции $rank\,V(x)$ на множестве W назовём *рангом системы векторных полей* на множестве W или просто рангом и будем обозначать

$$\max_{x\in W} rank\,V(x) \equiv r_*(V). \tag{5.1.3}$$

Введём также *основное* множество

$$Bt(V) \equiv \{x \in W \;\;|\;\; rank\,V(x) = r_*(V)\}, \tag{5.1.4}$$

исключительное множество

$$Et(V) \equiv \{x \in W \;\;|\;\; rank\,V(x) < r_*(V)\} = W \setminus Bt(V) \tag{5.1.5}$$

и *особое* множество $St(W)$, состоящее из всех точек разрыва функции $rank\,V(x)$. По построению основное множество непусто и открыто, исключительное множество замкнуто, особое множество замкнуто, и справедливо включение $St(V) \subset Et(V)$. Особое множество $St(V)$ нигде не плотно, ибо на любом открытом множестве $W' \subset W$ достигает своего максимума функция $rank\,V(x)$ и точки максимума образуют непустое открытое подмножество, не содержащее особых точек.

Так как ранг матрицы не изменяется при её умножении слева и справа на невырожденную матрицу, то для произвольных отображений $A : W \to M(s)$, $B : W \to M(k)$ (не обязательно непрерывных по x) верно равенство

$$rank\,(A(x_0)V(x_0)B(x_0)) = \,rank\,V(x_0), \tag{5.1.6}$$

если матрицы $A(x), B(x)$ невырождены в точке x_0. Поэтому верно следующее утверждение.

Утверждение 5.1.2 *Если матрицы $A(x), B(x)$ невырождены в каждой точке $x \in W$, то*

$$r_*(AVB) = r_*(V). \tag{5.1.7}$$

(Непрерывность функций $A(x), B(x)$ здесь не предполагается).

5.1.2 Перенесем введённые понятия на случай бесконечной системы векторных полей $V(x) \equiv \{v^i(x)\}_{i\in I}$, где множество индексов I бесконечно. Остается в силе определение

$$rank\, V(x) \equiv rank\, \{v^i(x)\}_{i\in I} \tag{5.1.8}$$

и равенство

$$rank\, V(x) = dim\ lin\, V(x). \tag{5.1.9}$$

Так как $lin\, V(x) \in \mathbf{R}^s$, то $rank\, V(x)$ может принимать значения $0, 1, 2, \dots s$. Справедливо равенство

$$rank\, V(x) = \max_{K\in I} rank\, V^K(x), \tag{5.1.10}$$

где максимум берется по всем конечным подмножествам $K \subset I$ множества I, а $V^K(x) \equiv \{v^i(x)\}_{i\in K}$, причём в формуле (5.1.10) можно ограничиться подмножествами K не более чем из s элементов.

Для функции $rank\, V(x)$ непрерывность в точке x эквивалентна локальному постоянству в этой точке и справедливо утверждение 5.1.1. Сохраняется определение ранга системы векторных полей на множестве W в виде формулы (5.1.3), определение основного $B_t(V)$, исключительного $Et(V)$ и особого множества $St(V)$. Множество $Bt(V)$ непусто и открыто, множества $Et(V), St(V)$ замкнуты и справедливы соотношения $Et(V) = W \setminus Bt(V)$, $St(V) \subset Et(V)$. Множество $St(V)$ нигде не плотно в W.

Умножение величины $V(x)$ на матрицу справа для бесконечного множества индексов I теряет смысл, но умножение на квадратную матрицу $A(x) \in M(s)$ сохраняет свойство

$$rank\, (A(x_0)V(x_0)) = rank\, V(x_0). \tag{5.1.11}$$

если матрица $A(x_0)$ невырождена. Итак, вместо утверждения 5.1.2 верно следующее утверждение.

Утверждение 5.1.3 *Если матрица $A(x) \in M(s)$ невырождена в каждой точке $x \in W$, то*

$$r_*(AV) = r_*(V). \tag{5.1.12}$$

(Непрерывность функции $A(x)$ здесь не предполагается).

5.1.3 Ограничим класс векторных полей, чтобы получить дополнительные свойства функции $rank\, V(x)$. Всюду далее в этом параграфе $W = \mathbf{R}^n$.

Сформулируем следующее свойство полиномиальной функции $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

Утверждение 5.1.4 *Если $\varphi(x)$ полином степени q и $\varphi(x_0) \neq 0$, то на любой прямой, проходящей через точку x_0, может лежать не более q нулей полинома.*

Доказательство. Произвольная прямая, проходящая через точку x_0, задаётся параметрически в виде $x = x_0 + ty$, где $t \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}^n$. При фиксированных векторах x_0, y мы получим полином $P_q(t)$ степени q, причём $P_q(0) = \varphi(x_0) \neq 0$. Но полином степени q от одной переменной может иметь не более q нулей. $\diamondsuit$

Отображение $v : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^s$ мы называем векторным полиномом степени q, если каждая компонента $v_j(x)$, $j = 1, 2, \dots s$ полином степени q.

Лемма 5.1.1 *Пусть каждое $v^i(x)$ — полиномиальное векторное поле степени q_i, $i = 1, 2, \dots k$, пусть $V(x) \equiv (v^1(x), v^2(x), \dots v^k(x))$ и в точке x_0*

$$rank\, V(x_0) = k, \tag{5.1.13}$$

тогда на любой прямой, проходящей через точку x_0 может лежать не более $q \equiv \sum_{i=1}^{n} q_i$ точек исключительного множества $Et(V)$.

Доказательство. По условию существует минор порядка k матрицы $\|v^i_j\|$ отличный от нуля в точке x_0. Указанный минор будет полиномом степени q и по утверждению 5.1.4 может быть равен нулю не более чем в q точках прямой, проходящей через точку x_0. $\diamondsuit$

Следствие 5.1.1 *В условиях леммы 5.1.1 основное множество $Bt(V)$ открыто и всюду плотно в $\mathbf{R}^n$.*

Теорема 5.1.1 *Пусть $V(x) \equiv \{v^i(x)\}_{i\in I}$ некоторое семейство полиномиальных векторных полей и $r_*(V) = k$, тогда существует набор из k векторных полей $V^K(x) \equiv (v^1(x), v^2(x), \dots v^k(x)) \subset V(x)$, что $r_*(V^K) = k$. При этом $Bt(V) \supset Bt(V^K)$, множество $Bt(V)$ открыто, всюду плотно в $\mathbf{R}^n$ и каждая прямая, имеющая общую точку со множеством $Bt(V)$, может содержать не более q точек исключительного множества $Et(V)$, где q — сумма степеней полиномов $v^1(x), v^2(x), \dots v^k(x)$.*

Справедливость теоремы вытекает из леммы 5.1.1 и следствия 5.1.1.

5.1.4 Получим аналоги результатов предыдущего пункта для вещественно-аналитических функций на $\mathbf{R}^n$. Отображение $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ мы назовём здесь аналитической функцией, если она является суммой ряда Тейлора, сходящегося на всем $\mathbf{R}^n$. Вектор функцию $V : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^s$ называем аналитической, если каждая её компонента $v_j(x), j = 1, 2, \dots s$ — аналитическая функция.

Утверждение 5.1.5 *Если $\varphi(x)$ аналитическая функция и $\varphi(x_0) \neq 0$, то на любом ограниченном интервале любой прямой, проходящей через точку x_0, может лежать лишь конечное число нулей функции $\varphi(x)$.*

Доказательство. На любой прямой $x = x_0 + ty$, $t \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}^n$, проходящей через точку x_0, функция $\psi(t) \equiv \varphi(x_0 + ty)$ является аналитической функцией одного переменного $t \in \mathbf{R}$. Множество нулей функции $\psi(t)$ замкнуто, но $\psi(0) = \varphi(x_0) \neq 0$. Если бы на каком-то сегменте $[a, b]$ лежало бесконечное число нулей функции $\psi(t)$, то существовала бы сходящаяся последовательность различных нулей функции $\psi(t)$, что для аналитической функции влечет её тождественное обращение в нуль, противоречащее условию $\psi(0) \neq 0$. $\diamondsuit$

Аналогично лемме 5.1.1 устанавливается

Лемма 5.1.2 *Пусть каждое $v^i(x)$, $i = 1, 2, \dots k$ аналитическое векторное поле, пусть $V(x) \equiv (v^1(x), v^2(x), \dots v^k(x))$ и в точке x_0 выполнено (5.1.13), тогда на любом ограниченном интервале любой прямой, проходящей через точку x_0, может лежать лишь конечное число точек исключительного множества $Et(V)$.*

Следствие 5.1.2 *В условиях леммы 5.1.2 основное множество $Bt(V)$ открыто и всюду плотно.*

Теорема 5.1.2 *Пусть $V(x) \equiv \{v^i(x)\}_{i \in I}$ — семейство аналитических векторных полей и $r_*(V) = k$, тогда существует набор из k векторных полей $V^K(x) \equiv (v^1(x), v^2(x), \dots v^k(x)) \subset V(x)$, что $r_*(V^K) = k$. При этом $Bt(V) \supset Bt(V^K)$, множество $Bt(V)$ открыто всюду плотно в $\mathbf{R}^n$ и любой ограниченный интервал любой прямой, имеющей общую точку со множеством $Bt(V)$, может содержать лишь конечное число точек исключительного множества $Et(V)$.*

Справедливость теоремы 5.1.2 вытекает из леммы 5.1.2 и следствия 5.1.2.

Следствие 5.1.3 *Если все векторные поля семейства $V(x)$ аналитичны, то исключительное и особое множества совпадают $Et(V) = St(V)$.*

В самом деле, если $x^0 \in Et(V) \setminus St(V)$, то это точка непрерывности функции $rank\,(V(x))$, следовательно, точка локального постоянства с $rank\,(V(x^0)) < r_*(V)$, но тогда и некоторая окрестность точки $x^0 \in Et(V) \setminus St(V)$, что невозможно, так как множество $Bt(V) = \mathbf{R}^n \setminus Et(V)$ всюду плотно в $\mathbf{R}^n$.

5.1.5 Разрывные поля. В этом и следующем пункте мы снимаем требование непрерывности рассматриваемых полей. Отображение $v : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^s$ назовём однородной вектор-функцией с показателем однородности $\alpha \in \mathbf{R}$ если выполнено условие

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}_+ \ \forall x \in \mathbf{R}^n \ \mid \ \varphi(\lambda x) = \lambda^\alpha \varphi(x). \tag{5.1.14}$$

Если все векторные поля $v^i(x), i \in I$ однородны, то при $\lambda \in \mathbf{R}_+$

$$rank\, V(\lambda x) = rank\,\{v^i(\lambda x)\}_{i \in I} = rank\,\{\lambda^{\alpha i} v^i(x)\}_{i \in I} = rank\,\{v^i(x)\}_{i \in I} = rank\, V(x),$$

то есть функция $rank\, V(x)$ будет однородной с показателем однородности $\alpha = 0$. Но тогда множества $Bt(V), Et(V), St(V)$ будут конусами в $\mathbf{R}^n$.

5.1.6 Векторные поля, обладающие симметрией. Перейдем к рассмотрению векторных полей, обладающих симметрией. В §4.8 мы рассмотрели два линейных представления группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на пространстве векторных полей $F_n(\mathbf{R}^n)$. Введём более общее линейное представление группы Gr на векторном пространстве $F_s(\mathbf{R}^n)$, которое мы построим по двум гомоморфизмам $G : Gr \to \mathrm{GL}\,(n)$ и $Q : Gr \to \mathrm{GL}\,(s)$. Определим линейное представление

$$Tvi_g(v(x)) \equiv Q(g)v(G^{-1}(g)x), \ g \in Gr, \ v \in F_s(\mathbf{R}^n). \tag{5.1.15}$$

Это действительно представление, ибо

$$Tvi_{g_1 g_2}(v(x)) = Q(g_1 g_2)v(G^{-1}(g_1 g_2)x) = Q(g_1)Q(g_2)v(G^{-1}(g_2)G^{-1}(g_1)x)$$

и

$$Tvi_{g_1} Tvi_{g_2}(v(x)) = Tvi_{g_1}(Q(g_2)v(G^{-1}(g_2)x)) = Q(g_1)Q(g_2)v(G^{-1}(g_2)G^{-1}(g_1)x),$$

то есть для любых $g_1, g_2 \in Gr$

$$Tvi_{g_1 g_2} = Tvi_{g_1} Tvi_{g_2}.$$

Одновременно определим скалярное линейное представление группы Gr на векторном пространстве $F(\mathbf{R}^n)$ вида

$$Tsi_g(\varphi(x)) \equiv \varphi(G^{-1}(g)x),\ g \in Gr,\ \varphi \in F(\mathbf{R}^n). \tag{5.1.16}$$

Любому множеству векторных полей $\{v^i\}_{i\in I} \equiv V \subset F_s(\mathbf{R}^n)$ сопоставим скалярную функцию $rank\, V \in F(\mathbf{R}^n)$. Справедливо следующее соотношение между группой симметрии $Z(V)$ множества $V \subset F_s(\mathbf{R}^n)$ в представлении Tvi и сохраняющей группой $\Gamma si(\, rank\, V)$ элемента $rank\, V \in F(\mathbf{R}^n)$ в представлении Tsi.

Лемма 5.1.3 *Для любого множества $V \subset F_s(\mathbf{R}^n)$ справедливо включение*

$$\Gamma si(\, rank\, V) \supset Zvi(V). \tag{5.1.17}$$

Доказательство. Если $g \in Zvi(V)$, то

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \ \mid\ Q(g)V(G^{-1}(g)x) = V(x),$$

поэтому

$$rank\, Q(g)V(G^{-1}(g)x) = \, rank\, V(x).$$

В силу утверждения 5.1.3

$$rank\, Q(g)V(G^{-1}(g)x) = \, rank\, V(G^{-1}(g)x) = \, rank\, V(x')\, \Big|_{x'=G^{-1}(g)x} = Tsi_g(\, rank\, V(x)).$$

Итак,

$$rank\, Tvi_g(V) = Tsi_g(\, rank\, V) = \, rank\, V,$$

поэтому $g \in \Gamma si(\, rank\, V)$. $\diamondsuit$

Пусть для группы D справедливо включение $D \subset \Gamma si(\, rank\, V)$. Тогда функция $rank\, V(x)$ постоянна на орбитах $O(D,x) \subset \mathbf{R}^n$ линейного представления $G(g)$ на пространстве $\mathbf{R}^n$.

Теорема 5.1.3 *Пусть $V \subset C_s(\mathbf{R}^n)$, тогда группы симметрий основного $Bt(V)$, исключительного $Et(V)$ и особого $St(V)$ множеств в представлении $G(g)$ на $\mathbf{R}^n$ содержат сохраняющую группу $\Gamma si(\, rank\, V)$.*

Доказательство. Пусть $g \in \Gamma si(\, rank\, V) \equiv D$, тогда функция $rank\, V(x)$ постоянна на каждой орбите $O(D,x) \subset \mathbf{R}^n$, откуда следуют включения $Z(Bt(V)) \supset D$, $Z(Et(V)) \supset D$. Каждое отображение $G(g) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ линейный изоморфизм, поэтому точка $x \in \mathbf{R}^n$ — точка непрерывности функции $rank\, V(x)$, тогда и только тогда, когда точка $G(g)x \in \mathbf{R}^n$ — точка непрерывности той же функции. Итак, группа симметрий множества точек непрерывности, равная группе симметрий дополнительного множества $St(V)$, содержит группу D. $\diamondsuit$

Замечание 5.1.1 *Мы доказали также, что если $V \subset F_s(\mathbf{R}^n)$, то*

$$Z(Bt(V)) = Z(Et(V)) \supset \Gamma si(\, rank\, V). \tag{5.1.18}$$

Так как сохраняющая группа множества содержится в группе симметрий $\Gamma vi(V) \subset Zvi(V)$, то справедливо

Следствие 5.1.4 *Если $V \subset C_s(\mathbf{R}^n)$ и при любом $i \in I$ сохраняющая группа $\Gamma si(v^i)$ содержит группу $D \subset Gr$, то справедливы соотношения*

$$Z(Bt(V)) = Z(Et(V)) \supset D,\ Z(St(V)) \supset D.$$

§5.2 Зависимость функций

В этом параграфе мы рассматриваем зависимость функций в классе $C^{(1)}$, то есть предполагаем, что все изучаемые функции непрерывно дифференцируемы. Далее $W \subset \mathbf{R}^n$ открытое множество, $\varphi^i(x) \in C^{(1)}(W), i \in I$, где I — некоторое множество индексов.

5.2.1 Локальные понятия. Для изучения зависимости функций мы введём локальные понятия. Пусть $\varphi^1(x), \varphi^2(x), \ldots \varphi^k(x)$ — k числовых функций из класса $C^{(1)}(W)$, образуем отображение $\varphi : W \to \mathbf{R}^k$ вида $\varphi(x) \equiv (\varphi^1(x), \varphi^2(x), \ldots \varphi^k(x))$, то есть $\varphi \in C^{(1)}_k(\mathbf{R}^n)$

Определение 5.2.1 *Функции $\varphi^1(x), \varphi^2(x), \ldots \varphi^k(x)$ зависимы в точке $x_0 \in W$, если существует окрестность $U \subset W$ точки x_0 и функция $f(y) \in C^{(1)}(\mathbf{R}^k)$, что $\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x_0)) \neq 0$ и*

$$\forall x \in U \;\; | \;\; f(\varphi(x)) = 0. \tag{5.2.1}$$

В противном случае называем функции $\varphi^1(x), \varphi^2(x), \ldots \varphi^k(x)$ *независимыми* в точке x_0.

Выделим функцию $\varphi^j(x)$ и обозначим через $\bar{\varphi}^j(x)$ оставшийся набор из $(k-1)$ функции, то есть $\bar{\varphi}^j(x)$ отображение $\bar{\varphi}^j : W \to \mathbf{R}^{(k-1)}$. На основании теоремы о неявной функции определение 5.2.1 эквивалентно следующему.

Определение 5.2.2 *Функции $\varphi^1(x), \varphi^2(x), \ldots \varphi^k(x)$ зависимы в точке $x_0 \in W$, если существует номер j, окрестность $U \subset W$ точки x_0 и функция $\bar{f} \in C^{(1)}(\mathbf{R}^{(k-1)})$, что*

$$\forall x \in U \;\; | \;\; \varphi^j(x) = \bar{f}(\bar{\varphi}^j(x)). \tag{5.2.2}$$

Бесконечное множество функций $\{\varphi^i(x)\}_{i \in I} \equiv \Phi(x) \subset C^{(1)}(W)$ назовём *зависимым* в точке $x_0 \in W$, если существует конечное подмножество $K \subset I$, что конечное семейство функций $\Phi^K(x) = \{\varphi^i(x)\}_{i \in K}$ зависимо.

Теоремы о неявных функциях связывают зависимость функций с линейной зависимостью их градиентов.

5.2.2 Индекс зависимости системы функций $\Phi \subset C^{(1)}(W)$ в точке x. Для каждой функции $\varphi^i(x) \in \Phi(x)$ построим её градиент $\frac{\partial \varphi^i}{\partial x}(x)$ и определим *индекс зависимости* системы функций $\Phi \subset C^{(1)}(W)$ в точке x как ранг системы векторных полей $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \subset C_n(W)$

$$dep\,(\Phi, x) \equiv rank\,\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x). \tag{5.2.3}$$

(см. §5.1). Итак, индекс зависимости $dep\,(\Phi, x)$ системы функций Φ в точке x в случае конечного множества $\Phi = \{\varphi^1, \varphi^2, \ldots \varphi^k(x)\}$ равен размерности касательного многообразия к отображению $\Phi : W \to \mathbf{R}^k$ или рангу матрицы Якоби $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x)$ и может принимать значения $0, 1, 2, \ldots, \min\{n, k\}$. В случае бесконечного множества Φ индекс зависимости $dep\,(\Phi, x)$ может принимать значения $0, 1, 2, \ldots, n$.

Индексом зависимости на множестве W или просто индексом зависимости системы Φ мы назовём ранг системы векторных полей $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ на множестве W

$$dep_*\,(\Phi) \equiv r_*\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right). \tag{5.2.4}$$

Определяем *основное* множество $Bd(\Phi) \equiv Bt(\frac{\partial\Phi}{\partial x})$, *исключительное* $Ed(\Phi) \equiv Et(\frac{\partial\Phi}{\partial x})$ и *особое* $Sd(\Phi) \equiv St(\frac{\partial\Phi}{\partial x})$, согласно предыдущему параграфу.

5.2.3 Связь между величиной индекса зависимости и зависимостью функций. Перейдем к изучению связи между величиной индекса зависимости и зависимостью функций. В этом пункте $\varphi(x) \equiv (\varphi^1(x), \varphi^2(x), \dots \varphi^k(x))$ набор k функций из $C^{(1)}(\mathbf{R}^n)$.

Лемма 5.2.1 *Если функции $\varphi^1(x), \varphi^2, \dots \varphi^k(x)$ зависимы в точке x_0, то существует окрестность $U \subset W$ точки x_0, в которой*

$$\forall x \in U \quad | \quad dep\,(\varphi, x) < k. \tag{5.2.5}$$

Доказательство. Дифференцируем соотношение (5.2.1) по x и получаем

$$\forall x \in U \quad \Big| \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi^1} \cdot \frac{\partial \varphi^1}{\partial x}(x) + \frac{\partial f}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\partial \varphi^2}{\partial x}(x) + \cdots \frac{\partial f}{\partial \varphi^k} \cdot \frac{\partial \varphi^k}{\partial x}(x) = 0.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы. $\diamondsuit$

В точках непрерывности функции $dep\,(\varphi, x)$ условие (5.2.5) и достаточно для зависимости функций.

Лемма 5.2.2 *Если $x_0 \notin Sd(\varphi)$, то функции $\varphi^1(x), \varphi^2(x), \dots \varphi^k(x)$ зависимы в точке x_0 тогда и только тогда, когда*

$$dep\,(\varphi, x_0) < k. \tag{5.2.6}$$

Доказательства требует лишь достаточность. Пусть $dep\,(\varphi, x_0) = m$, тогда существуют m функций из k такие, что

$$dep\,((\varphi^1, \varphi^2, \dots \varphi^m), x_0) = m.$$

В силу утверждения 5.1.1 существует окрестность $U \subset W$ точки x_0 в которой $dep\,((\varphi^1, \varphi^2, \dots \varphi^m), x) = m = dep\,(\varphi, x)$ (точка x_0 — точка локального постоянства функции $dep\,(\varphi, x)$ в силу $x_0 \notin Sd(\varphi)$). Так как $m < k$, то существует функция $\varphi^{m+1}(x)$ из набора $(\varphi^1, \varphi^2, \dots \varphi^k)$, не принадлежащая набору $(\varphi^1, \varphi^2, \dots \varphi^m)$. По условию ранг матрицы Якоби

$$rank\,\frac{\partial(\varphi^1, \varphi^2, \dots \varphi^{m+1})}{\partial x}(x) = m = rank\,\frac{\partial(\varphi^1, \varphi^2, \dots \varphi^m)}{\partial x}(x)$$

в окрестности U. По теореме о неявной функции функция $\varphi^{m+1}(x)$ зависит от функций $\varphi^1, \varphi^2, \dots \varphi^m$. $\diamondsuit$

Из леммы 5.2.1 следует, что функции $\varphi^1, \varphi^2, \dots \varphi^k$ независимы во всех точках замыкания множества $Bd(\varphi^1, \varphi^2, \dots \varphi^k)$.

В случае, когда $x_0 \in Sd(\varphi)$, условия (5.2.5) недостаточно для зависимости функций $\varphi^1, \varphi^2, \dots \varphi^k$, как показывает следующий пример.

Пример 5.2.1

Множество $W = \mathbf{R}$, $n = 1$, функции $\varphi^i(x) \equiv \exp(-\frac{1}{x^2})\sin(\frac{i}{x})$, при $1 \le i \le q$, и $\varphi^i(x) \equiv \exp(-\frac{1}{x^2})\cos(\frac{i-q}{x})$ при $q+1 \le i \le 2q \equiv k$, $q \in \mathbf{N}$.

В этом случае

$$dep\,(\varphi, 0) = 0, \tag{5.2.7}$$

$$dep\,(\varphi, x) = 1, \quad \text{при } x \ne 0. \tag{5.2.8}$$

В самом деле, равенство $dep\,(\varphi, x) = 0$ означает, что

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{d}{dx}\varphi^i(x)\right)^2 = 0. \tag{5.2.9}$$

Сумма

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{d}{dx}\varphi^i(x)\right)^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{q} \left[\left(\frac{d}{dx}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)^2 \sin^2\left(\frac{i}{x}\right) + \left(\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{d}{dx}\left(\sin\left(\frac{i}{x}\right)\right)\right)^2 + \right.$$

$$2\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(\frac{i}{x}\right)\left(\frac{d}{dx}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(\frac{d}{dx}\left(\sin\left(\frac{i}{x}\right)\right)\right) +$$

$$\left(\frac{d}{dx}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)^2 \cos^2\left(\frac{i}{x}\right) + \left(\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{d}{dx}\cos\left(\frac{i}{x}\right)\right)^2 +$$

$$\left. 2\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{d}{dx}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)\cos\frac{i}{x}\frac{d}{dx}\left(\cos\left(\frac{i}{x}\right)\right)\right] =$$

$$q\left(\frac{d}{dx}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)^2 + \exp\left(-\frac{2}{x^2}\right)\sum_{i=1}^{q}\frac{i^2}{x^4}. \tag{5.2.10}$$

В силу (5.2.10) равенство (5.2.9) выполняется лишь при $x = 0$.

Покажем, что функции $\varphi^1(x), \varphi^2(x), \dots \varphi^k(x)$ независимы в точке $x = 0$. Предположим противное, тогда по определению 5.2.1 существует функция $f(y) \in C^{(1)}(\mathbf{R}^k)$, что $\frac{\partial f}{\partial y}(0) \ne 0$, и существует окрестность $U \subset \mathbf{R}$ точки 0 такая, что

$$\forall x \in U \ \mid \ f(\varphi(x)) = 0. \tag{5.2.11}$$

Так как функция $f(y)$ дифференцируема, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что

$$\forall x \in \mathbf{R}, |x| < \delta \ \Big| \ f(\varphi(x)) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial y}(0), \varphi(x) \right\rangle + \psi_\varepsilon, \tag{5.2.12}$$

где

$$|\psi_\varepsilon| \le \varepsilon \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(\varphi^i(x))^2} = \varepsilon \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{q}. \tag{5.2.13}$$

Итак, для констант $a_i \equiv (\frac{\partial f}{\partial y}(0))_i$, $1 < i \le q$, $b_i \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0)\right)_{q+i}$, $1 \le i \le q$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что

$$\forall x \in \mathbf{R}, |x| < \delta \ \Big|$$

$$\left|\sum_{i=1}^{q} a_i \left(\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) \sin\left(\frac{i}{x}\right) + b_i \left(\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{i}{x}\right)\right)\right| \le \varepsilon\sqrt{q} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

или

$$\forall x \in \mathbf{R}, |x| < \delta \ \Big| \ \left|\sum_{i=1}^{q} \left[a_i \sin\left(\frac{i}{x}\right) + b_i \cos\left(\frac{i}{x}\right)\right]\right| \le \sqrt{q}\varepsilon,$$

что эквивалентно при $t = \frac{1}{x}$ неравенству

$$\forall t \in \mathbf{R}, |t| > \frac{1}{\delta} \ \Big| \ \left|\sum_{i=1}^{q} [a_i \sin(it) + b_i \cos(it)]\right| \le \sqrt{q}\varepsilon. \tag{5.2.14}$$

Так функции $\sin(it)$, $\cos(it)$ 2π-периодичны, то из (5.2.11) следует

$$\forall t \in \mathbf{R} \ \Big| \ \left|\sum_{i=1}^{q} [a_i \sin(it) + b_i \cos(it)]\right| \le \sqrt{q}\varepsilon. \tag{5.2.15}$$

Так как неравенство (5.2.15) должно выполняться при любом $\varepsilon > 0$, то получаем равенство

$$\forall t \in \mathbf{R} \ \Big| \ \sum_{i=1}^{q} [a_i \sin(it) + b_i \cos(it)] = 0, \tag{5.2.16}$$

которое может выполняться лишь когда все коэффициенты $a_i = 0$, $b_i = 0$, $i = 1, 2, \dots q$. Получено противоречие к предложению о зависимости функций $\varphi^1(x), \varphi^2(x), \dots \varphi^k(x)$.

5.2.4 Базис. Пусть $\{\varphi^i\}_{i \in I} \equiv \Phi$ множество функций $\Phi \subset C^{(1)}(W)$ и $\Phi' \equiv \{\varphi^i\}_{i \in I'} \subset \Phi$, $I' \subset I$ его подмножество.

Определение 5.2.3 *Множество функций Φ' — базис в точке $x_0 \in W$ для множества функций Φ, если для любой функции $\varphi^i \in \Phi$ существует окрестность $U \subset W$ точки x_0, конечный набор функций $\varphi \equiv (\varphi^1, \varphi^2, \dots \varphi^k) \subset \Phi'$ и функция $f \in C^{(1)}(\mathbf{R}^k)$, что*

$$\forall x \in U \ | \ \varphi^i(x) = f(\varphi(x)). \tag{5.2.17}$$

В случае $\Phi = C^{(1)}(W)$ будем говорить просто базис в точке x_0.

По определению функции $dep\,(\Phi, x)$ включение $\Phi' \subset \Phi$ влечет неравенство

$$\forall x \in W \ | \ dep\,(\Phi', x) \le dep\,(\Phi, x). \tag{5.2.18}$$

Непосредственно из определения базиса следует лемма.

Лемма 5.2.3 *Если $\Phi' \subset \Phi$ базис в точке x_0 для семейства Φ, то существует окрестность $U \subset W$ точки x_0 такая, что*

$$\forall x \in U \ | \ dep\,(\Phi', x) \ge dep\,(\Phi, x_0). \tag{5.2.19}$$

Доказательство. Пусть $m = dep\,(\Phi, x_0)$, тогда существуют m функций $\varphi^1(x)$, $\varphi^2(x)$, $\dots \varphi^m(x)$ из семейства Φ, что $dep\,((\varphi^1, \varphi^2, \dots \varphi^m), x_0) = m$. Так как семейство Φ' базис в точке x_0 для семейства Φ, то существует конечный набор функций $(\psi^1, \psi^2, \dots \psi^k) \equiv \psi(x)$ из семейства Φ', окрестность U' точки x_0 и m функций $f^1, f^2, \dots f^m \in C^{(1)}(\mathbf{R}^k)$, что

$$\forall x \in U' \ | \ \varphi^i(x) = f^i(\psi(x)), \ i = 1, 2, \dots m$$

или

$$\forall x \in U' \ \mid \ \varphi(x) = f(\psi(x)). \tag{5.2.20}$$

Дифференцируя соотношение (5.2.20) по x, получаем

$$\forall x \in U' \ \Big| \ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{5.2.21}$$

Так как $dep\,(\varphi, x_0) = m$, то в некоторой окрестности $U \subset U'$ точки x_0 верно $dep\,(\varphi, x) = dep\,(\varphi, x_0) = m$. Согласно свойству ранга матриц из (5.2.21) получаем

$$\forall x \in U \ \mid \ dep\,(\psi, x) \geq m = dep\,(\Phi, x_0)$$

Так как $\psi \subset \Phi'$, то лемма 5.2.3 доказана. $\diamondsuit$

Следствие 5.2.1 *Если $x_0 \notin Sd(\Phi)$ и множество функций $\Phi' \subset \Phi$ базис в точке x_0 для множества функций Φ, то $x_0 \notin Sd(\Phi')$ и существует окрестность $U \subset W$ точки x_0, что*

$$\forall x \in U \ \mid \ dep\,(\Phi', x) = dep\,(\Phi, x). \tag{5.2.22}$$

В самом деле, если $x_0 \notin Sd(\Phi)$, то функция $dep\,(\Phi, x)$ непрерывна и, следовательно, локально постоянна в точке x_0. Тогда (5.2.22) следует из (5.2.18) и (5.2.19).

Справедлив следующий критерий базиса.

Теорема 5.2.1 *Если $x_0 \notin Sd(\Phi)$, то множество функций $\Phi' \subset \Phi$ базис в точке x_0 для множества функций Φ тогда и только тогда, когда*

$$dep\,(\Phi', x_0) = dep\,(\Phi, x_0). \tag{5.2.23}$$

Доказательство. Необходимость следует из леммы 5.2.1 и неравенства (5.2.18).

Докажем *достаточность*. Обозначим $k = dep\,(\Phi, x_0)$. Так как $x_0 \notin Sd(\Phi)$, то существует окрестность $U' \subset W$ точки x_0, в которой функция $dep\,(\Phi, x)$ постоянна и равна k. В силу неравенства (5.2.18) в этой окрестности $dep\,(\Phi', x) \leq k$. Но по лемме 5.1.1 и пункту 5.1.2 существует окрестность $U'' \subset U'$ точки x_0, в которой

$$dep\,(\Phi', x) \geq dep\,(\Phi, x_0) = k.$$

Итак, в окрестности U'' точки x_0

$$\forall x \in U'' \ \mid \ dep\,(\Phi', x) = dep\,(\Phi, x) = k. \tag{5.2.24}$$

Существует k функций $(\varphi^1, \varphi^2, \ldots \varphi^k) \equiv \varphi \subset \Phi'$ такие, что в некоторой окрестности $U_t \subset W$ точки x_0

$$\forall x \in U_t \ \mid \ rank\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = k. \tag{5.2.25}$$

Для произвольной функции $\psi \in \Phi$ в некоторой окрестности $U_f \subset W$ точки x_0 ранг $k+1$ функций φ, ψ равен m и равен рангу k функций φ, поэтому по теоремам о зависимости функций (см. [32], с. 682) существует функция $f \in C^{(1)}(\mathbf{R}^k)$, и окрестность $U \subset U_f$ точки x_0, что

$$\forall x \in U \ \mid \ \psi(x) = f(\varphi(x)). \quad \diamondsuit$$

Рассмотрим случай $\Phi = C^{(1)}(W)$. Тогда функции вида $\varphi^i(x) = x_i$, $i = 1, 2, \dots n$, принадлежат семейству Φ и

$$\forall x \in W \quad | \quad rank\, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = rank\, E_n = n.$$

Итак, в этом случае во всех точках $x \in W$ выполнено

$$dep\,(\Phi, x) = n.$$

Поэтому $dep_*\,(\Phi) = n$ и основное множество $Bd(\Phi) = W$, а исключительное и особое множество пусты $Ed(\Phi) = Sd(\Phi) = \emptyset$.

На основании теоремы 5.2.1 заключаем, что множество функций Φ' образует базис в точке $x_0 \in W$ тогда и только тогда, когда

$$dep\,(\Phi', x_0) = n. \tag{5.2.26}$$

Таким образом, базис в точке состоит не менее, чем из n функций, причём n функций $(\varphi^1, \varphi^2, \dots \varphi^n) \equiv \varphi \subset C^{(1)}(W)$ образуют базис в точке $x_0 \in W$ тогда и только тогда, когда якобиан $|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0)|$ не равен нулю.

§5.3 Алгебра Ли векторных полей

В этом параграфе в пунктах 5.3.1–5.3.3 рассматриваются векторные поля на открытом множестве $W \subset \mathbf{R}^n$ класса $C^{(\infty)}$, т.е. отображения $f : W \to \mathbf{R}^m$, $f \in C^{(\infty)}(W)$.

5.3.1 Скобка Ли векторных полей. В этом пункте полагаем $m = n$. Каждому векторному полю $f \in C_n^{(\infty)}(W)$ сопоставим линейный дифференциальный оператор $D(f) \equiv D_f : C^{(\infty)}(W) \to C^{(\infty)}(W)$, определенный на скалярной функции $\varphi \in C^{(\infty)}(W)$ правилом

$$D_f(\varphi) \equiv \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x). \tag{5.3.1}$$

Итак, мы определили линейное отображение линейного пространства функций $C_n^{(\infty)}(W)$ в линейное пространство линейных операторов $L(C^{(\infty)}(W))$, отображающих векторное пространство скалярных функций $C^{(\infty)}(W)$ в себя. Множество операторов $D(C_n^{(\infty)}(W)) \in L(C^{(\infty)}(W))$ образует подалгебру Ли относительно операции коммутирования операторов. Так как отображение $D : C_n^{(\infty)}(W) \to L(C^{(\infty)}(W))$ инъективно, то переходя к прообразам, получаем структуру алгебры Ли на линейном пространстве векторных полей $C_n^{(\infty)}(W)$ со скобкой Ли

$$[f^1, f^2](x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(f_i^2 \frac{\partial}{\partial x_i} f^1(x) - f_i^1 \frac{\partial}{\partial x_i} f^2(x) \right), \tag{5.3.2}$$

что означает

$$D_{f^2} D_{f^1} - D_{f^1} D_{f^2} = D_{[f^1, f^2]}. \tag{5.3.3}$$

Из определения (5.3.2) скобки Ли на $C_n^{(\infty)}(W)$ следует, что следующие линейные пространства $C_n^{(\infty)}(W)$ являются подалгебрами алгебры Ли.

Пример 5.3.1

Совокупность постоянных векторных полей обозначим через Vc. Это подалгебра Ли с тривиальным коммутатором изоморфная алгебре Ли $\mathbf{R}^n$ с тривиальным коммутатором.

Пример 5.3.2

Линейное пространство Vo однородных полиномов первой степени, т.е. функций $f \in C_n^{(\infty)}(W)$ вида

$$f = Ax, \tag{5.3.4}$$

где $A \in M(n)$ постоянная матрица, зависящая от f. Для коммутатора согласно (5.3.2) при любом $k = 1, 2, \dots n$ получаем

$$[f^1, f^2]_k = \sum_{i,j=1}^{n} \left(A^2_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i} A^1 x - A^1_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i} A^2 x \right)_k = \sum_{i,j=1}^{n} \left(A^2_{ij} x_j A^1_{ki} - A^1_{ij} x_j A^2_{ki} \right) =$$

$$\left(A^1 A^2 x - A^2 A^1 x \right)_k = \left((A^1 A^2 - A^2 A^1) x \right)_k .$$

Таким образом алгебра Ли Vo $\subset C_n^{(\infty)}(W)$ изоморфна алгебре Ли матриц $M(n)$ с коммутатором

$$[A^1, A^2] = A^1 A^2 - A^2 A^1. \tag{5.3.5}$$

Пример 5.3.3

Векторное пространство функций $f \in C_n^{(\infty)}(W)$, не зависящих от части переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{i_k}$ — подалгебра Ли $V(i_1, i_2, \dots i_k) \subset C_n^{(\infty)}(W)$.

5.3.2 Линейные операторы $J : C_m^{(\infty)}(\mathbf{R}^n) \to C_k^{(\infty)}(\mathbf{R}^k)$, множество значений которых — подалгебра Ли. В этом пункте $W = \mathbf{R}^n$. Рассмотрим линейное отображение $J : C_m^{(\infty)}(\mathbf{R}^n) \to C_k^{(\infty)}(\mathbf{R}^k)$, где на векторном пространстве $C_k^{(\infty)}(\mathbf{R}^k)$ введена структура алгебры Ли с коммутатором (5.3.2). Нас интересуют такие операторы J, для которых множество значений является подалгеброй Ли в $C_k^{(\infty)}(\mathbf{R}^k)$. Мы рассмотрим два вида операторов J. Первый, когда операторы J имеют вид

$$J(f) \equiv Af, \tag{5.3.6}$$

где $A \in M(k \times m)$ постоянная матрица, и второй, когда

$$(J(f))_q \equiv \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_{qji} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}. \tag{5.3.7}$$

В первом случае получаем

$$[J(f^1), J(f^2)]_q = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} A_{ij} f_j^2(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{s=1}^{m} A_{qs} f_s^1(x) \right) - \tag{5.3.8}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} A_{ij} f_j^1(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{s=1}^{m} A_{qs} f_s^2(x) \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}A_{ij}A_{qs}\left(f_j^2(x)\frac{\partial}{\partial x_i}f_s^1(x)-f_j^1\frac{\partial}{\partial x_i}f_s^2(x)\right)=$$

$$\sum_{s=1}^{m}A_{qs}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}A_{ij}\left(f_j^2\frac{\partial}{\partial x_i}f_s^1(x)-f_j^1\frac{\partial}{\partial x_i}f_s^2(x)\right)\right)=\left(J(f^3)\right)_q,$$

где

$$f^3=\sum_{i=1}^{k}(Af^2)_i\frac{\partial}{\partial x_i}f^1-\sum_{i=1}^{k}(Af^1)_i\frac{\partial}{x_i}f^2. \tag{5.3.9}$$

Итак, множество значений $J(C_m^{(\infty)}(\mathbf{R}^n))\subset C_k^{(\infty)}(\mathbf{R}^k)$ подалгебра Ли.

Фиксируем теперь матрицу $A\in M(k\times m)$. Определим на линейном пространстве $C_m^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$ коммутатор $[f^1,f^2]_A=f^3$ по формуле (5.3.9) и отображение $J_A:C_m^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)\to C_k^{(\infty)}(\mathbf{R}^k)$ по формуле (5.3.6).

Теорема 5.3.1 *Для любой матрицы $A\in M(k\times m)$ линейное пространство $C_m^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$ с коммутатором $[f^1,f^2]_A$ есть алгебра Ли $C_{m,A}^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$, а отображение $J_A:C_{m,A}^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)\to C_k^{(\infty)}(\mathbf{R}^k)$ морфизм алгебр Ли.*

Доказательство. В силу вышесказанного требует проверки лишь тождество Якоби для $f^1,f^2,f^3\in C_m^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$:

$$[[f^1,f^2]_A,f^3]_A+[[f^2,f^3]_A,f^1]_A+[[f^3,f^1]_A,f^2]_A=0. \tag{5.3.10}$$

Пусть $f\equiv[f^1,f^2]_A$. Согласно определению коммутатора $[\ ,\ ]_A$ имеем

$$[f,f^3]_{A,s}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}A_{ij}\left(f_j^3\frac{\partial}{\partial x_i}f_s-f_j\frac{\partial}{\partial x_i}f_s^3\right)= \tag{5.3.11}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}A_{ij}\left(f_j^3\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{m}A_{pq}\left(f_q^2\frac{\partial}{\partial x_p}f_s^1-f_q^1\frac{\partial}{\partial x_p}f_s^2\right)\right)\right.$$

$$\left.-\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{m}A_{pq}\left(f_q^2\frac{\partial}{\partial x_p}f_j^1-f_q^1\frac{\partial}{\partial x_p}f_j^2\right)\frac{\partial}{\partial x_i}f_s^3\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{m}A_{ij}A_{pq}\left(f_j^3\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_q^2\frac{\partial}{\partial x_p}f_s^1-f_q^1\frac{\partial}{\partial x_p}f_s^2\right)-\left(f_q^2\frac{\partial}{\partial x_p}f_j^1-f_q^1\frac{\partial}{\partial x_p}f_j^2\right)\frac{\partial}{\partial x_i}f_s^3\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{m}A_{ij}A_{pq}\left(f_j^3f_{q;i}^2f_{s;p}^1+f_j^3f_q^2f_{s;p,i}^1-f_j^3f_{j;i}^1f_{s;p}^2-f_j^3f_q^1f_{s;p,i}^2-f_q^2f_{j;p}^1f_{s;i}^3+f_q^1f_{j;p}^2f_{s;i}^3\right).$$

Проводя циклические перестановки индексов, для суммы (5.3.10) получаем выражение

$$\left([[f^1,f^2]_A,f^3]_A+[[f^2,f^3]_A,f^2]_A+[[f^3,f^1]_A,f^2]_A\right)_s= \tag{5.3.12}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{m}A_{ij}A_{pq}\left(f_j^3f_{q;i}^2f_{s;p}^1+f_j^1f_{q;i}^3f_{s;p}^2+f_j^2f_{q;i}^1f_{s;p}^3+f_j^3f_q^2f_{s;p,i}^1+\right.$$

$$f_j^1f_q^3f_{s;p,i}^2+f_j^2f_q^1f_{s;p,i}^3-f_j^3f_{q;i}^1f_{s;p}^2-f_j^1f_{q;i}^2f_{s;p}^3-f_j^2f_{q;i}^3f_{s;p}^1-f_j^3f_q^1f_{s;p,i}^2-f_j^1f_q^2f_{s;p,i}^3-$$

$$\left.f_j^2f_q^3f_{s;p,i}^1-f_q^2f_{j;p}^1f_{s;i}^3-f_q^3f_{j;p}^2f_{s;i}^1-f_q^1f_{j;p}^3f_{s;i}^2+f_q^1f_{j;p}^2f_{s;i}^3+f_q^2f_{j;p}^3f_{s;i}^1+f_q^3f_{j;p}^1f_{s;i}^2\right).$$

Разобьём сумму (5.3.12) на 6 слагаемых, содержащих каждое по 3 монома $S = S_1+S_2-S_3-S_4-S_5+S_6$ в том же порядке, что и в сумме (5.3.12). Преобразуем сумму S_2, изменяя обозначение индексов суммирования и учитывая равенство смешанных производных

$$S_2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{m}A_{ij}A_{pq}\left(f^3_j f^2_q f^1_{s;p,i} + f^1_j f^3_q f^2_{s;p,i} + f^2_j f^1_q f^3_{s;p,i}\right) =$$

$$\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}A_{pq}A_{ij}\left(f^3_q f^2_j f^1_{s;i,p} + f^1_q f^3_j f^2_{s;i,p} + f^2_q f^1_j f^3_{s;i,p}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{m}A_{ij}A_{pq}\left(f^3_j f^1_q f^2_{s;p,i} + f^2_j f^2_q f^3_{s;p,i} + f^1_j f^3_q f^1_{s;p,i}\right) = S_4.$$

Аналогичными преобразованиями убеждаемся, что $S_1 = S_5$ и $S_3 = S_6$. В самом деле

$$S_1 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{m}A_{ij}A_{pq}\left(f^3_j f^2_{q;i} f^1_{s;p} + f^1_j f^3_{q;i} f^2_{s;p} + f^2_j f^1_{q;i} f^3_{s;p}\right) =$$

$$\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}A_{pq}A_{ij}\left(f^3_q f^2_{j;p} f^1_{s;i} + f^1_q f^3_{j;p} f^2_{s;i} + f^2_q f^1_{j;p} f^3_{s;i}\right) = S_5$$

и

$$S_6 = \sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}A_{pq}A_{ij}\left(f^1_j f^2_{q;i} f^3_{s;p} + f^2_j f^3_{q;i} f^2_{s;p} + f^3_j f^1_{q;i} f^1_{s;p}\right) = S_3.$$

Мы убедились, что $S = 0$. $\diamondsuit$

5.3.3 Вычисление коммутатора $[J(f^1), J(f^2)]$ для операторов вида (5.3.7). Мы убедились, что для любой матрицы $A \in M(k\times m)$ множество значений оператора (5.3.6) есть подалгебра Ли алгебры $C^{(\infty)}_k(\mathbf{R}^k)$. Рассмотрим теперь операторы вида (5.3.7) и вычислим коммутатор в этом случае

$$[J(f^1), J(f^2)]_s = \sum_{q=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}b_{qji}\frac{\partial f^2_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_q}\sum_{t=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}b_{stl}\frac{\partial b^1_t}{\partial x_l} - \sum_{q=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}b_{qji}\frac{\partial f^1_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_q}\sum_{t=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}b_{stl}\frac{\partial f^2_t}{\partial x_l} = \tag{5.3.13}$$

$$\sum_{t=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}b_{stl}\left(\sum_{q=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}b_{qji}\left(\frac{\partial f^2_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f^1_t}{\partial x_l \partial x_q} - \frac{\partial f^1_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f^2_t}{\partial x_l \partial x_q}\right)\right).$$

Для того, что бы множество $J(C^{(\infty)}_m(\mathbf{R}^n)) \subset C^{(\infty)}_k(\mathbf{R}^k)$ было подалгеброй Ли, потребуем существования такой функции $f^3 \in C^{(\infty)}_m(\mathbf{R}^n)$, что

$$[J(f^1), J(f^2)]_s = J(f^3)_s = \sum_{t=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}b_{stl}\frac{\partial f^3_t}{\partial x_l}. \tag{5.3.14}$$

Сравнивая (5.3.13), (5.3.14), получаем условие:

$$\forall s \in \overline{1,k} \;\Big|\; \sum_{t=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}b_{stl}\left(\frac{\partial f^3_t}{\partial x_l} - \sum_{q=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}b_{qji}\left(\frac{\partial f^2_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f^1_t}{\partial x_l \partial x_q} - \frac{\partial f^1_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f^2_t}{\partial x_l \partial x_q}\right)\right) = 0. \tag{5.3.15}$$

Сначала рассмотрим условия (5.3.15) для случая $m = 1$, тогда f — скалярная функция. Тогда индексы t, j в соотношении (5.3.15) исчезнут и мы получаем условие

$$\forall s \in \overline{1,k} \;\Big|\; \sum_{l=1}^{n} b_{sl}\left(\frac{\partial f^3}{\partial x_l} - \sum_{q=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} b_{qi}\left(\frac{\partial f^2}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f^1}{\partial x_l \partial x_q} - \frac{\partial f^1}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_l \partial x_q}\right)\right) = 0. \qquad (5.3.16)$$

Далее рассмотрим два подслучая: 1) $rank \parallel b_{sl} \parallel_{kn} = n$, 2) $rank \parallel b_{sl} \parallel_{kn} < n$.

В первом подслучае равенство (5.3.16) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\forall l \in \overline{1,n} \;\Big|\; \frac{\partial f^3}{\partial x_l} = \sum_{q=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} b_{qi}\left(\frac{\partial f^2}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f^1}{\partial x_l \partial x_q} - \frac{\partial f^1}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_l \partial x_q}\right). \qquad (5.3.17)$$

Согласно теореме о критерии потенциальности векторного поля равенства (5.3.17) будут выполнены тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\forall l \in \overline{1,n} \;\; \forall t \in \overline{1,n} \;\Big|\; \frac{\partial}{\partial x_t}\frac{\partial f^3}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial f^3}{\partial x_t}$$

или

$$\forall l \in \overline{1,n} \;\; \forall t \in \overline{1,n} \;\Big|\; \sum_{q=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} b_{qi}\left(\frac{\partial}{\partial x_t}\left(\frac{\partial f^2}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f^1}{\partial x_l \partial x_q} - \frac{\partial f^1}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_l \partial x_q}\right) - \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial f^2}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f^1}{\partial x_t \partial x_q} - \frac{\partial f^1}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_t \partial x_q}\right)\right) = 0$$

или

$$\forall l \in \overline{1,n} \;\; \forall t \in \overline{1,n} \;\Big|\; \sum_{q=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} b_{qi}(f^2_{i,t}f^1_{l,q} - f^1_{i,t}f^2_{l,q} - f^2_{i,l}f^1_{t,q} + f^1_{i,l}f^2_{t,q}) = 0. \qquad (5.3.18)$$

В рассматриваемом первом случае $k \geq n$, поэтому $f_{l,q} \equiv 0$, если один из индексов l или q больше n. Итак, равенства (5.3.18) эквивалентны равенствам

$$\forall l \in \overline{1,n} \;\; \forall t \in \overline{1,n} \;\Big|\; \sum_{q=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{qi}(f^2_{i,t}f^1_{l,q} - f^1_{i,t}f^2_{l,q} - f^2_{i,l}f^1_{t,q} + f^1_{i,l}f^2_{t,q}) = 0. \qquad (5.3.19)$$

Матрицы частных производных $(A^p)_{it} \equiv f^p_{i,t}$, $p \in \overline{1,2}$ произвольные симметричные матрицы, $A^p \in Ms(n)$, $p \in \overline{1,2}$. Пусть $\parallel b_{qi} \parallel_{nn} \equiv B \in M(n)$, тогда равенства (5.3.19) принимают матричный вид

$$A^1 B A^2 - A^2 B A^1 - A^2 B^\top A^1 + A^1 B^\top A^2 = 0. \qquad (5.3.20)$$

Соотношения (5.3.20) перепишем в виде

$$(A^1 B A^2 - A^2 B A^1) = (A^1 B A^2 - A^2 B A^1)^\top \qquad (5.3.21)$$

или в эквивалентной форме

$$(A^1 B A^2 - A^2 B A^1) \in Ms(n). \qquad (5.3.22)$$

Соотношение (5.3.22) должно выполняться при фиксированной матрице $B \in M(n)$ при любых симметричных матрицах $A^1, A^2 \in Ms(n)$. Положим $A^2 = E$ и получим условие

$$\forall A \in Ms(n) \;\mid\; AB - BA \in Ms(n). \qquad (5.3.23)$$

Но тогда $(AB - BA)^\top = B^\top A - AB^\top = AB - BA$ или

$$\forall A \in Ms(n) \ \mid \ A(B + B^\top) = (B + B^\top)A. \tag{5.3.24}$$

Таким образом, $B + B^\top \in Kom(Ms(n)) = \Lambda$ или

$$\Big(B + B^\top = 2\lambda E\Big) \Rightarrow \Big((B - \lambda E) = -(B - \lambda E)^\top\Big).$$

Мы получили, что матрица B должна иметь вид

$$B = \lambda E + D, \quad \lambda \in \mathbf{R}, \quad D \in Ma(n). \tag{5.3.25}$$

Поставим (5.3.25) в (5.3.22), получим

$$\Big(\lambda(A^1A^2 - A^2A^1) + (A^1DA^2 - A^2DA^1)\Big) \in Ms(n).$$

Матрица $(A^1DA^2 - A^2DA^1) \in Ms(n)$, ибо при $D \in Ms(n)$, $A^1 \in Ms(n)$, $A^2 \in Ms(n)$ верно

$$(A^1DA^2 - A^2DA^1)^\top = -A^2DA^1 + A^1DA^2.$$

Матрица $A^1A^2 - A^2A^1 \in Ma(n)$. Поэтому при $n = 1$ получаем, что $B = b \in \mathbf{R}$ произвольное число, а при $n > 1$ верно $B = D$.

Вывод 5.3.1 *Если* $rank \parallel b_{qi} \parallel_{kn} = n$ *и* $n > 1$, *то подмножество* $J(C_k^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)) \subset (C_k^{(\infty)}(\mathbf{R}^k))$, *подалгебра Ли тогда и только тогда, когда квадратная матрица* $\parallel b_{qi} \parallel_{nn}$ *кососимметрична.*

Замечание 5.3.1 *Условия (5.3.17) являются достаточными для выполнения условий (5.3.16), поэтому при* $k \geq n$ *и* $n > 1$, *если матрица* $\parallel b_{qi} \parallel_{nn}$ *кососимметрична, то множество значений оператора* J *— подалгебра Ли в* $C_k^{(\infty)}(\mathbf{R}^k)$.

Перейдем к рассмотрению второго подслучая, когда $r = \operatorname{rank} \parallel b_{sl} \parallel_{kn} < n$. Тогда существуют $n - r$ линейно независимых векторов $v^1, v^2, \ldots, v^{n-r} \in \mathbf{R}^n$ таких, что если $B \equiv \parallel b_{sl} \parallel_{kn}$, то

$$Bv^i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots n - r. \tag{5.3.26}$$

Сформируем матрицу $(v^1, v^2, \ldots v^{n-r}) \equiv V \in M(n \times (n - r))$ ранга $n - r$, для которой в силу (5.3.26) верно $BV = 0$.

Уравнения (5.3.16) выполняются тогда и только тогда, когда существует векторное поле $g \in C_{n-r}^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$, такое что

$$\frac{\partial f^3}{\partial x_l} = \sum_{q=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} b_{qi} \left(\frac{\partial f^2}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f^1}{\partial x_l \partial x_q} - \frac{\partial f^1}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f^2}{\partial x_l \partial x_q} \right) + (Vg(x))_l. \tag{5.3.27}$$

Запишем теперь необходимые и достаточные условия потенциальности векторного поля (5.3.27)

$$\forall l \in \overline{1, n} \ \ \forall t \in \overline{1, n} \ \Big| \ \sum_{q=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} b_{qi} \left({f^2}_{i,t}{f^1}_{l,q} - {f^1}_{i,t}{f^2}_{l,q} - {f^2}_{i,l}{f^1}_{t,q} + {f^1}_{i,l}{f^2}_{t,q} \right) \tag{5.3.28}$$

$$+ \left(V \frac{\partial g}{\partial x_t} \right)_l - \left(V \frac{\partial g}{\partial x_l} \right)_t = 0.$$

Далее рассмотрим два подслучая: 1) $k \geq n$, 2) $k < n$. В случае $k \geq n$ Введём матрицу $\bar{B} \in M(n)$ вида $\bar{B} \equiv \parallel b_{se} \parallel_{nn}$. Она по-прежнему удовлетворяет условию $\bar{B}V = 0$, и запишем соотношения (5.3.28) в матричной форме

$$A^1\bar{B}A^2 - A^2\bar{B}A^1 - A^2\bar{B}^\top A^1 + V\frac{\partial g}{\partial x} - \left(V\frac{\partial g}{\partial x}\right)^\top = 0 \tag{5.3.29}$$

или в эквивалентной форме

$$A^1\bar{B}A^2 - A^2\bar{B}A^1 + V\frac{\partial g}{\partial x} = \left(A^1\bar{B}A^2 - A^2\bar{B}A^1 + V\frac{\partial g}{\partial x}\right)^\top, \tag{5.3.30}$$

что эквивалентно условию

$$\left(A^1\bar{B}A^2 - A^2\bar{B}A^1 + V\frac{\partial g}{\partial x}\right) \in Ms(n). \tag{5.3.31}$$

Мы получаем следующую систему соотношений для определения матрицы $\bar{B}$:

$$\forall A^1 \in Ms(n)\ \forall A^2 \in Ms(n)\ \Big|\ A^1\bar{B}A^2 - A^2\bar{B}A^1 \in Ms(n) + VM((n-r)\times n), \tag{5.3.32}$$

$$\bar{B}V = 0. \tag{5.3.33}$$

Представим матрицу $\bar{B} \in M(n)$ в виде суммы симметричной и кососимметричной матриц $\bar{B} = C + D$, $C \in Ms(n)$, $D \in Ma(n)$, тогда при $A^1 \in Ms(n), A^2 \in Ms(n)$ справедливы принадлежности $A^1DA^2 - A^2DA^1 \in Ms(n)$, $A^1CA^2 - A^2DA^1 \in Ma(n)$. Соотношение (5.3.32) будет выполняться тогда и только тогда, когда

$$\forall A^1 \in Ms(n)\ \forall A^2 \in Ms(n)\ \Big|\ A^1CA^2 - A^2CA^1 \in Ms(n) + VM((n-r)\times n), \tag{5.3.34}$$

$$(C + D)V = 0. \tag{5.3.35}$$

Теперь рассмотрим подслучай $k < n$ и введём матрицу $B^0 \in M(n)$, полученную из матрицы $\parallel b_{qi} \parallel_{kn}$ добавлением снизу $(n-k)$ нулевых строк. Тогда отношение (5.3.28) будет выполняться для любых $f^1, f^2 \in C_m^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$, тогда и только тогда, когда матрица B^0 удовлетворяет отношениям

$$\forall A^1 \in Ms(n)\ \forall A^2 \in Ms(n)\ \Big|\ A^1B^0A^2 - A^2B^0A^1 \in Ms(n) + VM((n-r)\times n), \tag{5.3.36}$$

$$B^0V = 0. \tag{5.3.37}$$

В отличие от соотношений (5.3.32, 5.3.33) здесь $r = \operatorname{rank} B^0$ и матрица $V \in M((n\times(n-r))$ строится по ядру оператора B^0, причём известно, что у матрицы B^0 последние $n-k$ строк нулевые.

5.3.4 Алгебра Ли гамильтоновых векторных полей.

Зафиксируем следующий результат проведенных рассмотрений для случая $m = 1, k = n$.

Лемма 5.3.1 *Если $m = 1, k = n$ и $\parallel b_{qi} \parallel_{nn} \equiv B \in Ma(n)$ то множество значений оператора вида (5.3.7) $J : C^{(\infty)}(\mathbf{R}^n) \to C_n^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$ есть подалгебра Ли.*

В условиях леммы 5.3.1 нетрудно задать на пространстве скалярных функций $C^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$ структуру алгебры Ли, для которой линейный оператор J вида (5.3.7) — морфизм алгебр Ли.

В самом деле, в условиях леммы 5.3.1 формула (5.3.13) принимает вид

$$[J(f^1), J(f^2)]_s = \sum_{l=1}^n b_{sl} \left(\sum_{q=1}^n \sum_{i=1}^n b_{qi} \left(\frac{\partial f^2}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f^1}{\partial x_l \partial x_q} - \frac{\partial f^1}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f^2}{\partial x_l \partial x_q} \right) \right) = \tag{5.3.38}$$

$$\sum_{q=1}^n b_{sl} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^n b_{qi} \frac{\partial f^2}{\partial x_i} \frac{\partial f^1}{\partial x_q} - \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^n b_{qi} \frac{\partial f^1}{\partial x_i} \frac{\partial f^2}{\partial x_q} \right) -$$

$$\sum_{l=1}^n \sum_{lq=1}^n \sum_{i=1}^n b_{sl} b_{qi} \left(\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_i \partial x_l} \frac{\partial f^1}{\partial x_q} - \frac{\partial^2 f^1}{\partial x_i \partial x_l} \frac{\partial f^2}{\partial x_q} \right) =$$

$$\sum_{q=1}^n b_{sl} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\sum_{q=1}^n \sum_{i=1}^n b_{qi} \frac{\partial f^1}{\partial x_q} \frac{\partial f^2}{\partial x_i} - \sum_{q=1}^n \sum_{i=1}^n b_{qi} \frac{\partial f^2}{\partial x_q} \frac{\partial f^1}{\partial x_i} \right) +$$

$$\sum_{i=1}^n b_{sl} \sum_{q=1}^n \sum_{i=1}^n b_{qi} \left(\frac{\partial f^1}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f^2}{\partial x_q \partial x_l} - \frac{\partial f^2}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f^1}{\partial x_q \partial x_l} \right).$$

Из (5.3.38), учитывая кососимметричность матрицы B, получаем

$$[J(f^1), J(f^2)] = J \left(\sum_{q=1}^n \sum_{i=1}^n b_{qi} \frac{\partial f^1}{\partial x_q} \frac{\partial f^2}{\partial x_i} \right). \tag{5.3.39}$$

Если мы сопоставим двум скалярным полям $f^1, f^2 \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$ коммутатор по формуле

$$[f^1, f^2]_B = \sum_{q=1}^n \sum_{i=1}^n b_{qi} \frac{\partial f^1}{\partial x_q} \frac{\partial f^2}{\partial x_i} = \left\langle \left(\frac{\partial f^1}{\partial x} \right)^\top, B \left(\frac{\partial f^2}{\partial x} \right)^\top \right\rangle, \tag{5.3.40}$$

то получим на пространстве $C^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$ структуру алгебры Ли. В самом деле, требует проверки лишь тождество Якоби, которое проверяется непосредственной подстановкой. Оператор $J_B : C^{(\infty)}(\mathbf{R}^n) \to C_n^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$ имеет вид

$$J_B(f) \equiv B \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^\top. \tag{5.3.41}$$

Мы убедились в справедливости следующей теоремы. Пусть $W \subset \mathbf{R}^n$ открытое множество.

Теорема 5.3.2 *Для любой кососимметричной матрицы $B \in Ma(n)$ формула (5.3.40) задаёт скобку Ли на $C^{(\infty)}(W)$, а линейный оператор (5.3.41) задаёт морфизм Ли получившейся алгебры Ли $C^{(\infty)}(W)$ в алгебру Ли $C_n^{(\infty)}(W)$.*

Лемма 5.3.1 и теорема 5.3.2 объясняют выделенную роль симплектической алгебры и гамильтонова формализма, как способа задания подалгебры векторных полей, определяемых по одной скалярной функции.

5.3.5 Подалгебра Ли соленоидальных векторных полей. Сопоставим каждому векторному полю $f \in C_n^{(k)}(W), k \geq 1$, скалярное поле $u \in C^{(k-1)}(W)$ вида

$$u(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x), \tag{5.3.42}$$

которое назовём *дивергенцией* и обозначим $u \equiv \, div\, f$. Оператор $div \, : C_n^{(k)}(W) \to C^{(k-1)}(W)$ линеен. (При $k = \infty$ полагаем $k - 1 \equiv \infty$, при $k = \omega$ полагаем $k - l \equiv \omega$.)

Пусть $k \geq 2$ и $f^i \in C_n^{(k)}(W),\ i \in \overline{1,2}$. Вычислим дивергенцию скобки Ли векторных полей f^1 и f^2. Согласно формуле (5.3.2) имеем:

$$div\,[f^1, f^2] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{n} \left(f_i^2 \frac{\partial f_j^1}{\partial x_i} - f_i^1 \frac{\partial f_j^2}{\partial x_i} \right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i^2}{\partial x_j} \frac{\partial f_j^1}{\partial x_i} + f_i^2 \frac{\partial^2 f_j^1}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial f_i^1}{\partial x_j} \frac{\partial f_j^2}{\partial x_i} - f_i^1 \frac{\partial^2 f_j^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(f_i^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j^1}{\partial x_j} \right) - f_i^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j^2}{\partial x_j} \right) \right).$$

Итак,

$$div\,[f^1, f^2] = \sum_{j=1}^{n} \left(f_i^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(div\, f^1 \right) - f_i^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(div\, f^2 \right) \right). \tag{5.3.43}$$

Векторное поле $f \in C_n^{(k)}(W),\ k \geq 1$, называется *соленоидальным*, если его дивергенция — нулевая функция. Все соленоидальные векторные поля из $C_n^{(k)}(W)$ образуют линейное подпространство в $C_n^{(k)}(W)$, которое мы обозначим $Sol_n^{(k)}(W)$. Более того, из формулы (5.3.43) следует.

Лемма 5.3.2 *Множество $Sol_n^{(\infty)}(W)$ есть подалгебра Ли алгебры Ли $C_n^{(\infty)}(W)$.*

В теореме 5.3.2 мы установили, что для любой матрицы $B \in Ma(n)$ множество $J_B(C^\infty(W)) \subset C_n^{(\infty)}(W)$, есть подалгебра Ли алгебры Ли векторных полей $C_n^{(\infty)}(W)$. Справедливо также включение

$$J_B(C^\infty(W)) \subset Sol_n^{(\infty)}(W), \tag{5.3.44}$$

вытекающее из следующей леммы.

Лемма 5.3.3 *Для любой кососимметричной матрицы $B \in Ma(n)$ и любой функции $v \in C^{(k)}(W),\ k \geq 2$ верно*

$$div\, \left(B \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^\top \right)(x) = 0. \tag{5.3.45}$$

Доказательство. Введём оператор-столбец

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\top \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Тогда $div\, f \equiv \langle \nabla, f \rangle$. Для $B \in Ma(n),\ v \in C^{(k)}(W)$ полагаем

$$f \equiv J_B(v) = B\nabla v.$$

В таком случае $div\, f \equiv \langle \nabla, B\nabla v \rangle = \langle \nabla, B\nabla \rangle v = \langle B^\top \nabla, \nabla \rangle v = -\langle B\nabla, \nabla \rangle v = -\langle \nabla, B\nabla \rangle v = -\, div\, f$.

Отсюда $div\, f = 0$. ♢

§5.4 Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с одной неизвестной функцией и локальные инварианты

В этом параграфе W открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$, $u(x)$ — скалярная функция, $x \in \mathbf{R}^n$. Рассматриваются скалярные функции на W класса $C^{(1)}(W)$ и здесь $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial u}{\partial x_n})$ записывается как строка частных производных.

5.4.1 Линейное уравнение в частных производных. Рассмотрим линейное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) f(x) = 0, \tag{5.4.1}$$

где $f(x) \in C_n(W),\ u(x) \in C^{(1)}(W)$ и локализуем понятие его решения следующим образом.

Определение 5.4.1 *Множество $R(f, x^0)$, где $f \in C_n(W),\ x^0 \in W$, состоит из всех числовых функций $u(x)$, для каждой из которых существует открытая окрестность $Q_u \subset W$ точки x^0, в которой функция $u(x)$ определена, непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (5.4.1).*

Множество решений уравнения (5.4.1) обладает следующим свойством.

Свойство 5.4.1 *Если функции $u^1(x), u^2(x), \dots u^k(x) \in C^{(1)}(W)$ удовлетворяют уравнению (5.4.1) на множестве W и $\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^k)$, то сложная функция $\varphi(u^1(x), u^2(x), \dots u^k(x))$ также удовлетворяет уравнению (5.4.1) на множестве W.*

В самом деле, если $\vec{u} \equiv \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^k \end{pmatrix}$, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} f = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{u}} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} f = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{u}} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} f \right) = 0.$$

Таким образом, множество решений $R(f, x^0)$ функционально замкнуто. Рассмотрим вопрос об индексе зависимости $\operatorname{dep}(R(f, x^0), x^0)$. Если $f(x_0) \neq 0$, то

$\operatorname{dep}(R(f,x^0),x^0) < n$, ибо для любого конечного набора решений $\vec{u} \equiv \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^k \end{pmatrix} \in R(b,x^0)$ в которой окрестности точки x^0 верно

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}(x) f(x) = 0. \qquad (5.4.2)$$

Таким образом, $\operatorname{dep}(R(f,x^0),x^0)$ может принимать при этом наибольшее возможное значение $(n-1)$. Это значение действительно достигается, т. е. если $f \in C_n^{(1)}(W)$ и $f(x^0) \neq 0$, то $\operatorname{dep}(R(f,x^0),x^0) = n-1$ (см. теорему 1 данного параграфа). Таким образом, если $f(x^0) \neq 0$, то существуют $(n-1)$ решений $\vec{u} \equiv \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^{n-1} \end{pmatrix} \subset R(f,x^0)$, $\operatorname{dep}(\vec{u},x^0) = n-1$, образующих базис в точке x^0 для пространства решений $R(f,x^0)$. Таким образом, каждое решение $u \in R(f,x^0)$ в некоторой окрестности точки x^0 представлено в виде суперпозиции $u(x) = \varphi(u^1(x), u^2(x), \dots\ u^{n-1}(x))$, где $\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^{n-1})$.

5.4.2 Система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с одной неизвестной функцией. Рассмотрим теперь систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с одной неизвестной функцией. Пусть $\{f^i\}_{i\in I} \equiv F \subset C_n(W)$ некоторое множество непрерывных векторных полей. Рассмотрим систему уравнений с одной неизвестной функцией $u(x) \in C^{(1)}(W)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) F(x) = 0. \qquad (5.4.3)$$

Аналогично определению (5.4.2) обозначим через $R(F,x^0)$ множество функций $u(x)$, каждая из которых определена и непрерывно дифференцируема в которой окрестности $Q_u \subset W$ точки $x^0 \in W$ и удовлетворяет в этой окрестности соотношению (5.4.3). В силу свойства 5.4.1, если функции $u^1(x), u^2(x), \dots\ u^k(x) \in C^{(1)}(W)$ и удовлетворяют на множестве W соотношению (5.4.3), то для любой функции $\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^k)$ сложная функция $\varphi(u^1(x), u^2(x), \dots\ u^k(x))$ также решение системы (5.4.3) на множестве W.

Для любого конечного семейства решений $\vec{u}(x) \equiv \begin{pmatrix} u^1(x) \\ u^2(x) \\ \vdots \\ u^k(x) \end{pmatrix}$ уравнения (5.4.3) на открытом подмножестве $Q \subset W$ верно соотношение

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}(x) F(x) = 0,$$

откуда следует, что

$$\operatorname{rank} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}(x) \le n - \operatorname{rank} F(x). \qquad (5.4.4)$$

Потому

$$\forall x^0 \in W \mid \operatorname{dep}(R(F,x^0),x^0) \le n - \operatorname{rank} F(x^0). \qquad (5.4.5)$$

Возникает вопрос о справедливости равенства

$$\operatorname{dep}(R(F,x^0),x^0) = n - \operatorname{rank} F(x^0). \qquad (5.4.6)$$

В п. 5.4.1 мы убедились, что если множество $F(x)$ состоит лишь из одного векторного поля $f(x)$ соотношение (5.4.6) верно во всех точках непрерывности функции $\operatorname{rank} f(x)$. Однако, для двух и более функций $f(x)$ соотношение (5.4.6), вообще говоря, неверно по следующей причине. Если $f^1, f^2 \in C_n^{(1)}(W)$, $u \in C^{(2)}(W)$ и выполнены уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) f^i(x) = 0 \qquad (5.4.7)$$

при $i = 1.2$, то выполнено и уравнение (5.4.7) при $i = 3$, где

$$f^3 \equiv \sum_{j=1}^{n} \left(f_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} f^1 - f_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} f^2 \right) \equiv [f^1, f^2]. \qquad (5.4.8)$$

Оказывается, это единственная причина, мешающая выполнению равенства (5.4.6). Это следует из теоремы Фробениуса (см. [62], с. 141 и [72], с. 145), которую мы приводим в следующей форме.

Теорема 5.4.1 *Пусть семейство функций $F \subset C_n^{(m)}(W)$, $m = 1, 2, \ldots \infty, \omega$, — подалгебра Ли с коммутатором (5.4.8) и точка $x^0 \in W \backslash St(F)$, тогда существует окрестность $Q \subset W$ точки x^0 и $k \equiv n - \operatorname{rank} F(x^0)$ функций $u^1, u^2, \ldots u^k \in C^{(m)}(Q)$, что $\operatorname{dep}((u^1, u^2, \ldots u^k), x^0) = k$ и функции $u^1(x), u^2(x), \ldots u^k(x)$ образуют базис в точке x^0 множество функций $R(F, x^0)$.*

Здесь $C^{(\infty)}(W)$ обозначает пространство бесконечно дифференцируемых функций, а $C^{(\omega)}(W)$ — пространство вещественно-аналитических функций.

В случае множества бесконечно дифференцируемых векторных полей $F \subset C_n^{(\infty)}(W)$ по множеству F строится алгебра Ли $\operatorname{ali}(F)$, порождённой им, вычисляется $\operatorname{rank} \operatorname{ali}(F(x^0))$ и для точки $x^0 \in W \setminus St(\operatorname{ali}(F))$ существует базис в точке x^0 для множества $R(F, x^0)$ функций класса $C^{(\infty)}(Q)$ с $\operatorname{dep}((x^1, x^2, \ldots x^k), x^0) = k$. Причём, если все функции из F вещественно аналитичны, то и функции $u^1, u^2, \ldots u^k$ вещественно аналитичны.

Пример 5.4.1

Пусть $I = \{0, 1\}$, $f^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$, $f^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_1^{n-1} \end{pmatrix}$. Вычисляем коммутаторы

$$f^2 \equiv [f^1, f^0] = \sum_{j=1}^{n} f_j^0 \frac{\partial}{\partial x_j} f^1 = \frac{\partial}{\partial x_1} f^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_1 \\ \vdots \\ n x_1^{n-2} \end{pmatrix}, \qquad (5.4.9)$$

$$f^3 \equiv [f^2, f^0] = \frac{\partial}{\partial x_1} f^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2! \\ \vdots \\ n(n-1)x_1^{n-3} \end{pmatrix}, \tag{5.4.10}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^n \equiv [f^{n-1}, f^0] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix}. \tag{5.4.11}$$

Получаем, что $\det(f^1, f^2, \ldots, f^n) = 1 \cdot 1 \cdot 2! \ldots (n-1)! \neq 0$. В данном примере $\operatorname{rank} F(x) = 2$ при $x_1 \neq 0$, но $\operatorname{rank}\operatorname{ali} F(x) = n$. Поэтому множество решений $R(F, x^0)$ состоит только из констант, $\operatorname{dep}(R(F, x^0), x^0) = 0 \neq n - 2$ при $n > 2$.

5.4.3 Локальный базис инвариантов для системы линейных векторных полей. В этом пункте $W = \mathbf{R}^n$ и рассматриваются линейные векторные поля $f^i(x) = A^i x,\ i \in I$, где $A \in M(n)$. В этом случае (§5.3, пример 5.3.2)

$$\operatorname{ali} F(x) = \left(\operatorname{ali}\{A^i\}_{i\in I}\right) x, \tag{5.4.12}$$

где $L \equiv \operatorname{ali}\{A^i\}_{i\in I} \subset M(n)$ подалгебра Ли матриц, поэтому в обозначениях п. 4.6.1 имеем

$$\operatorname{rank}\operatorname{ali} F(x) = r(L, x). \tag{5.4.13}$$

Рассмотрим теперь представление §4.4 группы невырожденных матриц на линейном пространстве $\mathbf{R}^n$. Пусть $S \subset \operatorname{GL}(n)$ подгруппа Ли группы $\operatorname{GL}(n)$. Согласно лемме 4.6.7 функция $u(x)$, определённая и непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности точки $x^0 \in \mathbf{R}^n$, является локальным инвариантом в точке x^0 тогда и только тогда, когда является решением системы (5.4.3) с $F(x) = l(S)x$. Поскольку $l(S) \subset M(n)$ алгебра Ли и $l(S)x$ также подалгебра Ли в $C_n^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$, то по теореме 5.4.1 в точке $x^0 \notin Ss(l(S))$ существует минимальный локальный базис инвариантов из $k = n - r(l(S), x^0)$ аналитических функций $u^1(x), u^2(x), \ldots u^k(x)$ с $\operatorname{dep}((u^1, u^2 \ldots u^k), x^0) = k$.

5.4.4 Связь решений уравнений $\frac{\partial u}{\partial x}(x) f^i(x) = 0,\ i \in \overline{1,2}$ и уравнения $\frac{\partial u}{\partial x}(x)[f^1, f^2](x) = 0$. Вернемся к вопросу пункта 5.4.2 Пусть функция $u(x)$ является решением уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) f^1(x) = 0, \tag{5.4.14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) f^2(x) = 0. \tag{5.4.15}$$

Будет ли она решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x)[f^1, f^2](x) = 0. \tag{5.4.16}$$

В п. 5.4.2 мы установили, что это верно, если $f^1 \in C_n^{(1)}(W), f^2 \in C_n^{(1)}(W), u \in C^{(2)}(W)$. Мы покажем в этом пункте, что это же утверждение останется верным, если усилить требования гладкости на функции $f^1(x), f^2(x)$ и ослабить требования гладкости на $u(x)$.

Проведём некоторые предварительные построения. Через $S(W)$ обозначим класс непрерывных финитных числовых функций $\varphi(x)$ на открытом множестве $W \subset \mathbf{R}^n$, т.е. отличных от нуля лишь на некотором компакте $K_\varphi \subset W$. Наряду с дифференциальным оператором $D_f(u)(x) \equiv \sum_{i=1}^n f_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}$ введём сопряженный оператор $D_f^*(u)(x) \equiv -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_i(x)u(x)\right)$. Если $f \in C_n^{(1)}(W)$, то операторы D_f и D_f^* определены на функциях $u \in C^{(1)}(W)$ и переводит их в непрерывные функции.

Введём двойственность

$$\langle \varphi, \psi \rangle \equiv \int\limits_W \varphi(x)\psi(x)\,dx, \tag{5.4.17}$$

определенную, если функции φ, ψ непрерывны и одна из них финитна.

Утверждение 5.4.1 *Если $\varphi \in C^{(1)}(W), \psi \in C^{(1)}(W), f \in C_n^{(1)}(W)$ и одна из функций φ или ψ финитна, то справедливо равенство*

$$\langle D_f\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, D_f^*\psi \rangle. \tag{5.4.18}$$

Доказательство. Согласно правилу дифференцирования произведения при $i \in \overline{1,n}$ верно

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left((\psi f_i)\,\varphi\right) = \varphi\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi f_i\right) + \psi f_i\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \tag{5.4.19}$$

Так как одна из функций φ или ψ финитна, то после интегрирования по области W получаем

$$0 = \left\langle f_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \psi\right\rangle - \left\langle \varphi, -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_i\psi\right)\right\rangle. \tag{5.4.20}$$

Суммируя равенство (5.4.20) по $i \in \overline{1,n}$, получаем равенство (5.4.18). $\diamondsuit$

В п. 5.4.2 мы установили истинность следующего результата.

Утверждение 5.4.2 *Если $f^1 \in C_n^{(1)}(W),\ f^2 \in C_n^{(1)}(W),\ u \in C^{(2)}(W)$, то*

$$D_{[f^1,f^2]}u = D_{f^2}D_{f^1}u - D_{f^1}D_{f^2}u. \tag{5.4.21}$$

Соответственно для сопряжённого оператора имеем

Утверждение 5.4.3 *Если $f^1 \in C_n^{(2)}(W),\ f^2 \in C_n^{(2)}(W),\ u \in C^{(2)}(W)$, то*

$$D^*_{[f^1,f^2]}U = D^*_{f^1}D^*_{f^2}u - D^*_{f^2}D^*_{f^1}u. \tag{5.4.22}$$

Доказательство. Пусть $\psi \in S(W)\bigcap C^{(2)}(W)$, тогда по утверждению 5.4.2

$$D_{[f^1,f^2]}\psi = D_{f^2}D_{f^1}\psi - D_{f^1}D_{f^2}\psi. \tag{5.4.23}$$

Так как $f^1 \in C_n^{(2)}(W)$ и $f^2 \in C_n^{(2)}(W)$, то $[f^1, f^2] \in C_n^{(1)}(W)$. Согласно утверждению 5.4.1 верно равенство

$$\langle D_{[f^1,f^2]}\psi, u\rangle = \langle \psi, D^*_{[f^1,f^2]}u\rangle. \tag{5.4.24}$$

Применяя утверждение 5.4.1 повторно, получаем

$$\langle D_{f^2} D_{f^1}\psi, u\rangle = \langle D_{f^1}\psi, D^*_{f^2}u\rangle = \langle \psi, D^*_{f^1}D^*_{f^2}u\rangle \tag{5.4.25}$$

и

$$\langle D_{f^1} D_{f^2}\psi, u\rangle = \langle D_{f^1}\psi, D^*_{f^2}u\rangle = \langle \psi, D^*_{f^2}D^*_{f^1}u\rangle. \tag{5.4.26}$$

Из соотношений (5.4.23 - 5.4.26) мы получили

$$\forall \psi \in S(W)\cap C^{(2)}(W) \ \mid \ \langle \psi, (D^*_{[f^1,f^2]} - (D^*_{f^1}D^*_{f^2} - D^*_{f^2}D^*_{f^1}))u\rangle = 0. \tag{5.4.27}$$

Так как функция $(D^*_{f^1}D^*_{f^2} - D^*_{f^2}D^*_{f^1}))u$ непрерывна, то из (5.4.27) вытекает справедливость утверждения 5.4.3. $\diamondsuit$

Перейдем теперь к основному вопросу о связи решений уравнений (5.4.14, 5.4.15) и (5.4.16).

Лемма 5.4.1 *Если $f^1 \in C^{(2)}_n(W)$, $f^2 \in C^{(2)}_n(W)$, $u \in C^{(1)}(W)$ и выполнены в области W уравнения (5.4.14, 5.4.15), то выполнено и уравнение (5.4.16).*

Доказательство. Пусть $\psi \in S(W)\cap C^{(2)}(W)$, тогда по утверждению (5.4.3)

$$D^*_{[f^1,f^2]}\psi = D^*_{f^1}D^*_{f^2}\psi - D^*_{f^2}D^*_{f^1}\psi.$$

Отсюда

$$\langle u, D^*_{[f^1,f^2]}\psi\rangle = \langle u, D^*_{f^1}D^*_{f^2}\psi\rangle - \langle u, D^*_{f^2}D^*_{f^1}\psi\rangle.$$

По утверждению 5.4.1 тогда

$$\langle D_{[f^1,f^2]}u, \psi\rangle = \langle D_{f^1}u, D^*_{f^2}\psi\rangle - \langle D_{f^2}u, D^*_{f^1}\psi\rangle.$$

По условию леммы $D_{f^1}u = 0$ и $D_{f^2}u = 0$, поэтому

$$\forall \psi \in S(W)\cap C^{(2)}(W) \ \mid \ \langle D_{[f^1,f^2]}u, \psi\rangle = 0. \tag{5.4.28}$$

Функция $D_{[f^1,f^2]}u \in C(W)$, поэтому из соотношения (5.4.28) следует, что $D_{[f^1,f^2]}u = 0$.$\diamondsuit$

5.4.5 Строение алгебры Ли $\operatorname{ali}(F)$, **порождается подмножеством** $F \subset \mathcal{A}\ell$**.** В этом пункте рассмотрим чисто алгебраический вопрос о строении алгебры Ли $\operatorname{ali}(F)$, порождается подмножеством $F \subset \mathcal{A}\ell$, где $\mathcal{A}\ell$ — абстрактная алгебра Ли под полем $\mathbf{R}$. Операцию коммутирования в алгебре Ли $\mathcal{A}\ell$ обозначаем $[a,b]$ для элементов $a, b \in \mathcal{A}\ell$.

Для произвольного непустого подмножества $F \subset \mathcal{A}\ell$ через $\operatorname{ali}(F)$ мы обозначили алгебру Ли, порождённую множеством F. $\operatorname{ali}(F)$ есть наименьшая подалгебра Ли алгебры $\mathcal{A}\ell$ содержащая множество F или пересечение всех подалгебр Ли в алгебре Ли $\mathcal{A}\ell$ содержащих множество F.

Для построения алгебры Ли $\operatorname{ali}(F)$ введём последовательность подмножеств $\{F^n\}_{n=1}^{\infty}$ алгебры Ли вида

$$F^1 \equiv F, F^2 \equiv [F^1, F^1] \cup F^1, \dots \ F^{n+1} \equiv [F^n, F^n] \cup F^n, \dots \tag{5.4.29}$$

Положим, $F^{\infty} \equiv \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} F^n$. По построению последовательность множеств $\{F^n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно возрастает

$$F^1 \subset F^2 \subset \dots \subset F^n \subset F^{n+1} \subset \dots \tag{5.4.30}$$

и

$$\forall n \in \mathbf{N} \ | \ [F^n, F^n] \subset F^{n+1}. \tag{5.4.31}$$

Кроме того, по построению

$$[F^\infty, F^\infty] \subset F^\infty. \tag{5.4.32}$$

В самом деле, если $a \in F^\infty$, и $b \in F^\infty$, то найдутся номера n, m, что $a \in F^n, b \in F^m$. Тогда при $k = max\{n, m\}$ имеем $a \in F^k, b \in F^k$ и $[a, b] \in F^{k+1} \subset F^\infty$.

Операция перехода от множества F ко множествам $F^1, F^2, \dots F^n, \dots F^\infty$ монотонна, т.е. если $F \subset G$, то $F^1 \subset G^1, F^2 \subset G^2, \dots F^n \subset G^n, \dots F^\infty \subset G^\infty$.

Лемма 5.4.2 *Для любого непустого множества $F \subset \mathcal{A}\ell$ верно*

$$\mathrm{ali}\,(F) = lin(F^\infty). \tag{5.4.33}$$

Доказательство. Так как $\mathrm{ali}\,(F) \supset F$, то

$$\mathrm{ali}\,(F) = (\,\mathrm{ali}\,(F))^\infty \supset F^\infty$$

и

$$\mathrm{ali}\,(F) = lin(\,\mathrm{ali}\,(F)) \supset lin(F^\infty). \tag{5.4.34}$$

Проверяем, что множество $lin(F^\infty)$ подалгебра Ли. Так как линейная оболочка множества есть линейное подпространство, то требуется лишь проверить, что если $u \in lin(F^\infty)$ и $b \in lin(F^\infty)$, то $[a, b] \in lin(F^\infty)$. В самом деле, $a = \sum_{i \in L} \lambda_i a_i,\ b = \sum_{i \in N} \lambda_j b_j$, где K, N — конечные множества индексов и при любом $i \in K$ верно $\lambda_i \in \mathbf{R},\ a_i \in F^\infty$ и при любом $j \in N$ верно $\mu_j \in \mathbf{R},\ b_j \in F^\infty$. В таком случае

$$[a, b] = [\sum_{i \in K} \lambda_i a_i, \sum_{j \in N} \mu_j b_j] = \sum_{(i,j) \in K \times N} \lambda_i \mu_j [a_i, b_j].$$

Но в силу (5.4.32) при $(i, j) \in (K \times N)$ имеем $[a_i, b_j] \in F^\infty$, поэтому $[a, b] \in lin(F^\infty)$. $\diamondsuit$

5.4.6 Системы линейных однородных уравнений в частных производных с одной неизвестной функцией и алгебры Ли.

Введём на векторном пространстве бесконечно дифференцируемых на открытом множестве W вектор-функций $C_n^{(\infty)}(W)$ структуру алгебры Ли с помощью коммутатора векторных полей (5.4.8). Обозначим эту алгебру Ли $ALC_n^{(\infty)}(W)$.

Для произвольного непустого подмножества $F \subset ALC_n^{(\infty)}(W)$ рассмотрим в области W систему линейных однородных уравнений в частных производных (5.4.3) для одной неизвестной функции $u \in C^{(1)}(W)$.

Теорема 5.4.2 *Если функция $u \in C^{(1)}(W)$ есть решение системы (5.4.3) на множестве W, то функция u будет и решением системы*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x)\,\mathrm{ali}\,(F)(x) = 0 \tag{5.4.35}$$

на множестве W.

Доказательство. Согласно п. 5.4.5 определим множества $F_1 \equiv F$, F^2, $\ldots$ F^n, $\ldots F^{(\infty)}$ в алгебре Ли $ALC_n^{(\infty)}(W)$. По условию теоремы

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x)F^1(x) = 0. \tag{5.4.36}$$

Применяя лемму 5.4.1, получим по индукции

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x)F^2(x) = 0, \ldots \frac{\partial u}{\partial x}(x)F^n(x) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(x)F^{(n+1)}(x) = 0, \ldots \frac{\partial u}{\partial x}(x)F^{(\infty)}(x) = 0. \tag{5.4.37}$$

Отсюда и

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x)lin(F^{\infty})(x) = 0. \tag{5.4.38}$$

Но по лемме 5.4.2 верно $lin(F^{\infty}) = \mathrm{ali}\,(F)$. $\diamondsuit$

Следствие 5.4.1 *Если $F \subset ALC_n^{(\infty)}(W)$, $G \in ALC_n^{(\infty)}(W)$ и $\mathrm{ali}\,(F) = \mathrm{ali}\,(G)$, то функция $u \in C^{(1)}(W)$ будет на открытом множестве W решением системы*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x)F(x) = 0 \tag{5.4.39}$$

тогда и только тогда, когда она решение системы

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x)G(x) = 0. \tag{5.4.40}$$

Глава 6

Инварианты линейных представлений на векторном пространстве матриц

§ 6.1. Скалярное произведение матриц. Дифференцирование скалярной функции от матрицы.

§ 6.2. Представление подобия группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на векторном пространстве $M(n)$

§ 6.3. Инварианты левого и правого представления группы $\Omega(B)$ на векторном пространстве $M(n \times m)$

§ 6.4. Двустороннее представление группы $\Omega^{\top}(B_1) \times \Omega(B_2)$ на векторном пространстве $M(n \times m)$

В данной главе находится общий вид инвариантной функции, определённой на линейном пространстве $M(n \times m)$ прямоугольных матриц. Для решения этой задачи в § 6.1 вводится скалярное произведение прямоугольных матриц и исследуются его свойства. В это же параграфе определяется понятие производной для скалярной функции от матрицы и исследуются его свойства.

В § 6.2 даётся общее описание скалярного отображения $f : M(n) \to \mathbf{R}$, инвариантного относительно группы преобразований $T_G : M(n) \to M(n)$ множества квадратных матриц $M(n)$ вида $T_G(A) \equiv GAG^{-1}$ для любого $A \in M(n)$. Найден базис из n инвариантов $t_i : M(n) \to \mathbf{R}$, $i \in \overline{1,n}$ вида $t_i(A) = \mathrm{tr}(A^i)$.

В § 6.3 рассматривается левое представление группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на векторном пространстве прямоугольных матриц $M(n \times m)$ вида $Tl_G : M(n \times m) \to M(n \times m)$, $G \in \mathrm{GL}\,(n)$, определённое правилом $Tl_G(A) \equiv GA$ для любого $A \in M(n \times m)$ и аналогичное правое представление $Tr_G : M(n \times m) \to M(n \times m)$, $G \in \mathrm{GL}\,(m)$, определённое правилом $Tl_G(A) \equiv AG$ для любого $A \in M(n \times m)$. Описан класс левоинвариантных отображений $f : M(n \times m) \to \mathbf{R}$, таких что $f(GA) = f(A)$ при любом

$A \in M(n \times m)$ и любом $G \in \Omega(B_1)$, $B_1 \in \mathrm{GL}\,(n)$ и аналогичный класс правоинвариантных отображений, таких что $f(AG) = f(A)$ при любом $A \in M(n \times m)$ и любом $G \in \Omega(B_2)$, $B_2 \in \mathrm{GL}\,(m)$.

В § 6.4 описаны двусторонне инвариантные скалярные отображения $f : M(n \times m) \to \mathbf{R}$, такие что $f(G_1 A G_2) = f(A)$ для любого $A \in M(n \times m)$ и любого $G_1 \in \Omega(B_1)$, $B_1 \in \mathrm{GL}\,(n)$ и любого $G_2 \in \Omega(B_2)$, $B_2 \in \mathrm{GL}\,(m)$.

§6.1 Скалярное произведение на векторном пространстве $M(n \times m)$. Дифференцирование функции от матрицы.

В настоящем параграфе вводятся две математические конструкции, используемые далее для исследования функций от матриц: скалярное произведение прямоугольных матриц и производная скалярной функции от матрицы по матричному аргументу. Далее $M(n \times m)$ обозначает линейное пространство матриц $A = ||a_{ij}||$ из n строк и m столбцов.

6.1.1 Скалярное произведение матриц. Рассматривая элементы a_{ij} матрицы $A \in M(n \times m)$ как координаты матрицы в линейном пространстве матриц $M(n \times m)$, мы устанавливаем естественный изоморфизм линейного пространства матриц $M(n \times m)$ и линейного пространства $\mathbf{R}^{nm}$. Введём на линейном пространстве матриц $M(n \times m)$ скалярное произведение двух матриц $A \in M(n \times m)$ и $B \in M(n \times m)$ по формуле

$$\langle A, B\rangle \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{ij}. \tag{6.1.1}$$

Наряду с выполнением обычных аксиом скалярного произведения в евклидовом пространстве скалярное произведение (6.1.1) обладает также следующими свойствами:

$$\langle A^\top, B^\top\rangle = \langle A, B\rangle, \tag{6.1.2}$$

если же $A \in M(n \times m)$, $B \in M(n \times k)$, $C \in M(k \times m)$, то

$$\langle A, BC\rangle = \langle B^\top A,\, C\rangle, \tag{6.1.3}$$

$$\langle A,\, BC\rangle = \langle AC^\top,\, B\rangle. \tag{6.1.4}$$

В самом деле равенство (6.1.2) вытекает из соотношений

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ji} b_{ji} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^\top b_{ij}^\top,$$

равенство (6.1.3) — из соотношений

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \sum_{l=1}^{k} b_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{li}^\top a_{ij}\right) c_{lj},$$

равенство (6.1.4) — из соотношений

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \sum_{l=1}^{k} b_{il} c_{lj} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} c_{jl}^\top\right) b_{il}.$$

Пусть $E_n \in M(n)$ единичная матрица. Скалярное произведение (6.1.1) обладает также следующим свойством.
Если $A \in M(n \times m)$, $B \in M(m \times n)$, то

$$\langle E_n,\ AB\rangle = \langle E_m,\ BA\rangle. \tag{6.1.5}$$

В самом деле по свойствам (6.1.3, 6.1.4)

$$\langle E_n,\ AB\rangle = \langle E_n B^\top,\ A\rangle = \langle B^\top,\ A\rangle = \langle B^\top E_m,\ A\rangle = \langle E_m,\ BA\rangle.$$

6.1.2 Дифференциал скалярной функции от матрицы. Рассмотрим заданную в некоторой окрестности точки $A \in M(n \times m)$ числовую функцию $f(A)$, дифференцируемую в точке A, тогда её дифференциал может быть записан в виде

$$df = \langle D,\ dA\rangle, \tag{6.1.6}$$

где $D \in M(n \times m)$. Мы будем записывать дифференциал в виде

$$df = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)^\top,\ dA\right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial A},\ dA^\top\right\rangle \tag{6.1.7}$$

и называть матрицу $\frac{\partial f}{\partial A}(A) \in M^\top(n \times m)$ производной функции $f(A)$ в точке $A \in M(n \times m)$.

Чтобы продемонстрировать полезность введенного определения, рассмотрим следующую специальную замену переменных $A \to BA$, где $B \in M(k \times n)$ постоянная матрица. Для функции $f(BA)$ получаем

$$df(BA) = \left\langle \left(\frac{\partial f(Q)}{\partial Q}\Big|_{Q=BA}\right)^\top,\ d(BA)\right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial f(Q)}{\partial Q}\Big|_{Q=BA}\right)^\top,\ BdA\right\rangle =$$
$$= \left\langle B^\top\left(\frac{\partial f(Q)}{\partial Q}\Big|_{Q=BA}\right)^\top,\ dA\right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial f(Q)}{\partial Q}B\right)^\top\Big|_{Q=BA},\ dA\right\rangle,$$

т.е.

$$\frac{\partial f(BA)}{\partial A} = \frac{\partial f(Q)}{\partial Q}\Big|_{Q=BA} B. \tag{6.1.8}$$

Аналогично при умножении аргумента справа на постоянную матрицу $B \in M(m \times k)$ получаем для производной

$$\frac{\partial f(AB)}{\partial A} = B\frac{\partial f(Q)}{\partial Q}\Big|_{Q=AB}. \tag{6.1.9}$$

Рассмотрим следующие три примера, поясняющие естественность введенного определения производной.

Пример 6.1.1

Пусть $A \in M(n \times 1)$, т.е. A это вектор-столбец $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Положим $f(A) \equiv \langle C,\ A\rangle$, где $C \in M(n \times 1)$ постоянный вектор-столбец. Согласно определению (6.1.7) в данном случае $\frac{\partial f}{\partial A} = C^\top = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — вектор-строка. Итак, в данном формализме получается, что производная скалярной функции по векторному аргументу есть ковектор.

Пример 6.1.2

Пусть $n = m$, $M(n \times m) = M(n)$, пусть $E \in M(n)$ единичная матрица и

$$f_i(A) \equiv \langle E,\ A^i \rangle, \qquad i \in \mathbf{N}. \tag{6.1.10}$$

Вычисляем дифференциал

$$df_i(A) = \langle E,\ d(A^i) \rangle = \Big\langle E,\ dA(A^{i-1}) + AdA(A^{i-2}) + A^2 dAA^{i-3} + \dots + A^{i-1}dA \Big\rangle .$$

Далее по свойствам (6.1.3, 6.1.4)

$$df_i(A) = \left\langle \left(A^{i-1}\right)^{\top},\ dA \right\rangle + \left\langle \left(A^{i-1}\right)^{\top},\ dA \right\rangle + \dots + \left\langle \left(A^{i-1}\right)^{\top},\ dA \right\rangle = i \left\langle \left(A^{i-1}\right)^{\top},\ dA \right\rangle,$$

Что означает

$$\frac{\partial f_i}{\partial A}(A) = iA^{i-1}, \qquad i = 0, 1, 2, \dots \tag{6.1.11}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial A}\langle E,\ A^i \rangle = iA^{i-1}, \qquad i = 0, 1, 2, \dots . \tag{6.1.12}$$

Пример 6.1.3

Пусть $n = m$, $M(n \times m) = M(n)$ и $f(A) \equiv \det(A)$. Из выражения для алгебраического дополнения D_{ij} элемента a_{ij} матрицы A и выражения для элемента обратной матрицы $(A^{-1})_{ij} = \frac{D_{ji}}{\det(A)}$ в случае невырожденной матрицы следует, что в наших обозначениях

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial A} = (\det(A))A^{-1}. \tag{6.1.13}$$

Для квадратной матрицы $C \in M(n)$ скалярная функция

$$tr(C) \equiv \langle E,\ C \rangle = \langle C,\ E \rangle \tag{6.1.14}$$

не что иное как след квадратной матрицы. В силу формулы (6.1.5) дифференциал скалярной функции $f(A)$, $A \in M(n \times m)$ мы можем записать через след матрицы следующим образом

$$df(A) = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)^{\top}, dA \right\rangle = \left\langle E_m,\ \frac{\partial f}{\partial A} dA \right\rangle = \left\langle E_n,\ dA \frac{\partial f}{\partial A} \right\rangle . \tag{6.1.15}$$

6.1.3 Скалярное произведение матриц над комплексным полем чисел. В этом и следующих пунктах мы используем поле комплексных чисел и рассматриваем векторное пространство $M(n \times m,\ \mathbf{C})$ прямоугольных матриц над комплексным полем чисел. Рассмотрения пункта 6.1.1 легко переносятся на этот случай. Вводим скалярное произведение двух матриц $A, B \in M(n \times m,\ \mathbf{C})$ по формуле

$$\langle A,\ B \rangle \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, \bar{b}_{ij}, \tag{6.1.16}$$

где черта означает комплексное сопряжение. Для матрицы $A \in M(n\times\ m,\ \mathbf{C})$ матрица $\bar{A} \in M(n \times\ m,\ \mathbf{C})$ — комплексно сопряжённая; $A^{\top} \in M(n \times\ m,\ \mathbf{C})$ — транспонированная; $A^* \equiv \bar{A}^{\top}$, $A^* \in M(m \times\ n,\ \mathbf{C})$ — сопряжённая матрица. Если скалярное произведение (6.1.1) задавало на векторном пространстве $M(n\times m,\,\mathbf{R})\equiv M(n\times m)$ структуру евклидова пространства, то скалярное произведение (6.1.16) задаёт на векторном пространстве $M(n\times\ m,\,\mathbf{C})$ структуру унитарного пространства. При этом сохраняются свойства (6.1.2, 6.1.5), а свойства (6.1.3, 6.1.4) заменяются соответственно свойствами

$$\langle A,\,BC\rangle=\langle B^*A,\,C\rangle, \tag{6.1.17}$$

$$\langle A,\,BC\rangle=\langle AC^*,\,B\rangle \tag{6.1.18}$$

при $A\in M(n\times m,\,\mathbf{C})$, $B\in M(n\times k,\,\mathbf{C})$, $C\in M(k\times m,\,\mathbf{C})$.
Свойство (6.1.5) мы будем использовать в форме

$$\langle AB,\,E_n\rangle=\langle BA,\,E_m\rangle \tag{6.1.19}$$

при $A\in M(n\times m,\,\mathbf{C})$, $B\in M(m\times n,\,\mathbf{C})$.

Проверка свойств скалярного произведения для комплексного случая.

Свойство (6.1.2)

$$\langle A^\top,\,B^\top\rangle=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n a_{ji}^\top\bar b_{ji}^\top=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_{ij}\bar b_{ij}=\langle A,\,B\rangle.$$

Свойство (6.1.17)

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_{ij}\left(\sum_{l=1}^k\bar b_{il}\bar c_{lj}\right)=\sum_{l=1}^k\sum_{j=1}^m\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\bar b_{il}\bar c_{lj}\right)=\sum_{l=1}^k\sum_{j=1}^m\left(\sum_{i=1}^n\bar b_{li}^\top a_{ij}\right)\bar c_{lj}=\langle B^*A,\,C\rangle.$$

Свойство (6.1.18)

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_{ij}\left(\sum_{l=1}^k\bar b_{il}\bar c_{lj}\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{l=1}^k\left(\sum_{j=1}^m a_{ij}\bar c_{lj}\right)\bar b_{il}=\langle AC^*,\,B\rangle.$$

Свойство (6.1.19)

$$\langle AB,\,E_n\rangle=\langle B,\,A^*E_n\rangle=\langle B,\,A^*\rangle=\langle B,\,E_mA^*\rangle=\langle BA,\,E_m\rangle.$$

Из симметрии скалярного произведения и свойства (6.1.2) следует, что

$$\langle A^*,B^*\rangle=\langle B,\,A\rangle=\overline{\langle A,\,B\rangle} \tag{6.1.20}$$

при $A\in M(n\times m,\,\mathbf{C})$, $B\in M(n\times m,\,\mathbf{C})$.

В комплексном случае след квадратной матрицы $C\in M(n,\,\mathbf{C})$ также равен скалярному произведению данной матрицы с единичной матрицей

$$tr(C)=\langle C,\,E\rangle. \tag{6.1.21}$$

Хотя, вообще говоря, в отличие от вещественного случая $\langle C,\,E\rangle\neq\langle E,\,C\rangle$.

В случае, если матрицы $A\in M(n\times\ m,\,\mathbf{C})$, $B\in M(n\times\ k,\,\mathbf{C})$, $C\in M(k\times\ m,\,\mathbf{C})$ чисто вещественны, формулы данного пункта совпадают с соответствующими формулами пункта 6.1.1.

Перенесем построения п. 6.1.2 на комплексный случай. Пусть $f(A)$ функция с областью определения в $M(n\times m,\,\mathbf{C})$ и со значениями в $\mathbf{C}$, дифференцируемая в точке $A_0\in M(n\times m,\,\mathbf{C})$, т.е. имеющая дифференциал

$$df(A)=\langle dA,\,D\rangle,$$

где $D \in M(n \times m, \mathbf{C})$. Согласно свойствам скалярного произведения мы будем записывать дифференциал в виде

$$df(A) = \left\langle \tfrac{\partial f}{\partial A} dA,\ E_m \right\rangle = \left\langle dA \tfrac{\partial f}{\partial A},\ E_n \right\rangle = \left\langle dA, \left(\tfrac{\partial f}{\partial A}\right)^* \right\rangle = \\ = \left\langle \tfrac{\partial f}{\partial A},\ dA^* \right\rangle, \tag{6.1.22}$$

и называть матрицу $\frac{\partial f}{\partial A}(A) \in M(m \times n, \mathbf{C})$ производной функции f в точке A.

6.1.4 В этом пункте рассматриваются квадратные матрицы над комплексным полем. Кроме числовых функций от матрицы $f(A)$, т.е. функций с областью определения в $M(n, \mathbf{C})$ и со значениями в $\mathbf{C}$ рассмотрим матричные скалярные функции от матрицы (см.[46], [47]) $\varphi(A)$ с областью определения в $M(n, \mathbf{C})$ и со значениями в $M(n, \mathbf{C})$.

Пусть $\varphi(\lambda)$ функция от аргумента $\lambda \in \mathbf{C}$ со значениями в $\mathbf{C}$, определенная на спектре Λ_A матрицы $A \in M(n, \mathbf{C})$ в терминологии монографии [47], глава 5, тогда определена матричная функция $\varphi(A)$. Пусть функция $\varphi'(\lambda)$ определена на спектре матрицы A, тогда определены матричные функции $\varphi(A)$ и $\varphi'(A)$. Можно ли утверждать, что

$$d\varphi(A) = \varphi'(A) dA\,? \tag{6.1.23}$$

Вообще говоря, нет, так как матрица dA не коммутирует в общем случае с матрицей A. Однако, умножив равенство (6.1.23) скалярно на единичную матрицу, мы получим верное равенство.

Лемма 6.1.1 *Если функция $\varphi'(A)$ определена на спектре матрицы $A \in M(n, C)$, то справедлива формула*

$$d\langle \varphi(A),\ E\rangle = \langle \varphi'(A) dA,\ E\rangle. \tag{6.1.24}$$

Доказательство. Для функции $\varphi(\lambda)$ возьмём интерполяционный многочлен $p(\lambda)$, который в точке спектра $\lambda_i \in \Lambda_A$ имеет совпадающие значения и совпадающие производные с функцией $\varphi(\lambda)$ до порядка m_i включительно, где m_i — кратность точки спектра λ_i. В таком случае $\varphi(A) = p(A)$ и $\varphi'(A) = p'(A)$. Для многочлена

$$p(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{r} C_i \lambda^i \tag{6.1.25}$$

соответственно

$$p'(\lambda) = \sum_{i=1}^{r} i C_i \lambda^{i-1}$$

и

$$p(A) = \sum_{i=0}^{r} C_i A^i, \qquad p'(A) = \sum_{i=1}^{r} i C_i A^{i-1}. \tag{6.1.26}$$

Далее

$$d\langle \varphi(A),\ E\rangle = d\langle p(A),\ E\rangle = d\left\langle \sum_{i=0}^{r} C_i A^i,\ E \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} C_i \langle d(A^i),\ E\rangle = \\ = \sum_{i=1}^{r} C_i \left(\langle (dA) A^{i-1},\ E\rangle + \langle A(dA)(A^{i-2}),\ E\rangle + \cdots + \langle A^{i-1}(dA),\ E\rangle \right).$$

В силу свойства (6.1.19) получаем

$$d\langle\varphi(A),\,E\rangle = \left\langle\left(\sum_{i=1}^{r} iC_iA^{i-1}\right)dA,\,E\right\rangle = \langle p'(A)dA,\,E\rangle = \langle\varphi'(A)dA,\,E\rangle. \qquad \diamondsuit$$

Используя наше определение производной числовой функции от матрицы — формула (6.1.22), формулу (6.1.24) можно записать в эквивалентном виде:

$$\frac{\partial}{\partial A}\langle\varphi(A),\,E\rangle = \varphi'(A). \tag{6.1.27}$$

Пусть теперь матрица A является дифференцируемой функцией вещественного аргумента $t \in \mathbf{R}$, тогда $dA = \frac{dA}{dt}dt$ и из формулы (6.1.24) получаем.

Следствие 6.1.1 *Если функция $\varphi'(\lambda)$ определена на спектре матрицы $A(t_0)$ и $\frac{dA}{dt}(t)\,|_{t=t_0}\equiv \dot{A}$, то*

$$\frac{d}{dt}\langle\varphi(A),\,E\rangle = \langle\varphi'(A)\dot{A},\,E\rangle. \tag{6.1.28}$$

Рассмотрим теперь применение леммы 6.1.1.

В примере 6.1.2 мы доказали, что при натуральном i верно равенство

$$\frac{d}{dt}\langle A^i,\,E\rangle = iA^{i-1}$$

при любой матрице $A \in M(n,\,\mathbf{R})$. Возьмём ветвь аналитической функции λ^α, $\alpha \in \mathbf{C}$, такую, что $1^\alpha = 1$, тогда по лемме 6.1.1 для невырожденной матрицы $A \in M(n,\,\mathbf{C})$ определена матрица A^α и справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial A}\langle A^\alpha,\,E\rangle = \alpha A^{\alpha-1}. \tag{6.1.29}$$

В частности, мы распространили формулу (6.1.12) на отрицательные целые показатели i.

Рассмотрим ветвь логарифма $\ln\alpha$ такую, что $\ln 1 = 0$, тогда по лемме 6.1.1 для любой комплексной невырожденной матрицы

$$\frac{\partial}{\partial A}\langle\ln A,\,E\rangle = A^{-1}. \tag{6.1.30}$$

Если $A \in M(n,\,\mathbf{C})$ невырожденная матрица, то аналогично вещественному случаю

$$d(\det(A)) = \det(A)\langle A^{-1},\,d\bar{A}^\top\rangle = \det(A)\langle A^{-1}dA,\,E\rangle,$$

т.е.

$$\frac{\partial}{\partial A}(\det(A)) = (\det(A))A^{-1} \tag{6.1.31}$$

и сохраняется формула (6.1.13). В силу (6.1.30,6.1.31) получаем

$$\frac{\partial}{\partial A}\ln\det(A) = \frac{\partial}{\partial A}\langle\ln A,\,E\rangle$$

откуда

$$\ln\det(A) = \langle\ln A,\,E\rangle. \tag{6.1.32}$$

Итак, получена формула

$$\det(A) = e^{\langle \ln A,\, E\rangle}. \tag{6.1.33}$$

Из формулы (6.1.32) для матрицы $W = \ln A$ получаем

$$\det\, e^{W} = e^{\langle W,\, E\rangle} = e^{trW}. \tag{6.1.34}$$

Это известная формула для следа экспоненты.

Если матрица A дифференцируемо зависит от числового параметра t, то дифференцируя равенство (6.1.32) по t и применяя следствие 6.1.1, получаем

$$\frac{d}{dt}(\ln\det(A)) = \langle \dot{A}A^{-1},\, E\rangle \tag{6.1.35}$$

и после интегрирования

$$\det(A)(t) = \det(A)(t_0)\cdot e^{\int_{t_0}^{t}\langle \dot{A}A^{-1},\, E\rangle dt}. \tag{6.1.36}$$

Если $\dot{A} = \Gamma(t)A$, то из (6.1.36) получаем формулу Лиувилля в обычной форме

$$\det(A)(t) = \det(A)(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}(\Gamma(t))dt}. \tag{6.1.37}$$

Далее полученные в этом пункте формулы мы, как правило, применяем в вещественном случае, когда матрица $A \in M(n,\, \mathbf{R})$ и функция $\varphi(\lambda)$ такова, что $\varphi(A) \in M(n,\, \mathbf{R})$. Достаточные условия для вещественности матрицы $\varphi(A)$ см.[33], с.110.

6.1.5 Инвариантные функции от матрицы. Пусть теперь в некоторой окрестности точки $A \in M(n \times m)$ для числовой функции $f(A)$ выполняется условие инвариантности с постоянной матрицей $G \in \mathrm{GL}\,(n)$

$$f(GA) = f(A). \tag{6.1.38}$$

Дифференцируя равенство (6.1.38) и применяя формулу (6.1.8), получаем

$$\frac{\partial f(A)}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A}f(GA) = \frac{\partial f(Q)}{\partial Q}\Big|_{Q=GA} G$$

или

$$\frac{\partial f(Q)}{\partial Q}\Big|_{Q=GA} = \frac{\partial f(A)}{\partial A}G^{-1}. \tag{6.1.39}$$

Аналогично, если в некоторой окрестности точки $A \in M(n{\times}m)$ выполнено условие инвариантности

$$f(AG) = f(A) \tag{6.1.40}$$

с постоянной матрицей $G \in \mathrm{GL}\,(m)$, то

$$\frac{\partial f(Q)}{\partial Q}\Big|_{Q=AG} = G^{-1}\frac{\partial f(A)}{\partial A}. \tag{6.1.41}$$

Таким образом, для инвариантной в смысле (6.1.38) или (6.1.40) функции её производная в любой точке орбиты выражается через производную в фиксированной точке орбиты соответственно формулами (6.1.39) и (6.1.41).

6.1.6 О свойствах определителя Грама. Для матрицы $A \in M(n, \mathbf{R})$ обозначим её i -тую строку через $a^i \in M(1 \times n, \mathbf{R})$, а j -тый столбец — через $a_j \in M(n \times 1, \mathbf{R})$. Пусть матрица $A \in M(n, \mathbf{R})$ и матрица $B \in M(n, \mathbf{R})$, тогда для произведения матриц $AB \in M(n, \mathbf{R})$ верно

$$(AB)^i_j = a^i b_j = \langle (a^i)^\top, b_j \rangle, \qquad i, j \in \overline{1, n}.$$

В частности,

$$(A^\top A)^i_j = \langle a_i, a_j \rangle, \qquad i, j \in \overline{1, n},$$

поэтому матрицу $A^\top A$ назовём *матрицей Грама* системы n векторов $a_1, a_2, \cdots a_n \in \mathbf{R}^n$ и обозначим $\Gamma(A) \equiv A^\top A$. Из свойств определителя произведения матриц и из определения матрицы Грама верно

$$\det \Gamma(A) = (\det(A))^2.$$

Пусть $A \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbf{R})$, тогда

$$\Gamma(A)\Gamma(A^{-1\top}) = A^\top A A^{-1} A^{-1\top} = E,$$

т.е. верно правило

$$(\Gamma(A))^{-1} = \Gamma(A^{-1\top}). \tag{6.1.42}$$

Для каждой матрицы $A \in M(n, \mathbf{R})$ её минор стоящий в пересечении строк с номерами $1 \le i_1 < i_2 < \cdots i_p \le n$ и столбцов с номерами $1 \le k_1 < k_2 < \cdots k_p \le n$ обозначим $A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_p \\ k_1 k_2 \cdots k_p \end{pmatrix}$. Для невырожденной матрицы A миноры прямой матрицы A и обратной матрицы A^{-1} связаны соотношением

$$A\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \cdots n \\ 1\,2\,3 \cdots n \end{pmatrix} A^{-1}\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_p \\ k_1 k_2 \cdots k_p \end{pmatrix} = (-1)^{\sum\limits_{\nu=1}^{p} i_\nu + \sum\limits_{\nu=1}^{p} k_\nu} A\begin{pmatrix} i'_1 i'_2 \cdots i'_{n-p} \\ k'_1 k'_2 \cdots k'_{n-p} \end{pmatrix} \tag{6.1.43}$$

([26], с.31), где множества чисел $\{i'_1, i'_2, \cdots i'_{n-p}\}$ и $\{k'_1, k'_2, \cdots k'_{n-p}\}$ есть дополнения во множестве чисел $\overline{1, n}$ ко множествам чисел $\{i_1, i_2, \cdots i_p\}$ и $\{k_1, k_2, \cdots k_p\}$ соответственно. По определению полагаем $A(\emptyset) \equiv 1$, тогда соотношение (6.1.43) верно при любом $p \in \overline{1, n}$.

Для невырожденной матрицы A из (6.1.42) и (6.1.43) получаем

$$(\det \Gamma(A))\, \Gamma(A^{-1\top})\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_p \\ k_1 k_2 \cdots k_p \end{pmatrix} = (-1)^{\sum\limits_{\nu=1}^{p} i_\nu + \sum\limits_{\nu=1}^{p} k_\nu} \Gamma(A)\begin{pmatrix} i'_1 i'_2 \cdots i'_{n-p} \\ k'_1 k'_2 \cdots k'_{n-p} \end{pmatrix}. \tag{6.1.44}$$

Заметим, что для невырожденной матрицы A и матрицы $B \equiv A^{-1\top}$ их столбцы образуют биортогональную систему в евклидовом пространстве $\mathbf{R}$, т.е.

$$\langle a_i, b_i \rangle = \delta_{ij}, \qquad i, j \in \overline{1, n}, \tag{6.1.45}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

§6.2 Представление подобия группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на векторном пространстве $M(n)$

6.2.1 Представление подобия $T_G(A) = GAG^{-1}$. Рассмотрим следующее линейное представление группы невырожденных квадратных матриц $Gr = \mathrm{GL}\,(n)$ на векторном пространстве квадратных матриц $V = M(n)$ с операторами $T_G : M(n) \to M(n)$, $G \in \mathrm{GL}\,(n)$ вида

$$T_G(A) = GAG^{-1}, \tag{6.2.1}$$

которое назовём представлением *подобия.*

Данное представление эквивалентно редукции линейного представления §4.4 группы $\mathrm{GL}\,(n^2)$ на векторном пространстве $\mathbf{R}^{n^2}$ на некоторую подгруппу $S \subset \mathrm{GL}\,(n^2)$. Согласно теории §§4.6,5.4 нашей задачей в данном параграфе будет вычисление индекса $r_*(l(S))$ и построение базиса локальных инвариантов из $k = n^2 - r_*(l(S))$ инвариантов группы S.

6.2.2 Свойства простой матрицы. В этом пункте проведём предварительное изучение некоторых свойств квадратных матриц. Пусть K — комплексное или вещественное поле чисел, $M(n,\, K)$ — пространство квадратных матриц над полем K. Для матрицы $A \in M(n,\, K)$ введём две алгебры: $\mathrm{alg}_{\,K}(A)$ — алгебра, порождённой элементом $A \in M(n,\, K)$ в алгебре $M(n,\, K)$ и $Kom_K(A)$ — множество элементов из $M(n,\, K)$, коммутирующих с элементом A. Справедливо включение

$$\mathrm{alg}_{\,K}(A) \subset Kom_K(A). \tag{6.2.2}$$

Введём для матрицы $A \in M(n,\, K)$ два натуральнозначных индекса

$$da_K(A) \equiv \dim(\mathrm{alg}_{\,K}(A)), \tag{6.2.3}$$

$$dc_K(A) \equiv \dim(Kom_K(A)). \tag{6.2.4}$$

Из теоремы Гамильтона-Кэли следует, что первый индекс принимает значения $1 \le da_K(A) \le n$. Согласно [47], с.205 второй индекс может принимать значения $n \le dc_K(A) \le n^2$. В силу включения (6.2.2) справедливо неравенство при любой матрице $A \in M(n,\, K)$

$$da_K(A) \le dc_K(A). \tag{6.2.5}$$

Итак, наибольшее значение, которое может принимать индекс $da_K(A)$ равно n. Матрицы $A \in M(n,\, K)$ на которых это значение достигается называются *простыми* (см. [16], с.75). Множество таких матриц обозначим $Mh(n,\, K)$. Множество матриц $Mh(n,\, K)$ как подмножество в $M(n,\, K)$ вместе с элементом $A \in Mh(n,\, K)$ содержит все элементы вида λA, при $\lambda \in K, \lambda \ne 0$. Справедливы следующие свойства простых матриц (см. [47], с.205).

Лемма 6.2.1 *Следующие условия эквивалентны для $A \in M(n,\, \mathbf{C})$*

$$da_{\mathbf{C}}(A) = n, \tag{6.2.6}$$

$$dc_{\mathbf{C}}(A) = n, \tag{6.2.7}$$

$$da_{\mathbf{C}}(A) = dc_{\mathbf{C}}(A), \tag{6.2.8}$$

$$\mathrm{alg}_{\,\mathbf{C}}(A) = Kom_{\mathbf{C}}(A). \tag{6.2.9}$$

Опираясь на лемму 6.2.1, перенесем соответствующие утверждения на вещественный случай $K = \mathbf{R}$. Пусть $A \in M(n, \mathbf{R}) \subset M(n, \mathbf{C})$, тогда $\operatorname{alg}_{\mathbf{R}}(A) \subset \operatorname{alg}_{\mathbf{C}}(A)$ и $Kom_{\mathbf{R}}(A) \subset Kom_{\mathbf{C}}(A)$, причём алгебры $\operatorname{alg}_{\mathbf{C}}(A)$ и $Kom_{\mathbf{C}}(A)$ выражаются через алгебры $\operatorname{alg}_{\mathbf{R}}(A)$ и $Kom_{\mathbf{R}}(A)$ формулами

$$\operatorname{alg}_{\mathbf{C}}(A) = \operatorname{alg}_{\mathbf{R}}(A) + i \operatorname{alg}_{\mathbf{R}}(A), \tag{6.2.10}$$

$$Kom_{\mathbf{C}}(A) = Kom_{\mathbf{R}}(A) + i\, Kom_{\mathbf{R}}(A), \tag{6.2.11}$$

где символ i — мнимая единица. Из формул (6.2.10, 6.2.11) следует, что при $A \in M(n, \mathbf{R})$

$$da_{\mathbf{R}}(A) = da_{\mathbf{C}}(A), \tag{6.2.12}$$

$$dc_{\mathbf{R}}(A) = dc_{\mathbf{C}}(A). \tag{6.2.13}$$

Равенства же (6.2.12,6.2.13) позволяют перенести утверждения леммы 6.2.1 на вещественный случай.

Лемма 6.2.2 *Для матрицы $A \in M(n, \mathbf{R})$ следующие утверждения эквивалентны*

$$da_{\mathbf{R}}(A) = n, \tag{6.2.14}$$

$$dc_{\mathbf{R}}(A) = n, \tag{6.2.15}$$

$$da_{\mathbf{R}}(A) = dc_{\mathbf{R}}(A), \tag{6.2.16}$$

$$\operatorname{alg}_{\mathbf{R}}(A) = Kom_{\mathbf{R}}(A). \tag{6.2.17}$$

Итак, любое из утверждений (6.2.14-6.2.17) является эквивалентным определением простой матрицы, т.е. включения $A \in Mh(n, \mathbf{R})$.

Далее мы рассматриваем вещественное поле чисел $K = \mathbf{R}$ и символ $\mathbf{R}$ в формулах опускается.

6.2.3 Вычисление функции $r(l(S),\, A), A \in M(n)$.

Перейдем к вычислению функции $r(l(S),\, A), A \in M(n)$, введенный в п.4.6.1. Дифференцируя формулу (6.2.1) по параметру α при $G = G(\alpha)$ в окрестности единицы, получим, что касательное многообразие орбиты точки A есть

$$[M(n),\, A], \tag{6.2.18}$$

где квадратные скобки означают коммутатор матриц, поэтому в данном случае

$$r(l(S),\, A) = \dim\,[M(n),\, A]. \tag{6.2.19}$$

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{T}_A : M(n) \to M(n)$, сопоставляющий матрице $Q \in M(n)$ её коммутатор $[Q, A] \in M(n)$. Размерность множества значений линейного оператора $\mathcal{T}_A$ равна

$$\dim \mathcal{T}_A(M(n)) = \dim\,[M(n), A] = \dim M(n) - \dim Ker\, \mathcal{T}_A, \tag{6.2.20}$$

т.е. разности размерности всего линейного пространства $M(n)$ и ядра оператора $\mathcal{T}_A$. Но ядро оператора $\mathcal{T}_A$ есть централизатор элемента A в алгебре $M(n)$

$$\ker \mathcal{T}_A = Kom(A), \tag{6.2.21}$$

поэтому
$$r(l(S), A) = n^2 - \dim Kom(A) = n^2 - dc(A). \tag{6.2.22}$$

Из формулы (6.2.22) и леммы 6.2.2 следует, что
$$r_*(l(S)) = n^2 - n, \tag{6.2.23}$$
$$Bs(l(S)) = Mh(n). \tag{6.2.24}$$

Замечание 6.2.1 *В последнем утверждении мы опирались на то, что множество $Mh(n)$ всегда непусто, ибо любая матрица $A \in M(n)$, не имеющая кратных собственных значений, принадлежит $Mh(n)$ (см. [47], с.205).*

Согласно §4.6 основное множество $Bs(l(S)) = Mh(n)$ будет открытым всюду плотным подмножеством в $M(n)$, для которого группа симметрий в данном представлении — вся группа $\mathrm{GL}\,(n)$. Каждая прямая в $M(n)$, имеющая общую точку со множеством $Mh(n)$, может содержать не более $r_*(l(S)) = n^2-n$ точек дополнительного множества.

6.2.4 Инвариантные функции. Перейдем к построению инвариантных функций. Согласно п.5.4.3 нужно построить $n^2 - r_*(l(S)) = n^2 - (n^2 - n) = n$ функционально независимых инвариантов, т.е. числовых функций $f : M(n) \to \mathbf{R}$.

Определим для каждого целого неотрицательного числа i функцию $t_i(A)$ формулой
$$t_i(A) \equiv \langle A^i, E\rangle, \qquad A \in M(n). \tag{6.2.25}$$

Функция $t_i(A)$ однородный полином степени i, являющийся глобальным инвариантом представления подобия на $M(n)$
$$\forall G \in \mathrm{GL}\,(n)\; \forall A \in M(n) \mid t_i(T_G(A)) = t_i(A), \tag{6.2.26}$$

ибо
$$t_i(T_G(A)) = t_i(GAG^{-1}) = \langle (GAG^{-1})^i, E\rangle = \langle GA^iG^{-1}, E\rangle = \langle A^i, E\rangle$$

(Мы использовали свойство (6.1.5).

Сосчитаем индекс эависимости системы полиномов $\{t_i(A)\}_{i=1}^{\infty}$, используя выражение для производной $\frac{\partial t_i}{\partial A}(A) = iA^{i-1}$ из примера 6.1.2. Имеем
$$\mathrm{dep}\,(\{t_i\}_{i=1}^{\infty}, A) = \mathrm{rank}\,(E, 2A, 3A^2, \dots nA^{n-1}) = \dim\,\mathrm{lin}\,(E, A, \dots A^{n-1}). \tag{6.2.27}$$

С другой стороны, для первых n полиномов
$$\mathrm{dep}\,(\{t_i\}_{i=1}^{n}, A) = \mathrm{rank}\,(E, 2A, 3A^2, \cdots nA^{n-1}) = \dim\,\mathrm{lin}\,(E, A, \cdots A^{n-1}). \tag{6.2.28}$$

Согласно теореме Гамильтона-Кэли
$$\mathrm{lin}\,(E, A.A^2, \cdots) = \mathrm{lin}\,(E, A, A^2 \cdots A^{n-1}) = \mathrm{alg}\,(A). \tag{6.2.29}$$

Мы пришли к следующему результату
$$\forall A \in M(n) \mid \mathrm{dep}\,(\{t_i\}_{i=1}^{\infty}, A) = \mathrm{dep}\,(\{t_i\}_{i=1}^{n}, A) = da(A). \tag{6.2.30}$$

Введём вектор-функцию $t(A) \equiv (t_1(A), t_2(A), \cdots t_n(A))$. Согласно формуле (6.2.30) верно
$$\mathrm{dep}_*(t) = n, \tag{6.2.31}$$

$$Bd(t) = Mh(n). \tag{6.2.32}$$

Таким образом, во всех точках множества $Mh(n)$ n функций $t(A)$ образуют минимальный базис локальных инвариантов группы $\mathrm{GL}\,(n)$ в представлении подобия.

Из равенства $Bd = Mh(n)$, так как $t_i(A)$ полином степени i вытекает по лемме 5.1.1 следующее уточнение свойств множества $Mh(n)$ по сравнению с предыдущим пунктом: каждая прямая в $M(n)$, имеющая общую точку со множеством $Mh(n)$ может содержать не более $\frac{n(n-1)}{2}$ точек дополнительного множества.

Замечание 6.2.2 *Если комплекснозначная функция комплексного аргумента $\varphi(\lambda)$ определена в окрестности спектра матрицы $A_0 \in M(n)$, то в некоторой окрестности $W \subset M(n)$ точки A_0 верно*

$$\forall A \in W \ \forall G \in \ \mathrm{GL}\,(n) \mid \langle \varphi(T_G(A), E\rangle = \langle \varphi(A), E\rangle,$$

т.е. числовая функция $\langle \varphi(A), E\rangle$ является локальным инвариантом группы $\mathrm{GL}\,(n)$ в представлении подобия. Чтобы этот инвариант был глобальным на пространстве $M(n)$ достаточно, чтобы функция $\varphi(\lambda)$ была определена всюду, т.е. была аналитической на всей комплексной плоскости.

Итак, в данном пункте мы построили n глобальных инвариантов $t_i(A)$, $i = 1, 2 \cdots n$, группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на $M(n)$, образующих базис локальных инвариантов.

6.2.5 Два набора инвариантов: $t_i(A)$ и $s_i(A)$.

Известен также другой набор n глобальных полиномиальных инвариантов представления подобия. Так как для любой матрицы $A \in M(n)$ и любой невырожденной матрицы $G \in \ \mathrm{GL}\,(n)$

$$\det(GAG^{-1}) = \det(A),$$

то коэффициенты полинома по λ

$$\det(\lambda A + E) \equiv \sum_{i=0}^{n} \lambda^i s_i(A) \tag{6.2.33}$$

будут глобальными инвариантами. Каждая функция $s_i(A)$, $i = 0, 1, 2, \cdots n$ — однородный полином степени i , причём $s_0(A) \equiv 1$, $s_n(A) = \det(A)$. Положим $s(A) \equiv (s_1(A), s_2(A) \cdots s_n(A))$. Наша следующая задача вычисление индекса зависимости $\mathrm{dep}\,(s, A)$.

При достаточно малом λ матрица $\lambda A + E$ невырождена и справедлива формула примера 6.1.3 для производной определителя. Поэтому дифференцируя равенство (6.2.33) по A, получим

$$\det(\lambda A + E)\ (\lambda A + E)^{-1}\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \frac{\partial s_i(A)}{\partial A}. \tag{6.2.34}$$

Раскладывая левую часть в степенной ряд по λ в окрестности точки $\lambda = 0$, из (6.2.34) получим

$$\lambda \left(\sum_{j=0}^{n} \lambda^j s_j(A) \right) (E - \lambda A + \lambda^2 A^2 - \lambda^3 A^3 + \cdots) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \frac{\partial s_i}{\partial A}(A)$$

или
$$\left(\sum_{j=1}^{n+1}\lambda^j s_{j-1}(A)\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\lambda^l(-A)^l\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^i\frac{\partial s_i}{\partial A}(A), \qquad (6.2.35)$$
Откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем сначала n равенств вида
$$\frac{\partial s_i}{\partial A}(A)=\sum_{j=1}^{i}(-A)^{i-j}s_{j-1}=\sum_{j=0}^{i-1}(-A)^{(i-1-j)}s_j(A), \quad i=1,2,\dots n; \qquad (6.2.36)$$
затем при $i=n+1$ равенство
$$\sum_{j=1}^{n+1}(-A)^{(n+1-j)}s_{j-1}(A)=\sum_{j=0}^{n}(-A)^{n-j}s_j(A)=0, \qquad (6.2.37)$$
которое есть не что иное как теорема Гамильтона-Кэли, а при $i>n+1$ получаем равенство
$$\sum_{j=1}^{n+1}(-A)^{(i-j)}s_{j-1}(A)=\sum_{j=0}^{n}(-A)^{(i-1-j)}s_j(A)=(-A)^{(i-1-n)}\sum_{j=0}^{n}(-A)^{n-j}s_j(A)=0,$$
являющееся следствием равенства (6.2.37).

Зафиксируем полученные результаты.

Лемма 6.2.3 *Для любой матрицы $A\in M(n)$ справедливы равенства (6.2.36,6.2.37).*

Выпишем ещё раз выражения (6.2.36) для производной $\frac{\partial s_i(A)}{\partial A}$:
$$\begin{cases}\frac{\partial s_1(A)}{\partial A}=E,\\ \frac{\partial s_2(A)}{\partial A}=-A+Es_1(A)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{\partial s_n(A)}{\partial A}=(-A)^{n-1}+(-A)^{n-2}s_1(A)+\cdots Es_{n-1}(A).\end{cases} \qquad (6.2.38)$$
Из выражений (6.2.38) следует, что
$$\mathrm{lin}\left(\frac{\partial s_1(A)}{\partial A},\frac{\partial s_2(A)}{\partial A},\cdots\frac{\partial s_n(A)}{\partial A}\right)=\mathrm{lin}\,(E,A,A^2,\cdots A^{n-1})=\mathrm{alg}\,(A), \qquad (6.2.39)$$
поэтому для любой матрицы $A\in M(n)$ верно
$$\mathrm{dep}\,(s,A)=da(A). \qquad (6.2.40)$$
Что влечет равенства
$$\mathrm{dep}_*(s)=n, \qquad (6.2.41)$$
$$Bd(s)=Mh(n). \qquad (6.2.42)$$

Итак, n глобальных инвариантов $s(A)$ представления подобия группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на $M(n)$ образуют МБЛИ в точках множества $Mh(n)$. Поэтому в некоторой окрестности каждой точки $A\in Mh(n)$ каждая функция $t_i(A)$ представима в виде
$$t_i(A)=f_i(s(A)), \qquad i=1,2,\cdots n, \qquad (6.2.43)$$
где $f\in C^1(\mathbf{R}^i)$ и, наоборот, каждая функция $s_i(A)$ представима в виде суперпозиции
$$s_i(A)=g_i(t(A)), \qquad i=1,2,\cdots n, \qquad (6.2.44)$$
где $g\in C^1(\mathbf{R}^i)$. Оказывается эти представления верны и глобально, причём функции $f_i,g_i,\quad i=1,2,\dots n$, являются полиномами, что мы покажем в следующем пункте.

6.2.6 Выражение полиномов $t(A)$ через полиномы $s(A)$ и наоборот.

Для установления связи между полиномами $t(A)$ и полиномами $s(A)$ мы воспользуемся формулой (6.1.33), согласно которой при достаточно малых λ в окрестности точки $\lambda = 0$ справедливо равенство

$$\det(\lambda A + E) = e^{\langle \ln(\lambda A+E), E\rangle}. \tag{6.2.45}$$

При достаточно малых λ для $\ln(\lambda A + E)$ справедливо разложение в степенной ряд

$$\ln(\lambda A + E) = \lambda A - \frac{\lambda^2}{2}A^2 + \frac{\lambda^3}{3}A^3 + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{\lambda^k}{k}A^k + \cdots \tag{6.2.46}$$

Подставляя (6.2.46) в (6.2.45) и используя определение (6.2.33) полиномов $s_i(A)$, получаем соотношение

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda^i s_i(A) = e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\lambda^k}{k}t_k(A)}, \tag{6.2.47}$$

верное в окрестности точки $\lambda = 0$. Соотношение (6.2.47) и устанавливает связь между величинами $s_i(A)$ и $t_i(A)$.

Для получения выражения величин s_i через величины t_i согласно формуле (6.2.47) требуется найти выражение для коэффициентов Тейлора ряда по степеням λ в правой части. Разлагая экспоненту в степенной ряд, получим

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda^i s_i(A) = 1 + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\frac{(-1)^{k+1}}{k}t_k\right) + \frac{1}{2!}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\frac{(-1)^{k+1}}{k}t_k\right)^2 + \tag{6.2.48}$$

$$\frac{1}{3!}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\frac{(-1)^{k+1}}{k}t_k\right)^3 + \cdots .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим

$$\begin{cases} s_0 = 1, \\ s_1 = t_1, \\ s_2 = -\frac{t_2}{2} + \frac{1}{2!}t_1^2, \\ s_3 = \frac{t_3}{3} - \frac{1}{2}t_1t_2 + \frac{1}{3!}t_1^3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{6.2.49}$$

Общая формула имеет вид при $k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{gathered} s_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}t_k + \frac{(-1)^{k+2}}{2!}\underbrace{\sum_{i_1=1}^{k-1}\sum_{i_2=1}^{k-1}}_{i_1+i_2=k}\frac{1}{i_1i_2}t_{i_1}t_{i_2} + \\ + \frac{(-1)^{k+3}}{3!}\underbrace{\sum_{i_1=1}^{k-2}\sum_{i_2=1}^{k-2}\sum_{i_3=1}^{k-2}}_{i_1+i_2+i_3=k}\frac{1}{i_1i_2i_3}t_{i_1}t_{i_2}t_{i_3} + \cdots + \frac{1}{k!}t_1^k. \end{gathered} \tag{6.2.50}$$

Приравняем в (6.2.48) коэффициенты при степенях λ больших n и так как $s_i \equiv 0$ при

$i > n$, получим при $k = n+1, n+2, \cdots$

$$0 = \tfrac{(-1)^{k+1}}{k} t_k + \tfrac{(-1)^{k+2}}{2!} \underbrace{\sum_{i_1=1}^{k-1} \sum_{i_2=1}^{k-1}}_{i_1+i_2=k} \tfrac{1}{i_1 i_2} t_{i_1} t_{i_2} + \\ + \tfrac{(-1)^{k+3}}{3!} \underbrace{\sum_{i_1=1}^{k-2} \sum_{i_2=1}^{k-2} \sum_{i_3=1}^{k-2}}_{i_1+i_2+i_3=k} \tfrac{1}{i_1 i_2 i_3} t_{i_1} t_{i_2} t_{i_3} + \cdots + \tfrac{1}{k!} t_1^k. \tag{6.2.51}$$

При $k = n+1$ мы получаем выражение t_{n+1} как полинома от величин $t_1, t_2, \ldots t_n$. Далее t_{n+2} будет выражен как полином от $t_1, t_2, \ldots t_n$ и далее по индукции любая величина t_k при $k > n$ будет полиномом от $t_1, t_2, \ldots t_n$.

Получим теперь выражение величин $t_1, t_2, \ldots t_n$ через величины $s_1, s_2, \ldots s_n$. Для этого логарифмируем равенство (6.2.47) и раскладываем в ряд по λ логарифм

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \tfrac{(-1)^{k+1}}{k} t_k = \ln\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda^i s_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i s_i\right) - \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i s_i\right)^2 + \\ + \tfrac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i s_i\right)^3 + \ldots \tfrac{(-1)^{j+1}}{j}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i s_i\right)^j + \ldots. \tag{6.2.52}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем

$$\begin{cases} t_1 = s_1, \\ -\tfrac{1}{2} t_2 = s_2 - \tfrac{1}{2} s_1^2, \\ \tfrac{1}{3} t_3 = s_3 - s_1 s_2 + \tfrac{1}{3} s_1^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{6.2.53}$$

Общая формула имеет вид

$$\frac{(-1)^{k+1}}{k} t_k = s_k - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i_1=1}^{k-1} \sum_{i_2=1}^{k-1}}_{i_1+i_2=k} s_{i_1} s_{i_2} + \frac{1}{3} \underbrace{\sum_{i_1=1}^{k-2} \sum_{i_2=1}^{k-2} \sum_{i_3=1}^{k-2}}_{i_1+i_2+i_3=k} s_{i_1} s_{i_2} s_{i_3} + \ldots \\ + \frac{(-1)^{k+1}}{k} s_1^k, \tag{6.2.54}$$

при $k = 1, 2, 3, \ldots$, если использовать соглашение, что при $i > n$, где n число строк матрицы A, величина $s_i \equiv 0$.

Замечание 6.2.3 *Итак, мы убедились, что каждый полином $s_i(A)$ является полиномом от i полиномов $t_1(A), t_2(A), \ldots t_i(A)$ вида (6.2.50) и, наоборот, каждый полином $t_i(A)$ является полиномом от полиномов $s_1(A), s_2(A), \ldots s_n(A)$, причём вид соответствующих полиномов $f_i(s_1, s_2, \ldots s_i)$ и $g_i(t_1, t_2, \ldots t_i)$ не зависит от размеров n матриц A.*

6.2.7 Смешанный набор инвариантных однородных полиномов $ts(A)$. Введём также для матриц $A \in M(n)$ смешанный набор инвариантных однородных полиномов

$$ts(A) \equiv (t_1(A), t_2(A), \ldots t_{n-1}(A), s_n(A)), \tag{6.2.55}$$

заменив последний из полиномов $t_n(A)$ на полином $s_n(A)$. Сосчитаем индекс зависимости

$$\operatorname{dep}(ts, A) = \operatorname{rank}\left(\tfrac{\partial t_1}{\partial A}(A), \tfrac{\partial t_2}{\partial A}(A), \dots \tfrac{\partial t_{n-1}}{\partial A}(A), \tfrac{\partial s_n}{\partial A}(A)\right) =$$
$$= \operatorname{rank}\left(E, A, 2A, \dots (n-1)A^{n-2}, \tfrac{\partial s_n}{\partial A}(A)\right) = \dim \operatorname{lin}\left(E, A, A^2, \dots A^{n-2}, \tfrac{\partial s_n}{\partial A}(A)\right).$$

В силу представления (6.2.38) для $\frac{\partial s_n}{\partial A}(A)$ получаем

$$\operatorname{dep}(ts, A) = \dim \operatorname{lin}(E, A, A^2, \dots A^{n-2}, A^{n-1}) = da(A). \tag{6.2.56}$$

Поэтому

$$\operatorname{dep}_*(ts) = \operatorname{dep}_*(t) = \operatorname{dep}_*(s), \tag{6.2.57}$$

$$Bd(ts) = Bd(t) = Bd(s) = Mh(n). \tag{6.2.58}$$

Таким образом, n полиномов $ts_1(A), ts_2(A), \dots ts_n(A)$ образуют МБЛИ в точках $A \in Mh(n)$.

6.2.8 Представляющий многочлен и характеристический многочлен. Свойство (6.1.5) обобщается и на степени матрицы. А именно, если $A \in M(n \times m)$, $B \in M(m \times n)$, $i \in \mathbf{N}$, то

$$\langle E_n, (AB)^i \rangle = \langle E_m, (BA)^i \rangle, \tag{6.2.59}$$

ибо по свойству (6.1.5)

$$\langle E_n, \underbrace{AB}_{1}\underbrace{AB}_{2} \cdots \underbrace{AB}_{i} \rangle = \langle E_m, \underbrace{BA}_{1}\underbrace{BA}_{2} \cdots \underbrace{BA}_{i} \rangle.$$

Итак, для полиномов t_i вида (6.2.25) справедливо при любом натуральном $i \in \mathbf{N}$ равенство

$$t_i(AB) = t_i(BA). \tag{6.2.60}$$

А следовательно, и для полиномов s_i будет при любом $i \in \mathbf{N}$

$$s_i(AB) = s_i(BA). \tag{6.2.61}$$

Но, однако, из (6.2.61) нельзя в общем случае утверждать совпадение характеристических полиномов матриц AB и BA, так как они имеют, вообще говоря, разные степени (n и m соответственно). Поэтому нам удобно ввести следующий многочлен, который мы назовём *представляющим* многочленом квадратной матрицы $A \in M(n)$

$$\operatorname{rep}(A, \lambda) \equiv \det(\lambda A + E) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i s_i(A), \tag{6.2.62}$$

его мы уже использовали в формуле (6.2.33) для определения функций $s_i(A)$.

Сравним представляющий многочлен с характеристическим многочленом

$$\operatorname{chap}(A, \lambda) \equiv \det(\lambda E - A) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k (-1)^{n-k} s_{n-k}(A). \tag{6.2.63}$$

Мы видим, что

$$\operatorname{rep}(A, \lambda) = (-\lambda)^n \operatorname{chap}\left(A, -\frac{1}{\lambda}\right). \tag{6.2.64}$$

Пусть характеристический многочлен $\operatorname{chap}(A,\lambda)$ имеет число $0=\lambda_0$ корнем кратности α_0 и корни $\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_k$ кратностей $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_k$, $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k=n$. Тогда согласно формуле (6.2.64)

$$\operatorname{rep}(A,\lambda)=(-\lambda)^n\left(-\frac{1}{\lambda}\right)^{\alpha_0}\left(-\frac{1}{\lambda}-\lambda_1\right)^{\alpha_1}\left(-\frac{1}{\lambda}-\lambda_2\right)^{\alpha_2}\cdots\left(-\frac{1}{\lambda}-\lambda_k\right)^{\alpha_k}= \qquad (6.2.65)$$

$$(1+\lambda_1\lambda)^{\alpha_1}(1+\lambda_2\lambda)^{\alpha_2}\cdots(1+\lambda_k\lambda)^{\alpha_k}.$$

Таким образом, представляющий полином имеет степень $n-i_0$, все его корни ненулевые и каждый корень $\xi_j=-\frac{1}{\lambda_j}$, где λ_j ненулевой корень характеристического полинома с той же кратностью α_j, $j=1,2,\dots k$.

Для представляющего многочлена справедливо простое правило. Если $A\in M(n\times m)$, $B\in M(m\times n)$, то

$$\operatorname{rep}(AB,\lambda)=\operatorname{rep}(BA,\lambda), \qquad (6.2.66)$$

в силу равенства (6.2.61).

Из правой части формулы (6.2.62) следует, что степень представляющего многочлена не превосходит ранга матрицы

$$deg(\operatorname{rep}(A,\lambda))\le \operatorname{rank} A \qquad (6.2.67)$$

для любой квадратной матрицы $A\in M(n)$. В силу этого вычисление представляющего многочлена матрицы $A\in M(n)$ ранга r можно свести к вычислению представляющего многочлена матрицы из $M(r)$. В самом деле, матрица $A\in M(n)$ ранга r представима в виде произведения двух матриц $A=BC$, где $B\in M(n\times r)$, $C\in M(r\times n)$ (см. [47], с.32), поэтому в силу (6.2.66) получаем

$$\operatorname{rep}(A,\lambda)=\operatorname{rep}(BC,\lambda)=\operatorname{rep}(CB,\lambda).$$

Сформулируем следующее простейшее обобщение полученных фактов.

Лемма 6.2.4 *Пусть k матриц $A_\alpha\in M(n_\alpha\times m_\alpha)$, $\alpha=1,2,\dots k$, таковы, что определено произведение $A\equiv A_1A_2\cdots A_k$ и является квадратной матрицей. Пусть $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_k$ циклическая перестановка индексов $1,2,\dots k$ и $B\equiv A_{\alpha_1}A_{\alpha_2}\cdots A_{\alpha_k}$. Тогда*

$$\operatorname{rep}(A,\lambda)=\operatorname{rep}(B,\lambda), \qquad (6.2.68)$$

$$deg(\operatorname{rep}(A,\lambda))\le\min_{\alpha\in\overline{1,k}}\{\operatorname{rank}(A_\alpha)\}, \qquad (6.2.69)$$

при любом натуральном $i\in\mathbf{N}$

$$\langle A^i,E\rangle=\langle B^i,E\rangle, \qquad (6.2.70)$$

$$s_i(A)=s_i(B). \qquad (6.2.71)$$

Обратим внимание на то, что для матрицы $A\in M(n)$ полиномы $t_i(A)$ определены формулой (6.2.25) для любого натурального i , в то время как полиномы $s_i(A)$ формулой (6.2.33) определены лишь при $i=1,2,\dots n$. Однако, независимость в представлении $s_i=f_i(t_1,t_2,\dots t_i)$ полиномов f_i от размерности n позволяет считать эти соотношения определениями полиномов $s_i(A)$ при $i > n$, автоматически обращающимися в нуль, если $A \in M(n)$, $n < i$. В силу этого и представляющий многочлен может быть определен формулой

$$\mathrm{rep}\,(A, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i s_i(A) \tag{6.2.72}$$

в которой бесконечная сумма автоматически является полиномом степени не большей ранга матрицы $A \in M(n)$.

Сформулируем через представляющий многочлен следующее достаточное условие простоты матрицы.

Лемма 6.2.5 *если представляющий многочлен матрицы $A \in M(n)$ имеет n различных корней, то матрица $A \in \mathrm{GL}\,(n) \cap Mh(n)$.*

Доказательство. Все n корней характеристического многочлена матрицы A будут в условиях леммы не нулевыми и не кратными, поэтому матрица A невырожденная и простая. $\diamondsuit$.

§6.3 Инвариантные функции на линейном пространстве матриц $M(n \times m)$

6.3.1 Представление Tl группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на векторном пространстве прямоугольных матриц $M(n \times m)$. Представление Tm §4.2 группы невырожденных матриц $\mathrm{GL}\,(n)$ на линейном пространстве квадратных матриц $M(n)$ и представление T §4.4 группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на линейном пространстве векторов $\mathbf{R}^n$ можно рассматривать как частные случаи следующего более общего представления Tl группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на векторном пространстве прямоугольных матриц $M(n \times m)$ вида

$$Tl_G(A) = GA, \qquad G \in \mathrm{GL}\,(n), \quad A \in M(n \times m). \tag{6.3.1}$$

При $m = n$ получаем линейное представление §4.2, при $m = 1$ — линейное представление §4.4.

Рассмотрим набор из k матриц $(A^1, A^2, \cdots A^k)$, $A^i \in M(n \times m_i)$ с одинаковым числом строк n, тогда умножая каждую матрицу набора слева на матрицу $G \in \mathrm{GL}\,(n)$, $(GA^1, GA^2, \ldots GA^k)$ мы получаем линейное представление группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на прямой сумме векторных пространств $M(n \times m_1) \bigoplus M(n \times m_2) \bigoplus \cdots \bigoplus M(n \times m_k)$ естественным образом отождествляемой с векторным пространством матриц $M(n \times m)$, $m = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i$. Наоборот, разбивая матрицу $A \in M(n \times m)$ на m столбцов мы можем линейное представление группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на векторном пространстве матриц $M(n \times m)$ естественным образом отождествить с линейным представлением группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на прямой сумме m экземпляров векторного пространства $\mathbf{R}^n$.

С другой стороны, векторное пространство матриц $M(n \times m)$ имеет размерность nm и линейно изоморфно пространству $\mathbf{R}^{nm}$. Поэтому любое линейное представление Tm на пространстве $M(n \times m)$ можно рассматривать как редукцию представления T группы $\mathrm{GL}\,(nm)$ на пространстве $\mathbf{R}^{nm}$. Наоборот, при $m = 1$ представление Tl на $M(n \times m)$ группы $\mathrm{GL}\,(n)$ совпадает с представлением T группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на $\mathbf{R}^n$. Таким образом, представления Tl и T сводятся друг к другу в вышеуказанном смысле.

Введённое представление (6.3.1) будем называть левым представлением группы невырожденных матриц на векторном пространстве $M(n \times m)$ и отличать относящиеся к нему величины буквой l. Аналогично вводится правое представление группы матриц $\mathrm{GL}\,(m)$ на векторном пространстве матриц $M(n \times m)$ с оператором $Tr(A)$ вида

$$Tr_G(A) = AG^{-1}, \qquad A \in M(n \times m), \quad G \in \mathrm{GL}\,(m). \tag{6.3.2}$$

Транспонируя равенство (6.3.2), получим

$$Tr_G^\top(A) = G^{-1\top} A^\top \tag{6.3.3}$$

левое линейное представление группы $\mathrm{GL}\,(m)$ на пространстве транспонированных матриц $M(m \times n)$.

6.3.2 Величины $rl_*(L)$ и $rr_*(L)$. Итак, линейное представление Tl на векторном пространстве матриц $M(n \times m)$ можно рассматривать как некоторую подгруппу Ли группы $\mathrm{GL}\,(nm)$ действующей на $\mathbf{R}^{nm}$. Согласно §4.6 и результатам данной главы при анализе инвариантных функций для подгруппы Ли $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$ важную роль будет играть её касательное многообразие $l(S)$ и размерность орбиты в точке $A \in M(n \times m)$, т.е. величина (4.6.1), которая в данном случае принимает вид

$$r(l(S), A) = \dim(l(S)A), \tag{6.3.4}$$

где $l(S) \equiv L \subset M(n)$ алгебра Ли группы $S \subset \mathrm{GL}\,(n)$, $A \in M(n \times m)$. Ключевой задачей для нас в этом параграфе является определение величины

$$r_*(l(S)) \equiv \max_{A \in M(n \times m)} \{r(l(S), A)\}. \tag{6.3.5}$$

Далее в этом пункте L обозначает некоторое подмножество линейного пространства квадратных матриц. Договоримся для любого подмножества M векторного пространства через $\dim M$ обозначать размерность его линейной оболочки $\dim M \equiv \dim(\,\mathrm{lin}\,(M))$.

Введём левые и правые величины

$$rl(L, A) \equiv \dim LA, \quad rl_*(L) \equiv \max_{A \in M(n \times m)} \{rl(L, A)\}. \tag{6.3.6}$$

и

$$rr(L, A) \equiv \dim AL, \quad rr_*(L) \equiv \max_{A \in M(n \times m)} \{rr(L, A)\}. \tag{6.3.7}$$

Так как операция транспонирования $A \to A^\top$ устанавливает линейный изоморфизм линейных пространств $M(n \times m)$ и $M(m \times n) = M^\top(n \times m)$, то

$$\forall A \in M(n \times m) \mid \ rr(L, A) = rl(L^\top, A^\top) \tag{6.3.8}$$

и следовательно

$$rr_*(L) = rl_*(L^\top). \tag{6.3.9}$$

Поскольку при любом линейном подпространстве $L \subset M(n)$ и любой матрице $A \in M(n \times m)$

$$rl(L, A) = \dim LA \leq \dim L, \tag{6.3.10}$$

то в случае, если для некоторой матрицы $A \in M(n \times m)$ верно $\dim LA = \dim L$, то

$$rl_*(L) = \dim L = \dim S. \tag{6.3.11}$$

Аналогично, при любой матрице $A \in M(n \times m)$

$$rr(L, A) \leq \dim L \tag{6.3.12}$$

и если для некоторой матрицы $A \in M(n \times m)$ верно $\dim AL = \dim L$, то

$$rr_*(L) = \dim L = \dim S. \tag{6.3.13}$$

В случае $m = n$, если $A \in \mathrm{GL}\,(n)$, то

$$\dim LA = \dim L = \dim AL \tag{6.3.14}$$

и верны равенства (6.3.11, 6.3.13).

Равенства (6.3.11, 6.3.13) верны не только при $n = m$, но и в более широкой ситуации, для описания которой мы проведём следующие построения.

Введём матрицу $E^r_{nm} \in M(n \times m)$, у которой по диагонали идут r единиц подряд, а все остальные элементы нулевые. Мы используем следующий известный факт о существовании сингулярного разложения матрицы (см. [25], с.30).

Лемма 6.3.1 *Если* $\mathrm{rank}\, A = r$, *то существуют матрицы* $Q \in \mathrm{GL}\,(n)$ *и* $U \in \mathrm{GL}\,(m)$, *что*

$$A = QE^r_{nm}U. \tag{6.3.15}$$

Опираясь на разложение (6.3.15), получается

Лемма 6.3.2 *Если* $\mathrm{rank}\, A = n$, *то* $rl(L, A) = \dim L$, *если* $\mathrm{rank}\, A = m$, *то* $rr(L, A) = \dim L$.

Доказательство. Если $\mathrm{rank}\, A \equiv r = n$, то

$$rl(L, A) = \dim LA = \dim LQE^r_{nm}U = \dim LQE^n_{nm} = \dim LQ = \dim L.$$

Аналогично, если $\mathrm{rank}\,(A) = r = m$, то

$$rr(L, A) = \dim QE^r_{nm}UL = \dim E^m_{nm}UL = \dim UL = \dim L. \diamondsuit$$

Из леммы 6.3.2 и неравенств (6.3.10,6.3.12) следует

Лемма 6.3.3 *Если* $m \geq n$, *то* $rl_*(L) = \dim L$; *если* $m \leq n$, *то* $rr_*(L) = \dim L$.

Настоящая лемма указывает случаи, когда вычисление величин $rl_*(L)$ и $rr_*(L)$ тривиально.

6.3.3 Вычисление величин $rl_*(L)$ и $rr_*(L$. Для групп $\Omega(B)$ и $\Omega_e(B)$, где $B \in Ms(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$ их алгебры Ли совпадают и равны (формула 4.2.47)

$$l(\Omega(B)) = l(\Omega_e(B)) = Ma(n)B^{-1}. \qquad (6.3.16)$$

Далее в пп. 6.3.3-6.3.5 подмножество $L \subset M(n)$ есть подалгебра Ли вида

$$L \equiv Ma(n)B^{-1}. \qquad (6.3.17)$$

Введём в линейном пространстве $M(n \times m)$ множество *невырожденных* матриц $\mathrm{GL}\,(n \times m)$, т.е. таких матриц $A \in M(n \times m)$, у которых ранг равен максимально возможному значению $\mathrm{rank}\ A = min(n \times m)$.

Лемма 6.3.4 *Множество* $\mathrm{GL}\,(n\times m) \subset M(n\times m)$ *открыто, всюду плотно в* $M(n\times m)$ *и каждая прямая в* $M(n\times m)$ *имеющая общую точку со множеством* $\mathrm{GL}\,(n\times m)$ *может содержать не более* $r = min(n, m)$ *точек дополнительного множества.*

Доказательство. Отождествим линейное пространство $M(n\times m)$ с линейным пространством $\mathbf{R}^{nm}$ и определим на $\mathbf{R}^{nm}$ систему $V(A)$ из m векторных полей со значениями в $\mathbf{R}^n$, а именно из m столбцов матрицы $A \in M(n\times m)$. Тогда $\mathrm{rank}\ A = \mathrm{rank}\ V(A)$ и векторные поля $v^i(A)$, $i = 1, 2, \dots m$ — линейные функции A. Далее утверждение леммы 6.3.4 следует из теоремы 5.1.1. $\diamondsuit$

Перейдем к вычислению функции $rl(L, A)$. Введём функцию двух целых неотрицательных аргументов

$$\mathrm{key}\,(n, l) = \begin{cases} 0, \quad l = 0 \text{ или } n = 0; \\ nl - \left(\frac{l^2+l}{2}\right), \quad 1 \le l \le n; \\ \frac{n^2-n}{2}, \quad n \le l. \end{cases} \qquad (6.3.18)$$

Лемма 6.3.5 *Справедливо утверждение*

$$rl(L, A) = rl(L^\top, A) = \mathrm{key}\,(n, \mathrm{rank}\ A). \qquad (6.3.19)$$

Доказательство. Согласно (6.3.6, 6.3.17)

$$rl(L, A) = \dim LA = \dim Ma(n)B^{-1}A.$$

Согласно лемме 6.3.1 верно представление (6.3.15), поэтому

$$\begin{aligned} rl(L, A) = \dim Ma(n)B^{-1}QE^r_{nm}U = \dim (B^{-1}Q)^{\top-1}(B^{-1}Q)^\top Ma(n)(B^{-1}Q)E^r_{nm} = \\ = \dim Ma(n)E^r_{nm}. \end{aligned} \qquad (6.3.20)$$

Здесь $r = \mathrm{rank}\,(A)$. Аналогично

$$\begin{aligned} rl(L^\top, A) = \dim (Ma(n)B^{-1})^\top QE^r_{nm}U = \dim B^{-1\top}Ma(n)QE^r_{nm}U = \\ = \dim Q^{-1\top}Q^\top Ma(n)QE^r_{nm} = \dim Ma(n)E^r_{nm}. \end{aligned} \qquad (6.3.21)$$

Далее произведение $Ma(n)E^r_{nm}$ равно в блочном виде

$$Ma(n)E^r_{nm} = \begin{pmatrix} Ma(r) & 0 \\ M(n-r, r) & 0 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \dim Ma(n)E^r_{nm} = \dim Ma(r) + \dim M(n-r, r) = \\ = \frac{r^2 - r}{2} + r(n-r) = rn - \left(\frac{r^2 + r}{2}\right) = \mathrm{key}\,(n, r). \quad \diamondsuit \end{aligned} \qquad (6.3.22)$$

Из доказанной леммы и формулы (6.3.8) вытекает

Следствие 6.3.1 *Справедливы равенства*

$$rr(L, A) = rr(L^\top, A) = \text{key}\,(m, \text{rank } A). \tag{6.3.23}$$

В самом деле

$$rr(L, A) = rl(L^\top, A^\top) = \text{key}\,(m, \text{rank } A^\top) = \text{key}\,(m, \text{rank } A)$$

и

$$rr(L^\top, A) = rl(L^{\top\top}, A^\top) = rl(L, A^\top) = \text{key}\,(m, \text{rank } A).$$

Резюмируем результаты этого пункта.

Теорема 6.3.1 *Если $L = l(\Omega(B))$, то справедливы утверждения*

$$Bsl(L) = Bsl(L^\top) = Bsr(L) = Bsr(L^\top) = \text{GL}\,(n \times m), \tag{6.3.24}$$

$$rl_*(L) = rl_*(L^\top) = \text{key}\,(n, m), \tag{6.3.25}$$

$$rr_*(L) = rr_*(L^\top) = \text{key}\,(m, n). \tag{6.3.26}$$

6.3.4 Левые инвариантные функции. В этом пункте $S = \Omega^\top(B)$ группа невырожденных матриц. Нас интересуют левые инвариантные функции, т.е. отображения $f : M(n \times m) \to \mathbf{R}$ класса $C^{(1)}(M(n \times m))$, удовлетворяющие условию

$$\forall A \in M(n \times m) \quad \forall G \in \Omega(B) \mid f(GA) = f(A) \quad (B \in \text{GL}\,(n) \cap Ms(n)) \tag{6.3.27}$$

и правые инвариантные функции, т.е. отображения $f : M(n \times m) \to \mathbf{R}$ класса $C^{(1)}(M(n \times m))$, удовлетворяющие условию

$$\forall A \in M(n \times m) \quad \forall G \in \Omega(B) \mid f(AG) = f(A) \quad (B \in Ms(m) \cap \text{GL}\,(m)). \tag{6.3.28}$$

Непосредственно из определения группы $\Omega^\top(B)$ следует, что следующая матричная функция

$$W(A) \equiv A^\top BA \tag{6.3.29}$$

левая инвариантная, т.е.

$$\forall A \in M(n \times m) \quad \forall G \in \Omega^\top(B) \mid W(GA) = W(A), \tag{6.3.30}$$

так как при $G \in \Omega^\top(B)$ выполняется соотношение

$$G^\top BG = B,$$

а следовательно,

$$W(GA) = A^\top G^\top BGA = A^\top BA = W(A).$$

Матричное соотношение инвариантности (6.3.30) для симметричной матрицы $A^\top BA$ эквивалентно $\frac{m^2+m}{2}$ соотношениям инвариантности для квадратичных числовых функций $f_{ij}(A)$ — элементов матрицы $A^\top BA$,

$$f_{ij}(A) \equiv \langle E_{ij}, A^\top BA\rangle, \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le m, \tag{6.3.31}$$

где $E_{ij} \in M(m)$ матрица, у которой один элемент с индексом ij равен единице, а все остальные — нули.

Проверим, что функции $f_{ij}(A)$ вида (6.3.31) образуют базис локальных инвариантов на открытом всюду плотном множестве $\mathrm{GL}\,(n\times m)$. Для этого согласно п.5.4.3 и п.5.2.4 найдем индекс зависимости dep_*W и основное множество $Bd(W)\subset M(n\times m)$.

По определению $\mathrm{dep}\,(W,A) = \mathrm{rank}\left(\frac{\partial W}{\partial A}(A)\right) = \mathrm{rank}\left(\left\{\frac{\partial f_{ij}(A)}{\partial A}\right\}_{i,j=1}^{m}\right)$. Вычисляем дифференциал скалярной функции (6.3.31) согласно формализму п.6.1.1:

$$\begin{gathered} df_{ij}(A) = \langle E_{ij}, d(A^\top BA)\rangle = \langle E_{ij}, (dA^\top)BA\rangle + \langle E_{ij}, A^\top B(dA)\rangle = \langle E_{ij}(BA)^\top, dA^\top\rangle + \\ \langle (A^\top B)^\top E_{ij}, dA\rangle = \langle E_{ij}A^\top B, dA^\top\rangle + \langle E_{ij}^\top A^\top B, dA^\top\rangle = \langle (E_{ij}+E_{ij}^\top)A^\top B, dA^\top\rangle. \end{gathered} \tag{6.3.32}$$

Согласно (6.3.32)

$$\frac{\partial f_{ij}(A)}{\partial A} = (E_{ij}+E_{ij}^\top)A^\top B. \tag{6.3.33}$$

Поэтому

$$\begin{gathered} \mathrm{rank}\left\{\frac{\partial f_{ij}}{\partial A}(A)\right\}_{i,j=1}^{m} = \mathrm{rank}\left(\mathrm{lin}\left\{\frac{\partial f_{ij}(A)}{\partial A}\right\}_{i,j=1}^{m}\right) = \\ \mathrm{rank}\,(Ms(m)A^\top B) = \mathrm{rank}\;Ms(m)A^\top. \end{gathered} \tag{6.3.34}$$

Используя представление (6.3.15) леммы 6.3.1 с $r = \mathrm{rank}\,A$, получаем

$$\begin{gathered} \mathrm{rank}\,Ms(m)A^\top = \mathrm{rank}\,Ms(m)U(E_{nm}^r)^\top Q^\top = \\ \mathrm{rank}\;U^{T-1}UMs(m)UE_{mn}^r = \mathrm{rank}\;Ms(m)E_{mn}^r. \end{gathered}$$

Далее заметим, что произведение $Ms(n)E_{mn}^r$ имеет следующий блочный вид

$$Ms(m)E_{mn}^r = \begin{pmatrix} Ms(r) & 0 \\ M(m-r,r) & 0 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\begin{gathered} \mathrm{rank}\;Ms(m)E_{mn}^r = \dim Ms(m)E_{mn}^r = \dim Ms(r) + \\ \dim M(m-r,r) = \frac{r^2+r}{2} + (m-r)r = mr - \left(\frac{r^2-r}{2}\right). \end{gathered} \tag{6.3.35}$$

Введём функцию от двух целых неотрицательных аргументов

$$\mathrm{kes}\,(n,m) \equiv \begin{cases} 0, & n=0 \text{ или } m=0; \\ nm - \frac{(m^2-m)}{2}, & m\le n; \\ \frac{n^2+n}{2}, & n\le m. \end{cases} \tag{6.3.36}$$

Лемма 6.3.6 *Справедливо равенство*

$$\mathrm{dep}\,\left(\{f_{ij}\}_{i,j=1}^{m}, A\right) = \mathrm{kes}\,(m,\,\mathrm{rank}\;A). \tag{6.3.37}$$

Справедливость леммы вытекает из формул (6.3.34-6.3.36).

Итак, мы убедились, что каждая из $\frac{m^2+m}{2}$ квадратичных функций $f_{ij}(A)$, $1\le i\le j\le m$ на линейном пространстве $M(n\times m) = \mathbf{R}^{nm}$ является левым глобальным инвариантом на $M(n\times m)$ для группы $\Omega^\top(B)$. В силу леммы 6.3.6

$$\mathrm{dep}_*\left(\{f_{ij}\}_{1\le i\le j\le m}\right) = \mathrm{kes}\,(m,n) \tag{6.3.38}$$

и

$$Bd\left(\{f_{ij}\}_{1\le i\le j\le m}\right) = \mathrm{GL}\,(n\times m). \tag{6.3.39}$$

Согласно предыдущему пункту для левого действия группы $\Omega_e^\top(B)$ на $M(n\times m)$ имеем

$$rl_*(l(\Omega_e^\top(B))) + \operatorname{dep}_*\left(\{f_{ij}\}_{1\le i\le j\le m}\right) = \operatorname{key}(n,m) + \operatorname{kes}(m,n). \tag{6.3.40}$$

В случае $m\le n$ получаем

$$\operatorname{key}(n,m) + \operatorname{kes}(m,n) = nm - \left(\frac{m^2+m}{2}\right) + \frac{m^2+m}{2} = nm, \tag{6.3.41}$$

а в случае $m\ge n$ получаем

$$\operatorname{key}(n,m) + \operatorname{kes}(m,n) = \frac{n^2-n}{2} + nm - \left(\frac{n^2-n}{2}\right) = nm. \tag{6.3.42}$$

Итак, при любых натуральных m и n доказано равенство

$$\operatorname{key}(n,m) + \operatorname{kes}(m,n) = nm = \dim M(n\times m). \tag{6.3.43}$$

Теперь мы в состоянии дать локальную характеристику локально инвариантных слева относительно группы $\Omega_e^\top(B)$ числовых функций. При этом числовую функцию на $M(n\times m)$ мы отождествляем с числовой функцией на $\mathbf{R}^{nm}$, рассматривая элементы матрицы как её координаты. На основании п.5.4.3 из формулы (6.3.43) вытекает

Теорема 6.3.2 *Справедливо утверждение*

$$Bdl\left(\{f_{ij}\}_{i,j=1}^m\right) = Bsl(L^\top) = \operatorname{GL}(n\times m), \tag{6.3.44}$$

о совпадении основных множеств со множеством $\operatorname{GL}(n\times m)$. *Кроме того, в каждой точке* $A\in\operatorname{GL}(n\times m)$ *функции* $f_{ij}(A)$, $1\le i\le j\le m$ *образуют локальный базис инвариантов группы* $\Omega_e(B)$.

Второе утверждение теоремы 6.3.2 означает согласно §§5.2,5.4 что если числовая функция $f(A)$ определена, непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $A^0\in\operatorname{GL}(n\times m)$ и локально инвариантна слева в точке $A^0\in M(n\times m)$ относительно группы $\Omega_e^\top(B)$, то она представима в некоторой окрестности точки A^0 в виде

$$f(A) = \varphi(A^\top BA), \tag{6.3.45}$$

где $\varphi\in C^{(1)}(M(m))$.

Замечание 6.3.1 *Напомним (§2.4), что если матрица B инволютивна, то* $\Omega^\top(B)=\Omega(B)$.

6.3.5 Правые инвариантные функции. Аналогично п.6.3.4 проводится изучение правых инвариантных отображений $f: M(n\times m)\to\mathbf{R}$, удовлетворяющих условию (6.3.28). Непосредственно из определения группы $\Omega(B)$ следует, что для матричной функции

$$Wr(A)\equiv ABA^\top \tag{6.3.46}$$

выполняется условие инвариантности

$$\forall A\in M(n\times m)\quad \forall G\in\Omega(B)\mid Wr(AG)=Wr(A). \tag{6.3.47}$$

Инвариантность матричной функции (6.3.46) в смысле (6.3.47) эквивалентна инвариантности n^2 квадратичных скалярных функций вида

$$g_{ij}(A) = (Wr(A))_{ij}, \qquad 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n, \tag{6.3.48}$$

т.е. в силу симметричности матрицы $Wr(A)$ мы получаем $\frac{n^2+n}{2}$ квадратичных функций. Покажем что на открытом всюду плотном множестве в $M(n\times m)$ эти $\frac{n^2+n}{2}$ функций образуют локальный базис инвариантов.

По определению

$$\mathrm{dep}\,(Wr, A) = \mathrm{rank}\,\left(\frac{\partial Wr}{\partial A}(A)\right) = \mathrm{rank}\,\left(\frac{\partial g_{ij}(A)}{\partial A}\right)_{i,j=1}^{n}. \tag{6.3.49}$$

Дифференциал функции $g_{ij}(A)$ равен

$$\begin{aligned} dg_{ij}(A) = d\langle E_{ij}, ABA^\top\rangle = \langle E_{ij}, d(ABA^\top)\rangle = \langle E_{ij}, (dA)(BA^\top)\rangle + \langle E_{ij}, ABdA^\top\rangle = \\ = \langle E_{ij}(BA^\top)^\top, dA\rangle + \langle (AB)^\top E_{ij}, dA^\top\rangle = \langle BA^\top E_{ij}^\top + BA^\top E_{ij}, dA^\top\rangle. \end{aligned}$$

Откуда

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial A}(A) = BA^\top(E_{ij} + E_{ji}). \tag{6.3.50}$$

Поэтому для ранга системы $\frac{\partial g_{ij}(A)}{\partial A}$ получаем

$$\mathrm{rank}\,\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial A}(A)\right)_{i,j=1}^{m} = \dim\left(\mathrm{lin}\,\left(\frac{\partial G_{ij}(A)}{\partial A}\right)_{i,j=1}^{m}\right) = \dim BA^\top Ms(n). \tag{6.3.51}$$

Используя представление леммы 6.3.1 с $r = \mathrm{rank}\ A$, получаем

$$\begin{gathered} \dim BA^\top Ms(n) = \dim(A^\top Ms(n)) = \dim(U^\top E^r_{mn} Q^\top Ms(n)) = \\ \dim(E^r_{mn} Q^\top Ms(n) Q Q^{-1}) = \dim(E^r_{mn} Ms(n)) = \\ \dim((E^r_{mn} Ms(n))^\top) = \dim(Ms(n) E^r_{nm}). \end{gathered} \tag{6.3.52}$$

Далее применяем формулу (6.3.35) и получаем следующий результат.

Лемма 6.3.7 *Справедливо равенство*

$$\mathrm{dep}\,\left(\{g_{ij}\}_{i,j=1}^{n}, A\right) = \mathrm{kes}\,(n, \mathrm{rank}\ A). \tag{6.3.53}$$

Из формулы (6.3.53) вытекает, что индекс зависимости

$$\mathrm{dep}_*\left(\{g_{ij}\}_{i,j=1}^{n}\right) = \mathrm{kes}\,(n, m), \tag{6.3.54}$$

а основное множество

$$Bdr\left(\{g_{ij}\}_{i,j=1}^{n}\right) = \mathrm{GL}\,(n \times m). \tag{6.3.55}$$

Согласно теореме 6.3.1 и лемме 6.3.7 получаем

$$rr_*(L) + \mathrm{dep}_*\left(\{g_{ij}\}_{1\le i\le j\le n}\right) = \mathrm{key}\,(m, n) + \mathrm{kes}\,(n, m).$$

В силу равенства (6.3.43) отсюда следует, что

$$rr_*(L) + \mathrm{dep}_*\left(\{g_{ij}\}_{1\le i\le j\le n}\right) = nm = \dim\,(M(n \times m)). \tag{6.3.56}$$

На основании п.5.4.3 из формулы (6.3.56) вытекает.

Теорема 6.3.3 *Справедливо утверждение*

$$Bdr\left(\{g_{ij}\}_{i,j=1}^{n}\right) = Bsr(L) = \mathrm{GL}\,(n \times m) \tag{6.3.57}$$

о совпадении правых основных множеств со множеством $G(n \times m)$. Кроме того, в каждой точке $A \in \mathrm{GL}\,(n \times m)$ функции $g_{ij}(A)$, $1 \le i \le j \le m$ образуют локальный базис инвариантов группы $\Omega_e(B)$.

Второе утверждение теоремы означает, что если числовая функция $f(A)$ определена, локально инвариантна и класса $C^{(1)}$ в некоторой окрестности точки $A^0 \in \mathrm{GL}\,(n \times m)$, то она в некоторой окрестности точки $A^0 \in M(n \times m)$ представима в виде

$$f(A) = \varphi(ABA^{\top}), \tag{6.3.58}$$

где $\varphi \in C^{(1)}(M(n))$.

6.3.6 Основные величины в случае кососимметричной матрицы B. Перенесем теперь результаты пунктов 6.3.3–6.3.5 для симметричной матрицы B на случай кососимметричной матрицы. Далее в пунктах 6.3.6–6.3.8 предполагается, что B кососимметричная невырожденная матрица $B \in Ma(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$. Алгебра Ли группы $S = \Omega(B)$ в таком случае равна согласно лемме 4.2.11

$$l(S) = Ms(n)B^{-1}. \tag{6.3.59}$$

Далее в пунктах 6.3.6–6.3.8 обозначим $L \equiv Ms(n)B^{-1}$.

Для сокращения вычислений выделим следующие два факта, которые мы уже использовали в предыдущих пунктах.

Утверждение 6.3.1 *Если $F \subset M(n \times m)$ линейное подпространство и $D \in \mathrm{GL}\,(n)$, $C \in \mathrm{GL}\,(m)$, то*

$$\dim DFC = \dim F. \tag{6.3.60}$$

Утверждение 6.3.2 *Если $A \in \mathrm{GL}\,(n)$, то*

$$Ma(n)A = A^{-1\top} Ma(n), \tag{6.3.61}$$

$$Ms(n)A = A^{-1\top} Ms(n). \tag{6.3.62}$$

Первое утверждение вытекает из того, что отображение $F_{D,C} : M(n \times m) \to M(n \times m)$ вида $A \to DAC$ линейный изоморфизм. Второе утверждение вытекает из формулы (4.2.2).

Вычисляем теперь функцию $r(L, A)$ — размерность орбиты группы $\Omega(B)$ в точке $A \in M(n \times m)$.

Лемма 6.3.8 *При $B \in Ma(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$ справедливы равенства*

$$rl(L, A) = rl(L^{\top}, A) = \mathrm{kes}\,(n, \mathrm{rank}\ A). \tag{6.3.63}$$

Доказательство. Согласно лемме 6.3.1 и утверждениям 6.3.1, 6.3.2

$$r(L,A) = \dim LA = \dim Ms(n)B^{-1}QE^r_{nm}U =$$
$$\dim (B^{-1}Q)^{-1\top} Ms(n)E^r_{nm} = \dim Ms(n)E^r_{nm}.$$

Но последнюю величину мы уже вычислили — формулы (6.3.35, 6.3.36).
Итак,

$$r(L,A) = \operatorname{kes}(n, \operatorname{rank} A).$$

Аналогично

$$r(L^\top, A) = \dim L^\top A = \dim B^{-1\top} Ms(n)QE^r_{nm}U = \dim Ms(n)QE^r_{nm} =$$
$$= \dim Q^{-1\top} Ms(n)E^r_{nm} = \dim Ms(n)E^r_{nm} = \operatorname{kes}(n,r). \ \diamondsuit$$

Из доказанной леммы вытекает соответствующее выражение размерности орбиты для правого представления.

Следствие 6.3.2 *Если $B \in Ma(m) \cap \mathrm{GL}(m)$, то*

$$rr(L,A) = rr(L^\top, A) = \operatorname{kes}(m, \operatorname{rank} A). \tag{6.3.64}$$

В самом деле по формуле (6.3.8)

$$rr(l,A) = rl(L^\top, A^\top) = \operatorname{kes}(m, \operatorname{rank} A^\top) = \operatorname{kes}(m, \operatorname{rank} A),$$

$$rr(L^\top, A) = rl(L, A^\top) = \operatorname{kes}(m, \operatorname{rank} A).$$

Из формул (6.3.63, 6.3.64) вытекает справедливость теоремы.

Теорема 6.3.4 *Если матрица B кососимметрична и невырождена, то при $B \in M(n)$ верно*

$$Bsl(L) = Bsl(L^\top) = \mathrm{GL}(n \times m), \tag{6.3.65}$$

$$rl_*(L) = rl_*(L^\top) = \operatorname{kes}(n,m), \tag{6.3.66}$$

а при $B \in M(m)$ верно

$$Bsr(L) = Bsr(L^\top) = \mathrm{GL}(n \times m), \tag{6.3.67}$$

$$rr_*(L) = rr_*(L^\top) = \operatorname{kes}(m,n), \tag{6.3.68}$$

6.3.7 Левые инвариантные функции в случае кососимметричной матрицы B.

Перейдем к построению левых инвариантных функций. Пусть группа $S = \Omega^\top(B)$, в этом случае $l(S) = L^\top$. Аналогично п.6.3.4 видим, что следующая матричная функция $W(A) \equiv A^\top BA$ инвариантна, т.е. $W(GA) = W(A)$ при $G \in S$ и любом A. В самом деле

$$W(GA) = A^\top G^\top BGA = A^\top BA = W(A),$$

ибо по условию $G^\top BG = B$.

Матрица $W(A)$ кососимметрична, следовательно имеет $\frac{m^2-m}{2}$ независимых скалярных элементов. Убедимся, что их достаточно для построения базиса локальных инвариантов группы $S = \Omega^\top(B)$ в левом представлении.

Введём m^2 числовых функций — элементов матрицы $W(A)$

$$f_{ij}(A) \equiv \langle E_{ij}, A^\top BA\rangle, \qquad i,j = 1,2,\dots m \tag{6.3.69}$$

и вычислим их дифференциал:

$$df_{ij}(A) = \langle E_{ij}, d(A^\top BA)\rangle = \langle E_{ij}, (dA^\top)BA\rangle + \langle E_{ij}, A^\top BdA\rangle = \langle E_{ij}(BA)^\top, dA^\top\rangle + \\ + \langle (A^\top B)^\top E_{ij}, dA\rangle = \langle -E_{ij}A^\top B + E_{ij}^\top A^\top B, dA^\top\rangle = \langle (E_{ij}^\top - E_{ij})A^\top B, dA^\top\rangle.$$

Мы получили выражение для производной

$$\frac{\partial f_{ij}(A)}{\partial A} = (E_{ij}^\top - E_{ij})A^\top B. \tag{6.3.70}$$

Сосчитаем индекс зависимости системы функций $f_{ij}(A)$, $i,j = 1,2,\dots m$. Согласно формуле (6.3.70)

$$\begin{aligned} &\operatorname{dep}\left(\{f_{ij}\}_{i,j=1}^m, A\right) = \operatorname{rank}\left(\left\{\tfrac{\partial f_{ij}}{\partial A}(A)\right\}_{i,j=1}^m\right) = \\ &\dim \operatorname{lin}\left(\left\{\tfrac{\partial f_{ij}(A)}{\partial A}\right\}_{i,j=1}^m\right) = \dim Ma(m)A^\top B = \quad = \dim Ma(m)A^\top = \\ &\dim Ma(m)U^\top (E_{nm}^r)^\top Q^\top = \dim Ma(m)E_{mn}^r = \operatorname{key}(m,n). \end{aligned}$$

(Мы использовали лемму 6.3.1 и формулу (6.3.22)).

Доказана

Лемма 6.3.9 *Если $B \in Ma(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$, то*

$$\operatorname{dep}\left(\{f_{ij}\}_{i,j=1}^m, A\right) = \operatorname{key}(m, \operatorname{rank} A). \tag{6.3.71}$$

Из формулы (6.3.71) вытекает справедливость теоремы.

Теорема 6.3.5 *Если $B \in Ma(n) \cap \mathrm{GL}\,(n)$, то*

$$\operatorname{dep}_*\left(\{f_{ij}\}_{i,j=1}^m\right) = \operatorname{key}(m,n), \tag{6.3.72}$$

$$Bd\left(\{f_{ij}\}_{i,j=1}^m\right) = \mathrm{GL}\,(n\times m). \tag{6.3.73}$$

Итак, основные множества $Bsl(l(S))$ и $Bd\left(\{f_{ij}\}_{i,j=1}^m\right)$ совпадают со множеством $\mathrm{GL}\,(n\times m)$ и сумма индексов

$$rl_*(l(S)) + \operatorname{dep}_*\left(\{f_{ij}\}_{i,j}^m\right) = \operatorname{kes}(n,m) + \operatorname{key}(m,n) = mn$$

согласно формуле (6.3.43) равна размерности пространства $M(n\times m)$. Поэтому в каждой точке $A \in \mathrm{GL}\,(n\times m)$ функции $\{f_{ij}(A)\}_{i,j=1}^m$ образуют базис локальных инвариантов левого действия группы $S = \Omega^\top(B)$. Таким образом, если числовая функция $f(A)$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $A_0 \in \mathrm{GL}\,(n\times m)$ и является в точке A_0 локальным инвариантом группы $\Omega^\top(B)$, то в некоторой окрестности точки A_0 функция $f(A)$ допускает представление

$$f(A) = \varphi(A^\top BA),$$

где числовая функция $\varphi \in C^{(1)}(M(m))$.

6.3.8 Случай кососимметричной матрицы B. Правое представление. Перенесем полученные в пп. 6.3.6, 6.3.7 результаты на правое представление. В этом пункте $B \in Ma(m) \cap \mathrm{GL}\,(m)$. Группа $S = \Omega(B)$ действует справа и $L \equiv L(S) = Ms(m)B^{-1}$. В теореме 6.3.4 вычислен индекс $rr_*(l(S)) = \mathrm{kes}\,(m,n)$, поэтому осталось лишь указать базис инвариантов.

Матричнозначная функция от матрицы $Wr(A) \equiv ABA^\top$ будет инвариантной для группы $\Omega(B)$, так как при $G \in \Omega(B)$, верно $GBG^\top = B$ и поэтому

$$Wr(AG) = AGBG^\top A^\top = ABA^\top = Wr(A).$$

Покажем, что $\frac{n^2-n}{2}$ элементов кососимметричной матрицы $Wr(A)$ достаточно для образования базиса локальных инвариантов группы $\Omega(B)$.

Введём числовые функции

$$g_{ij}(A) \equiv \langle E_{ij}, ABA^\top\rangle, \qquad i,j = 1,2,\dots n \tag{6.3.74}$$

и вычислим их дифференциалы:

$$\begin{gathered} dg_{ij}(A) = \langle E_{ij}, d(ABA^\top)\rangle = \langle E_{ij}(BA^\top)^\top, dA\rangle + \langle (AB)^\top E_{ij}, dA^\top\rangle = \\ \langle BA^\top E_{ij}^\top, dA^\top\rangle - -\langle BA^\top E_{ij}, dA^\top\rangle = \langle BA^\top(E_{ij}^\top - E_{ij}), dA^\top\rangle. \end{gathered}$$

Мы получили выражение для производной

$$\frac{\partial g_{ij}(A)}{\partial A} = BA^\top(E_{ij}^\top - E_{ij}). \tag{6.3.75}$$

Для индекса зависимости получаем

$$\begin{gathered} \mathrm{dep}\,\left(\{g_{ij}\}_{i,j=1}^n, A\right) = \mathrm{rank}\,\left(\left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial A}(A)\right\}_{i,j=1}^n\right) = \dim\,\mathrm{lin}\,\left\{\frac{\partial g_{ij}(A)}{\partial A}\right\}_{i,j=1}^n = \\ \dim BA^\top Ma(n) = \quad = \dim A^\top Ma(n) = \\ \dim Ma(n)A = \dim Ma(n)QE_{nm}^r U = \dim Ma(n)E_{nm}^r = \mathrm{key}\,(n,r). \end{gathered}$$

Доказана следующая лемма.

Лемма 6.3.10 *При $B \in Ma(m) \cap \mathrm{GL}\,(m)$ для функций (6.3.74) верно*

$$\mathrm{dep}\,\left(\{g_{ij}\}_{i,j=1}^n, A\right) = \mathrm{key}\,(n, \mathrm{rank}\, A). \tag{6.3.76}$$

Из формулы (6.3.76) следует справедливость теоремы.

Теорема 6.3.6 *Если $B \in Ma(m) \cap \mathrm{GL}\,(m)$, то для функций (6.3.74) верны соотношения*

$$\mathrm{dep}_*\left(\{g_{ij}\}_{i,j=1}^n\right) = \mathrm{key}\,(n,m), \tag{6.3.77}$$

$$Bd\left(\{g_{ij}\}_{i,j=1}^n\right) = \mathrm{GL}\,(n\times m). \tag{6.3.78}$$

Итак, основные множества $Bsr(l(S))$ и $Bd\left(\{f_{ij}\}_{i,j=1}^n\right)$ совпадают со множеством $\mathrm{GL}\,(n\times m)$ и сумма индексов

$$rr_*(l(S)) + \mathrm{dep}_*\left(\{f_{ij}\}_{i,j}^n\right) = \mathrm{kes}\,(m,n) + \mathrm{key}\,(n,m) = mn$$

равна размерности пространства $M(n\times m)$. Поэтому в каждой точке $A \in \mathrm{GL}\,(n\times M)$ функции $\{f_{ij}(A)\}_{i,j=1}^{m}$ образуют базис локальных инвариантов группы $S = \Omega(B)$ в правом представлении. Таким образом, если числовая функция $f(A)$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $A_0 \in \mathrm{GL}\,(n\times M)$ и локально инвариантна в этой точке для группы $\Omega(B)$, то в некоторой окрестности точки A_0 она допускает представление

$$f(A) = \varphi(ABA^{\top}), \tag{6.3.79}$$

где числовая функция $\varphi \in C^{(1)}(M(n))$.

§6.4 Двусторонне инвариантные функции на пространстве прямоугольных матриц

6.4.1 Представление вида $T_{G_1,G_2}(A) \equiv G_1AG_2^{-1}$ группы $Gr = \mathrm{GL}\,(n)\times \mathrm{GL}\,(m)$ на векторном пространстве $M(n\times m)$. В этом параграфе рассматривается линейное представление группы $Gr = \mathrm{GL}\,(n)\times \mathrm{GL}\,(m)$ на векторном пространстве $M(n\times m)$ с линейными операторами представления $T_{G_1,G_2} : M(n\times m)\to M(n\times m)$ вида

$$T_{G_1,G_2}(A) \equiv G_1AG_2^{-1} \tag{6.4.1}$$

для любых $G_1 \in \mathrm{GL}\,(n), G_2 \in \mathrm{GL}\,(m), A \in M(n\times m)$. Операторы двустороннего представления (6.4.1) связаны с операторами левого и правого представления предыдущего параграфа формулой

$$T_{G_1}, G_2 = Tl_{G_1}Tr_{G_2} = Tr_{G_2}Tl_{G_1} \tag{6.4.2}$$

при любых $G_1 \in \mathrm{GL}\,(n), G_2 \in \mathrm{GL}\,(m)$.

Далее в этом параграфе $B_1 \in Ms(n)\bigcap \mathrm{GL}\,(n),\ B_2 \in Ms(m)\bigcap \mathrm{GL}\,(m)$ и группа $\Omega_{12} \equiv \Omega^{\top}(B_1)\times\Omega(B_2) \subset \mathrm{GL}\,(n)\times \mathrm{GL}\,(m)$. Наша задача в этом параграфе описать инвариантные функции для представления групп Ω_{12} на $M(n\times m)$.

6.4.2 Вычисление размерности орбиты представления в точке. Согласно параграфу 4.6 первым шагом к решению поставленной задачи является вычисление функции $r(l(\Omega_{12}), A) - A \in M(n\times m)$. Касательное многообразие к орбите в точке $A\in M(n\times m)$ равно

$$l(\Omega^{\top}(B_1))A + A\,l(\Omega(B_2)), \tag{6.4.3}$$

где касательные многообразия групп Ли матриц $\Omega(B_1)$ и $\Omega(B_2)$ согласно параграфам §4.2, §4.3 равны

$$l(\Omega^{\top}(B_1)) = H^{\top}(B_1),\quad l(\Omega(B_2))) = H(B_2). \tag{6.4.4}$$

Для функции $r(l(\Omega_{12}), A)$ получаем выражение

$$r(l(\Omega_{12}), A) = \dim(H^{\top}(B_1)A + AH(B_2)). \tag{6.4.5}$$

Размерность суммы линейных пространств равна

$$r(l(\Omega_{12}), A) = \dim(H^{\top}(B_1)A) + \dim(AH(B_2)) - \dim(H^{\top}(B_1)A\cap AH(B_2)). \tag{6.4.6}$$

Так как матрица B_1 невырожденная, то по формуле (4.3.68) $H^\top(B_1) = H(B_1^{-1})$ и в обозначениях п.4.3.10 и §6.3 получаем формулу

$$r(l(\Omega_{12}), A) = rl(H^\top(B_1), A) + rr(H(B_2), A) - \dim X(B_1^{-1}, B_2, A). \tag{6.4.7}$$

Из формулы (6.4.7) следует неравенство

$$r(l(\Omega_{12}), A) \leq rl_*(H^\top(B_1)) + rr_*(H(B_2)t). \tag{6.4.8}$$

Покажем, что существует матрица $A \in M(n \times m)$ для которой в (6.4.8) имеет место равенство, откуда будет следовать, что

$$r_*(l(\Omega_{12})) = rl_*(H^\top(B_1)) + rr_*(H(B_2)). \tag{6.4.9}$$

Сравнивая формулы (6.4.7) и (6.4.8), мы видим, что равенство в (6.4.8) имеет место тогда и только тогда, когда выполнены 3 условия

$$rl(H^\top(B_1), A) = rl_*(H^\top(B_1)), \tag{6.4.10}$$

$$rr(H(B_2), A) = rr_*(H(B_2)), \tag{6.4.11}$$

$$X(B_1^{-1}, B_2, A) = \{0\}. \tag{6.4.12}$$

Согласно теореме 6.3.1 каждое из равенств (6.4.10, 6.4.11) эквивалентно включению $A \in \mathrm{GL}\,(n \times m)$. Итак, матрица A удовлетворяет требованиям (6.4.10–6.4.12), тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству

$$\left\{A \in \mathrm{GL}\,(n \times m) \;\middle|\; X(B_1^{-1}, B_2, A) = \{0\}\right\}. \tag{6.4.13}$$

По теореме 4.3.2 множество (6.4.13) непусто, что доказывает равенство (6.4.9), а вместе с тем и теорему.

Теорема 6.4.1 *Если $B_1 \in Ms(n) \bigcap \mathrm{GL}\,(n), B_2 \in Ms(m) \bigcap \mathrm{GL}\,(m)$, то верно (6.4.9), основное множество $Bs(l(\Omega_{12}))$ совпадает с множеством (6.4.13) и*

$$r^*(l(\Omega_{12})) = nm - \min\{n, m\}. \tag{6.4.14}$$

В сформулированной теореме с учётом предыдущих рассуждений требует доказательства лишь равенство (6.4.14). Но оно непосредственно следует из формулы (6.4.9), теоремы 6.3.1 и следующего утверждения.

Утверждение 6.4.1 *Для любых натуральных n, m верно*

$$key(n, m) + key(m, n) = nm - \min\{n, m\} \tag{6.4.15}$$

Доказательство. Если $n \geq m$, то

$$key(n, m) = nm - \frac{m^2 + m}{2}, \quad key(m, n) = \frac{m^2 - m}{2}$$

поэтому

$$key(n, m) + key(m, n) = nm - m = nm - \min\{n, m\}. \ \diamondsuit$$

Так как множество (6.4.13) совпадает с основным множеством $Bs(l(\Omega_{12}))$, то в силу результатов пунктов 3.4.1, 3.4.2 справедливо

Следствие 6.4.1 *При $B_1 \in Ms(n) \bigcap \mathrm{GL}(n)$, $B_2 \in Ms(m) \bigcap \mathrm{GL}(m)$ множество (6.4.13) является открытым всюду плотным подмножеством в $M(n \times m)$, группа симметрий которого содержит группу Ω_{12}. Если точка $A \in M(n \times m)$ принадлежит множеству (6.4.13), то множеству (6.4.13) принадлежат все точки прямой, проходящей через данную точку и нуль, кроме нуля, и на каждой прямой, проходящей через точку A, может лежать не более $k = nm - \min\{n, m\}$ точек дополнительного множества.*

Пусть теперь $S_1 \subset \Omega^\top(B_1)$ и $S_2 \subset \Omega(B_2)$ подгруппы Ли, $S \equiv S_1 \times S_2 \subset \Omega^\top(B_1) \times \Omega(B_2)$. Требуется вычислить индекс $r_*(l(S_1))$.

Лемма 6.4.1 *Справедлива формула*

$$r_*(l(S)) = rl_*(l(S_1)) + rr_*(l(S_2)) \tag{6.4.16}$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 6.4.1. Для размерности орбиты группы S справедлива формула

$$r(l(S), A) = \dim(l(S_1)\, A + A\, l(S_2)) = \dim(l(S_1)\, A) + \dim(A\, l(S_2)) - \tag{6.4.17}$$

$$\dim((l(S_2)\, A) \cap (A\, l(S_2))),$$

откуда

$$r(l(S), A) \le rl_*(l(S_2)) + rr_*(l(S_2)) \tag{6.4.18}$$

Равенство в соотношении (6.4.18) имеет место согласно (6.4.17) тогда и только тогда, когда выполнено три условия.

$$A \in Bsl(l(S_1)), \tag{6.4.19}$$

$$A \in Bsr(l(S_2)), \tag{6.4.20}$$

$$(l(S_1)\, A) \bigcap (A\, l(S_2)) = \{0\}. \tag{6.4.21}$$

Каждое из основных множеств $Bsl(l(S_1)), Bsr(l(S_2)), Bs(l(\Omega_{12}))$ открыто и всюду плотно в $M(n \times m)$, поэтому их пересечение $W \equiv Bsl(l(S_2)) \cap Bsr(l(S_2)) \cap Bs(l(\Omega_{12}))$ открыто и всюду плотно в $M(n \times m)$, и следовательно непусто. Но точка $A \in W$ удовлетворяет требованиям (6.4.19, 6.4.20), а также (6.4.21). В самом деле, если $A \in W$, то

$$(H^\top(B_1)A) \cap (AH(B_2)) = \{0\}. \tag{6.4.22}$$

Но по условию $S_1 \subset H^\top(B_1)$, $S_2 \subset H(B_2)$, откуда $l(S_1) \subset H^\top(B_1)$, $l(S_2) \subset H(B_2)$. Равенство (6.4.22) влечет равенство (6.4.21).

Мы показали существование матрицы $A \in M(n \times m)$, для которой в (6.4.18) имеет место равенство, откуда следует равенство (6.4.16). $\diamondsuit$

В случае квадратных матриц $n = m$ из доказанной леммы и леммы 6.3.1 вытекает

Следствие 6.4.2 *Если $B_i \in Ms(n) \cap \mathrm{GL}(n)$, $i = 1, 2$, то для групп Ли $S_1 \subset \Omega^\top(B_1)$, $S_2 \subset \Omega(B_2)$ для $S = S_1 \times S_2$ верно*

$$r_*(l(S)) = \dim S_1 + \dim S_2. \tag{6.4.23}$$

Возвращаясь к теореме 6.4.1, мы видим, что согласно п.5.4.3 существует в точках основного множества минимальный локальный базис из $k = nm - (nm - \min\{n, m\}) = \min\{n, m\}$ локальных инвариантов — аналитических функций матрицы $A \in M(n \times m)$. Перейдем к их построению.

6.4.3 Инвариантные функции группы Ω_{12}. Для построения инвариантных функций группы Ω_{12} введём матрицу

$$V(A) \equiv AB_2A^\top B_1 \tag{6.4.24}$$

и рассмотрим, как она преобразуется при замене матрицы $A \in M(n\times m)$ на матрицу $T_{G_1,G_2}(A) = G_1AG_2^{-1}$, где $G_1 \in \Omega^\top(B_1)$, $G_2 \in \Omega(B_2)$. Имеем

$$V(T_{G_1,G_2}(A)) = G_1AG_2^{-1}B_2G_2^{-1\top}A^\top G_1^\top B_1. \tag{6.4.25}$$

Но из условия $G_1 \in \Omega^\top(B_1)$ следует, что $G_1^\top B_1G_1 = B_1$ и $G_1^\top B_1 = B_1G_1^{-1}$, а из включения $G_2 \in \Omega(B_2)$ следует, что $G_2^{-1} \in \Omega(B_2)$ и $G_2^{-1}B_2G_2^{-1\top} = B_2$. Поэтому соотношение (6.4.25) приводится к виду

$$V(T_{G_1,G_2}(A)) = G_1V(A)G_1^{-1}. \tag{6.4.26}$$

Из формулы (6.4.26), согласно п.6.2.4 вытекает, что полиномы

$$q_i(A) \equiv t_i(V(A)) = \left\langle (V(A))^i, E_n \right\rangle, \;\; i = 1,2,\dots \tag{6.4.27}$$

являются инвариантами группы $\Omega_{1,2}$, т.е.

$$\forall G_1 \in \Omega^\top(B_1)\; \forall G_2 \in \Omega(B_2)\; \forall A \in M(n\times m) \mid q_i(T_{G_1,G_2}(A)) = q_i(A). \tag{6.4.28}$$

Так как матрица $V(A) \in M(n)$, то согласно п.6.2.6 полиномы $t_i(V(A))$ будут полиномиальной функцией от n полиномов $t_1(V(A)), t_2(V(A)), \dots t_n(V(A))$, при любом $i \in \mathbf{N}$. С другой стороны, по лемме 6.2.4 — формула (6.2.70) — имеем

$$t_i(V(A)) = t_i(AB_2A^\top B_1) = t_i(B_2A^\top B_1A) \equiv t_i(Q(A)), \tag{6.4.29}$$

где матрица $Q(A) \equiv B_2A^\top B_1A$ принадлежит $M(m)$, поэтому все полиномы $t_i(V(A)) = t_i(Q(A))$ будут полиномиальными функциями первых m полиномов $t_1(Q(A)), t_2(Q(A)), \dots t_m(Q(A))$. Мы пришли к выводу, что если $k \equiv \min\{n,m\}$, то все функции $q_i(A)$, $i \in \mathbf{N}$, являются полиномиальными функциями первых k функций $q_1(A), q_2(A), \dots q_k(A)$. Обозначим набор функций $(q_1(A), q_2(A), \dots q_k(A)) \equiv q(A)$ и покажем, что $\operatorname{dep}(q) = k$, откуда будет следовать, что и $\operatorname{dep}_*(\{q_i\}_{i=1}^\infty) = k$. Вычислим дифференциал функции $q_i(A)$:

$$dq_i(A) = \left\langle d(V(A))^i, E_n \right\rangle = i\left\langle (V(A))^{i-1}dV(A), E_n \right\rangle =$$

$$i\left\langle (V(A))^{i-1}((dA)(B_2A^\top B_1) + AB_2(dA^\top)B_1), E_n \right\rangle =$$

$$i\left(\left\langle (B_2A^\top B_1)(V(A))^{i-1}dA, E_n \right\rangle + \left\langle B_1(V(A))^{i-1}AB_2dA^\top, E_n \right\rangle\right) =$$

$$i\left(\left\langle B_2A^\top B_1(V(A))^{i-1}dA, E_n \right\rangle + \left\langle dA(B_1(V(A))^{i-1}AB_2)^\top, E_n \right\rangle\right) =$$

$$i\left\langle \left(B_2A^\top B_1(V(A))^{i-1} + B_2A^\top(B_1(V(A))^{i-1})^\top\right) dA, E_n \right\rangle.$$

Последняя формула означает, что

$$\frac{\partial q_i(A)}{\partial A} = iB_2A^\top(B_1(V(A))^{i-1} + (B_1(V(A))^{i-1})^\top). \tag{6.4.30}$$

При любом натуральном $i \in \mathbf{N}$ матрица $B_1(V(A))^i \in Ms(n)$. В самом деле, при $i = 1$

$$B_1 V(A) = B_1 A B_2 A^\top B_1, \tag{6.4.31}$$

поэтому в силу $B_1 \in Ms(n)$, $B_2 \in Ms(m)$ получаем

$$(B_1 V(A))^\top = V^\top(A) B_1 = B_1 A B_2 A^\top B_1 = B_1 V(A). \tag{6.4.32}$$

Если включение $B_1 V^i(A) \in Ms(n)$ имеет место при всех $i < n$, то

$$(B_1 V^n(A))^\top = ((B_1 V^{n-1}(A)) V(A))^\top = V^\top(A) B_1 V^{n-1}(A) = \tag{6.4.33}$$

$$B_1 V(A) V^{n-1}(A) = B_1 V^n(A).$$

Доказанная симметричность матрицы $B_1 V^{i-1}(A)$ позволяет записать формулу (6.4.30) в виде

$$\frac{\partial q_i(A)}{\partial A} = 2i B_2 A^\top B_1 (V(A))^{i-1}. \tag{6.4.34}$$

С помощью матрицы $Q(A) \in M(m)$ соотношение (6.4.34) можно записать в виде

$$\frac{\partial q_i(A)}{\partial A} = 2i (Q(A))^{i-1} B_2 A^\top B_1. \tag{6.4.35}$$

Индекс зависимости набора функций $q(A)$ с помощью формул (6.4.34), (6.4.35) можно теперь представить в виде

$$\operatorname{dep}(q, A) = \operatorname{rank} \left(\frac{\partial q_1(A)}{\partial A}, \frac{\partial q_2(A)}{\partial A}, \cdots, \frac{\partial q_k(A)}{\partial A} \right) = \tag{6.4.36}$$

$$\dim \operatorname{lin} \left(\frac{\partial q_1(A)}{\partial A}, \frac{\partial q_2(A)}{\partial A}, \cdots, \frac{\partial q_k(A)}{\partial A} \right) =$$

$$\dim((B_2 A^\top B_1) \operatorname{lin}(E_n, V(A), V^2(A), \cdots, V^{k-1}(A))),$$

или с помощью формулы (6.4.35) в виде

$$\operatorname{dep}(q, A) = \dim(\operatorname{lin}(E_m, Q(A), Q^2(A), \cdots, Q^{k-1}(A)) B_2 A^\top B_1). \tag{6.4.37}$$

Далее нам требуется

Лемма 6.4.2 *Если $n \le m$, то существует матрица $A \in \mathrm{GL}(n \times m)$, что матрица $V(A)$ простая, если $n \ge m$, то существует матрица $A \in \mathrm{GL}(n \times m)$, что матрица $Q(A)$ простая.*

Доказательство. Так как матрицы B_i, $i = 1, 2$ симметричны, то они представимы в виде

$$B_i = U_i D_i U_i^\top, \;\; i = 1, 2, \tag{6.4.38}$$

где U_i — ортогональная, а D_i — диагональная квадратные матрицы, той же размерности, что и B_i. Возьмём диагональную матрицу $D \in M(n \times m)$ и положим $A \equiv U_1 D U_2^\top$, тогда матрица $V(A)$ равна

$$V(A) = U_1 D U_2^\top U_2 D_2 U_2^\top U_2 D^\top U_1^\top U_1 D_1 U_1^\top = U_1 D D_2 D^\top D_1 U_1^\top. \tag{6.4.39}$$

В силу (6.4.39) представляющий многочлен матрицы $V(A)$ равен

$$\operatorname{rep}(V(A),\lambda)=\det(\lambda V(A)+E_n)=\det(\lambda DD_2D^TD_1+E_n)=\prod_{i=1}^{k}(1+\lambda d_{1i}d_{2i}d_i^2). \quad (6.4.40)$$

Здесь $k=\min\{n,m\}$, а d_{1i},d_{2i},d_i — диагональные элементы матриц D_1,D_2,D соответственно.

По условию невырожденности матриц B_1 и B_2 верно $d_{1i}\neq 0$, $d_{2i}\neq 0$, при $i=1,2,\dots k$ и выбором чисел $d_i\neq 0$, $i=1,2,\cdots k$ можно добиться, чтобы все корни $\lambda_i=-\frac{1}{d_{1i}d_{2i}d_i^2}$, $i=1,2,\cdots k$ были различны.

Мы построили матрицу $A\in \mathrm{GL}(n\times m)$, для которой представляющий многочлен (6.4.40) имеет k различных корней. Если $k=n$, то матрица $V(A)$ простая по лемме (6.2.5), если $k=m$, то по лемме (6.2.4) многочлены $\operatorname{rep}(V(A),\lambda)$ и $\operatorname{rep}(Q(A),\lambda)$ совпадают и снова по лемме (6.2.5) матрица $Q(A)$ простая.

Продолжим вычисление индекса зависимости $\operatorname{dep}_*(q)$. Если $k=n$, то по лемме (6.4.2) существует матрица $A\in \mathrm{GL}(n\times m)$, что матрица $V(A)$ простая и, следовательно, $\dim\operatorname{lin}(E,V(A),V^2(A),\dots V^{k-1}(A))=k$. Так как $n\geq m$ и матрица $B_2A^\top B_1$ невырождена, то по лемме (6.3.2) получаем

$$\operatorname{dep}(q,A)=\dim((B_2A^\top B_1)\operatorname{lin}(E_n,V(A),V^2(A),\dots V^{k-1}(A)))=k,\ m\geq n. \quad (6.4.41)$$

Аналогично, в случае $k=m$ по лемме (6.4.2) существует матрица $A\in \mathrm{GL}(n\times m)$, что матрица $Q(A)$ простая и, следовательно, $\dim\operatorname{lin}(E_n,Q(A),Q^2(A),\dots Q^{k-1}(A))=k$. Так как $m\geq n$ и матрица $B_2A^\top B_1$ невырождена, то по лемме (6.3.2) получаем

$$\operatorname{dep}(q,A)=\dim((\operatorname{lin}(E_m,Q(A),Q^2(A),\dots Q^{k-1}(A)))B_2A^\top B_1)=k,\ n\geq m. \quad (6.4.42)$$

Формулы (6.4.41, 6.4.42) доказывают, что $\operatorname{dep}_*(q)=k$.

Зафиксируем итоги проведенных в этом пункте рассуждений.

Теорема 6.4.2 . *Если $B_1\in Ms(n)\cap \mathrm{GL}(n)$, $B_2\in Ms(m)\cap \mathrm{GL}(m)$, $k=\min\{n,m\}$, то k функций $q(A)$ вида (6.4.27) являются глобальными инвариантами группы Ω_{12} на пространстве $M(n\times m)$ и индекс зависимости $\operatorname{dep}_*(q)=k$. Основное множество $Bd(q)$ открыто, всюду плотно в $M(n\times m)$, его группа симметрии содержит группу Ω_{12}. Если точка $A\in Bd(q)$, то все точки прямой, соединяющей точку A с нулем, кроме самого нуля, принадлежат $Bd(q)$ и на любой прямой, проходящей через точку A, может лежать не более k^2 точек исключительного множества.*

Объединяя теорему (6.4.1), следствие (6.4.1) и теорему (6.4.2), мы приходим к следующему выводу.

Теорема 6.4.3 . *Если $B_1\in Ms(n)\cap \mathrm{GL}(n)$, $B_2\in Ms(m)\cap \mathrm{GL}(m)$, $k=\min\{n,m\}$, то k функций $q_1(A),q_2(A),\dots q_k(A)$ вида (6.4.27) образуют МБЛИ группы Ω_{12} в точках множества $Bs\equiv Bs(l(\Omega_{12}))\cap Bd(q)$. Множество Bs открыто и всюду плотно в $M(n\times m)$, его группа симметрии содержит группу Ω_{12}. Если точка $A\in Bs$, то все точки прямой, соединяющей точку A с нулем, кроме самого нуля, принадлежат Bs и на любой прямой, проходящей через точку A, может лежать не более $nm+k^2-k$ точек дополнительного к Bs множества.*

6.4.4 Случай $n = m = 3$, $B_1 = B_2 = E_3 = E \in M(3)$. Применим развитую в этом параграфе теорию к случаю $n = m = 3$, $B_1 = B_2 = E_3 = E \in M(3)$. Тогда $\Omega^\top(B_1) = \Omega(B_1) = \Omega(B_2) = O(3)$ — ортогональная группа. Согласно теореме 6.4.3 минимальный базис локальных инвариантов (МБЛИ) группы $\Omega_{12} = O(3) \times O(3)$ в этом случае образуют 3 полинома

$$q_i(A) \equiv t_i(AA^\top) = \Big\langle (AA^\top)^i, E \Big\rangle, \ i = 1, 2, 3 \tag{6.4.43}$$

на открытом всюду плотном в $M(3)$ основном множестве $Bs \subset M(3)$. Согласно §6.2 пункты 6.2.6, 6.2.7 МБЛИ с тем же основным множеством Bs образуют 3 полинома

$$s_i(AA^\top), \quad i = 1, 2, 3 \tag{6.4.44}$$

и 3 полинома $qs_i(A)$ вида

$$qs_1(A) = t_1(AA^\top), \ qs_2(A) = t_2(AA^\top), \ qs_3(A) = s_3(AA^\top). \tag{6.4.45}$$

Рассмотрим третий полином

$$qs_3(A) = s_3(AA^\top) = \det(AA^\top) = (\det A)^2 \tag{6.4.46}$$

и заметим, что функция $\det A$ не является инвариантом левого действия группы $\Omega^\top(E) = O(3)$ ибо группа $O(3)$ содержит матрицу $-E$ и $\det(-EA) = -\det A$. Но функция $\det A$ является глобальным инвариантом группы $\Omega_{12e} = \Omega_e^\top(B_1) \times \Omega_e(B_2)$ — связной компоненты единицы группы Ω_{12}, так как если $G_1 \in SO(3)$ и $G_2 \in SO(3)$, то $\det G_1 = \det G_2 = 1$ и $\det(G_1 A G_2^{-1}) = \det G_1 \det A \det G_2^{-1} = \det A$.

Поэтому 3 функции от матрицы $A \in M(3)$ вида

$$\Big\langle AA^\top, E \Big\rangle, \ \det A, \ \Big\langle (AA^\top)^2, E \Big\rangle \tag{6.4.47}$$

будут глобальными инвариантами группы Ω_{12e} на $M(3)$ и образуют МБЛИ группы Ω_{12} в точках некоторого открытого всюду плотного в $M(3)$ основного множества Bs, группа симметрии которого содержит группу Ω_{12e}.

Замечание 6.4.1 . *Точка $A = E$ не принадлежит основным множествам наборов функций (6.4.43, 6.4.44, 6.4.45, 6.4.47), ибо в этой точке индекс зависимости для этих наборов равен* 1.

6.4.5 Случай $n = 3$, $m = 4$, $B_1 = E_3$, $B_2 = E_4$. Следующий пример приложения теории — случай $n = 3$, $m = 4$, $B_1 = E_3$, $B_2 = E_4$. Возьмём две подгруппы Ли $S_1 = \Omega_e^\top(B_1) = \Omega_e(B_1) = \Omega_e(E_3) = O(3)$,

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0\ 0\ 0 \\ 0 & \\ 0 & \Omega_e(E_3) \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\ 0\ 0 \\ 0 & \\ 0 & O_e(3) \\ 0 & \end{pmatrix} \subset \Omega_e(E_4) = O_e(4)$$

и подгруппу Ли $S \equiv S_1 \times S_2 \subset \Omega_e^\top(B_1) \times \Omega_e(B_2)$. Проведём построение базиса локальных инвариантов группы S.

Вычислим, во-первых, индекс $r_*(l(S))$ группы S. По лемме 6.4.1 имеем $r_*(l(S)) = rl_*(l(S_1)) + rr_*(l(S_2))$. По лемме 6.3.3 имеем $rl_*(l(S_1)) = \dim S_1 = 3$. Далее $rr_*(l(S_2)) \le \dim S_2$, но для матрицы $A \equiv \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ 0 & E_3 \\ 0 & \end{array}\right)$ имеем

$$rr(l(S_2), A) = \dim(Al(S_2)) = \dim\left(\left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ 0 & E_3 \\ 0 & \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0\ 0\ 0 \\ 0 & \\ 0 & Ma(3) \\ 0 & \end{pmatrix}\right) = \tag{6.4.48}$$

$$\dim\left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ 0 & Ma(3) \\ 0 & \end{array}\right) = 3.$$

Получаем, что $rr_*(l(S_2)) = 3$ и, следовательно,

$$r_*(l(S)) = 6. \tag{6.4.49}$$

Следующая задача — построение

$$k = \dim\left(M(3\times 4)\right) - r_*(l(S)) = 12 - 6 = 6$$

функционально независимых инвариантов группы S. Будем записывать матрицу $A \in M(3\times 4)$ в виде

$$A = \left(b \,\middle|\, X\right), \tag{6.4.50}$$

где $b \in \mathbf{R}^3$, $X \in M(3)$, т.е. представим пространство $M(3\times 4)$ в виде прямой суммы $M(3\times 4) = \mathbf{R}^3 \oplus M(3)$. Действие оператора T_{G_1,G_2} на матрицу A тогда можно записать в следующей форме. Пусть $G_1 = Q_1 \in O(3)$, $G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0\ 0\ 0 \\ 0 & \\ 0 & Q_2^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix}$, где $Q_2 \in O(3)$ и $A' \equiv T_{G_1,G_2}(A)$, тогда

$$b' = Q_1 b, \quad X' = Q_1 \times Q_2^{-1}. \tag{6.4.51}$$

Закон преобразования матрицы $X \in M(3)$ согласно предыдущему пункту означает, что следующие 3 функции являются глобальными инвариантами группы S:

$$g_i(A) \equiv t_i(XX^\top) = \left\langle (XX^\top)^i, E_3 \right\rangle, \quad i = 1, 2, 3. \tag{6.4.52}$$

С помощью формул (6.4.51) проверяем, что следующие 3 функции на $M(3\times 4)$ также глобальные инварианты группы S:

$$g_4(A) \equiv \langle b, b\rangle\,,\ g_5(A) \equiv \left\langle (XX^\top)b, b\right\rangle,\ g_6(A) \equiv \left\langle (XX^\top)^2 b, b\right\rangle. \tag{6.4.53}$$

В самом деле

$$X'(X')^\top = Q_1 X Q_2^{-1} Q_2 X^\top Q_1^\top = Q_1 X X^\top Q_1^\top,$$

$$\left\langle (X'(X')^\top)^i b', b'\right\rangle = \left\langle Q_1 (XX^\top)^i Q_1^\top Q_1 b, Q_1 b\right\rangle = \left\langle (XX^\top)^i b, b\right\rangle,\ i = 0, 1, 2.$$

Теперь покажем, что индекс зависимости функций $\operatorname{dep}_*(g_1, g_2, \dots g_6) = 6$.

Сначала заметим, что разбиению матрицы $A = (b|\,X)$ на две матрицы $b \in M(3 \times 1)$ и $X \in M(3 \times 3)$ соответствует разбиение производной числовой функции $f(A)$ следующего вида

$$\frac{\partial f}{\partial A}(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial b} \\ \frac{\partial f}{\partial X} \end{pmatrix}, \tag{6.4.54}$$

где $\frac{\partial f}{\partial b}(b, X) \in M^{\top}(3 \times 1)$, $\frac{\partial f}{\partial X}(b, X) \in M^{\top}(3 \times 3)$. В самом деле, по определению

$$df(A) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial A}(A), dA^{\top} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial A}(A), \begin{pmatrix} db^{\top} \\ dX^{\top} \end{pmatrix} \right\rangle = \tag{6.4.55}$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial A}(b, X), db^{\top} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial X}(b, X), dX^{\top} \right\rangle.$$

Из равенств (6.4.55) следует, что частная производная $\frac{\partial f(b,X)}{\partial b}$ совпадает с первой строкой матрицы $\frac{\partial f}{\partial A}$, а частная производная $\frac{\partial f(b,X)}{\partial X}$ совпадает с оставшейся матрицей 3×3 в матрице $\frac{\partial f(A)}{\partial A}$.

Частные производные по аргументу $b \in M(3 \times 1)$ первых трёх функций $g_i(A)$ равны нулю в силу их вида (6.4.52). Дифференциал функций $g_i(A)$ при $i = 1, 2, 3$ равен

$$dg_i(A) = d\left\langle (XX^{\top})^i, E \right\rangle = i\left\langle (XX^{\top})^{i-1} d(XX^{\top}), E \right\rangle = \tag{6.4.56}$$

$$i\left(\left\langle (XX^{\top})^{i-1}(dX)X^{\top}, E \right\rangle + \left\langle (XX^{\top})^{i-1}X(dX^{\top}), E \right\rangle\right) =$$

$$i\left\langle (X^{\top}(XX^{\top})^{i-1} + X^{\top}(XX^{\top})^{i-1})dX, E \right\rangle.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial g_i(b, X)}{\partial X} = 2iX^{\top}(XX^{\top})^{i-1}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{6.4.57}$$

Вычислим также частные производные функций g_4, g_5, g_6 по аргументу $b \in M(3 \times 1)$. Дифференциал этих функций при постоянном аргументе $X \in M(3)$ равен

$$dg_i(b, X) = d\left\langle (XX^{\top})^{i-4}b, b \right\rangle = \left\langle (XX^{\top})^{i-4}db, b \right\rangle + \left\langle (XX^{\top})^{i-4}b, db \right\rangle =$$

$$2\left\langle (XX^{\top})^{i-4}b, db \right\rangle, \quad i = 4, 5, 6.$$

Откуда

$$\frac{\partial g_i(b, x)}{\partial b} = 2\left((XX^{\top})^{i-4}b\right)^{\top}, \quad i = 4, 5, 6. \tag{6.4.58}$$

Положим теперь $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и покажем, что тогда $\operatorname{dep}((g_1, g_2, \ldots g_6), A) = 6$. В самом деле

$$\operatorname{dep}((g_1, g_2, \ldots g_6), A) = \operatorname{rank}\left(\frac{\partial g_1}{\partial A}(A), \frac{\partial g_2}{\partial A}(A), \cdots \frac{\partial g_6}{\partial A}(A)\right).$$

Убедимся, что в данном случае все вектора $\frac{\partial g_i}{\partial A}(A) \in M^\top(3\times 4)$, $i = 1, 2, \ldots 6$ линейно независимы. Так как все собственные значения матрицы $(XX^\top)$ различные и ненулевые, то три матрицы $X^\top E$, $X^\top(XX^\top)$, $X^\top(XX^\top)^2$ линейно независимы. Три вектора $b, (XX^\top)b, (XX^\top)^2 b$, составляющие невырожденную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2^2 & 2^4 \\ 1 & 3^2 & 3^4 \end{pmatrix} \tag{6.4.59}$$

также независимы. Если бы 6 матриц $\frac{\partial g_i}{\partial A}(A)$, $i = 1, 2, \ldots 6$ оказались линейно зависимы, то нашлись бы 6 чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_6$, не все равные нулю, такие, что $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial A}(A) = 0$. Но тогда выполнялись бы два соотношения

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial b}(b, A) = 0, \tag{6.4.60}$$

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial X}(b, X) = 0. \tag{6.4.61}$$

Соотношение (6.4.60) принимает вид

$$(\lambda_4 b + \lambda_5 (XX^\top) b + \lambda_6 (XX^\top)^2 b)^\top = 0,$$

откуда, в силу линейной независимости векторов $b, (XX^\top)b, (XX^\top)^2 b$ следует $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$. Тогда соотношение (6.4.61) принимает вид

$$\lambda_1 X^\top + \lambda_2 X^\top (XX^\top) + \lambda_3 X^\top (XX^\top)^2 = 0,$$

откуда, в силу линейной независимости матриц следует $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Итак, мы доказали, что в данной точке $A \in M(3\times 4)$ верно $\operatorname{dep}(g, A) = 6$, а, следовательно, и $\operatorname{dep}_*(g) = 6$, где $g \equiv (g_1, g_2, \ldots g_6)$.

Подведем итоги рассмотрений данного пункта.

Вывод 6.4.1 $r_*(l(S)) = 6$. *Основное множество $Bs(l(S))$ открыто, всюду плотно в $M(3\times 4)$, его группа симметрии содержит группу S. Если $A \in Bs(l(S))$, то $\lambda A \in Bs(l(S))$ при $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$ и на любой прямой, проходящей через точку A, в $M(3\times 4)$ может лежать не более 6 точек дополнительного множества.*

Вывод 6.4.2 $\operatorname{dep}_*(g) = 6$. *Основное множество $Bd(g)$ открыто, всюду плотно в $M(3\times 4)$, его группа симметрии содержит группу S. Если $A \in Bd(g)$, то $\lambda A \in Bd(g)$ при $\lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq 0$ и на любой прямой, проходящей через точку A, в $M(3\times 4)$ может лежать не более 18 точек дополнительного множества.*

Вывод 6.4.3 *Основное множество $Bs \equiv Bs(l(S)) \bigcap Bd(g)$, открыто, всюду плотно в $M(3\times 4)$, его группа симметрии содержит группу S. Если $A \in Bs$, то $\lambda A \in Bs$ при $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$ и на любой прямой, проходящей через точку A может лежать не более 24 точек дополнительного множества. Во всех точках множества Bs функции $g(A)$ образуют МБЛИ группы S.*

Замечание 6.4.2 *Если мы заменим первые 3 функции $g_i(A) = t_i(XX^\top)$ на функции $s_i(XX^\top)$, то основное множество $Bd(g')$ нового набора инвариантов группы S не изменится $Bd(g') = Bd(g)$ и останутся в силе выводы $1--3$. Аналогичное замечание верно при замене третьей функции $g_3(A) = t_3(XX^\top)$ на функцию $S_3(XX^\top)$.*

Замечание 6.4.3 *Если в наборе функций $g_1(A), g_2(A), \ldots g_6(A)$ заменить функцию $g_3(A) = s_3(XX^\top) = (\det X)^2$ на функцию $g_3' \equiv \det X$, то получим набор функций $g'(A)$, которые будут глобальными инвариантами группы S.*

Выводы 6.4.2 и 6.4.3 для функций $g'(A)$ будут верными при следующих изменениях: в выводе 6.4.2 число 18 заменяется на число 15, а в выводе 6.4.3 число 24 на число 21.

Напомним, что в силу предыдущего пункта точка $A = \begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & E_3 \\ 0 & \end{pmatrix} \notin Bs(l(S))$, ибо в ней $r(l(S), A) = 3$.

Глава 7

Кольцо последовательностей $SA(n, K)$

Пусть $W \in \mathbf{C}^n$, $n \in \mathbf{N}$ окрестность нуля и $f : W \to \mathbf{C}$ аналитическое отображение. Тогда в некоторой окрестности нуля $U \in W$ данная аналитическая функция $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ комплексных аргументов $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \equiv z \in \mathbf{C}^n$ допускает представление в виде суммы абсолютно и равномерно сходящегося ряда (ряда Тейлора функции)

$$f(z) = \sum_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} a(i) z^i, \tag{7.0.1}$$

где $i \equiv (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in {\mathbf{N}_o}^n$, $z^i \equiv z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n}$, $a(i) \equiv (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathbf{C}$. Таким образом, каждой аналитической функции f, заданной в окрестности нуля, ставится в соответствие последовательность $a = \{a(i)\}_{i \in \mathbf{N}_o{}^n}$ её коэффициентов разложения в ряд Тейлора. Обозначим через $SA(n, \mathbf{C})$ пространство всех отображений $a : \mathbf{N}_o{}^n \to \mathbf{C}$ или последовательностей. Тогда соответствие $f \mapsto a$ переносит основные операции над функциями: умножение на скаляр, сложение, умножение, взятие суперпозиции, — в соответствующие операции над последовательностями: умножение на скаляр, сложение, свёртка, суперпозиция. Хотя не всякой последовательности $a \in SA(n, \mathbf{C})$ соответствует аналитическая функция f..

В данной главе изучаются свойства операций над последовательностями из $SA(n, K) = K^{\mathbf{N}_o{}^n}$, где K — кольцо, вообще говоря, некоммутативное. Для пространств последовательностей устанавливаются аналоги теоремы об обратной функции для операций свёртки и суперпозиции.

На пространстве последовательностей $K^{\mathbf{N}_o{}^n}$ вводится две топологии произведения. В первом случае на топологическом кольце K берётся заданная топология и получается "рутинная"топология на кольце $K^{\mathbf{N}_o{}^n}$. Во втором случае на кольце K берётся дискретная топология и получается "чековая"топология на кольце $K^{\mathbf{N}_o{}^n}$. С помощью введенной чековой топологии последовательности $a \in SA(n, K)$ ставится в соответствие ряд $\sum\limits_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(i)h^i$, суммируемый в топологическом кольце $SA(n, K)$, где $h \equiv (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ и $h_\alpha \in SA(n, K)$ есть последовательность, такая что $h_\alpha = 1$, если $i = \vec{k}_\alpha$, и $h_\alpha = 0$, при $i \neq \vec{k}_\alpha$, где $\vec{k}_\alpha \in \mathbf{N}_o{}^n$ есть мультииндекс, у которого координата с номером α равна единице, а остальные координаты — нули, $\alpha \in \overline{1, n}$. Таким образом, формальный степенной ряд заменяется на ряд в топологическом кольце $SA(n, K)$.

Используя технику пространств последовательностей $SA(n, K)$, в этой главе в §§ 7.4–7.7 рассматривается также вопрос о *поднятии* функций. А именно, пусть $I : K_1 \to K_2$ — морфизм топологических колец. Пусть $\varphi : W_1 \to K_1$ отображение окрестности нуля $W_1 \subset K_1^n$ в топологическое кольцо K_1. Пусть $\psi : W_2 \to K_2$ отображение окрестности нуля $W_2 \subset K_2^n$ в топологическое кольцо K_2. Отображение ψ есть I-поднятие отображения φ, если в некоторой окрестности нуля верно равенство

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W \;\Big|\; \psi(I(x_1), I(x_2) \ldots, I(x_n)) = I(\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Последовательности коэффициентов Тейлора $a_\varphi \in SA(n, K_1)$ и $a_\psi \in SA(n, K_2)$ функций φ и ψ, соответственно, тогда связаны равенством $a_\psi(i) = I(a_\varphi(i))$ при любом $i \in \mathbf{N}_o{}^n$. Теорема 7.4.1 гарантирует существование поднятия для случая, когда топологические модули K_1 и K_2 являются банаховыми алгебрами, а гомоморфизм $I : K_1 \to K_2$ — гомоморфизм банаховых алгебр. Теорема 7.4.1 позволяет естественно определить простейшие аналитические функции, например, экспоненту и логарифм, заданные первоначально для числового аргумента, на любой банаховой алгебре.

§ 7.1 Вложение кольца K в кольцо последовательностей $SA(n, K)$

7.1.1 Кольцо последовательностей $SA(n, K)$. Пусть K — кольцо. Здесь и далее в алгебраических вопросах мы в основном придерживаемся терминологии книги Ленга [7], т.е. моноид — множество с ассоциативным внутренним законом композиции, имеющим нейтральный элемент, а кольцо есть множество с двумя внутренними законами композиции: сложением и умножением, так что по сложению кольцо является коммутативной группой, по умножению — моноидом и выполнены условия дистрибутивности. Итак, в нашей терминологии кольцо всегда обладает единицей по умножению.

Пусть $B \subset K$. Через $Kom_K(B)$ обозначим множество всех элементов $\lambda \in K$, которые коммутируют с каждым элементом множества B. Множество $Kom_K(B) \subset K$ подкольцо кольца K. Центр кольца $Z(K) \equiv Kom_K(K)$, т.е. множество всех элементов $\lambda \in K$, коммутирующих с каждым элементом из K, есть коммутативное подкольцо, содержащее элементы нуль — 0 и единица — 1. Равенство $Z(K) = K$ эквивалентно коммутативности кольца K.

Через $i, j \in \mathbf{N}_o{}^n$ мы обозначаем целочисленные вектора $i \equiv (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, где $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathbf{N}_o$. Полагаем $|\, i \,| \equiv \sum_{\alpha=1}^{n} i_\alpha$, т.е. по определению $|\, i \,| \in \mathbf{N}_o$ и $|\, i + j \,| = |\, i \,| + |\, j \,|$ для любых $i, j \in \mathbf{N}_o{}^n$. Множество $\mathbf{N}_o{}^n$ с операцией покоординатного сложения векторов — аддитивный моноид.

На множестве $\mathbf{N}_o{}^n$ введём отношение частичного упорядочивания, а именно положим $i \le j$, если $i_\alpha \le j_\alpha$ при всех $\alpha \in \overline{1, n}$. Если $i \le j$ и $i \ne j$, то $i < j$. Если $i < j$, то $|\, i \,| < |\, j \,|$.

Элементы множества кольца последовательностей $SA(n, K)$ определим как отображения $a : \mathbf{N}_o{}^n \to K$ или последовательности $\{a(i)\}_{i \in \mathbf{N}_o{}^n}$ элементов $a(i) \in K$, зависящие от n целых неотрицательных индексов $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \equiv i$. На множестве $SA(n, K)$ определим следующие четыре закона композиции. Два внешних — покоординатное умножение слева на элемент $\lambda \in K : (\lambda a)(i) \equiv \lambda a(i),\ i \in \mathbf{N}_o{}^n$, и покоординатное умножение справа на элемент $\lambda \in K : (a\lambda)(i) \equiv a(i)\lambda,\ i \in \mathbf{N}_o{}^n$. Внутренний закон композиции — покоординатное сложение последовательностей: $c = a + b$ означает, что $c(i) = a(i) + b(i),\ i \in \mathbf{N}_o{}^n$. Внутренний закон композиции — свёртка последовательностей $c = a * b$ означает, что

$$c(l) = \sum_{\substack{i,j \in \mathbf{N}_o{}^n \\ i+j=l}} a(i)b(j), \quad l \in \mathbf{N}_o{}^n. \tag{7.1.1}$$

Операции сложения и свёртки задают на множестве $SA(n, K)$ структуру кольца, нуль которого последовательность, все координаты которой нулевые, а единица кольца $SA(n, K)$ которую мы обозначаем через e — последовательность у которой $e(0) = 1, e(i) = 0$ при $i \ne 0$.

По определению положим $SA(0, K) \equiv K$.

Введём отображение $J : K \to SA(n, K)$, сопоставляющее элементу $\lambda \in K$ элемент $\lambda e \in SA(n, K)$. Отображение $J : K \to SA(n, K)$ является инъективным гомоморфизмом кольца K в кольцо $SA(n, K)$, т.е. J — гомоморфное вложение кольца K в кольцо $SA(n, K)$. Отображение J является также гомоморфизмом левых и правых модулей над K. Заметим, что само кольцо K можно рассматривать как левый модуль над K и как правый модуль над K.

Если последовательность $a \in SA(n, K)$, то элементы $a(i) \in K, i \in \mathbf{N}_o{}^n$ мы называем координатами последовательности a.

Определим отображение $P : SA(n, K) \to K$ правилом $P(a) \equiv a(0)$. Отображение $P : SA(n, K) \to K$ сюръективный гомоморфизм колец и левых и правых модулей над K. Кроме того, справедливо равенство $PJ = Id$ — тождественное отображение K на K. Кольцевые гомоморфизмы J и K позволяют отождествить кольцо K со множеством элементов $SAT(n, K) \equiv J(K)$, т.е. всех элементов вида $\lambda e \in SA(n, K)$, где

$\lambda \in K$. Множество $SAT(n,K) \subset SA(n,K)$ подкольцо и левый и правый подмодуль в $SA(n,K)$. Введём также двусторонний идеал $SAG(n,K) \equiv \{a \in SA(n,K) \mid a(0) = 0\}$. Для любой последовательности $a \in SA(n,K)$ справедливо единственное разложение $a = a' + a''$, где $a' \in SAT(n,K), a'' \in SAG(n,K)$. Элемент a' мы называем *вещной* частью, а элемент a'' — *духовой* частью элемента a.

Центр кольца $SA(n,K)$ следующим образом связан с центром кольца K.

Лемма 7.1.1 *Справедливо равенство*

$$Z(SA(n,K)) = SA(n,Z(K)).$$

Доказательство. Если $a \in Z(SA(n,K)$, то элемент a коммутирует со всеми элементами из $SA(n,K)$ и, в частности, со всеми элементами вида $\lambda e \in SA(n,K), \lambda \in K$. Тогда при любом $\lambda \in K$ верно $\lambda a = a\lambda$, т.е. $\lambda a(i) = a(i)\lambda$ при любом фиксированном $i \in {\mathbf{N}_o}^n$ и любом $\lambda \in K$. Отсюда $a(i) \in Z(K)$ и $a \in SA(n,Z(K))$.

Наоборот, если $a \in SA(n,Z(K))$, то для любого элемента $b \in SA(n,K)$ имеем

$$(a * b)(l) = \sum_{\substack{i,j \in {\mathbf{N}_o}^n \\ i+j=l}} a(i)b(j) = \sum_{\substack{i,j \in {\mathbf{N}_o}^n \\ i+j=l}} b(j)a(i) = (b * a)(l),$$

откуда $a * b = b * a$.$\diamondsuit$

Следствие 7.1.1 *Кольцо $SA(n,K)$ коммутативно тогда и только тогда, когда кольцо K коммутативно.*

Следствие 7.1.2 *Если кольцо K коммутативно, то $SA(n,K)$ коммутативная ассоциативная алгебра с единицей над кольцом K.*

Следствие 7.1.3 *(Из доказательства) Верно равенство $Kom_{SA(n,K)}(SAT(n,K)) = Z(SA(n,K))$.*

Далее для последовательностей $a, b \in SA(n,K)$ свёртку элементов мы будем обозначать $a * b \equiv ab$ и называть умножением в кольце последовательностей $SA(n,K)$. Заметим ещё раз, что $SA(n,K)$ в общем случае некоммутативного кольца K также имеет структуры правого и левого модулей над кольцом K, причём имеет место ассоциативность в следующем смысле. Если $a, b \in SA(n,K)$ и $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$, то в произведение $\lambda_1 a \lambda_2 b \lambda_3$ скобки могут быть поставлены в любом порядке, т.е., например , $(\lambda_1(a\lambda_2))(b\lambda_3) = (\lambda_1 a)((\lambda_2 b)\lambda_3)$.

Ассоциативную алгебру с единицей мы называем *унитальной*.

Пример 7.1.1

$K = \mathbf{R}$. В этом случае $SA(n,\mathbf{R})$ — коммутативная унитальная алгебра, $SAG(n,\mathbf{R})$ — максимальный идеал.

Пример 7.1.2

$K = \mathbf{C}$. Также $SA(n,\mathbf{C})$ — коммутативная унитальная алгебра, $SAG(n,\mathbf{C})$ — максимальный идеал.

Пример 7.1.3

$K = \mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — баханова алгебра над полем Λ, где $\Lambda = \mathbf{R}$ или $\Lambda = \mathbf{C}$. Если алгебра $\mathbf{A}$ некоммутативна, то и кольцо $SA(n, \mathbf{A})$ некоммутативно.

Пример 7.1.3 в случае некоммутативной алгебры $\mathbf{A}$ будет использован далее и мотивирует рассмотрение нами случая некоммутативного кольца K, не являющегося телом, в частности, для случая когда $\mathbf{A}$ — алгебра линейных непрерывных операторов на банаховом пространстве.

Операция перехода от кольца K к кольцу $SA(n, K)$ может быть применена повторно, а именно по кольцу $SA(n, K)$ можно построить кольцо $SA(m, SA(n, K))$. Однако, оказывается $SA(n, SA(m, K)) = SA(n + m, K)$, более точно, существует некоторый естественный гомоморфизм кольцевой и модульный $SA(n, SA(m, K))$ и $SA(n + m, K)$. В самом деле, если $a \in SA(n, SA(m, K))$, то при любом $i \in {\mathbf{N}_o}^n$ элемент $a(i) \in SA(m, K)$, т.е. $a(i)$ есть последовательность $a(i)(j)$, где $j \in {\mathbf{N}_o}^m, a(i)(j) \in K$. Итак, $a(i, j) \equiv a(i)(j)$ есть элемент $SA(n + m, K)$. Наоборот, если $a \in SA(n + m, K)$, то $l \in {\mathbf{N}_o}^{n+m}$ запишем в виде $l = (i, j)$, где $i \in {\mathbf{N}_o}^n, j \in {\mathbf{N}_o}^m$. Тогда $a(l) = a(i, j)$ при фиксированном $i \in {\mathbf{N}_o}^n$ есть элемент $SA(m, K)$, т.е. $a \in SA(n, SA(m, K))$. Пусть $a \in SA(n + m, K), b \in SA(n + m, K)$, тогда для произведения при любом $l \in {\mathbf{N}_o}^{n+m},\ l = (i, j)$ получаем

$$(ab)(l) = \sum_{\substack{l',l'' \in {\mathbf{N}_o}^{n+m} \\ l'+l''=l}} a(l')b(l'') = \sum_{\substack{i',i'' \in {\mathbf{N}_o}^n;\ j',j'' \in {\mathbf{N}_o}^m \\ i'+i''=i;\ j'+j''=j}} a(i', j')b(i'', j'') =$$

$$\sum_{\substack{i',i'' \in {\mathbf{N}_o}^n \\ i'+i''=i}} \left(\sum_{\substack{j',j'' \in {\mathbf{N}_o}^m \\ j'+j''=j}} a(i', j')b(i'', j'') \right) = \sum_{i'+i''=i} \left(a(i')b(i'')\right)(j) = \left(\sum_{i'+i''=i} a(i')b(i'') \right)(j),$$

т.е. произведению элементов в $SA(n, SA(m, K))$ соответствует произведение элементов в $SA((n + m), K)$.

Замечание 7.1.1 *Перестановка $\sigma : \overline{1, n} \to \overline{1, n}$ множества n чисел $1, 2, \ldots, n \equiv \overline{1, n}$ удалённых изоморфизм кольцевой и модульный $SA(n, K)$ на себя $a(i_1, i_2, \ldots, i_n) \to a(i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \ldots, i_{\sigma(n)})$.*

7.1.2 Кольцо формальных степенных рядов $SA(n, K)$.

Введём n формальных символов $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Определим для каждого мультииндекса $i \in {\mathbf{N}_o}^n$ символ

$$z^i \equiv z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n}. \tag{7.1.2}$$

Каждой последовательности $a \in SA(n, K)$ сопоставим формальный степенной ряд

$$\sum_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} a(i) z^i. \tag{7.1.3}$$

Множество формальных степенных рядов обозначим $RA(n, K)$ и перенесём четыре закона композиции, заданных на пространстве последовательностей, на формальные степенные ряды. Т.е. левое умножение формального степенного ряда на скаляр $\lambda \in K$ имеет вид

$$\lambda \left(\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(i) z^i \right) \equiv \sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} \lambda a(i) z^i \tag{7.1.4}$$

и правое умножение на скаляр $\lambda \in K$ —

$$\left(\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(i) z^i \right) \lambda \equiv \sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} (a(i)\lambda) z^i. \tag{7.1.5}$$

Сложение формальных степенных рядов имеет вид

$$\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(i) z^i + \sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} b(i) z^i \equiv \sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} (a(i) + b(i)) z^i. \tag{7.1.6}$$

Произведение формальных степенных рядов получается перемножением всех слагаемых первой и второй суммы друг на друга и последующей группировкой. Более точно, по определению

$$(\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(i) z^i)(\sum_{j \in \mathbf{N}_o{}^n} b(j) z^j) \equiv \sum_{l \in \mathbf{N}_o{}^n} \left(\sum_{\substack{i,j \in \mathbf{N}_o{}^n \\ i+j=l}} a(i) b(j) \right) z^l. \tag{7.1.7}$$

Соответствие $\sum\limits_{\{i \in \mathbf{N}_o{}^n\}} a(i) z^i \to a$ по определению изоморфизм кольцевой и модульный $RA(n,K)$ и $SA(n,K)$. Обозначим этот изоморфизм $\mathcal{T}rs : RA(n,K) \to SA(n,K)$. Преимущество записи в виде формального степенного ряда заключается в аналогии с обычными степенными рядами позволяющей использовать соответствующую интуицию. Недостаток записи в виде формального степенного ряда — некоторая неопределённость смысла величин $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Величины $z_1, z_2, \ldots, z_n$ мы точно определим позднее в параграфе 7.2.

Заметим, что при формальном перемножением рядов (7.1.7) мы полагаем, что

$$a(i) z^i b(j) z^j = a(i) b(j) z^i z^j, \tag{7.1.8}$$

$$z^i z^j = z^{i+j}. \tag{7.1.9}$$

Для выполнения равенства (7.1.8) требуется, чтобы коммутировали величины $b(j)$ и z^i, а для выполнения равенства (7.1.9) — чтобы коммутировали величины z^j и z^i.

Напомним, что излагаемая теория формальных степенных рядов, отличается от изложенной у Н. Бурбаки (см. [76], глава 4, § 5) вообще говоря, некоммутативностью кольца K.

В двустороннем модуле $RA(n,K)$ формальных рядов естественно определяются линейные операторы следующих типов: 1) умножение на фиксированный формальный ряд слева (справа) является право (лево) линейной операцией над кольцом K, 2) n операторов формального дифференцирования

$$D_\alpha \left(\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(i) z^i \right) = \sum_{\left\{ i \in \mathbf{N}_o{}^n \,\middle|\, i_\alpha \geq 1 \right\}} i_\alpha a(i) z^{i - \vec{k_\alpha}}, \tag{7.1.10}$$

где $\vec{k_\alpha} \in \mathbf{N}_o{}^n$, $\alpha \in \overline{1,n}$ имеет координату с номером α равной 1, я остальные — нулю. Операторы формального дифференцирования двусторонне линейны и коммутируют между собой, так как центр $Z(K)$ кольца K содержит все элементы вида $n \cdot 1$, где n — целое число, а 1 — единица кольца K.

Для изучения формальных рядов — естественный путь выделения в кольце $RA(n,K)$ подколец, для которых существует богатая аналитическая техника. Здесь мы применим способ выделения подколец в $RA(n,K)$ аналогичный теоремам вложения функционального анализа.

Пусть $\mathcal{A}$ — кольцо и $\mathcal{T}or : \mathcal{A} \to RA(n,K)$ кольцевой гомоморфизм, тогда $\mathcal{T}or(\mathcal{A}) \subset RA(n,K)$ подкольцо в кольце $RA(n,K)$ и алгебраическим действиям над элементами из кольца $\mathcal{A}$ соответствуют алгебраические действия над элементами из подкольца $\mathcal{T}or(\mathcal{A})$.

Пример 7.1.4

Пусть $\Lambda = \mathbf{R}$ или $\Lambda = \mathbf{C}, Z(n,\Lambda)$ — векторное пространство многочленов от n коммутирующих переменных над полем Λ. Через $DA(n,\Lambda)$ обозначим алгебру дифференциальных операторов вида $A \equiv \sum\limits_{\{i \in \mathbf{N}_o{}^n\}} a(i)D^i$, а D — оператор формального дифференцирования вида 7.1.10. Тогда алгебра $DA(n,\Lambda)$ естественно изоморфна алгебре $RA(n,\Lambda)$.

Следующим примером является в случае $K = \mathbf{C}$ выделение в качестве алгебры $\mathcal{A}$ — алгебры голоморфных функций, что и составляет сущность метода производящих функций в комбинаторике.

7.1.3 Образы элементов $z_\alpha \in RA(n,K)$, идеалы $SA_n(m,K), n \in \mathbf{N}_o$.

Применим оператор изоморфизма $\mathcal{T}rs : RA(n,K) \to SA(n,K)$ к формальному ряду $\sum\limits_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(i)z^i \equiv z_\alpha$, получим $h_\alpha \equiv \mathcal{T}rs(z_\alpha), \alpha \in \overline{1,n}$, где $h_\alpha(i) = 1$ при $i = \vec{k_\alpha}$ и $h_\alpha(i) = 0$ при $i \neq \vec{k_\alpha}$. Элемент h_α по лемме 7.1.1 принадлежит центру кольца $SA(n,K)$ при любом $\alpha \in \overline{1,n}$, поэтому при любом $i \in \mathbf{N}_o{}^n$ элемент $h^i \equiv h_1^{i_1} h_2^{i_2} \dots h_n^{i_n}$ принадлежит центру кольца $SA(n,K)$ и при любом $\lambda \in K$ верно $\lambda h^i = h^i \lambda$. Так как отображение $\mathcal{T}rs$ кольцевой и модульный изоморфизм, то для любой финитной последовательности $a \in SA(n,K)$ верно равенство

$$\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(i)h^i = \mathcal{T}rs\left(\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(i)z^i\right). \tag{7.1.11}$$

Отметим что элементы $h_1, h_2, \dots, h_n \in Z(SA(n,K))$ удовлетворяют условиям (7.1.8, 7.1.9), если их поставить вместо символов $z_1, z_2, \dots, z_n$ соответственно, т.е. естественно определяется перемножение членов рядов вида

$$\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(i)h^i$$

в кольце $SA(n,K)$. Однако, чтобы распространить равенство (7.1.11) на не финитные последовательности $a \in SA(n,K)$, необходимо сначала придать смысл сумме бесконечного ряда в $SA(n,K)$.

Определим убывающую последовательность идеалов (идеал $\equiv$ двусторонний идеал) в кольце $SA(m, K)$. По определению положим $SA_0(m, K) \equiv SA(m, K)$, а при $n \in \mathbf{N}$ множество $SA_n(m, K)$ состоит из всех таких последовательностей $a \in SA(m, K)$, у которых при $\mid i \mid < n$ все $a(i) = 0$. По определению $SA_1(m, K) \equiv SAG(m, K)$.

Лемма 7.1.2 *Справедливо включение*

$$SA_n(m, K)SA_p(m, K) \subset SA_{n+p}(m, K), \ m, n, p \in \mathbf{N}_o. \tag{7.1.12}$$

Следствие 7.1.4 *Справедливо включение* $(SA_1(m, K))^n \subset SA_n(m, K), \ m, n \in \mathbf{N}_o$.

Замечание 7.1.2 *В случае $K = \Lambda$ — поле комплексных или действительных чисел верно равенство*

$$(SA_1(m, \Lambda))^n = SA_n(m, \Lambda) \tag{7.1.13}$$

при $m = 1$ и любом натуральном n. При $m = 3$ и $n \geq 3$ равенство (7.1.13) не имеет места.

7.1.4 Секвенциальный функтор в категории колец

Введём категорию колец Rin, объекты которой — кольца, а морфизмы — гомоморфизмы колец в терминологии [7]. Мы построили по каждому кольцу K кольцо $SA(n, K), \ n \in \mathbf{N}$. Определим ещё по каждому гомоморфизму колец $\varphi : K_1 \to K_2$ гомоморфизм колец $\psi : SA(n, K_1) \to SA(n, K_2)$ по правилу: если $a \in SA(n, K_1)$, то

$$\forall i \in {\mathbf{N}_o}^n \mid \psi(a)(i) \equiv \varphi(a(i)). \tag{7.1.14}$$

Гомоморфизм колец $\psi : SA(n, K_1) \to SA(n, K_2)$ обладает следующим свойством

$$\psi(h_{\alpha,1}) = h_{\alpha,2} \tag{7.1.15}$$

при любом $\alpha \in \overline{1, n}$, где $h_{\alpha,1} \in SA(n, K_1)$ и $h_{\alpha,2} \in SA(n, K_2)$ элементы, определённые в п. 7.1.3.

Обозначим $\psi \equiv Sec_n(\varphi)$. Тогда если $\varphi_1 : K_1 \to K_2$ и $\varphi_2 : K_2 \to K_3$ гомоморфизмы колец, то по определяющей формуле (7.1.14) $Sec_n(\varphi_2\varphi_1) = Sec_n(\varphi_2)Sec_n(\varphi_1)$, т.е. композиции гомоморфизмов $\varphi_2\varphi_1$ соответствует композиция гомоморфизмов $Sec_n(\varphi_2)Sec_n(\varphi_1)$. Если $\varphi : K \to K$ тождественный морфизм, то согласно (7.1.14) морфизм $Sec_n(\varphi) : SA(n, K) \to SA(n, K)$ также тождественный. Итак, мы построили ковариантный функтор Sec_n из категории колец Rin в категорию колец Rin, который назовём *секвенциальным функтором.* Более того, мы построили последовательность функторов, зависящих от номера $n \in \mathbf{N}$.

В силу п. 7.1.1 функторы Sec_n связаны, а именно

$$Sec_nSec_m = Sec_{n+m} \tag{7.1.16}$$

и в частности

$$Sec_n = (Sec_1)^n. \tag{7.1.17}$$

По построению — формула (7.1.14) отображение $\psi = Sec_m(\varphi)$ инъективно тогда и только тогда, когда отображение φ инъективно.

Секвенциальный функтор обладает следующим свойством, вытекающим из определяющей формулы (7.1.14): для любого $\varphi \in Hom_{Rin}(K_1, K_2)$ и любого $m \in \mathbf{N}_o$ для $\psi = Sec_n(\varphi)$ верно

$$\psi(SA_m(n, K_1)) \subset SA_m(n, K_2). \tag{7.1.18}$$

В ряде случаев далее мы используем *модернизированные* обозначения введённых величин. А именно, для гомоморфизма колец $I : K_1 \to K_2$ гомоморфизм $\mathcal{S}ec_n(I) : \mathcal{S}A(n, K_1) \to \mathcal{S}A(n, K_2)$ будем обозначать той же буквой $I : \mathcal{S}A(n, K_1) \to \mathcal{S}A(n, K_2)$ без указания индекса $n \in \mathbf{N}_o$. Для всякой последовательности $a \in \mathcal{S}A(n, K_1)$ соответственно $Ia \equiv I(a) \equiv \mathcal{S}ec_n(I)(a)$ есть последовательность из $\mathcal{S}A(n, K_2)$, причём

$$\forall i \in {\mathbf{N}_o}^n \mid (Ia)(i) = I(a(i)). \tag{7.1.19}$$

§7.2 Чековая топология в кольце последовательностей

7.2.1 Топологическое кольцо K и топологическое кольцо $SA\,(n, K)$.

Элемент $a \in SA\,(n, k)$ пространства последовательностей есть отображение $a : \mathbf{N}_0^n \to K$, поэтому множество $SA\,(n, K)$ естественно отождествляется с произведением множеств $K^{(\mathbf{N}_0^n)}$. Если K — топологическое кольцо, то вводя на произведении множеств $K^{(\mathbf{N}_0^n)}$ топологию произведения, мы получим топологическое пространство. Итак, если кольцо K топологическое, то и множество $SA\,(n, K)$ превращается с помощью топологических произведений в топологическое кольцо. Более того, $SA\,(n, K)$ является также двусторонним топологическим модулем над топологическим кольцом K. Если топологическое пространство K полно, то и топологическое пространство $SA\,(n, K)$ полно как произведение полных топологических пространств. Отображение проектирования на нулевую координату из п. 7.1.1 $P : SA\,(n, K) \to K$ является непрерывным гомоморфизмом кольцевым и модульным. Отображение вложения $J : K \to SA\,(n, K)$ из п. 7.1.1 также непрерывный кольцевой и модульный гомоморфизм. Более того, J — топологическое вложение.

Если K — коммутативное топологическое кольцо, то $SA\,(n, K)$ — коммутативная унитальная топологическая алгебра.

Определенную таким образом по топологии K топологию на $SA\,(n, K)$ назовём *рутинной.* В случае, когда топология на кольце K дискретна, соответствующую топологию на $SA\,(n, K)$ назовём *чековой.* В чековой топологии $SA\,(n, K)$ — полное топологическое пространство.

Для определения чековой топологии на $SA\,(n, K)$ фактически не требуется предварительного задания топологии на кольце K, т.к. мы всегда можем на кольце K ввести дискретную топологию и в дискретной топологии K становится полным топологическим кольцом, а затем определить чековую топологию на $SA\,(n, K)$. Заметим только, что если мы рассматриваем $SA\,(n, K)$ в чековой топологии как непрерывный топологический модуль, мы должны рассматривать на кольце K дискретную топологию.

Итак, если на кольце K задана некоторая топология, превращающая его в топологическое кольцо K, то на кольце $SA\,(n, K)$ мы определим две топологии: рутинную и чековую. Причём чековая топология всегда мажорирует рутинную.

7.2.2 Сходимость рядов со значениями в аддитивной топологической группе. Сходимость рядов в аддитивной топологической группе в этой главе понимается в смысле сходимости по фильтру конечных множеств Н.Бурбаки (см. [7], гл. 3, § 5).

Пусть I — произвольное множество индексов, G — аддитивная топологическая группа $\{a_\alpha\}_{\alpha\in I}$ семейство элементов $a_\alpha \in G$ топологической группы, занумерованное индексами $\alpha \in I$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{\alpha\in I} a_\alpha. \qquad (7.2.1)$$

Определение 7.2.1 *Элемент $a \in G$ называется суммой ряда (7.2.1), если для любого открытого подмножества $K \in G$ топологической группы G,содержащего точку a, существует конечное подмножество $A \subset I$, что для любого конечного подмножества $B \subset I$, содержащего A, верно включение*

$$\sum_{\alpha\in B} a_\alpha \subset U.$$

Ряд (7.2.1) называется суммируемым, если существует элемент $a \in G$, являющийся его суммой. Если $a \in G$ — сумма ряда (7.2.1), то пишем

$$a = \sum_{\alpha\in I} a_\alpha.$$

Сумма ряда в аддитивной топологической группе обладает следующими свойствами:

1) Не зависит от порядка элементов во множестве индексов I, т.е. если $\varphi : N \to I$ биекция множества N на множество I, $\{a_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — семейство элементов группы G и $a_\beta \equiv a_{\varphi(\beta)}$, $\beta \in N$, то равенство $\sum_{\alpha\in I} a_\alpha = a$ и $\sum_{\beta\in I} a_\beta = a$ эквивалентны.

2) Для сходимости ряда (7.2.1) необходимо выполнение *критерия Коши:* для любой окрестности нуля $U \subset G$ существует конечное множество $A \subset I$, что для любого конечного множества $B \subset I \setminus A$ верно $\sum_{\alpha\in B} a_\alpha \in U$. Если группа G полна, то критерий Коши — необходимое и достаточное условие сходимости ряда (7.2.1).

3) Если G — полная группа, то всякое подсемейство суммируемого семейства суммируемо.

4) Если G — полная группа и $(\alpha, \beta) \in I \times N$ где I, N произвольные множества индексов, то если ряд $\sum\limits_{(\alpha,\beta)\in I\times N} a_{(\alpha,\beta)}$ сходится, то сходятся и повторные ряды, и верно

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in I\times N} a_{(\alpha,\beta)} = \sum_{\alpha\in I}\sum_{\beta\in N} a_{(\alpha,\beta)} = \sum_{\beta\in N}\sum_{\alpha\in I} a_{(\alpha,\beta)}.$$

Пусть $G = K$ — полное топологическое кольцо, тогда выполняются свойства:

5) Если ряд $\sum_{\alpha\in I} a_\alpha$ — суммируем, то для любого $b \in K$

$$\sum_{\alpha\in I} (ba_\alpha) = b\sum_{\alpha\in I} a_\alpha, \quad \sum_{\alpha\in I} (a_\alpha b) = (\sum_{\alpha\in I} a_\alpha)b.$$

6) Если ряды $\sum_{\alpha\in I} a_\alpha$ и $\sum_{\alpha\in I} b_\alpha$, определенные на одном множестве индексов, суммируемы, то

$$\sum_{\alpha\in I} a_\alpha + \sum_{\alpha\in I} b_\alpha = \sum_{\alpha\in I} (a_\alpha + b_\alpha).$$

Произведением рядов $\sum_{\alpha\in I} a_\alpha$ и $\sum_{\beta\in N} b_\beta$ в топологическом кольце мы называем ряд $\sum_{(\alpha,\beta)\in I\times N} c_{(\alpha,\beta)}$, где $c_{(\alpha,\beta)} \equiv a_\alpha b_\beta$.

7.2.3 Символика $O(n)$.

Введём следующую символику в $SA(m, K)$, $m \in \mathbf{N}$. Включение $a \in SA_n(m, K)$, $m \in \mathbf{N}$, будем обозначать формулой $a = O(n)$, $n \in \mathbf{N}_o$. Любой элемент $a \in SA(m, K)$ записывается в виде $a = O(0)$, поэтому в силу леммы 7.1.2 справедливы правила:

$$O(n)O(p) = O(n + p), \quad n, p \in \mathbf{N}_o; \tag{7.2.2}$$

$$\forall b \in SA(m, K) \mid bO(n) = O(n); \tag{7.2.3}$$

$$O(n) + O(p) = O(min\{n, p\}), \; n, p \in \mathbf{N}_o. \tag{7.2.4}$$

7.2.4 Суммируемость рядов в пространстве последовательностей.

Далее в этом параграфе на пространстве последовательностей $SA(m, K)$, $m \in \mathbf{N}_o$ фиксируется чековая топология, и непрерывность и суммируемость рассматриваются только в этой топологии.

Мы уже ввели в п. 7.1.1 соглашение $SA(0, K) \equiv K$. При этом полагаем для единообразия, что ${\mathbf{N}_o}^0 \equiv \{0\}$ и $SA(0, K)$ состоит из всех отображений $a : {\mathbf{N}_o}^0 \to K$. Кольцо K мы также рассматриваем как левый и правый модуль над K. Чековая топология на $SA(0, K) = K$ есть по определению дискретная топология на K. В частности, ряд в $SA(0, K)$ суммируем тогда и только тогда, когда он финитен, т.е. имеет конечное число ненулевых членов.

Пусть I — произвольное множество индексов, $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — семейство элементов кольца $SA(m, K)$.

Лемма 7.2.1 *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) ряд $\sum_{\alpha \in I} a_\alpha$ суммируем;

2) для любого $n \in \mathbf{N}_o$ существует конечное подмножество $B(n) \subset I$, что для любого индекса $\alpha \in I \backslash B(n)$ верно включение $a_\alpha \in SA_n(m, K)$;

3) для любого $j \in {\mathbf{N}_o}^m$ существует конечное подмножество $Q(j) \subset I$, что для любого $\alpha \in I \backslash Q(j)$ верно равенство $a_\alpha(j) = 0$.

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Из суммируемости ряда $\sum_{\alpha \in I} a_\alpha$ по критерию Коши из п. 7.2.2 следует выполнение свойства (7.2.2), т.к. $SA_n(m, K)$ окрестность нуля в $SA(m, K)$ в чековой топологии.

2) $\Longrightarrow$ 3). Если верно 2), то полагаем $Q(j) \equiv B(\mid j \mid +1)$ и будет выполнено 3).

3) $\Longrightarrow$ 1). Если выполнено 3), то при любом $j \in {\mathbf{N}_o}^m$ ряд $\sum_{\alpha \in I} a_\alpha(j)$ в кольце K финитен и следовательно суммируем в дискретной топологии. Но это и означает суммируемость ряда $\sum_{\alpha \in I} a_\alpha$ в чековой топологии $SA(m, K)$ $\diamondsuit$

На основании доказанной леммы устанавливаются следующие три свойства чековой суммируемости рядов последовательностей.

Утверждение 7.2.1 *Если ряд $\sum_{\alpha \in I} a_\alpha$ суммируем, то для любого семейства скаляров $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $\lambda_\alpha \in K$ ряды $\sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha a_\alpha$ и $\sum_{\alpha \in I} a_\alpha \lambda_\alpha$ — суммируемы.*

Утверждение 7.2.2 *Ряд $\sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha a_\alpha$ ($\sum_{\alpha \in I} a_\alpha \lambda_\alpha$) при фиксированном семействе $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $a_\alpha \in SA(m, K)$ суммируем при любом семействе $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $\lambda_\alpha \in K$, тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{\alpha \in I} a_\alpha$ суммируем.*

Утверждение 7.2.3 *Произведение двух суммируемых рядов* $\sum_{\alpha\in I} a_\alpha$ *и* $\sum_{\beta\in N} b_\beta$ *— суммируемый ряд* $\sum\limits_{(\alpha,\beta)\in I\times N} a_\alpha b_\beta$ *и справедливо равенство*

$$\left(\sum_{\alpha\in I} a_\alpha\right)\left(\sum_{\beta\in N} b_\beta\right) = \sum_{(\alpha,\beta)\in I\times N} a_\alpha b_\beta. \tag{7.2.5}$$

Доказательство утверждений 1-3.

У1. Если ряд $\sum_{\alpha\in I} a_\alpha$ суммируем, то выполнено утверждение 3) леммы 7.2.1, т.е. для любого $j \in \mathbf{N_o}^m$ существует конечное подмножество $Q(j) \subset I$, что при любом индексе $\alpha \in I\backslash Q(j)$ верно $a_\alpha(j) = 0$. Но тогда и $\lambda_\alpha a_\alpha(j) = 0 = a_\alpha(j)\lambda_\alpha$, т.е. утверждение 3) верно для рядов $\sum_{\alpha\in I} \lambda_\alpha a_\alpha$ и $\sum_{\alpha\in I} a_\alpha\lambda_\alpha$.

У2. Если ряд $\sum_{\alpha\in I} a_\alpha$ суммируем, то по утверждению 1) ряды $\sum_{\alpha\in I} \lambda_\alpha a_\alpha$ $\sum_{\alpha\in I} a_\alpha\lambda_\alpha$ суммируемы при любом семействе скаляров $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Наоборот, если ряд $\sum_{\alpha\in I} a_\alpha\lambda_\alpha$ $(\sum_{\alpha\in I} \lambda_\alpha a_\alpha)$ суммируем при любом семействе скаляров $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}$, то выбирая $\lambda_\alpha = 1$ при всех $\alpha \in I$ получим ряд $\sum_{\alpha\in I} a_\alpha$

У3. Пусть ряды $\sum_{\alpha\in I} a_\alpha$ и $\sum_{\beta\in N} b_\beta$ суммируемы в $SA(m,K)$, тогда для них выполнено утверждение 2) леммы 7.2.1. Поэтому для любого $n \in \mathbf{N_o}$ существует конечное подмножество $B_1(n) \subset I$ и конечное подмножество $B_2(n) \subset N$, что при $\alpha \in I\backslash B_1(n)$ верно $a_\alpha = O(n)$, а при $\beta \in N\backslash B_2(n)$ верно $b_\beta = O(n)$. В таком случае при $(\alpha,\beta) \in (I\times N)\backslash(B_1(n)\times B_2(n))$ верно $a_\alpha b_\beta = O(n)$. Но множество $B_1(n)\times B_2(n)$ конечно, т.е. для произведения рядов $\sum_{(\alpha,\beta)\in I\times N} a_\alpha b_\beta$ выполнено утверждение 2) леммы 7.2.1, т.е. произведение рядов суммируемо. В силу свойства 4) п. 7.2.2 тогда верно равенство 7.2.5. $\diamondsuit$

Возьмём теперь $a \in SA(n, SA(m,K))$ и $b \in (SA(m,K))^n$ и образуем ряд

$$\sum_{i\in\mathbf{N_o}^n} a(i)b^i, \tag{7.2.6}$$

где $b \equiv (b_1, b_2, ..., b_k)$, $b_\alpha \in SA(m,K)$ при $\alpha \in \overline{1,n}$, произведение $b^i \equiv b_1^{i_1} b_2^{i_2} \ldots b_n^{i_n}$ для мультииндекса $i \equiv (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathbf{N_o}^n$. Ряд (7.2.6) назовём *степенным рядом* в $SA(m,K)$. Непосредственно из леммы 7.2.1 получается следующее достаточное условие суммируемости степенного ряда.

Лемма 7.2.2 *Если* $b \in (SAG(m,K))^n$*, то степенной ряд (7.2.6) суммируем.*

Доказательство. При любом $r \in \mathbf{N_o}$ в силу п. 7.2.3 выполнено условие $a(i)b^i = O(r)$ при всех $i \in \mathbf{N_o}^n$ с $|\,i\,| \geq r$, что влечет суммируемость ряда (7.2.6) по лемме 7.2.1. $\diamondsuit$

Следствие 7.2.1 *Если* $b \in (SAG(m,K))^n$*, то степенной ряд (7.2.6) суммируем и при любом* $r \in \mathbf{N_o}$ *справедливо представление*

$$\sum_{i\in\mathbf{N_o}^n} a(i)b^i = \sum_{\substack{i\,\in\,\mathbf{N_o}^n\\ |i|<r}} a(i)b^i \quad + \quad O(r).$$

Рассмотрим связь произведения степенных рядов с произведением последовательностей.

Лемма 7.2.3 *Пусть элементы $a, c \in SA(n,(SA(m,K)))$. Пусть элементы $b_1, b_2, \dots, b_n \in Z(SA(m,K))$ коммутирует между собой и со всеми элементами $c(j),\ j \in \mathbf{N}_o{}^n$. Пусть степенные ряды $\sum\limits_{i\in\mathbf{N}_o{}^n} a(i)b^i$, $\sum\limits_{j\in\mathbf{N}_o{}^n} c(j)b^j$ суммируемы. Тогда*

$$\left(\sum_{i\in\mathbf{N}_o{}^n} a(i)b^i\right)\left(\sum_{j\in\mathbf{N}_o{}^n} c(j)b^j\right) = \sum_{l\in\mathbf{N}_o{}^n} (ac)(l)b^l.$$

Доказательство. В силу утверждения 7.2.3 произведение суммируемых рядов суммируемо и

$$\left(\sum_{i\in\mathbf{N}_o{}^k} a(i)b^i\right)\left(\sum_{j\in\mathbf{N}_o{}^n} c(j)b^j\right) = \sum_{(i,j)\in\mathbf{N}_o{}^k\times\mathbf{N}_o{}^n} a(i)b^ic(j)b^j.$$

Так как по условию элементы $b_1, b_2, ..., b_n$ принадлежат центру кольца $Z(SA(m,K))$, то при любом $(i,j) \in \mathbf{N}_o{}^i \times \mathbf{N}_o{}^j$ верно

$$a(i)b^ic(j)b^j = a(i)c(j)b^{i+j}.$$

Но суммируемый ряд можно суммировать в любом порядке, поэтому

$$\left(\sum_{i\in\mathbf{N}_o{}^k} a(i)b^i\right)\left(\sum_{j\in\mathbf{N}_o{}^n} c(j)b^j\right) = \sum_{(i,j)\in\mathbf{N}_o{}^k\times\mathbf{N}_o{}^n} a(i)c(j)b^{j+i} =$$

$$\sum_{l\in\mathbf{N}_o{}^n}\left(\sum_{\substack{(i,j)\in\mathbf{N}_o{}^n\times\mathbf{N}_o{}^k\\ i+j=l}} a(i)c(j)\right)b^l = \sum_{l\in\mathbf{N}_o{}^n} (ac)(l)b^l$$

и лемма 7.2.3 доказана. $\diamondsuit$

Условие коммутации леммы выполнено, если $b_1, b_2, ..., b_n \in Z(SA(m,K))$.

7.2.5 Суммируемость специального степенного ряда.

Если последовательность $a \in (SA(n, SA(m,K)))$ такова, что при всяком $i \in \mathbf{N}_o{}^n$ элемент $a(i) \in SAT(m,K) = J(K)$, т.е. фактически $a \in SA(n,K)$, то ряд (7.2.6) назовём *специальным степенным рядом* в $SA(m,K)$. Обозначим специальный степенной ряд

$$R_a(b) \equiv \sum_{i\in\mathbf{N}_o{}^n} a(i)b^i, \tag{7.2.7}$$

где $a \in SA(n,K), b \in (SA(m,K))^n$.

Для любого $b \in (SA(m,K))^n$ и индекса $i \in \mathbf{N}_o{}^n$ верно равенство

$$b^i(0) = (b(0))^i, \tag{7.2.8}$$

поэтому, если специальный степенной ряд (7.2.7) суммируем в $SA(m,K)$, то степенной ряд

$$\sum_{i\in\mathbf{N}_o{}^n} a(i)(b(0))^i \tag{7.2.9}$$

в кольце K также суммируем в силу определения топологии на $SA(m, K)$. Но суммируемость ряда в дискретной топологии эквивалентна его финитности. Итак, верно утверждение.

Утверждение 7.2.4 *Если специальный степенной ряд (7.2.7) суммируем в $SA(m, K)$, то ряд (7.2.9) в K финитен.*

Из данного утверждения получаем следующее необходимое условие суммируемости специального степенного ряда.

Теорема 7.2.1 *Если специальный степенной ряд $R_a(b)$ суммируем и элементы $b_1(0), b_2(0), ..., b_n(0) \in K$ обратимы в кольце K, то последовательность $a \in SA(n, K)$ финитна.*

Доказательство. По утверждению 7.2.4 в условиях теоремы последовательность $\{a(i)(b(0))^i\}_{i \in {\mathbf{N}_o}^n}$ финитна. Но для обратимых элементов $b_1(0), b_2(0), ..., b_n(0)$ соотношения $a(i)(b(0))^i = 0$ и $a(i) = 0$ эквивалентны. $\diamondsuit$

Следствие 7.2.2 *Если K — тело и $n = 1$, то специальный степенной ряд сходится тогда и только тогда, когда $b(0) = 0$ или последовательность $a \in SA(1, K)$ финитна.*

Из утверждения 7.2.1 следует, что для суммируемость специального степенного ряда (7.2.7) достаточно сходимости специального степенного ряда

$$\sum_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} b^i. \tag{7.2.10}$$

Более того, для того чтобы специальный степенной ряд (7.2.7) $R_a(b)$ был при фиксированном $b \in (SA(m, K))^n$ суммируем для любой последовательности $a \in SA(n, K)$ согласно утверждению 7.2.2 необходимо и достаточно, чтобы ряд (7.2.10) был суммируем. Заметим, что если ввести элемент $w \in SA(n, K)$ вида $w(i) = 1$ при любом $i \in {\mathbf{N}_o}^n$, то ряд (7.2.10) можно записать в виде $R_w(b)$.

Для суммируемости ряда (7.2.10) справедливо согласно лемме 7.2.2 достаточное условие $b \in (SAG(m, K))^n$.

Чтобы сформулировать другие критерии суммируемости ряда (7.2.10) сначала введём следующую терминологию нильпотентности.

Элемент $q \in K$ кольца K назовём *нильпотентным*, если существует натуральное число s, что $q^s = 0$. Множество $M \subset K$ назовём *нильпотентным*, если существует натуральное число s, что $M^s \subset \{0\}$.

Утверждение 7.2.5 *Конечное подмножество $M \subset Z(K)$ нильпотентно тогда и только тогда, когда каждый его элемент нильпотентен.*

Доказательство. Пусть $M = \{q_\alpha\}_{\alpha \in \overline{1,n}}$.

Необходимость следует из включения $q_\alpha^s \in M^s$.

Достаточность. Пусть ${q_\alpha}^{s_\alpha} = 0$, $s_\alpha \in \mathbf{N}_o$ при всех $\alpha \in \overline{1, n}$. Положим $s = \sum_{\alpha=1}^n s_\alpha$, тогда $M^s = \{0\}$. В самом деле, каждый элемент произведения $\lambda \in M^s$ в виду условия $M \subset Z(K)$ представим в виде $\lambda = q^i$, где $i \in {\mathbf{N}_o}^n$ и $| \ i \ | = s$. Тогда одно из чисел i_α удовлетворяет неравенству $i_\alpha \geq s_\alpha$, ибо в противном случае $| \ i \ | = \sum_{\alpha=1}^n i_\alpha < \sum_{\alpha=1}^n s_\alpha$. Если же $i_\alpha \geq s_\alpha$, то $q_\alpha^{i_\alpha} = 0$ и всё произведение $q^i = 0$. $\diamondsuit$

Сформулируем теперь необходимое условие сходимости ряда (7.2.10).

Утверждение 7.2.6 *Если ряд (7.2.10) суммируем, то элементы* $b_1(0)$, $b_2(0)$, ..., $b_n(0) \in K$ *нильпотентны.*

Доказательство В силу утверждения 7.2.4 из суммируемости ряда (7.2.10) в $SA(m,K)$ следует финитность ряда $\sum\limits_{i\in \mathbf{N_o}^n} b(0)^i$ в K.$\diamondsuit$

Мы приходим к следующему результату.

Лемма 7.2.4 *Если* K *— тело, то ряд (7.2.10) суммируем тогда и только тогда, когда* $b \in (SAG(m,K))^n$.

Условие нильпотентности элементов $b_1(0), b_2(0), ..., b_n(0) \in K$ становится достаточным для суммируемости ряда (7.2.10) и в следующей ситуации.

Лемма 7.2.5 *Пусть* $b_1, b_2, ..., b_n \in SA(m, Z(K))$, *тогда ряд (7.2.10) суммируем тогда и только тогда, когда все элементы* $b_1(0), b_2(0), ..., b_n(0) \in Z(K)$ *нильпотентны.*

Доказательства в силу утверждения 7.2.6 требует лишь достаточность. Если элементы $b_1(0), b_2(0), ..., b_n(0) \in Z(K)$ нильпотентны, то согласно утверждению 7.2.5 множество $M \equiv \{b_1(0), b_2(0), ..., b_n(0)\}$ нильпотентно и существует натуральное число s, что $M^s = \{0\}$. Отсюда следует, что $(b(0))^i = 0$ при $\mid i \mid \geq s$. В случае $m = 0$ лемма 7.2.5 доказана. В случае $m \in \mathbf{N}$ запишем каждый элемент $b_\alpha \in SA(m,K)$ в виде суммы вещной и духовой части $b_\alpha = b'_\alpha + b''_\alpha$, где $b'_\alpha = b_\alpha(0)e$, $\alpha \in \overline{1,n}$. При этом, при каждом $\alpha \in \overline{1,n}$ верны соотношения

$$b'_\alpha = SA(m, Z(K)), \quad b''_\alpha \in SA(m, Z(K)), \tag{7.2.11}$$

$$b''_\alpha = O(1). \tag{7.2.12}$$

В силу нильпотентности элементов $b_1(0), b_2(0), ..., b_n(0) \in Z(K)$ также верно соотношение

$$\forall i \in \mathbf{N_o}^n, \ \mid i \mid \geq s \ \Big| \ (b')^i = 0. \tag{7.2.13}$$

Далее замечаем, что при $r \geq s$ произведение любых r единожды штрихованных элементов равно нулю. Произведение же любых t дважды штрихованных элементов принадлежит $SAr(m, Z(K))$ согласно п. 7.2.3. Произведение

$$b^i = (b'_1 + b''_1)^{i_1}(b'_2 + b''_2)^{i_2}...(b'_n + b''_n)^{i_n}$$

состоит из всевозможных произведений $\mid i \mid$ сомножителей. При $\mid i \mid \geq s$, если среди сомножителей имеется s единожды штрихованных, то всё произведение равно нулю, если же единожды штрихованных сомножителей менее s, то дважды штрихованных сомножителей будет более $\mid i \mid -s$, т.е. произведение будет $O(\mid i \mid -s)$ согласно п. 7.2.3. Итак, при $\mid i \mid \geq s$ будет $b^i = O(\mid i \mid -s)$. По лемме 7.2.1 ряд $\sum\limits_{i\in \mathbf{N_o}^n} b^i$ суммируем. $\diamondsuit$

В п. 7.1.1 мы определили элементы $h_\alpha = \mathcal{T}rs(z_\alpha)$, $\alpha \in \overline{1,n}$, и установили, что $h_\alpha \in Z(SA(n,K))$ и $h_\alpha \in SAG(n,K)$, $\alpha \in \overline{1,n}$. По лемме 7.2.2 при любом $a \in SA(n,K)$ специальный степенной ряд $\sum\limits_{i\in \mathbf{N_o}^n} a(i)h^i$ суммируем в $SA(n,K)$, причём к элементу a, ибо при любом $l \in \mathbf{N_o}^n$, имеем

$$\left(\sum_{i\in \mathbf{N_o}^n} R(i)h^i\right)(l) = \sum_{i\in \mathbf{N_o}^n} \Big(a(i)h^i\Big)(l) = \sum_{i\in \mathbf{N_o}^n} a(i)(h^i)(l) = a(l).$$

Итак, для любой последовательности $a \in SA(n, K)$ справедливо равенство

$$a = \sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(i) h^i, \tag{7.2.14}$$

которое мы будем называть *каноническим разложением* элемента a. Каноническое разложение элемента $a \in SA(n, K)$ по степеням элементов $h_1, h_2, ..., h_n \in SA(n, K)$ с коэффициентами из K единственно.

Возвращаясь к п. 7.1.3, мы можем утверждать, что обосновали равенство

$$\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(i) h^i = \mathcal{T}rs \left(\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(i) z^i \right),$$

где суммируемость ряда слева понимается в чековой топологии.

Подведем итог в форме теоремы.

Теорема 7.2.2 *Любой элемент $a \in SA(n, K)$ единственным образом представим в виде суммы чеково суммируемого специального степенного ряда по степеням h.*

Соотношение (7.2.12) можно записать также в виде равенства

$$a = R_a(h), \tag{7.2.15}$$

верного для любой последовательности $a \in SA(n, K)$.

7.2.6 Обратимые элементы моноида.

Пусть M моноид с единицей e. Элемент $b \in M$ называется левым обратным (правым обратным) к элементу $a \in M$, если $ba = e$ ($ab = e$). Элемент b называется обратным к элементу a, если он левый и правый обратимый к a, т.е. $ba = ab = e$. Напомним следующие два утверждения (см. [7, с.21]).

Утверждение 7.2.7 *Если у элемента моноида $a \in M$ существуют левый обратный $b \in M$ и правый обратный $c \in M$, то они равны $b = c$.*

Утверждение 7.2.8 *Если у каждого элемента моноида M существует левый обратный (правый обратный), то у каждого элемента моноида существует и обратный элемент, равный левому обратному (правому обратному), т.е. моноид M — группа.*

7.2.7 Обратимые элементы кольца $SA(m, K)$.

Рассмотрим вопрос о существовании левого обратного (правого обратного, обратного) элемента к элементу $a \in SA(m, K)$ по операции умножения последовательностей в $SA(m, K)$, т.е. по операции свертки.

Так как отображение $P : SA(n, K) \to K$ проектирования на правую координату из п. 7.1.1 является гомоморфизмом колец, то соотношения $ba = e$ и $ac = e$ в кольце $SA(n, K)$ влекут $P(b)P(a) = 1$ и $P(a)P(c) = 1$. Т.е. для того, чтобы элемент $a \in SA(m, K)$ имел левый обратный (правый обратный, обратный) в кольце $SA(m, K)$ необходимо чтобы элемент $a(0) \in K$ имел в K левый обратный (соответственно, правый обратный, обратный). Оказывается это условие не только необходимо, но и достаточно.

Введём множество $SAN_0(m,K) \equiv \{a \in SA(m,K) \quad | \quad a(0)=1\}$. Подмножество $SAN_0(m,K) \subset SA(m,K)$ является моноидом по умножению, ибо отображение проектирования P — гомоморфизм колец. Покажем, что $SAN_0(m,K)$ — группа по умножению.

Возьмём сначала при $m=1$ элементы $u \in SA(1,K), u \equiv (1,1,0,0,0...)$ и $v \in SA(1,K), v(i) \equiv (-1)^i, \ i \in \mathbf{N}_o$. Элементы $u,v \in SA(1,Z(K))$ и поэтому по лемме 7.1.1 коммутируют $uv=vu$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $vu=e$, ибо

$$(vu)(0)=v(0)u(0)=1,$$

$$(vu)(l) \equiv \sum_{\substack{i,j \in \mathbf{N}_o \\ i+1=l}} v(i)u(j)=v(l)+v(l-1)=0, \text{ при } l \in \mathbf{N}.$$

Пусть $a \in SAN_0(m,K)$, тогда $a=e+b$, где $(a-e)=b \in SAG(m,K)$. Имеем $R_u(b)=1\cdot e+1\cdot b=a$. Согласно леммам 7.2.2 и 7.2.3 специальные степенные ряды $R_u(b), R_v(b)$ и $R_{vu}(b), R_{uv}(b)$ суммируемы и $R_v(b)R_u(b)=R_{vu}(b)=R_e(b)=e=R_{uv}(b)=R_u(b)R_v(b)$. Итак, для любого элемента a моноида $SAN_0(m,K)$ существует обратный элемент равный $R_v(a-e)$, т.е. моноид $SAN_0(m,K)$ — группа по умножению.

Перейдем к основному утверждению данного пункта.

Теорема 7.2.3 *Элемент $a \in SA(m,K)$ имеет в кольце $SA(m,K)$ левый обратный (правый обратный, обратный) тогда и только тогда, когда элемент $a(0) \in K$ имеет в кольце K левый обратный (соответственно правый обратный, обратный).*

Доказательства требует в силу предыдущего лишь достаточность. Пусть $a \in SA(m,K)$ и элемент $a(0) \in K$ имеет левый обратный $\lambda \in K, \lambda a(0)=1$. Запишем элемент $a \in SA(m,K)$ в виде

$$a=(e+(a-ea(0))\lambda)a(0). \tag{7.2.16}$$

Тогда элемент $(e+(a-ea(0))\lambda) \in SAN_0(m,K)$ и поэтому имеет обратный $(e+(a-ea(0))\lambda)^{-1}$. Проверим, что элемент $\lambda(e+(a-ea(0))\lambda)^{-1}$ является левым обратным к элементу a. В силу представления (7.2.16) имеем

$$(\lambda(e+(a-ea(0))\lambda)^{-1})((e+(a-ea(0))\lambda)a(0))=$$

$$\lambda((e+(a-ea(0))\lambda))^{-1}(e+(a-ea(0))\lambda))a(0)=\lambda ea(0)=\lambda a(0)e=e.$$

В случае, если элемент $a(0) \in K$ имеет правый обратный элемент $\gamma \in K, a(0)\gamma=1$ представим элемент $a \in SA(m,K)$ в виде

$$a=a(0)(e+\gamma(a-a(0)e) \tag{7.2.17}$$

и убеждаемся, что элемент $(e+\gamma(a-a(0)e))^{-1}\gamma$, есть правый обратный к элементу a. В силу утверждения 7.2.7 из доказанного следует существование обратного к элементу $a \in SA(m,K)$ элемента, если элемент $a(0)$ обратим в K. $\diamondsuit$

7.2.8 Линейные непрерывные функционалы и линейные непрерывные отображения последовательностей.

Отображение $A : SA(n,K) \to SA(m,K),\ n \in \mathbf{N}_o, m \in \mathbf{N}_o$ назовём *линейным*, если оно морфизм в категории левых и правых модулей над K и *гомоморфизмом*, если оно линейно и является также морфизмом в категории колец. В случае $m = 0$ отображение A назовём *функционалом*.

Зафиксировав на пространстве последовательностей $SA(n,K)$ чековую топологию (в случае $n = 0$, чековая топология на $SA(0,K) = K$ есть по определению дискретная топология), мы в этом пункте опишем все линейные непрерывные отображения $A : SA(n,K) \to SA(m,K)$ и в следующем — все непрерывные гомоморфизмы $A : SA(n,K) \to SA(m,K),\ n \in \mathbf{N}_o, m \in \mathbf{N}_o$.

Далее $A : SA(n,K) \to SA(m,K),\ n \in \mathbf{N}_o, m \in \mathbf{N}_o$, линейное непрерывное отображение. Начнем со случая $n = 0$, тогда $A : K \to SA(m,K)$ линейное непрерывное отображение. Положим $A(1) \equiv q \in SA(m,K)$. В силу линейности для любого $\lambda \in K$ имеем

$$A(\lambda) = A(1 \cdot \lambda) = A(1)\lambda = g\lambda,$$
$$A(\lambda) = A(\lambda \cdot 1) = \lambda A(1) = \lambda g.$$

Т.е. $g \in Kom_{SA(m,K)} SAT(m,K) = SA(m, Z(K)) = Z(SA(m,K))$ согласно лемме 7.1.1 и следствию 7.1.3. Итак, если $A : K \to SA(m,K)$ линейное непрерывное отображение, то

$$\forall \lambda \in K \ \Big| \ A(\lambda) = \lambda g, \tag{7.2.18}$$

где $g \in SA(m, Z(K))$. Наоборот, если g — произвольный элемент из $SA(m, Z(K))$, формула (7.2.15) задаёт линейное непрерывное отображение $A : K \to SA(m,K)$.

Положим теперь $n \in \mathbf{N}$ и рассмотрим значения отображения $A : SA(n,K) \to SA(m,K)$ на элементах вида $h^i,\ i \in \mathbf{N}_o,\ h \equiv (h_1, h_2, ..., h_n)$. Элементы $h_\alpha \in SA(n,K),\ \alpha \in \overline{1,n}$ введены в п. 7.1.3. Получим последовательность $g_A \in SA(n, SA(m,K))$ вида

$$\forall i \in \mathbf{N}_o{}^n \ \Big| \ g_A(i) \equiv A(h^i). \tag{7.2.19}$$

Если отображение A линейно, то для любых $\lambda \in K$ и $i \in \mathbf{N}_o{}^n$ верно

$$A(\lambda h^i) = \lambda A(h^i) = \lambda g_A(i),$$
$$A(\lambda h^i) = A(h^i \lambda) = A(h^i)\lambda = g_A(i)\lambda,$$

т.е по лемме 7.1.1 и следствию 7.1.3 $g_A \in SA(n, Z(SA(m,K))) = SA(n, SA(m, Z(K)))$. Если кроме того отображение A непрерывно, то (см. [5], с. 86)

$$\forall a \in SA(n,K) \ \Big| \ A(a) = A\left(\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(i) h^i\right) = \sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(i) g_A(i), \tag{7.2.20}$$

где ряд

$$\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(i) g_A(i) \tag{7.2.21}$$

суммируем в $SA(m,K)$. Но ряд (7.2.21) должен быть суммируем при любой последовательности $a \in SA(n,K)$, что согласно утверждению 7.2.2 имеет место тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} g_A(i). \tag{7.2.22}$$

Введём следующий термин. Последовательность $g \in SA(n, SA(m,K))$ назовём *суммируемой*, если суммируем ряд $\sum\limits_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} g(i)$ в $SA(m,K)$. Множество всех суммируемых последовательностей обозначим $SAS(n, SA(m,K))$. При $m = 0$ множество всех суммируемых последовательностей $SAS(n,K)$ совпадает со множеством всех финитных последовательностей $SAF(n,K)$.

Теорема 7.2.4 *Любое непрерывное линейное отображение $A : SA(n,K) \to SA(m,K)$ имеет вид*

$$\forall a \in SA(n,K) \;\Big|\; A(a) = \sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(i) g_A(i), \tag{7.2.23}$$

где $g_A \in SAS(n, SA(m, Z(K)))$. Наоборот, для любой последовательности $g_A \in SAS(n, SA(m, Z(K)))$ формула (7.2.23) задаёт линейное непрерывное отображение A.

Доказательства в силу проведенных рассуждений требует лишь то, что любая последовательность $g_A \in SAS(n, SA(m, Z(K)))$ задаёт непрерывное отображение $A : SA(n,K) \to SA(m,K)$. Так как ряд 7.2.22 по условию суммируем, то по лемме 7.2.1 для любого $j \in \mathbf{N}_o{}^n$ существует конечное множество $Q(j) \subset \mathbf{N}_o{}^n$, что $g_A(i)(j) = 0$ при $i \in \mathbf{N}_o{}^n \backslash Q(j)$. Поэтому для любого $j \in \mathbf{N}_o{}^n$ получаем по формуле 7.2.23

$$A(a)(j) = \sum_{i \in Q(j)} a(i) g_A(i)(j).$$

Зафиксировав значение координат $a(i)$ при $i \in Q(j)$, мы зафиксируем и значение координаты $A(a)(j)$, как бы ни менялись остальные координаты $a(i),\ i \in \mathbf{N}_o{}^n \backslash Q(j)$. Итак, каждая координата $A(a)(j)$ непрерывно зависит от элемента $a \in SA(n,K)$, а так как топология на $SA(m,K)$ — топология произведения $K^{(\mathbf{N}_o{}^m)}$, то и отображение $A : SA(n,K) \to SA(m,K)$ непрерывно. $\diamondsuit$

Следствие 7.2.3 *Любой линейный непрерывный функционал $f \in SA(n,K) \to K$ имеет вид*

$$\forall a \in SA(n,K) \;\Big|\; f(a) = \sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(i) g_f(i), \tag{7.2.24}$$

где $g_f \in SAF(n, Z(K))$. Наоборот, если последовательность $g_f \in SAF(n, Z(K))$, то формула (7.2.24) задаёт линейный непрерывный функционал на $SA(n,K)$.

7.2.9 Непрерывные гомоморфизмы последовательностей.

Непрерывный гомоморфизм $A : SA(n,K) \to SA(m,K)$ есть согласно предыдущему пункту линейное непрерывное отображение, удовлетворяющее двум дополнительным требованиям:

$$A(e') = e'', \text{где } e', e'' \text{ — единицы колец } SA(n,K) \text{ и } SA(m,K) \text{ соответственно;} \tag{7.2.25}$$

$$A(ab) = A(a)A(b), \text{ для любых } a, b \in SA(n,K). \tag{7.2.26}$$

В случае $n = 0$ гомоморфизм $A : K \to SA(m,K)$ согласно (7.2.25) удовлетворяет условию $A(1) = e''$, поэтому согласно п. 7.2.8 для любого $\lambda \in K$ получим $A(\lambda) =$

$\lambda e''$, т.е. отображение A есть изоморфное вложение J из п. 7.1.1 кольца K в кольцо $SA(m, K)$. Тогда $A = J$ топологическое кольцевое и модульное вложение.

Перейдем к случаю $n \in \mathbf{N}$. Определим для гомоморфизма A следующие n элементов

$$q_\alpha \equiv A(h_\alpha), \ \alpha \in \overline{1, n}. \tag{7.2.27}$$

Так как отображение A линейно, то $q_\alpha \in SA(m, Z(K)) = Z(SA(m, K))$ и коммутирует с любыми элементами из $SA(m, K)$, в частности, и между собой. Так как отображение A — гомоморфизм, то при любом $i \in {\mathbf{N}_o}^n$

$$q_A(i) \equiv A(h^i) = q^i. \tag{7.2.28}$$

Согласно теореме 7.2.4 для непрерывности отображения A осталось потребовать суммируемости ряда

$$\sum_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} q^i. \tag{7.2.29}$$

Но согласно лемме 7.2.5 ряд (7.2.29) суммируем в $SA(m, K)$ тогда и только тогда, когда элементы $q_1(0), q_2(0), ..., q_n(0) \in Z(K)$ нильпотентны.

Теорема 7.2.5 *Любой непрерывный гомоморфизм*

$$A : SA(n, K) \to SA(m, K), \ n \in \mathbf{N}, \ m \in \mathbf{N}_o,$$

имеет вид

$$\forall a \in SA(n, K) \ \Big| \ A(a) = \sum_{i \in \mathbf{N}_o} a(i) q^i, \tag{7.2.30}$$

где $q_1, q_2, ..., q_n \in SA(n, Z(K))$ и элементы $q_1(0), q_2(0), ..., q_n(0) \in Z(K)$ нильпотентны. Наоборот, любые n элементов $q_1, q_2, ..., q_n \in SA(n, Z(K))$ с нильпотентными $q_1(0), q_2(0), ..., q_n(0) \in Z(K)$ определяют по формуле (7.2.30) непрерывный гомоморфизм A.

Доказательства в свете вышесказанного требуют лишь достаточность. В силу леммы 7.2.5 в условиях теоремы ряд (7.2.29) суммируем, поэтому A — линейное непрерывное отображение. Согласно (7.2.30) $A(e') = 1 \cdot q^0 = e''$. Осталось проверить лишь выполнения условия (7.2.26), но оно выполнено в силу леммы 7.2.3. ◇

Следствие 7.2.4 *Если $b \in SAG(m, Z(K))^n$, то $R_a b$ при фиксированном b есть непрерывный гомоморфизм по a кольца $SA(n, K)$ в кольцо $SA(m, K)$, в частности, $R_a(b) R_c(b) = R_{ac}(b)$ при любых $a, c \in SA(n, K)$.*

Следствие 7.2.5 *Если $Z(K)$ — тело, то общий вид непрерывного гомоморфизма $A : SA(n, K) \to SA(m, K)$ даётся формулой $A(a) = R_a(b)$, где b — произвольный элемент из $(SAG(m, Z(K)))^n$.*

Следствие 7.2.6 *Общий вид непрерывного гомоморфного функционала $f : SA(n, K) \to K$, $n \in \mathbf{N}$ даётся формулой (7.2.30), где q_1, q_2, ..., $q_n \in Z(K)$ нильпотентные элементы в $Z(K)$. В частности, если $Z(K)$ — тело, то существует лишь один непрерывный гомоморфный функционал — тождественный нуль.*

7.2.10 Непрерывные отображения пространств последовательностей.

Пусть $A : SA(n,K) \to SA(m,K)$ произвольное отображение множеств. Оно будет непрерывно в чековых топологиях тогда и только тогда, когда каждая координата $A(x)(j),\ j \in \mathbf{N}_o{}^m$ будет непрерывным отображением $SA(n,K) \to K$, когда x пробегает топологическое пространство $SA(n,K)$ с чековой топологией, и на кольце K взята дискретная топология. Пусть $y_0 \equiv A(x_0)$, тогда отображение $A(x)(j)$ при фиксированном $j \in \mathbf{N}_o{}^m$ непрерывно по x в точке $x_0 \in SA(n,K)$ тогда и только тогда, когда существует окрестность точки x_0 вида $U \equiv x_0 + SA_r(n,K),\ r \in \mathbf{N}$, в топологическом пространстве $SA(n,K)$, что $A(x)(j) = y_0(j)$ при всех $x \in U$. Но это означает, что координата $A(x)(j)$ в $SA(m,K)$ зависит лишь от координат $x(i),\ i \in \mathbf{N}_o{}^n$ точки $x \in SA(n,K)$ с $\mid i \mid < r$.

Итак, в координатах непрерывность отображения A устанавливается следующим образом.

Утверждение 7.2.9 *Отображение $A : SA(n,K) \to SA(m,K)$ непрерывно тогда и только тогда, когда каждая координата последовательности $A(x) \in SA(m,K)$ зависит лишь от конечного числа координат последовательности $x \in SA(n,K)$.*

7.2.11 Кольцо финитных последовательностей $SAF(n,K)$.

Множество финитных последовательностей $SAF(n,K) \subset SA(n,K)$ является подкольцом и подмодулем $SA(n,K)$. Кроме того, множество финитных последовательностей $SAF(n,K) \subset SA(n,K)$ всюду плотно в $SA(n,K)$ в чековой топологии, а следовательно и в любой рутинной топологии как более слабой.

Возьмём топологическое кольцо K и рутинную топологию на $SA(n,K)$. Если $\mathcal{T}$ — отделимое топологическое пространство, то любое непрерывное отображение $A : SA(n,K) \to \mathcal{T}$ однозначно определено своими значениями на подмножестве $SAF(n,K) \subset SA(n,K)$. Если $\mathcal{T}$ — отдельное полное равномерное пространство, и $A : SAF(n,K) \to \mathcal{T}$ равномерно непрерывное отображение, то оно однозначно продолжается до равномерно непрерывного отображения $A : SA(n,K) \to \mathcal{T}$ (см. [56], с.231). В частности, если $\mathcal{T}$ — отделимая полная топологическая группа и $A : SAF(n,K) \to \mathcal{T}$ непрерывный гомоморфизм группы $SAF(n,K)$ по сложению в группу $\mathcal{T}$, то он единственным образом продолжается до непрерывного гомоморфизма $A : SA(n,K) \to \mathcal{T}$ (см. [5], с.52).

§7.3 Суперпозиция последовательностей

В этом параграфе мы продолжаем изучение специальных степенных рядов.

7.3.1 Выражение суперпозиции последовательностей в координатах.

Пусть $b \in (SA(m,K))^n$, где K — кольцо, т.е $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, где $b_\alpha \in SA(m,K)$ при всех $\alpha \in \overline{1,n}$. Пусть $j \in \mathbf{N}_o{}^n$, $j = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ — мультииндекс. Рассмотрим произведение $b^j = b_1^{j_1} b_2^{j_2} \ldots b_n^{j_n}$, которое состоит из $|j|$, вообще говоря, некоммутирующих сомножителей. Для каждой последовательности $b_\alpha \in SA(m,K),\ \alpha \in \overline{1,n}$ справедливо каноническое разложение $b_\alpha = \sum\limits_{i \in \mathbf{N}_o{}^m} b_\alpha(i) h^i$, где ряд чеково суммируем в кольце

$SA(m,K)$. Но произведение конечного числа чеково суммируемых рядов на основании утверждения 7.2.3 — чеково суммируемый ряд, поэтому произведение b^j можно записать в виде:

$$b^j = \left(\sum_{i_1^1\in\mathbf{N}_o{}^m} b_1(i_1^1)h^{i_1^1}\right)\left(\sum_{i_2^1\in\mathbf{N}_o{}^m} b_1(i_2^1)h^{i_2^1}\right)\dots\left(\sum_{i_{j_1}^1\in\mathbf{N}_o{}^m} b_1(i_{j_1}^1)h^{i_{j_1}^1}\right)\left(\sum_{i_1^2\in\mathbf{N}_o{}^m} b_2(i_1^2)h^{i_1^2}\right)\dots \tag{7.3.1}$$

$$\left(\sum_{i_{j_2}^2\in\mathbf{N}_o{}^m} b_2(i_{j_2}^2)h^{i_{j_2}^2}\right)\dots\left(\sum_{i_1^n\in\mathbf{N}_o{}^m} b_n(i_1^n)h^{i_1^n}\right)\dots\left(\sum_{i_{j_n}^n\in\mathbf{N}_o{}^m} b_n(i_{j_n}^n)h^{i_{j_n}^n}\right) \equiv \sum_{l\in\mathbf{N}_o{}^m}\Pi(j,l,b)h^l,$$

где $\Pi(j,l,b)\in K$ — по определению коэффициент при h^l.

Рассмотрим специальный степенной ряд $R_a(b)$, где $K\in SA(n,K)$. Если двойной ряд

$$\sum_{(j,l)\in\mathbf{N}_o{}^n\times\mathbf{N}_o{}^m} a(j)\Pi(j,l,b)h^l, \tag{7.3.2}$$

суммируем, то суммируемы и ряды $R_a(b)\equiv c$ и справедливо равенство

$$c = \sum_{l\in\mathbf{N}_o{}^m}\left(\sum_{j\in\mathbf{N}_o{}^n} a(j)\Pi(j,l,b)\right)h^l, \tag{7.3.3}$$

откуда в силу единственности канонического разложения при всяком $l\in\mathbf{N}_o{}^m$ верно

$$c(l) = \sum_{j\in\mathbf{N}_o{}^n} a(j)\Pi(j,l,b). \tag{7.3.4}$$

Теорема 7.3.1 *Если последовательность $a\in SA(n,K)$ финитна или $b\in(SAG(m,K))^n$, то ряд $R_a(b)$ чеково сходится в $SA(m,K)$ к элементу c, причём для координат элемента c верно представление (7.3.4), где при любом $l\in\mathbf{N}_o{}^m$ ряд (7.3.4) в K финитен.*

Доказательство. Если последовательность $a\in SA(m,K)$ финитна или $b\in(SAG(n,K))^n$, то для любого натурального числа $r\in\mathbf{N}$ лишь конечное число членов двойного ряда (7.3.2) не принадлежит $SA_r(m,K)$. Поэтому в условиях теоремы ряд (7.3.2) чеково суммируем и справедливы равенства (7.3.3, 7.3.4) в чековой топологии. Но чековая сходимость ряда (7.3.4) в K влечет его финитность. ♢

В следующих параграфах мы рассмотрим сферу применимости формулы (7.3.4), рассматривая сходимость рядов в более слабой, а именно рутинной топологии.

7.3.2 Полиномы $\Pi(j,l,b)$**.** Через $\Pi(j,l,b)$, где $j\in\mathbf{N}_o{}^n$, $l\in\mathbf{N}_o{}^m$, $b\in(SA(m,K))^n$ мы в формуле (7.3.4) обозначили величину

$$\Pi(j,l,b)\equiv \tag{7.3.5}$$

$$\sum_{\substack{i_\alpha^\beta\in\mathbf{N}_o{}^m\\ \sum_{\beta=1}^n\sum_{\alpha=1}^{j_\beta} i_\alpha^\beta=l}}\left(b_1(i_1^1)b_1(i_2^1)\dots b_1(i_{j_1}^1)\right)\left(b_2(i_1^2)b_2(i_2^2)\dots b_2(i_{j_2}^2)\right)\dots\left(b_n(i_1^n)b_n(i_2^n)\dots b_n(i_{j_n}^n)\right),$$

понимаемую следующим образом: если $j_\beta = 0$, то $\sum\limits_{\alpha=1}^{j_\beta} i_\alpha^\beta \equiv 0$, а $\prod\limits_{\alpha=1}^{j_\beta} b_\beta(i_\alpha^\beta) \equiv 1$. Полагаем

$$\Pi(0,l,b) \equiv \begin{cases} 1, & l=0, \\ 0, & l \neq 0. \end{cases} \tag{7.3.6}$$

По построению $\Pi(j,l,b)$ — однородный полином степени $|j|$ от переменных $b_\beta(i) \in K$, зависящий лишь от $b_\beta(i)$ с мультииндексами $i \in \mathbf{N}_o{}^m$, такими, что $i \leq l$.

При $l = 0$ из (7.3.5) получаем, что

$$\Pi(j,0,b) = (b(0))^j, \tag{7.3.7}$$

поэтому по формуле (7.3.4)

$$c(0) = \sum_{j \in \mathbf{N}_o{}^n} a(j)(b(0))^j. \tag{7.3.8}$$

В случае $n = m = 1$ полиномы $\Pi(j,l,b)$ имеют вид

$$\Pi(j,l,b) = \sum_{\substack{i\alpha \in \mathbf{N}_o \\ \sum\limits_{\alpha=1}^{j} i_\alpha = l}} b(i_1)b(i_2)\dots b(i_j). \tag{7.3.9}$$

Финитность ряда (7.3.4) для коэффициента $c(l)$ при $b \in (SAG(m,K))^n$ обеспечивается следующим свойством полиномов $\Pi(j,l,b)$.

Лемма 7.3.1 *Если $b(0) = 0$, то $\Pi(j,l,b) = 0$ при $|j| > |l|$.*

Доказательство. По свойству мультииндекса для суммы мультииндексов в выражении (7.3.5) имеем

$$\sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{j_\beta} |i_\alpha^\beta| = |l|. \tag{7.3.10}$$

Но если сумма $|j|$ неотрицательных целых чисел равна $|l|$, и $|j| > |l|$, то хотя бы одно из этих чисел нулевое, т.е. найдется $|i_\alpha^\beta| = 0$. Тогда $i_\alpha^\beta = 0$ и $b_\beta(i_\alpha^\beta) = 0$. Итак, каждое произведение в формуле (7.3.5) равно нулю. $\diamondsuit$

Следствие 7.3.1 *Если $b(0) = 0$, то координата*

$$c(l) = \sum_{\substack{j \in \mathbf{N}_o{}^n \\ |j| \leq |l|}} a(j)\Pi(j,l,b) \tag{7.3.11}$$

и является полиномом степени $|l|$ от переменных $b_\beta(i) \in K$, зависящих лишь от $b_\beta(i)$ с мультииндексом $i \leq l$.

Рассмотрим случай $n = m$. Введём класс

$$SAN(n,K) \equiv \{b \in (SA(n,K))^n \ \mid \ (b(0) = 0) \wedge (\forall \alpha \in \overline{1,n} \ \forall \beta \in \overline{1,n} \ \mid \ b_\alpha(\vec{k}_\beta) = \delta_{\alpha\beta})\},$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера.

Лемма 7.3.2 *Если $b \in SAN(n,K)$, то при $|j| = |l|$*

$$\Pi(j,l,b) = \begin{cases} 1, & j = l, \\ 0, & j \neq l. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим сумму (7.3.5) при $|j| = |l|$. Если хоть одно из чисел $|i_\alpha^\beta| = 0$, то соответствующее произведение в (7.3.5) обращается в нуль в силу условия $b(0) = 0$. Если же все $|j|$ чисел $|i_\alpha^\beta|$ ненулевые и их сумма равна $|l| = |j|$, то все числа $|i_\alpha^\beta| = 1$. Но если $|i_\alpha^\beta| = 1$, то $b_\beta(i_\alpha^\beta) = 0$ при $|i_\alpha^\beta \neq \vec{k}_\beta$ и соответствующее произведение в сумме (7.3.5) обращается в нуль. Итак произведение $\prod\limits_{\beta=1}^{n}\prod\limits_{\alpha=1}^{j_\beta} b_\beta(i_\alpha^\beta) \neq 0$ лишь когда $i_\alpha^\beta = \vec{k}_\beta$, причём, тогда оно равно единице. Но при указанном выборе i_α^β получаем $\sum\limits_{\beta=1}^{n}\sum\limits_{\alpha=1}^{j\beta} i_\alpha^\beta = j$, т.е. $j = l$. $\diamondsuit$

Первые полиномы $\Pi(j,l,b)$ при $n = m = 1$ приведены в следующей таблице при $b \in SAN(1,K)$.

Таблица 7.3.1: Полиномы $\Pi(j,l,b)$.

$j \backslash l$	1	2	3	4
1	1	$b(2)$	$b(3)$	$b(4)$
2	0	1	$2b(2)$	$(b(2))^2 + 2b(3)$
3	0	0	1	$3b(2)$
4	0	0	0	1

7.3.3 Инверсия.

Введём подмножество $SAV(n,K) \equiv (SAG(n,K))^n \subset (SA(n,K))^n$, являющееся левым и правым подмодулем модуля $(SA(n,K))^n$. Элементы $a \in SAV(n,K)$ есть вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_\alpha \in SAG(n,K), \alpha \in \overline{1,n}$. На основании леммы 7.2.2 определим на множестве $SAV(n,K)$ также следующий внутренний закон композиции, который назовём суперпозицией. А именно для $a, b \in SAV(n,K)$ положим $a \circ b \equiv (R_{a_1}(b), R_{a_2}(b), \ldots, R_{a_n}(b)) = c \in SAV(n,K)$, где $R_{a_\alpha}(b)$ — специальные степенные ряды вида (7.2.7). На множестве $SAV(n,K)$, таким образом определены следующие три закона композиции: 1) внешний закон композиции — умножение элемента $a \in SAV(n,K)$ слева на скаляр — элемент $\lambda \in K$; 2) внутренний закон композиции — сложение двух элементов $a, b \in SAV(n,K)$; 3) внутренний закон композиции — суперпозиция двух элементов. Операции сложения и умножения слева на скаляр из кольца K, превращают $SAV(n,K)$ в левый модуль над K, а операция суперпозиции задаёт на $SAV(n,K)$ структуру моноида с единицей $h \equiv (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in SAV(n,K)$, где $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — определены в п. 7.1.3. Выполнено условие левой дистрибутивности

$$(\lambda_1 a + \lambda_2 b) \circ c = \lambda_1(a \circ b) + \lambda_2(b \circ c) \tag{7.3.12}$$

для любых скаляров $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ и элементов $a, b, c \in SAV(n,K)$.

Множество с тремя законами композиции: 1) левое умножение на скаляр из кольца K; 2) сложение; 3) суперпозиция — так что первые две операции задают структуру левого модуля над K, суперпозиция задаёт структуру моноида и выполнено соотношение левой дистрибутивности (7.3.12), назовём *предалгеброй.* Если V — левый модуль над кольцом K, то множество всех морфизмов в категории множеств множества V в себя $End(V)$ имеет структуру предалгебры. Аналогично, если V — левый топологический модуль над топологическим кольцом K, то множество всех морфизмов в категории топологических пространств множества V в себе имеет структуру предалгебры. Морфизм в категории предалгебр является одновременно морфизмом левых модулей к морфизмом моноидов по суперпозиции.

Множество всех квадратных матриц $M(n,K)$ размера $n\times n$ с элементами из кольца K с обычными операциями умножения на скаляр из K, сложения и умножения матриц имеет структуру предалгебры. Определим отображение D: $SAV(n,K)\to M(n,K)$ следующим образом. Каждый элемент $a\in SA(n,K)$ в силу единственности канонического разложения элемента $a_\alpha\in SA(n,K), \alpha\in\overline{1,n}$ единственным образом представим в виде

$$a = D(a)h + O(2), \tag{7.3.13}$$

где $D(a)$ — матрица из $M(n,K)$. Отображение $D: SAV(n,K)\to M(n,K)$ — морфизм в категории предалгебр — мы будем говорить *гомоморфизм предалгебр.* В самом деле, D — морфизм в категории левых модулей над K, кроме того $D(h) = E$, где $E\in M(n,K)$ единичная матрица. Для суперпозиции элементов $a,b\in SAV(n,K)$ имеем

$$\begin{gathered} a\circ b = (D(a)h{+}O(2))\circ(D(b)h{+}O(2)) = (D(a)h)\circ(D(b)h{+}O(2)){+}O(2)\circ(D(b)h{+}O(2)) = \\ D(a)(D(b)h+O(2))+O(2) = (D(a)D(b))h+O(2). \end{gathered} \tag{7.3.14}$$

Откуда $D(a\circ b) = D(a)D(b)$.

Так как отображение $D: SAV(n,K)\to M(n,K)$ гомоморфизм предалгебр, то множество $SAN(n,K)\equiv\{a\in SAV(n,K)\mid D(a)=E\}$ образует моноид по операции суперпозиция. Оказывается операция суперпозиция задаёт на множестве $SAN(n,K)$ структуру группы.

Теорема 7.3.2 *У любого элемента $b\in SAN(n,K)$ существует обратный элемент $a\in SAN(n,K)$ по операции суперпозиция и задаётся рекуррентными формулами*

$$a_\alpha(\vec{k}_\beta) = \delta_{\alpha\beta},\quad \alpha,\beta\in\overline{1,n}, \tag{7.3.15}$$

$$a(l) = -\sum_{\substack{j\in\mathbf{N}_o{}^n\\|j|<|l|}} a(j)\Pi(j,l,b),\quad |l|\ge 2, \tag{7.3.16}$$

где $\delta_{\alpha,\beta}$ — символ Кронекера.

Доказательство. Покажем сначала, что элемент $a\in SAN(n,K)$, задаваемый формулами (7.3.14, 7.3.15), являются левым обратным к элементу $b\in SAN(n,K)$, т.е. $a\circ b = h$. Для этого следует проверить соотношения $D(a\circ b)h = h$ и $(a\circ b)(l) = 0$ при $|l|>1$. Но так как отображение D — гомоморфизм предалгебр, то $D(a\circ b) = D(a)D(b) = EE = E$ и $D(a\circ b)h = Eh = h$.

При $l\in\mathbf{N}_o{}^n$, $|l|>1$ согласно теореме 7.3.1 и леммам 7.3.1, 7.3.2 верно

$$(a\circ b)(l) = \sum_{\substack{j\in\mathbf{N}_o{}^n\\|j|\le|l|}} a(j)\Pi(j,l,b) = \sum_{\substack{j\in\mathbf{N}_o{}^n\\|j|<|l|}} a(j)\Pi(j,l,b) + a(l),$$

поэтому (7.3.16) влечёт $(a\circ b)(l) = 0$ при $|l|>1$.

Мы показали, что у каждого элемента $b \in SAN(n,K)$ существует в моноиде по суперпозиции $SAN(n,K)$ левый обратный элемент $a \in SAN(n,K)$, тогда по утверждению 7.2.8 моноид является группой и левый обратный элемент a является и обратным элементом к элементу b. $\diamondsuit$

Чтобы отличать обратные элементы по операции суперпозиции от обратных элементов по операции свёртка будем называть обратные по операции суперпозиции элементы *инверсными.* Рассмотрим вопрос о существовании инверсного элемента к элементу $b \in SAV(n,K)$. Так как отображение $D : SAV(n,K) \to M(n,K)$ гомоморфизм предалгебр, то соотношение $a \circ b = h$ для $a, b \in SAV(n,K)$ влечёт соотношение $D(a)D(b) = E$ для матриц $D(a), D(b) \in M(n,K)$. Итак, чтобы элемент $b \in SAV(n,K)$ имел левый (правый) инверсный необходимо, чтобы матрица $D(b) \in M(n,K)$ имела левую (правую) обратную матрицу. Оказывается этого и достаточно.

Теорема 7.3.3 *Элемент $b \in SAV(n,K)$ имеет в $SAV(n,K)$ левый инверсный (правый инверсный, инверсный) тогда и только тогда, когда матрица $D(b) \in M(n,K)$ имеет левую обратную (правую обратную, обратную).*

Доказательства в силу предыдущего требует лишь достаточность. Пусть матрица $D(b)$ имеет левую обратную матрицу $Q \in M(n,K)$, т.е. $QD(b) = E$. Элемент $Qh \circ b$ в таком случае принадлежит $SAV(n,K)$, ибо $D(Qh \circ b) = QD(b) = E$, поэтому по теореме 7.3.2 существует инверсный элемент $(Qh \circ b)^{-1} \in SAV(n,K)$ к элементу $Qh \circ b$. Отсюда получаем

$$(Qh \circ b)^{-1} \circ (Qh \circ b) = h,$$

что эквивалентно в силу ассоциативности суперпозиции

$$((Qh \circ b)^{-1} \circ Qh) \circ b = h,$$

т.е. элемент $(Qh \circ b)^{-1} \circ Qh$ есть левый обратный к элементу b.

Пусть матрица $D(b)$ имеет правую обратную матрицу $S \in M(n,K)$, т.е. $D(b)S = E$. Тогда элемент $(b \circ Sh) \in SAN(n,K)$ и имеет инверсный элемент

$$(b \circ Sh) \circ (b \circ Sh)^{-1} = h,$$

что в силу ассоциативности эквивалентно равенству

$$b \circ (Sh \circ (b \circ Sh)^{-1}) = h,$$

т.е. элемент $Sh \circ (b \circ Sh)^{-1}$ является правым инверсным к элементу $b \in SAV(n,K)$.

Если матрица $D(b) \in M(n,K)$ обратима в $M(n,K)$, то у неё существуют левая и правая обратные матрицы. Тогда у элемента $b \in SAV(n,K)$ по доказанному существуют левый и правый инверсные элементы и по утверждению 7.2.7 тогда существует и элемент $a \in SAV(n,K)$, являющийся инверсным к b. $\diamondsuit$

Введём теперь топологию на кольце K, задающую на кольце K структуру топологического кольца. Тогда согласно § 7.2 пространство последовательностей $SA(n,K)$ получает структуру топологического кольца и топологического модуля. На $(SA(n,K))^n$ зададим топологию как на произведении топологических пространств и на двустороннем подмодуле $SAV(n,K) \equiv (SAG(n,K))^n \subset (SA(n,K))^n$ получаем наследственную топологию. Остаётся вопрос о непрерывности операции суперпозиции элементов $a, b \in SAV(n,K)$. Согласно следствию 7.3.1 координата $(a \circ b)(l)$, $l \in \mathbf{N}_o{}^n$

является полиномом от координат $a(j)$ и $b(i)$ с полииндексами $|j| \leq |l|$ и $i \leq l$. Так как K топологическое кольцо и топология на $SAV(n,K)$ есть наследственная топология от топологии произведения на $(SA(n,K))^n$, то координата $(a \circ b)(l) \in K$ непрерывно зависит от элементов $(a,b) \in SAV(n,K)$, что доказывает непрерывность операции суперпозиция в $SAV(n,K)$.

На множестве $SAN(n,K)$ определена также операция взятия обратного элемента к элементу $b \in SAN(n,K)$ и задаётся формулами (7.3.15, 7.3.16) теоремы 7.3.2. Координата обратного элемента $a(l)$, $l \in \mathbf{N}_o{}^n$ согласно формуле (7.3.16) является полиномом от координат $b(j)$, с мультииндексом $i \leq l$, поэтому $a(l) \in K$ непрерывная функция от элемента $b \in SAV(n,K)$, что означает непрерывную зависимость обратного элемента $a \in SAN(n,K)$ от исходного элемента $b \in SAN(n,K)$. Мы убедились, что операция суперпозиции задаёт на топологическом пространстве $SAN(n,K)$ структуру топологической группы.

Вернёмся снова к частному случаю $n = 1$ и на основе таблицы 1 полиномов $\Pi(j,l,b)$ составим таблицу первых четырёх координат инверсного к $b \in SAN(1,k)$ элемента $a \in SAN(1,k)$ как полиномов от координат $b(1), b(2), b(3), b(4)$. Напомним, что $b(1) = a(1) = 1$.

Таблица 7.3.2: Координаты элемента $a \in SAN(1,k)$, инверсного к элементу $b \in SAN(1,k)$.

$a(1) = 1;$
$a(2) = -b(2);$
$a(3) = -b(3) + 2(b(2))^2;$
$a(4) = -b(4) + 3b(3)b(2) + 2b(2)b(3) - 5(b(2))^3.$

Рассмотрим также в случае $n = 1$ следующий пример.

Пример 7.3.1

Пусть K — алгебра над полем $\Lambda (\Lambda = \mathbf{C}$ или $\Lambda = \mathbf{R})$. Определим последовательности $\widetilde{\exp} \in SAG(1,k)$ и $\widetilde{\ln} \in SAN(1,k)$ формулами

$$\widetilde{\exp}(i) = \frac{1}{i!}, \tag{7.3.17}$$

$$\widetilde{\ln}(i) = \frac{(-1)^{i+1}}{i}, \tag{7.3.18}$$

при $i \in \mathbf{N}$.

Далее мы покажем, что элементы $\widetilde{\exp}$ и $\widetilde{\ln}$ инверсные, а пока проверим, что если $a \in SAN(1,k)$ инверсный элемент к элементу $\widetilde{\exp}$, то $a(l) = \widetilde{\ln}(l)$ при $l \in \overline{1,4}$. Согласно таблице 7.3.2 имеем:

$a(2) = -\frac{1}{2} = \widetilde{\ln}(2);$
$a(3) = -\frac{1}{6} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} = \widetilde{\ln}(3);$
$a(4) = -\frac{1}{24} + 5\frac{1}{6}\frac{1}{2} - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{6}{24} = -\frac{1}{4} = \widetilde{\ln}(4).$

7.3.4 Инверсные последовательности полиномов

Вернёмся к обозначению $R_a(b) \equiv a \circ b$ при $a, b \in SAV(n, K)$. При фиксированном элементе a мы получаем отображение $R_a : SAV(n, K) \to SAV(n, K)$, т.е. отображение R_a принадлежит предалгебре эндоморфизмов $End(SAV(n, K))$ в категории множеств левого модуля $SAV(n, K)$ в себя. Сопоставляя каждому элементу $a \in SAV(n, K)$ отображение $R_a \in End(SAV(n, K))$, мы получаем гомоморфизм предалгебры $SAV(n, K)$ в предалгебру $End(SAV(n, K))$. Если K – топологическое кольцо, то на предалгебре $SAV(n, K)$ естественно возникает рутинная топология, в которой $SAV(n, K)$ топологическая предалгебра и каждое отображение $R_a : SAV(n, K) \to SAV(n, K)$ непрерывно. Итак, если K — топологическое кольцо, то отображение $R : SAV(n, K) \to End(SAV(n, K))$ является гомоморфизмом предалгебры $SAV(n, K)$ в предалгебру непрерывных эндоморфизмов левого топологического модуля $SAV(n, K)$ в себя.

Для каждого мультииндекса $l \in \mathbf{N}_o{}^n$ обозначим через $[l] \subset \mathbf{N}_o{}^n$ множество $[l] \equiv \{i \in \mathbf{N}_o{}^n \ | \ i \le l\}$. Сопоставляя каждому элементу $a \in SAV(n, K)$ его координаты лишь с номерами из множества $[l]$, мы получим линейное непрерывное в рутинных топологиях отображение $P_l : SAV(n, K) \to (K^{[l]})^n$. Обозначим $(K^{[l]})^n \equiv X_l, \ l \in \mathbf{N}_o{}^n$. Наоборот, дополняя элемент из X_l до элемента из $SAV(n, K)$ нулями на координатах, не принадлежащих множеству $[l]$, мы получим линейное непрерывное в рутинных топологиях отображение $J_l : (K^{[l]})^n \to SAV(n, K)$, причём композиция отображений $P_l J_l : X_l \to X_l$ есть тождественное отображение.

Для каждого $a \in SAV(n, K)$ и каждого $l \in \mathbf{N}_o{}^n$ формулы (7.3.5, 7.3.11) влекут существование единственного отображения $R_{a,l} : X_l \to X_l$ такого, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} SAV(n,K) \arrow[r, "R_a"] \arrow[d, shift left, "P_l"] & SAV(n,K) \arrow[d, shift right, "P_l"'] \\ X_l \arrow[u, shift left, "J_l"] \arrow[r, "R_{a,l}"] & X_l \arrow[u, shift right, "J_l"'] \end{tikzcd} \tag{7.3.19}$$

причём все отображения непрерывны в рутинных топологиях. Отображение $R_{a,l} : X_l \to X_l$ — полиномиальное отображение степени $|l|$. Каждое $(R_{a,l}(x))_\alpha(i) \in K$, где $i \in [l]$, $\alpha \in \overline{1,n}$, есть полином степени $|i|$ от элементов $x_\beta(j) \in K$ с $j \le i$, $\beta \in \overline{1,n}$. Отображение $R_{,l}$, сопоставляющее элементу $a \in SAV(n, K)$ отображение $R_{a,l} \in End(X_l)$, — гомоморфизм предалгебры $SAV(n, K)$ в предалгебру эндоморфизмов левого модуля X_l в себя $End(X_l)$. То что отображение $R_{,l} : SAV(n, K) \to End(X_l)$ есть гомоморфизм левых модулей, следует из формул (7.3.5, 7.3.11). Если $a = h$, то отображения R_a и $R_{a,l}$ тождественные. Если $c \circ a = g$, где $c, a, g \in SAV(n, K)$, то $R_{(c \circ a),l} = R_{c,l} R_{a,l}$ в силу коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} SAV(n,K) \arrow[r, "R_a"] \arrow[d, shift left, "P_l"] \arrow[rr, bend left, "R_g"] & SAV(n,K) \arrow[r, "R_c"] \arrow[d, shift left, "P_l"] & SAV(n,K) \arrow[d, shift left, "P_l"] \\ X_l \arrow[u, shift left, "J_l"] \arrow[r, "R_{a,l}"] \arrow[rr, bend right, "R_{g,l}"'] & X_l \arrow[u, shift left, "J_l"] \arrow[r, "R_{c,l}"] & X_l \arrow[u, shift left, "J_l"] \end{tikzcd} \tag{7.3.20}$$

В случае $c \circ a = h$ мы получаем, что композиция отображений $R_{c,l} R_{a,l} = Id$ —

тождественное отображение, отображения $R_{a,l}$ и $R_{c,l}$ будут взаимно обратными, т.е. гомеоморфизмами $SAV(n,K)$ в рутинной топологии на себя.

Если $l, j \in \mathbf{N}_o{}^n$ и $l \leq j$, то имеют место естественное линейное изоморфное вложение $\varphi_{l,j} : X_l \to X_j$ состоящее в заполнении недостающих координат нулями и линейное проектирование $\psi_{j,l} : X_j \to X_l$, состоящее в отбрасывании координат с номерами не принадлежащими $[l]$, так что диаграмма линейных непрерывных в рутинной топологии отображений коммутативна

$$\begin{tikzcd} & SAV(n,K) & \\ X_l \arrow[ur, shift left, "J_l"] \arrow[ur, shift right, "P_l"'] \arrow[rr, shift left, "\varphi_{l,j}"] & & X_j \arrow[ul, shift right, "J_j"'] \arrow[ul, shift left, "P_j"] \arrow[ll, shift left, "\psi_{j,l}"] \end{tikzcd} \tag{7.3.21}$$

и при любом $a \in SAV$ верно

$$R_{a,l} = \psi_{j,l} R_{a,j} \varphi_{l,j} \tag{7.3.22}$$

Далее рассмотрим случай $n = 1$, когда $SAV(1,K) = SAG(1,K)$. При каждом $a \in SAG(1,K)$ мы получаем последовательность полиномов $Q_{a,i} : K^i \to K$, $i \in \mathbf{N}$ степени i от i переменных, где при $x \in K^i$

$$Q_{a,i}(x) \equiv R_a(J_i(x))(i). \tag{7.3.23}$$

l полиномов $\{Q_{a,i}\}_{i \in \overline{1,l}}$ образуют отображение $R_{a,l} : K^l \to K^l, l \in \mathbf{N}$. Если $c \circ a = h$, где $a, c \in SAG(1,K)$, то отображение $R_{c,l}$ — левое обратное к отображению $R_{a,l}$. Если элементы $c, a \in SAG(1,K)$ инверсные, т.е. $c \circ a = a \circ c = h$, то последовательности полиномов $Q_{a,i}$ и $Q_{c,i}$ мы назовём инверсными. В этом случае отображения $R_{a,l}$ и $R_{c,l}$ взаимно обратны.

Пример 7.3.2

Возвращаемся к примеру 7.3.1. Так как элементы $\widetilde{\exp}, \widetilde{\ln} \in SAG(1,K)$ инверсны, то они порождают инверсные системы полиномов, а именно для любой последовательности $I \in SAG(1,K)$ определена последовательность

$$H = \widetilde{\ln} \circ I, \tag{7.3.24}$$

$H \in SAG(1,K)$ и $H(i)$ есть полином i — той степени от i переменных $I(1)$, $I(2)$, ..., $I(i) \in K$, т.е. $H(i) = Q_{\widetilde{\ln},i}(I(1), I(2), \dots, I(i))$. Наоборот, для любой последовательности $H \in SAG(1,K)$ определена последовательность $I \in SAG(1,K)$ вида

$$I = \widetilde{\exp} \circ H \tag{7.3.25}$$

и её координаты $I(i) = Q_{\widetilde{\exp},i}(H(1), H(2), \dots, H(i))$ — полиномы степени i от $H(1), H(2), \dots, H(i) \in K$.

Так как элементы $\widetilde{\ln}$ и $\widetilde{\exp}$ инверсные в $SAG(1,K)$, то справедливо тождество

$$\widetilde{\exp} \circ \widetilde{\ln} \circ I = I \tag{7.3.26}$$

для любого $I \in SAG(1,K)$, откуда при любом $I \in SAG(1,K)$ верно

$$\widetilde{\exp} \circ (\widetilde{\ln} \circ I) = I. \tag{7.3.27}$$

7.3.5 Секвенциальный функтор и суперпозиция последовательностей

Для любого гомоморфизма колец $\varphi : K_1 \to K_2$ применяя секвенциальный функтор из п. 7.1.4 мы получим гомоморфизм колец $\psi_n \equiv Sec_n(\varphi) : SA(n, K_1) \to SA(n, K_2)$ непрерывный из чековой топологии в чековую. Поэтому суммируемый в чековой топологии ряд в $SA(n, K_1)$ над действием отображения ψ_n перейдет в суммируемый ряд в $SA(n, K_2)$ в чековой топологии. Из теоремы 7.3.2 таким образом следует утверждение.

Утверждение 7.3.1 *Пусть $a \in SA(n, K_1)$, $b \in (SA(m, K_1))^n$ и либо последовательность a финитна либо $b \in (SAG(m, K_1))^n$, тогда определены суперпозиции $a \circ b$ и $\psi_n(a) \circ \psi_m(b)$ и верно*

$$\psi_m(a \circ b) = \psi_n(a) \circ \psi_m(b). \tag{7.3.28}$$

В модернизированных обозначениях (см. п. 7.1.4, если $\varphi = I : K_1 \to K_2$ гомоморфизм колец, формула (7.3.28) принимает вид

$$I(a \circ b) = (Ia) \circ (Ib). \tag{7.3.29}$$

§7.4 Поднятие функций

7.4.1 I-поднятие функции. В этом параграфе и далее в этой главе K — алгебра над полем Λ ($\Lambda = \mathbf{R}$ или $\Lambda = \mathbf{C}$). Элементы алгебры K вида $\lambda \cdot 1$, где $\lambda \in \Lambda$, 1 — единичный элемент алгебры K, мы называем скалярными. Множество скалярных элементов обозначим $\mathcal{S}c \subset K$. Множество $\mathcal{S}c$ есть подалгебра алгебры K, изоморфная алгебре Λ. Алгебра скалярных элементов $\mathcal{S}c$ принадлежит центру $Z(K)$ алгебры K. Мы предполагаем, что на алгебре K определена топология, порождающая на K структуру отдельного локально выпуклого линейного топологического пространства. Если это специально не оговорено, непрерывности операции умножения в K мы не предполагаем.

Через $FA(n, K)$, $n \in \mathbf{N}$ обозначим множество функций φ, каждая из которых определена в некоторой окрестности $U_\varphi \subset K^n$ со значениями в K и в окрестности U_φ допускает представление суммируемым рядом

$$\forall x \in U_\varphi \mid \varphi(x) = \sum_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} a_\varphi(i) x^i, \tag{7.4.1}$$

где $a_\varphi \in SA(n, K)$. По определению $FA(0, K) \equiv K$.

Пусть K_1, K_2 две алгебры над полем Λ и $I : K_1 \to K_2$ гомоморфизм алгебр, являющийся непрерывным отображением. Пусть $\varphi \in FA(n, K_1)$, тогда функцию $\psi \in FA(n, K_2)$ называем I-поднятием функции φ, если существует окрестность нуля U в K_1^n такая, что для всех $x \in U$ выполнено

$$I\varphi(x) = \psi(Ix_1, Ix_2, \dots, Ix_n). \tag{7.4.2}$$

7.4.2 Соответствие $\varphi \longmapsto a_\varphi$.

По определению для функции $\varphi \in FA(n,K)$ существует последовательность $a_\varphi \in SA(n,K)$, что выполнено (7.4.1) в некоторой окрестности нуля $U_\varphi \in K^n$. Возникает вопрос о единственности последовательности a_φ, участвующей в представлении (7.4.1).

Лемма 7.4.1 *Пусть $\varphi \in FA(n,K)$ допускает представление (7.4.1) в окрестности нуля $U_\varphi \in K^n$ и существует окрестность нуля $V \in K^n$, в которой выполнено соотношение*

$$\forall x \in V \cap (Sc)^n \mid \varphi(x) = 0. \tag{7.4.3}$$

Тогда $a_\varphi = 0$ и $\varphi(x) = 0$ при всех $x \in U_\varphi$.

Доказательство. Если $x \in (Sc)^n$, то $x = z \cdot 1$, где $z \in \Lambda^n$ а 1 — единичный элемент алгебры K. По условию

$$\forall x \in U_\varphi \cap U \cap (Sc)^n \sum_{i \in \mathbf{N}_o} \mid a_\varphi(i) x^i = 0,$$

поэтому в силу алгебраического и топологического изоморфизма $\Lambda \to Sc$ существует окрестность нуля $W \subset \Lambda^n$, что

$$\forall z \in W \mid \sum_{i \in \mathbf{N}_o} a_\varphi(i) z^i = 0. \tag{7.4.4}$$

Так как ряд в 7.4.4 суммируем в K, то для любого линейного непрерывного функционала $f : K \to \Lambda$ будет выполнено соотношение

$$\forall x \in W \mid f(\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a_\varphi(i) z^i) = \sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} f(a_\varphi(i)) z^i = 0. \tag{7.4.5}$$

При фиксированном линейном непрерывном функционале f мы получим аналитическую функцию, обращающуюся в нуль тождественно в некоторой окрестности начала координат. Но тогда все её коэффициенты ряда Тейлора равны нулю, т.е.

$$\forall i \in \mathbf{N}_o{}^n \mid f(a_\varphi(i)) = 0.$$

Теперь мы получили, что при фиксированном $i \in \mathbf{N}_o{}^n$ для любого линейного непрерывного функционала f на отделимом локально выпуклом линейном топологическом пространстве K верно $f(a_\varphi(i)) = 0$. Но тогда $a_\varphi(i) = 0$. $\diamondsuit$

Мы доказали, что для любой окрестности нуля $U \subset K^n$ множество $U \cap (Sc)^n \subset K^n$ есть множество единственности для функций класса $FA(n,K)$.

Следствие 7.4.1 *Для каждой функции $\varphi \in FA(n,K)$ существует одна и только одна последовательность $a_\varphi \in SA(n,K)$, что в некоторой окрестности нуля $U_\varphi \subset K_n$ верно представление 7.4.1.*

Однозначно определенный ряд 7.4.1 будем называть *рядом Тейлора* функции $\varphi \in FA(n,K)$.

Таким образом, определено линейное отображение $\mathcal{T} : FA(n,K) \to SA(n,K)$, сопоставляющее функции $\varphi \in FA(n,K)$ последовательность $a_\varphi \in SA(n,K)$, которое мы назовём *трансформацией Тейлора.* Отображение $\mathcal{T}$ инъективно и переводит единичный элемент в единичный элемент.

Вернемся к вопросу о поднятии функций. Пусть $I : K_1 \longrightarrow K_2$ непрерывный гомоморфизм алгебр, тогда $I(1_1) = 1_2$ и $I(\lambda 1_1) = \lambda 1_2$ при любом $\lambda \in \Lambda$, где 1_1 и 1_2 — единицы алгебр K_1 и K_2, соответственно. Т.е. сужение $I|_{Sc_1} : Sc_1 \longrightarrow Sc_2$ отображения I на подалгебру скалярных элементов $Sc_1 \subset K_1$ является алгебраическим и топологическим изоморфизмом подалгебр скалярных элементов $Sc_1 \subset K_1$ и $Sc_2 \subset K_2$.

Рассмотрим вопрос о единственности поднятия. Пусть $\varphi \in FA(n, K_1)$ и функции $\psi, \theta \in FA(n, K_2)$ являются I-поднятиями функции φ. Тогда существует окрестность нуля $U \subset K_1^n$, что

$$\forall x \in U \ \mid \ I\varphi(x) = \psi(Ix_1, Ix_2, \dots, Ix_n) = \theta(Ix_1, Ix_2, \dots, Ix_n).$$

Если теперь точка x пробегает множество $U \cap (Sc_1)^n \subset K_1^n$, то точки $(Ix_1, Ix_2, \dots, Ix_n)$ пробегают некоторую окрестность нуля вида $W \cap (Sc_2)^n \subset K_2^n$ и в силу леммы 7.4.1 $\psi = \theta$. Итак, если I-поднятие функции φ существует, то оно единственно.

Лемма 7.4.2 *Если функция* $\psi \in FA(n, K_2)$ *является* I*-поднятием функции* $\varphi \in FA(n, K_1)$*, то*

$$\forall i \in \mathbf{N}_o{}^n \ \mid \ a_\psi(i) = I(a_\varphi(i)). \tag{7.4.6}$$

Доказательство. Пусть в некоторой окрестности нуля $U_\varphi \in K_1^n$ выполнено (7.4.1). Тогда в силу непрерывности гомоморфизма алгебр I выполнено

$$I(\varphi(x)) = I\left(\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a_\varphi(i) x^i\right) = \sum I(x_\varphi(i))(Ix)^i,$$

где $Ix = (Ix_1, Ix_2, \dots, Ix_n)$. Если выполнено также условие (7.4.2), то верно

$$\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} I(a_\varphi(i))(Ix)^i = \sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a_\psi(i)(Ix)^i. \tag{7.4.7}$$

Когда точка x пробегает некоторую окрестность нуля $U \subset K_1^n$, точка Ix пробегает, в частности, и некоторое множество в K_2^n вида $W \cap (Sc_2)^n$, где W некоторая окрестность нуля в K_2^n. В силу леммы 1 получаем равенство (7.4.6). ♢

Следствие 7.4.2 *Функция* $\varphi \in FA(n, K_1)$ *допускает* I*-поднятие до некоторой функции из* $FA(n, K_2)$ *тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности нуля* $W \subset K_2^n$ *суммируем ряд*

$$\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} I(a_\varphi(i)) z^i, \tag{7.4.8}$$

где $z \in W$.

Таким образом вопрос о существовании поднятия сводится к вопросу о суммируемости степенного ряда (7.4.8) в алгебре K_2 .

Выделим теперь алгебры K_1 и K_2 и гомоморфизмы I, для которых гарантировано существование поднятия.

Теорема 7.4.1 *Если* K_1 *и* K_2 *банаховы алгебры,* $I : K_1 \longrightarrow K_2$ *их непрерывный гомоморфизм, то всякая функция* $\varphi \in FA(n, K_1)$ *допускает* I*-поднятие до некоторой функции* $\psi \in FA(n, K_2)$.

Теорема 7.4.2 *Пусть* K_1 *— банахова алгебра,* $K_2 = SA(n, K_1)$*, гомоморфизм* $I : K_1 \to K_2$ *есть отображение вложения* $J : K_1 \to SA(n, K_1)$ *из п. 7.1.1, тогда каждая функция* $\varphi \in FA(n, K_1)$ *допускает* I*-поднятие до которой функции* $\psi \in FA(n, K_2)$*.*

Доказательства теорем 7.4.1 и 7.4.2 проведём в последующих параграфах, сначала проведя предварительное изучение свойств степенных рядов в банаховых алгебрах.

7.4.3 Отображение поднятия L_I.

В условиях теорем 7.4.1 и 7.4.2 для каждой функции $\varphi \in FA(n, K_1)$ существует единственная функция $\psi \in FA(n, K_2)$ для которой выполнено (7.4.2). Таким образом, однозначно определено отображение $L_I : FA(n, K_1) \to FA(n, K_2)$, так что следующая диаграмма отображений коммутативна

$$\begin{array}{ccc} FA(n,K_1) & \xrightarrow{L_I} & FA(n,K_2) \\ \downarrow \mathcal{T}_1 & & \downarrow \mathcal{T}_2 \\ SA(n,K_1) & \xrightarrow{Sec_n(I)} & SA(n,K_2)\ . \end{array} \tag{7.4.9}$$

Здесь $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ — трансформации Тейлора, $Sec_n(I) : SA(n, K_1) \longrightarrow SA(n, K_2)$ морфизм в категории колец, являющийся результатом применения секвенциального функтора Sec_n из п. 7.1.4. Так как K_1, K_2 — алгебры над полем Λ, а $I : K_1 \longrightarrow K_2$ — морфизм в категории алгебр, то и отображение $Sec_n(I)$ — морфизм в категории алгебр в данном случае.

При $K = \Lambda$ (см. п. 8.1.2) множества $FA(n, \Lambda)$ и $SA(n, \Lambda)$ обладают структурой коммутативных алгебр над полем Λ и трансформация Тейлора $\mathcal{T} : FA(n, \Lambda) \longrightarrow SA(n, \Lambda)$ является гомоморфизмом алгебр. Заметим также, что если $K_1 = \Lambda$ и K_2 — алгебра над полем Λ, то существует единственный морфизм в категории алгебр $I : \Lambda \longrightarrow K_2$, а именно отображение вложения $I(\lambda) = \lambda \cdot 1_2$, при $\lambda \in \Lambda$, где 1_2 — единица алгебры K_2.

Из коммутативности диаграммы (7.4.9) следует, что отображение $L_I = \mathcal{T}_2^{-1} Sec_n(I) \mathcal{T}_1$, поэтому линейно и переводит единичный элемент в единичный элемент. Однако, в общем случае равенство $L_I(\varphi_1\varphi_2) = L_I(\varphi_1)L_I(\varphi_2)$ может не выполняться, как показывает следующий пример.

Пример 7.4.1

$K_1 = \Lambda = \mathbf{R}, K_2 = M(2, \mathbf{R})$, $n = 2$, $I : K_1 \to K_2$ — гомоморфизм. Гомоморфизм $I : \Lambda \to K_2$ единственен и равен $I(\lambda) = \lambda \cdot E$, где $E \in M(2, \mathbf{R})$ единичная матрица. Положим $\varphi_1(x, y) = x$, $\varphi_2(x, y) = y$. Тогда по теореме 7.4.1 $L_I(\varphi_i) = \psi_i$, $i = 1, 2$ и $\psi_1(X, Y) = X$, $\psi_2(X, Y) = Y$. Далее $\varphi_1(x, y)\varphi_2(x, y) = xy = \varphi_2(x, y)\varphi_1(x, y)$, поэтому $L_I(\varphi_1\varphi_2) = \psi$, где $\psi(X, Y) = X$. Получаем, что $L_I(\varphi_2\varphi_1) = \psi$, но $L_I(\varphi_2)L_I(\varphi_1) = \psi_2\psi_1 = YX$. Итак,

$$L_I(\varphi_2\varphi_1) = XY \neq YX = L_I(\varphi_2)L_I(\varphi_1), \tag{7.4.10}$$

если $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Изложение примера закончено.

Возвращаясь к отображению L_I заметим, что если гомоморфизм $I : K_1 \to K_2$ инъективен, то и отображение L_I инъективно в силу представления

$$L_I = \mathcal{T}_2^{-1} Sec_n(I) \mathcal{T}_1 \tag{7.4.11}$$

и того, что инъективность морфизма I влечет инъективность морфизма $Sec_n(I)$ (см. пункт 7.1.4).

Аналогично пунктам 7.1.4 и 7.3.5 Введём *модернизированные* обозначения, т.е. отображение $L_I : FA(n, K_1) \to FA(n, K_2)$ также в ряде ситуаций будем обозначать $I \equiv L_I$. В модернизированных обозначениях определяющее соотношение (7.4.2) принимает вид

$$I(\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = (I\varphi)(Ix_1, Ix_2, \ldots, Ix_n). \tag{7.4.12}$$

§7.5 Ряды в банаховой алгебре

В этом параграфе $\mathbf{A}$ — банахова алгебра над полем Λ ($\Lambda = \mathbf{R}$ или $\Lambda = \mathbf{C}$).

7.5.1 Суммируемость ряда в банаховой алгебре.

Пусть I — произвольное множество индексов, $\{x_i\}_{\alpha \in I}$ семейство элементов $x_\alpha \in \mathbf{A}$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{\alpha \in I} x_\alpha. \tag{7.5.1}$$

Ряд (7.5.1) называем абсолютно суммируемым, если суммируем числовой ряд $\sum\limits_{\alpha \in I} |x_\alpha|$. Из критерия Коши следует, что абсолютно суммируемый ряд — суммируем. Произведение абсолютно суммируемых рядов $\sum\limits_{\alpha \in I} x_\alpha$ и $\sum\limits_{\beta \in N} y_\beta$ есть абсолютно суммируемый ряд $\sum\limits_{(\alpha,\beta) \in (I \times N)} x_\alpha y_\beta$.

Пусть $a \in SA(n, \mathbf{A})$, $b \in \mathbf{A}^n$. Образуем степенной ряд

$$\sum_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} a(i) b^i \tag{7.5.2}$$

в алгебре $\mathbf{A}$. При изучении сходимости степенного ряда (7.5.2) мы будем сравнивать его со степенным рядом

$$\sum_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} a(i) z^i\,, \quad z \in \Lambda^n. \tag{7.5.3}$$

Оказывается, изучение области сходимости ряда (7.5.3) даёт информацию об области сходимости более сложного степенного ряда (7.5.2).

Определение 7.5.1 *Последовательность $a \in SA(n, \mathbf{A})$ есть последовательность экспоненциального роста, если существует число $M \in \mathbf{R}_+$ и вектор $q \in \mathbf{R}_+^n$, что верно неравенство:*

$$\forall i \in \mathbf{N}_o \;\Big|\; |a(i)| \leq M q^i. \tag{7.5.4}$$

Полагая $p \equiv \max\limits_{\alpha \in \overline{1,n}} \{q_\alpha\}$ мы из (7.5.4) получаем

$$\forall i \in \mathbf{N}_o \;\Big|\; |a(i)| \leq M p^i. \tag{7.5.5}$$

Поэтому определение 7.5.1 эквивалентно следующему.

Определение 7.5.2 *Последовательность $a \in SA(n, \mathbf{A})$ есть последовательность экспоненциального роста, если существует число $M \in \mathbf{R}_+$ и число $p \in \mathbf{R}_+$, что верно (7.5.5).*

Утверждение 7.5.1 *Если ряд (7.5.2) суммируем в точке $b \in \mathbf{A}^n$, все координаты которой скалярные и ненулевые, то существует число $M \in \mathbf{R}_+$, что верно (7.5.4), где $q_\alpha \equiv \frac{1}{b_\alpha}$.*

Доказательство. Если ряд (7.5.2) суммируем, то из критерия Коши следует, что последовательность его членов ограничена, т.е. существует $M \in \mathbf{R}_+$, что

$$\forall i \in \mathbf{N}_o{}^n \;\Big|\; |a(i)b^i| \le M. \tag{7.5.6}$$

Для скалярных элементов $b_\alpha \in \mathbf{A}$ верно $|a(i)b^i| = |a(i)||b^i| = |a(i)||b_1|^{i_1}|b_2|^{i_2}\cdots|b_n|^{i_n}$. Отсюда

$$\forall i \in \mathbf{N}_o{}^n \;\Big|\; |a(i)| \le \frac{M}{|b_1|^{i_1}|b_2|^{i_2}\cdots|b_n|^{i_n}} = Mq^i. \quad \diamondsuit$$

При $r \in \mathbf{R}_+^n$ множество

$$U(r) \equiv \{b \in \mathbf{A}^n \;\Big|\; \forall \alpha \in \overline{1,n} \;\Big|\; |b_\alpha| < q_\alpha\} \tag{7.5.7}$$

называем открытым поликругом в $\mathbf{A}^n$, а множество

$$U[r] \equiv \{b \in \mathbf{A}^n \;\Big|\; \forall \alpha \in \overline{1,n} \;\Big|\; |b_\alpha| \le r_\alpha\} \tag{7.5.8}$$

— замкнутым поликругом в $\mathbf{A}^n$. Величину $r \in \mathbf{R}_+^n$ называем полирадиусом поликруга.

Утверждение 7.5.2 *Если $a \in SA(n, \mathbf{A})$ — последовательность экспоненциального роста, удовлетворяющая (7.5.4), то в любом замкнутом поликруге $U[r]$, с полирадиусом r, удовлетворяющим условиям $r_\alpha < \frac{1}{q_\alpha}$ при $\alpha \in \overline{1,n}$, ряд (7.5.2), а также ряды, полученные из него конечным числом формальных дифференцирований, суммируемы абсолютно и равномерно.*

Доказательство. Пусть $k \in \mathbf{N}_o{}^n$ и $D^k \equiv D_1^{k_1}D_2^{k_2}\ldots D_n^{k_n}$, где $D_1, D_2, \ldots D_n$ — операторы формального дифференцирования — формула (7.1.10). Тогда после применения оператора D к последовательности $a \in SA(n, \mathbf{A})$ получим

$$\forall i \in \mathbf{N}_o{}^n \;\Big|\; |(D^k a)(i)| \le |i+k|^{|k|}|a(i+k)| \le |i+k|^{|k|}Mq^{i+k}.$$

Откуда при $b \in U[r]$

$$\forall i \in \mathbf{N}_o{}^n \;\Big|\; |(D^{(k)}a)(i)\cdot b^i| \le |i+k|^{|k|}Mq^{i+k}r^i = Mq^k(|i|+|k|)^{|k|}\gamma^i, \tag{7.5.9}$$

где $\gamma \equiv (r_1q_1, r_2q_2, \ldots r_nq_n)$. Положим $\theta \equiv \max\limits_{\alpha\in\overline{1,n}}\{r_\alpha q_\alpha\}$, тогда $\theta \in]0,1[$ и из неравенства (7.5.9) получаем

$$\forall i \in \mathbf{N}_o{}^n \;\Big|\; |D^{(k)}(a)(i)b^i| \le Mq^k(|i|+|k|)^{|k|}\theta^{|i|}. \tag{7.5.10}$$

Осталось заметить, что

$$\sum_{i\in\mathbf{N}_o{}^n} Mq^k(|i|+|k|)^{|k|}\theta^{|i|} \le Mq^k\sum_{j=0}^{\infty}C(j+n-1, n-1)\theta^j < \infty. \tag{7.5.11}$$

Из оценки (7.5.9) и из сходимости ряда (7.5.11) следует утверждение 2. $\diamondsuit$

Из справедливости утверждений 7.5.1 и 7.5.2 вытекает справедливость следующего факта.

Утверждение 7.5.3 *Если степенной ряд (7.5.2) суммируем в некоторой окрестности нуля в* $\mathbf{A}^n$*, то существует замкнутый поликруг, в котором ряд (7.5.2) и все ряды, полученные из него конечным числом формальных дифференцирований, суммируемы абсолютно и равномерно к непрерывной в указанном поликруге функции.*

Если степенной ряд (7.5.2) суммируем во всех точках открытого (замкнутого) поликруга, то называем такой поликруг поликругом сходимости. Из утверждений 7.5.11, 7.5.2, 7.5.3 вытекает.

Следствие 7.5.1 *Если* $U(q) \subset \mathbf{A}^n$ *— открытый поликруг сходимости степенного ряда (7.5.2), то во всех его точках ряд (7.5.2) и ряды, полученные из него конечным числом формальных дифференцирований, суммируемы абсолютно к непрерывной сумме, причём в любом замкнутом подполикруге суммируемость равномерная.*

Утверждение 7.5.4 *Степенной ряд (7.5.2) суммируем в некоторой окрестности нуля в* $\mathbf{A}^n$*, тогда и только тогда, когда последовательность* $a \in SA(n, \mathbf{A})$ *— последовательность экспоненциального роста.*

Следующий критерий полезен при изучении суммируемости степенного ряда в открытом поликруге.

Утверждение 7.5.5 *Степенной ряд (7.5.2) суммируем в открытом поликруге* $U(r)$*,* $r \in \mathbf{R}^n_+$ *тогда и только тогда, когда числовой ряд с неотрицательными членами*

$$\sum_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} |a(i)| q^i, \quad q \in \mathbf{R}^n_+$$

суммируем при $q \in [0, q_1[\times[0, q_2[\times \cdots \times [0, q_n[\equiv U_+(r) \subset \mathbf{R}^n_+$.

Доказательство. Суммируемость ряда (7.5.2) в открытом поликруге $U(r)$ эквивалентна его абсолютной суммируемости в этом поликруге по следствию 7.5.1. Абсолютная же суммируемость ряда (7.5.2) в поликруге $U(r)$ эквивалентна суммируемости ряда с неотрицательными членами

$$\sum_{i \in \mathbf{N}_o} |a(i) b^i|.$$

Но $|a(i)b^i| = |a(i)|q^i$, где $q \in \mathbf{R}^n_+$, $q_1 = |b_1|$, $q_2 = |b_2|$, $\ldots$, $q_n = |b_n|$, $b \in U(r)$. $\diamondsuit$

7.5.2 Произведение и суперпозиция степенных рядов.

Пусть $a \in SA(n, \mathbf{A})$, $c \in SA(n, \mathbf{A})$. Рассмотрим при $x \in \mathbf{A}^n$ произведение степенных рядов $\sum\limits_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} a(i) x^i$ и $\sum\limits_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} c(i) x^i$.

Лемма 7.5.1 *Если в точке* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv b \in \mathbf{A}^n$ *ряды* $\sum\limits_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} a(i) x^i$ *и* $\sum\limits_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} c(i) x^i$ *абсолютно суммируемы и все элементы* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{A}$ *коммутируют между собой и со всеми элементами* $c(i) \in \mathbf{A}$*,* $i \in {\mathbf{N}_o}^n$*, то справедливо равенство:*

$$\Big(\sum_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} a(i) x^i\Big)\Big(\sum_{j \in {\mathbf{N}_o}^n} c(j) x^j\Big) = \sum_{l \in {\mathbf{N}_o}^n} (ac)(l) x^l, \tag{7.5.12}$$

где $(ac)(l) \equiv \sum\limits_{\substack{i \in \mathbf{N}_o,\ j \in \mathbf{N}_o \\ i+j=l}} a(i) c(j)$ *и ряд справа также абсолютно суммируем.*

Доказательство. Так как произведение абсолютно суммируемых рядов — абсолютно суммируемый ряд, то

$$(\sum_{i\in \mathbf{N}_o{}^n} a(i)x^i)(\sum_{j\in \mathbf{N}_o{}^n} c(j)x^j) = \sum_{(i,j)\in \mathbf{N}_o{}^n\times\mathbf{N}_o{}^n} a(i)x^i c(j)x^j. \tag{7.5.13}$$

В абсолютно суммируемом ряде мы можем группировать члены в любом порядке, получая абсолютно суммируемые ряды, поэтому

$$\sum_{(i,j)\in \mathbf{N}_o{}^n\times\mathbf{N}_o{}^n} a(i)x^i c(j)x^j = \sum_{l\in \mathbf{N}_o{}^n} \sum_{\substack{(i,j)\in \mathbf{N}_o{}^n\times\mathbf{N}_o{}^n \\ i+j=l}} a(i)x^i c(j)x^j, \tag{7.5.14}$$

в силу условий коммутации $a(i)x^i c(j)x^j = a(i)c(j)x^{i+j}$. Итак, из (7.5.13) и (7.5.14) следует (7.5.12). $\diamondsuit$

Замечание 7.5.1 *Условия коммутации в лемме 7.5.1 будут выполнены, если* $b \in (Z(\mathbf{A}))^n$ *или* $n = 1$ *и* $c \in SA(n, Z(\mathbf{A}))$.

Перейдем к рассмотрению суперпозиции рядов. Пусть $a \in SA(n,\mathbf{A})$, $b_\alpha \in SA(m,\mathbf{A})$, $\alpha \in \overline{1,n}$. Введём следующие ряды и функции:

$$g_\alpha(x) \equiv \sum_{i\in \mathbf{N}_o{}^m} b_\alpha(i)x^i,\ \alpha \in \overline{1,n},\ x \in \mathbf{A}^m; \tag{7.5.15}$$

$$\sum_{j\in \mathbf{N}_o{}^n} a(j)(g(x))^j,\ x \in \mathbf{A}^m; \tag{7.5.16}$$

$$\sum_{l\in \mathbf{N}_o{}^n} a(j)z^j,\ z \in \mathbf{A}^n; \tag{7.5.17}$$

$$\sum_{l\in \mathbf{N}_o{}^m} R_a(b)(l)x^l,\ x \in \mathbf{A}^m; \tag{7.5.18}$$

где $R_a(b) \equiv a \circ b$ — специальный степенной ряд.

Лемма 7.5.2 *Пусть ряды (7.5.15) суммируемы в некоторой окрестности нуля в* $\mathbf{A}^m$ *и точка* $g(0) \in \mathbf{A}^n$ *принадлежит открытому поликругу сходимости ряда (7.5.17). Тогда специальный степенной ряд* $R_a(b)$ *суммируем в* $SA(m,\mathbf{A})$ *в рутинной топологии и существует замкнутый поликруг суммируемости* $U[q] \subset \mathbf{A}^m$, $q \in \mathbf{R}_+{}^m$, *в котором ряды (7.5.16) и (7.5.18) абсолютно суммируемы и при* $x \in U[q]$, *удовлетворяющих следующим условиям коммутации: элементы* $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbf{A}$ *коммутируют между собой и с каждым элементом* $b_\alpha(i) \in \mathbf{A}$, $\alpha \in \overline{1,n}$, $i \in \mathbf{N}_o{}^m$, *— выполнено равенство*

$$\sum_{j\in \mathbf{N}_o{}^n} a(j)(g(x))^j = \sum_{l\in \mathbf{N}_o{}^m} R_a(b)(l)x^l. \tag{7.5.19}$$

Доказательство. Мы будем пользоваться тем, что ряд с неотрицательными членами в $\mathbf{R}$ суммируем тогда и только тогда, когда множество всех его конечных сумм ограничено.

Так как точка $b(0) \in \mathbf{A}^n$ принадлежит некоторому открытому поликругу суммируемости степенного ряда $\sum\limits_{j \in \mathbf{N}_o{}^n} a(j) z^j$ в $\mathbf{A}$, то существует замкнутый поликруг абсолютной суммируемости $U[p] \subset \mathbf{A}^n$, $p \in \mathbf{R}_+^n$, что

$$\forall \alpha \in \overline{1,n} \;\Big|\; |b_\alpha(0)| < p_\alpha. \tag{7.5.20}$$

При этом ряд

$$\sum_{j \in \mathbf{N}_o{}^n} |a(j)| p^j \tag{7.5.21}$$

суммируем.

Так как ряды (7.5.15) суммируемы в некоторой окрестности нуля в $\mathbf{A}^m$, то существует замкнутый поликруг $U[q] \subset \mathbf{A}^m$, $q \in \mathbf{R}_+{}^m$, в котором степенные ряды (7.5.15) абсолютно суммируемы и удовлетворяют неравенству

$$\forall \alpha \in \overline{1,n} \;\Big|\; \sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^m} |b_\alpha(i) x^i| \le p_\alpha. \tag{7.5.22}$$

Так как ряды (7.5.15) абсолютно суммируемы в $U[q]$, то их конечные произведения $g^j(x)$, $i \in \mathbf{N}_o{}^n$ также абсолютно суммируемы в $U[q]$. Покажем, что сумма рядов (7.5.16) также абсолютно суммируемый ряд в $U[q]$. Но для любой конечной подсуммы s из суммы произведений рядов (7.5.16) сумма модулей её членов ограничена сверху величиной (7.5.21), откуда и следует абсолютная суммируемость ряда (7.5.16) в $U[q]$.

Из абсолютной суммируемости ряда (7.5.16) следует его суммируемость и суммируемость всех его подрядов.

Для всех $(x_1, x_2, \dots, x_n) = x \in U[q]$ таких, что $x_1, x_2, \dots, x_n$ коммутирует между собой и со всеми $b_\alpha(i)$, $\alpha \in \overline{1,n}$, $i \in \mathbf{N}_o{}^n$, мы можем в обозначениях п. 7.3.1 записать

$$g^j(x) = \sum_{j \in \mathbf{N}_o{}^m} \Pi(j,l,b) x^l.$$

Поэтому для указанных x выполнено

$$\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(j) g^j(x) = \sum_{l \in \mathbf{N}_o{}^n} \left(\sum_{j \in \mathbf{N}_o{}^n} a(j) \Pi(j,l,b) \right) x^l = \sum_{l \in \mathbf{N}_o{}^m} R_a(b)(l) x^l.$$

При этом ряд $\sum\limits_{j \in \mathbf{N}_o{}^n} a(j) \Pi(j,l,b)$ абсолютно суммируем в $\mathbf{A}$, что влечет суммируемость ряда $R_a(b)$ в $SA(m, \mathbf{A})$ в рутинной топологии. $\diamondsuit$

Замечание 7.5.2 *Условия коммутации в лемме 7.5.2 выполнены, если* $x \in (Z(\mathbf{A}))^n$ *или* $m = 1$ *и* $x = x_1 \in Kom\left(\bigcup\limits_{\alpha=1}^{n} \bigcup\limits_{i \in \mathbf{N}_o} \{b_\alpha(i)\} \right)$.

Рассматривая доказательство леммы 7.5.2 нетрудно видеть, что основную часть его составляет доказательство следующего факта.

Лемма 7.5.3 *Пусть ряд (7.5.17) суммируем в открытом поликруге* $U_n(r) \subset \mathbf{A}^n$, $r \in \mathbf{R}_+^n$, *ряды (7.5.15) абсолютно суммируемы в замкнутом поликруге* $U_m[q] \subset \mathbf{A}^m$, $q \in {\mathbf{R}_+}^m$ *и выполнено*

$$\sum_{i \in {\mathbf{N}_o}^m} |b_\alpha(i)| q^i = p_\alpha < r_\alpha,\ \alpha \in \overline{1,n}. \tag{7.5.23}$$

Тогда специальный степенной ряд $R_a(b)$ *суммируем в* $SA(m, \mathbf{A})$ *в рутинной топологии, ряды (7.5.16) и (7.5.18) абсолютно суммируемы при* $x \in U_m[q]$ *и для всякого* $x \in U_m[q]$, *удовлетворяющего условиям коммутации из леммы 7.5.2, выполнено равенство (7.5.19).*

Следствие 7.5.2 *Пусть ряд (7.5.17) суммируем в открытом поликруге* $U_n(r) \subset \mathbf{A}^n$, $r \in \mathbf{R}_+^n$, *ряды (7.5.15) суммируемы в открытом поликруге* $U_m(q) \subset \mathbf{A}^m$, $q \in {\mathbf{R}_+}^m$, *и для любых* $p \in U_+(q) \subset {\mathbf{R}_+}^m$ *выполнены неравенства*

$$\sum_{i \in {\mathbf{N}_o}^m} |b_\alpha(i)| p^i < r_\alpha,\ \alpha \in \overline{1,n}. \tag{7.5.24}$$

Тогда специальный степенной ряд $R_a(b)$ *суммируем в* $SA(m, \mathbf{A})$ *в рутинной топологии, ряды (7.5.16) и (7.5.18) абсолютно суммируемы при* $x \in U_m[q]$ *и для всякого* $x \in U_m[q]$, *удовлетворяющего условиям коммутации из леммы* 2, *выполнено равенство (7.5.19).*

Замечание 7.5.3 *Условие (7.5.24) в следствии 7.5.2 автоматически выполнено, если ряд (7.5.17) суммируем при всех* $z \in \mathbf{A}^n$. *В таком случае сумма ряда (7.5.17) целая функция по определению.*

7.5.3 Доказательство теоремы 7.4.1.

Пусть $I : K_1 \to K_2$ непрерывный гомоморфизм банаховых алгебр, тогда он ограничен, т.е. существует число $\|I\| \in \mathbf{R}_+$, что

$$\forall x \in K_1 \ \Big|\ |I(x)| \le \|I\| \cdot |x|. \tag{7.5.25}$$

Если $\varphi \in FA(n, K_1)$, то ряд $\sum a_\varphi(i) x^i$, $x \in K_1^n$ суммируем в некоторой окрестности нуля и по утверждению 7.5.4 последовательность $a_\varphi \in SA(n, K_1)$ — последовательность экспоненциального роста, т.е. существуют числа $M \in \mathbf{R}_+$, $p \in \mathbf{R}_+$, что выполнено

$$\forall i \in {\mathbf{N}_o}^n \ \Big|\ |a_\varphi(i)| \le M p^{|i|}. \tag{7.5.26}$$

Тогда последовательность $a_\psi \in SA(n, K_2)$, где $a_\psi(i) \equiv I(a_\psi(i))$ при $i \in {\mathbf{N}_o}^n$, — также последовательность экспоненциального роста, ибо

$$\forall i \in {\mathbf{N}_o}^n \ \Big|\ |a_\psi(i)| \le \|I\| |a_\varphi(i)| \le \|I\| M p^{|i|} \tag{7.5.27}$$

и по утверждению 7.5.4 ряд $\sum\limits_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} a_\psi(i) z^i$, $z \in K_2^n$ сходится в некоторой окрестности нуля в K_2^n. $\diamondsuit$

7.5.4 Свойства отображения поднятия L_I.

Пусть $I : K_1 \to K_2$ непрерывный гомоморфизм банаховых алгебр K_1 и K_2, тогда I линейное ограниченное отображение и для любого элемента $x \in K_1$ будет $|I(x)| \leq \|I\| \cdot |x|$, где $|x|$, $|I(x)|$ — нормы элементов x и $I(x)$ в банаховых алгебрах K_1 и K_2 соответственно, а неотрицательное число $\|I\|$ — норма линейного отображения I. Перейдем к свойствам отображения поднятия $L_I : FA(n, K_1) \to FA(n, K_2)$, определенного в п. 7.4.3.

Утверждение 7.5.6 *Пусть ряд Тейлора функции $\varphi \in FA(n, K_1)$ суммируем в открытом поликруге $U_1(r) \subset K_1^n$ полирадиуса $r \in \mathbf{R}_+^n$, тогда ряд Тейлора функции $\psi = L_I(\varphi) \in FA(n, K_2)$ суммируем в открытом поликруге $U_2(r) \subset K_2^n$ того же полирадиуса.*

Доказательство. Согласно утверждению 5 суммируемость ряда Тейлора функции φ в поликруге $U_1(r)$ эквивалентна суммируемости следующего числового ряда с неотрицательными членами

$$\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} |a_\varphi(i)| q^i, \tag{7.5.28}$$

при $q \in U_+(r)$, и суммируемость ряда Тейлора функции ψ в открытом поликруге $U_2(r)$ эквивалентна суммируемости следующего числового ряда

$$\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} |a_\psi(i)| q^i, \tag{7.5.29}$$

при $q \in U_+(r)$. Осталось заметить, что если $\psi = L_I(\varphi)$, то $a_\psi(i) = I(a_\varphi(i))$ при всех $i \in \mathbf{N}_o{}^n$ и поэтому

$$|a_\psi(i)| \leq \|I\| \cdot |a_\varphi(i)|. \quad \diamondsuit \tag{7.5.30}$$

Утверждение 7.5.7 *Если $I : K_1 \to K_2$ непрерывный инъективный гомоморфизм алгебр и обратное отображение I^{-1} непрерывно, то при любом $r \in \mathbf{R}_+^n$ суммируемость ряда Тейлора функции $\varphi \in FA(n, K_1)$ в открытом поликруге $U_1(r) \subset K_1^n$ эквивалентна суммируемости ряда Тейлора функции $\psi \equiv L_I(\varphi) \in FA(n, K_2)$ в открытом поликруге $U_2(r) \subset K_2^n$ того же полирадиуса.*

Доказательство. Возвращаясь к доказательству утверждения 7.5.6, дополнительно заметим, что

$$|a_\varphi(i)| \leq \|I^{-1}\| \cdot |a_\psi(i)| \tag{7.5.31}$$

при всех $i \in \mathbf{N}_o{}^n$, т.е.

$$\left(\|I^{-1}\|\right)^{-1} |a_\varphi(i)| \leq |a_\psi(i)| \leq \|I\| \cdot |a_\varphi(i)|. \quad \diamondsuit$$

Следствие 7.5.3 *Если гомоморфизм $I : K_1 \to K_2$ является изоморфным вложением банаховой алгебры K_1 в банахову алгебру K_2, то для любого $r \in \mathbf{R}_+^n$ суммируемость рядов Тейлора функции $\varphi \in FA(n, K_1)$ в $U_1(r) \subset K_1^n$ и функции $L_I(\varphi) \in FA(n, K_2)$ в $U_2(r) \subset K_2^n$ эквивалентны.*

Далее рассматриваем случай, когда $K_1 = \Lambda$. Тогда для любой банаховой алгебры K_2 над полем Λ существует лишь один гомоморфизм алгебр $I : \Lambda \to K_2$ и имеет вид $I(\lambda) = \lambda \cdot 1_2$ при любом $\lambda \in \Lambda$, где $1_2 \in K_2$ единичный элемент алгебры K_2, причём отображение $I : \Lambda \to K_2$ — изометрическое вложение. В таком случае отображение $L_I : FA(n, \Lambda) \to FA(n, K_2)$ инъективно (см. п. 7.4.3). Если, кроме того, $n = 1$, то справедлива лемма.

Лемма 7.5.4 *Если $I : \Lambda \to K_1$ непрерывный гомоморфизм банаховых алгебр, то отображение $L_I : FA(1,\Lambda) \to FA(1,K_1)$ инъективный гомоморфизм алгебры $FA(1,\Lambda)$ на алгебру $L_I(FA(1,\Lambda)) \subset FA(1,K_1)$.*

Доказательство. Требует доказательства, в силу предыдущего, лишь свойство

$$L_I(\varphi_1\varphi_2) = L_I(\varphi_1)L_I(\varphi_2) \tag{7.5.32}$$

при любых $\varphi_1, \varphi_2 \in FA(1,\Lambda)$. Но оно выполнено в силу леммы 7.5.1 и замечания 7.5.1. $\diamondsuit$

Рассмотрим также вопрос о действии отображения поднятия L_I на суперпозицию функций. Далее в этом пункте $I : \Lambda \to K$ гомоморфизм банаховой алгебры Λ в банахову алгебру K над полем Λ. Введём модернизированные обозначения (см. пункты 7.1.4, 7.3.5, 7.4.3), т.е. одним и тем же символом I будем обозначать следующие три отображения:

1) $I : \Lambda \to K$;
2) $Sec_n(I) : SA(n,\Lambda) \to SA(n,K),\ n \in \mathbf{N}_o$;
3) $L_I : FA(n,\Lambda) \to FA(n,K),\ n \in \mathbf{N}_o$;

различая их по аргументу отображения I.

Перейдем к суперпозициям функций. Пусть функция $\varphi \in FA(n,\Lambda)$, функции $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \in FA(1,\Lambda)$ и $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \equiv \omega \in (FA(1,\Lambda))^n$. Рассмотрим суперпозицию функций $(\varphi \circ \omega)(x) = \varphi(\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x))$, $x \in \Lambda$. Из леммы 7.5.2 получаем утверждение.

Лемма 7.5.5 *Если $\varphi \in FA(n,\Lambda)$, $\omega \in (FA(1,\Lambda))^n$ и точка $\omega(0) \in \Lambda^n$ принадлежит некоторому открытому поликругу сходимости функции φ с центром в нуле, то $\varphi\circ\omega \in FA(1,\Lambda)$ и выполнены соотношения $I(\varphi\circ\omega) = (I_\varphi)\circ(I_\omega)$ и $I(a_\varphi \circ a_\omega) = a_{I\varphi} \circ a_{I\omega}$.*

Доказательство. Функции φ и ω удовлетворяют условиям леммы 7.5.2, поэтому определена функция $\varphi \circ \omega \in FA(1,\Lambda)$, причём $a_{\varphi\circ\omega} = a_\varphi \circ a\omega$, где $a_\varphi \in SA(n,\Lambda)$, $a_\omega \in (SA(1,\Lambda))^n$, $a_{\varphi\circ\omega} \in SA(1,\Lambda)$. Отображение $I : \Lambda \to K$ переводит Λ в центр алгебры K и является изометрическим гомоморфизмом банаховых алгебр. Поэтому, если ряд Тейлора функции $\varphi \in FA(n,\Lambda)$ суммируем в некотором открытом поликруге $U_1(r) \subset \Lambda^n$, $r \in \mathbf{R}^n_+$, то и ряд Тейлора функции $I\varphi \in FA(n,K)$ суммируем в открытом поликруге $U_2(r) \subset K^n$ того же полирадиуса r. Причём, если точка $\omega(0) \in U_1(r)$, то и точка $I\omega(I(0)) \in U_2(r)$. Таким образом, к функциям $I\varphi$ и $I\omega$ также применимы лемма 7.5.2 и замечание 7.5.2 и определена суперпозиция $I\varphi \circ I\omega \in FA(1,K)$, причём последовательности коэффициентов Тейлора связаны соотношением $a_{I_\varphi \circ I_\omega} = a_{I_\varphi} \circ a_{I_\omega}$.

Проверим, что $I(\varphi \circ \omega) = I_\varphi \circ I_\omega$, что согласно определению поднятия — формула (7.4.12), означает выполнение равенства

$$(I\varphi \circ I\omega)(Ix) = I((\varphi \circ \omega)(x)) \tag{7.5.33}$$

для всех $x \in \Lambda$ из некоторого открытого поликруга $U(\varepsilon) \subset \Lambda$, $\varepsilon > 0$. Но в некотором круге $U(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ верно по лемме 7.5.2

$$(\varphi \circ \omega)(x) = \sum_{i\in\mathbf{N}_o} a_\varphi(i)(\omega(x))^i, \tag{7.5.34}$$

где ряд абсолютно суммируем. Так как отображение $I : \Lambda \to K$ изометрия и гомоморфизм, то из (7.5.34) получаем

$$I((\varphi \circ \omega)(x)) = \sum_{i \in \mathbf{N}_o} I(a_\varphi(i))(\omega(x))^i) = \sum_{i \in \mathbf{N}_o} I(a_\varphi(i))(I(\omega(x)))^i =$$

$$\sum_{i \in \mathbf{N}_o} a_{I\varphi}(i)(I\omega(Ix))^i = (I\varphi \circ I\omega)(Ix). \quad \diamondsuit$$

Замечание 7.5.4 *Условие элемент $\omega(0) \in \Lambda^n$ принадлежит открытому поликругу сходимости ряда Тейлора функции φ выполняется автоматически, если $\omega \in (FAG(1, \Lambda))^n$, т.е. если $\omega(0) = 0$.*

Из следствия 7.5.2 рассуждениями, аналогичными приведенным при доказательстве леммы 7.5.5, получается следующая лемма.

Лемма 7.5.6 *Пусть ряд Тейлора функции $\varphi \in FA(n, \Lambda)$ суммируем в поликруге $U_\varphi(r) \subset \Lambda^n$, $r \in \mathbf{R}^n_+$, ряды Тейлора функций $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \in FA(1, \Lambda)$ суммируемы в круге $U_\Lambda(q) \subset \Lambda$, $q \in \mathbf{R}_+$ и для любого $p \in [0, q[$ выполнены неравенства*

$$\sum_{i \in \mathbf{N}_o} |a_{\omega\alpha}(i)| p^i < r_\alpha, \quad \alpha \in \overline{1, n}. \tag{7.5.35}$$

Тогда:
1) определены суперпозиции: $(\varphi \circ \omega) \in FA(1, \Lambda)$, $(a_\varphi \circ a_\omega) \in SA(1, \Lambda)$, $(I\varphi \circ I\omega) \in FA(1, K)$, $(a_{I\varphi} \circ a_{I\omega}) \in SA(1, K)$;
2) ряды Тейлора функций $\varphi \circ \omega$ и $I_\varphi \circ I_\omega$ суммируемы в открытых кругах $U_\Lambda(q) \subset \Lambda$ и $U_K(q) \subset K$ и для всякого $x \in U_\Lambda(q)$ выполнено $I((\varphi \circ \omega)(x)) = (I\varphi \circ I\omega)(Ix)$;
3) $I(\varphi \circ \omega) = I\varphi \circ I\omega$ и $I(a\varphi \circ a\omega) = Ia\varphi \circ Ia\omega$;
4) $a_{\varphi \circ \omega} = a_\varphi \circ a_\omega$ и $a_{I_\varphi \circ I_\omega} = a_{I_\varphi} \circ a_{I_\omega}$.

7.5.5 Свойства экспоненты.

Леммы 7.5.4, 7.5.5, 7.5.6 позволяют переносить соотношения, имеющие место для аналитических функций, на функции из класса $FA(1, K)$. Рассмотрим два примера.

Пример 7.5.1

Экспонента $\exp(z)$ при $z \in \Lambda$ ($\Lambda = \mathbf{R}$ или $\Lambda = \mathbf{C}$) обладает следующим свойством

$$\exp(\lambda_1 z) \exp(\lambda_2 z) = \exp((\lambda_1 + \lambda_2) z) \tag{7.5.36}$$

при любых $\lambda_1, \lambda_2, z \in \Lambda$. Функция $\exp \in FA(1, \Lambda)$ является целой функцией. Обозначим через $\exp(\lambda) \in FA(1, \Lambda)$ целую функцию $\mathrm{exg}(\lambda)(z) = \exp(\lambda z)$, $z \in \Lambda$. Соотношение (7.5.36) для функций из $FA(1, \Lambda)$ запишем в виде

$$\mathrm{exg}(\lambda_1) \, \mathrm{exg}(\lambda_2) = \mathrm{exg}(\lambda_1 + \lambda_2) \tag{7.5.37}$$

при любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. При этом выполнены равенства

$$\mathrm{exg}(0) = 1_\Lambda; \tag{7.5.38}$$

$$\mathrm{exg}(\lambda) \, \mathrm{exg}(-\lambda) = \mathrm{exg}(-\lambda) \, \mathrm{exg}(\lambda) = 1_\Lambda, \lambda \in \Lambda; \tag{7.5.39}$$

$$\exg(1) = \exp\,. \tag{7.5.40}$$

Применяя лемму 7.5.4, поднимем экспоненту в банахову алгебру K с сохранением соотношений (7.5.37 – 7.5.40), т.е.

$$I\exg(\lambda_1)I\exg(\lambda_2) = I\exg(\lambda_1+\lambda_2),\;\; \lambda_1,\lambda_2\in\Lambda, \tag{7.5.41}$$

$$I\exg(0) = 1_K; \tag{7.5.42}$$

$$I\exg(\lambda)I\exg(-\lambda) = I\exg(-\lambda)I\exg(\lambda) = 1_K,\;\; \lambda\in\Lambda; \tag{7.5.43}$$

$$I\exg(1) = I\exp\,. \tag{7.5.44}$$

Пример 7.5.2

$\Lambda\equiv\mathbf{R}$. Функция $\exp\in FA(1,R)$ — целая функция и функция $\widetilde{\exp}\equiv\exp-1$ также целая функция. Функция $\widetilde{\ln}(z)\equiv\ln(1+z)$ принадлежит классу $FA(1,R)$ и её ряд Тейлора суммируем в круге $U(1)\subset R$.

Функции $\widetilde{\exp}$ и $\widetilde{\ln}(z)$ в круге $U(1)$ удовлетворяют равенству

$$\forall z\in U(1)\;\Big|\;\widetilde{\exp}(\widetilde{\ln}(z)) = z. \tag{7.5.45}$$

Поэтому в силу следствия 7.5.2 и замечания 7.5.3 для последовательностей коэффициентов Тейлора верно равенство

$$a_{\widetilde{\exp}}\circ a_{\widetilde{\ln}} = h, \tag{7.5.46}$$

использованное ранее без доказательства в примере 7.3.1.

Отметим теперь, что

$$\sum_{i\in\mathbf{N}_o}|a_{\widetilde{\exp}}(i)|p^i = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}p^i = \exp(p)-1. \tag{7.5.47}$$

Поэтому, если $p\in[0,\ln 2[$, то

$$\sum_{i\in\mathbf{N}_o}|a_{\widetilde{\exp}}(i)|p^i < 1. \tag{7.5.48}$$

Применим теперь следствие 7.5.2 в случае $\varphi=\widetilde{\ln}$, $\omega=\omega_1=\widetilde{\exp}$, $q=\ln(2)$ и получим, что в круге $U(\ln(2))$ определена суперпозиция $\widetilde{\ln}\circ\widetilde{\exp}$ и

$$\forall z\in U(\ln(2))\;\Big|\;\widetilde{\ln}(\widetilde{\exp}(z)) = z, \tag{7.5.49}$$

причём для последовательностей верно

$$a_{\widetilde{\ln}}\circ a_{\widetilde{\exp}} = h. \tag{7.5.50}$$

Вывод 7.5.1 1) *Функция* $\widetilde{\ln}$ *определена, непрерывна и инъективна на множестве* Λ. 2) *Функция* $\widetilde{\exp}$ *определена и непрерывна на всем* Λ *и ее сужение на множестве* $\widetilde{\ln}(U(1))$ *инъективно.* 3) $\widetilde{\ln}(u(1))\supset U(\ln(2))$. 4) *Сужение* $\widetilde{\exp}_{U(\ln(2))}$ *есть гомоморфизм открытой области* $U(\ln(2))\subset\Lambda$ *на открытую область* $\widetilde{\exp}(U(\ln(2)))\subset\Lambda$.

Применим теперь процедуру поднятия в следующей ситуации: $\Lambda = \mathbf{R}$, K — банахова алгебра над полем $\mathbf{R}$, $I : \Lambda \to K$ гомоморфизм алгебр. Отображение $I : \Lambda \to K$ будет в данной ситуации изометрическим вложением, поэтому отображение поднятия $I : FA(1, \Lambda) \to FA(1, K)$ согласно лемме 7.5.4 — инъективный гомоморфизм алгебр. Согласно следствию 7.5.3 ряд Тейлора функции $I\widetilde{\exp} \in FA(1, K)$ сходится на всей алгебре K, т.е. $I\widetilde{\exp}$ также целая функция, а ряд Тейлора функции $I\widetilde{\ln} \in FA(1, K)$ сходится в открытом круге $U_K(1) \subset K$. Лемма 7.5.6 позволяет поднять соотношения (7.5.45), (7.5.49) до соотношений

$$\forall z \in U_K(1) \;\Big|\; I\widetilde{\exp}(I\widetilde{\ln}(z)) = z, \tag{7.5.51}$$

$$\forall z \in U_K(\ln(2)) \;\Big|\; I\widetilde{\ln}(I\widetilde{\exp}(z)) = z. \tag{7.5.52}$$

Соотношения же (7.5.51), (7.5.52) позволяют сделать вывод, аналогичный выводу 7.5.1.

Вывод 7.5.2 1) *Функция $I\widetilde{\ln}$ определена, непрерывна и инъективна на множестве $U_K(1)$.* 2) *Функция $I\widetilde{\exp}$ определена и непрерывна на всем K и ее сужение на множество $I\widetilde{\ln}(U_K(1))$ инъективно.* 3) $I\widetilde{\ln}(U_K(1)) \supset U_K(\ln(2))$. 4) *сужение $I\widetilde{\exp}\Big|_{U_K(\ln(2))}$ есть гомеоморфизм открытого круга $U_K(\ln(2))$ на открытую область $I\widetilde{\exp}(U_K(\ln(2))$ в банаховой алгебре K.*

Замечание 7.5.5 *В силу гомоморфного и изометрического вложения $I : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ всякая банахова алгебра K над полем $\mathbf{C}$ является и банаховой алгеброй над полем $\mathbf{R}$. Поэтому процедура поднятия поднимает функции $\widetilde{\exp}$, $\widetilde{\ln}$ определенные на $\mathbf{R}$ до функций в банаховой алгебре K над полем скаляров $\mathbf{C}$, в частности поднимает из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{C}$ с сохранением открытых кругов сходимости и функциональных соотношений.*

§7.6 Рутинная топология и линейные непрерывные отображения

В этом параграфе K — банахова алгебра над полем Λ ($\Lambda = \mathbf{R}$ или $\Lambda = \mathbf{C}$).

7.6.1 Рутинная топология на кольце $SA(n, K)$ в случае, когда K — банахова алгебра.

Если K — банахова алгебра , то в соответствующей рутинной топологии кольцо $SA(n, K)$ — полное отделимое локально выпуклое линейное топологическое пространство над полем Λ, а также топологическая алгебра над полем Λ. Так как центр $Z(K)$ банаховой алгебры K является коммутативной замкнутой подалгеброй алгебры K, то центр $Z(K)$ и скалярная подалгебра $\mathcal{S}c$ сами по себе являются коммутативными банаховыми алгебрами и, в частности, полными отделимыми локально выпуклыми линейными топологическими пространствами. Пространство $SA(n, \Lambda)$ алгебраически и топологически изоморфно пространству $SA(n, \mathcal{S}c)$. При этом локально выпуклые пространства $SA(n, \mathcal{S}c) \subset SA(n, Z(K)) \subset SA(n, K)$ счётно-нормируемы и являются пространствами Фреше.

7.6.2 Линейные непрерывные отображения.

Проведём рассмотрение свойств линейных отображений, аналогичное п. 7.2.8 с заменой чековой топологии на указанную в п. 7.6.1 данного параграфа рутинную топологию.

Пусть $A : SA(n, K) \to SA(m, K)$ — линейное отображение, тогда согласно п. 7.2.8 последовательность $g_A \in SA(n, SA(m, Z(K)))$, где $g_A(i) \equiv A(h^i)$, при $i \in {\mathbf{N}_o}^n$. Каноническое разложение $a = \sum_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} a(i)h^i$ элемента $a \in SA(n, K)$ суммируемо в чековой топологии, а следовательно и в более слабой рутинной топологии. Если отображение $A : SA(n, K) \to SA(m, K)$ линейно и непрерывно из рутинной топологии в рутинную, то ряд

$$A(a) = \sum_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} a(i)g(i) \tag{7.6.1}$$

должен суммироваться в $SA(m, K)$ в рутинной топологии, при $g = g_A$. Итак, если отображение A линейно и непрерывно, то при любой последовательности $a \in SA(m, K)$ ряд (7.6.1) должен быть суммируем в $SA(m, K)$ в рутинной топологии.

Лемма 7.6.1 *Пусть последовательность $g \in SA(n, SA(m, K))$, $n \in \mathbf{N}_o$, $m \in \mathbf{N}_o$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) для любой последовательности $a \in SA(n, Sc)$ ряд (7.6.1) рутинно суммируем в $SA(m, K)$;

2) для $\sum_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} g(i)$ чеково суммируем в $SA(m, K)$;

3) для любой последовательности $a \in SA(n, K)$ ряд (7.6.1) чеково суммируем в $SA(m, K)$;

4) для любой последовательности $a \in SA(n, K)$ ряд (7.6.1) рутинно суммируем в $SA(m, K)$.

Доказательство. Покажем, что если выполнено утверждение 1) настоящей леммы, то выполнено и утверждение 3) леммы 7.2.1. Если выполнено утверждение 1), то для любой последовательности $a \in SA(n, Sc)$ и любого $j \in {\mathbf{N}_o}^m$ в банаховой алгебре K суммируем ряд

$$\sum_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} a(i)g(i)(j) \tag{7.6.2}$$

Выделим подмножества $Q(j) \subset {\mathbf{N}_o}^n$ ненулевых координат.

$$Q(j) \equiv \{i \in {\mathbf{N}_o}^n \mid g(i)(j) \neq 0\}.$$

Подмножество $Q(j) \subset {\mathbf{N}_o}^n$ конечно, ибо в противном случае, выбирая $a \in SA(n, Sc)$ вида $a(i) = 0$ при $i \notin Q(j)$ и $a(i) = \frac{1}{\|g(i)(j)\|} \cdot 1$ мы получим, что ряд (7.6.2) не суммируем по критерию Коши.

Итак, выполнено утверждение 3) леммы 7.2.1, но тогда согласно этой лемме выполнено и утверждение 2) настоящей леммы. Мы доказали следование 1) $\Rightarrow$ 2).

Следование 2) $\Rightarrow$ 3) вытекает из утверждения 7.2.1.

Следование 3) $\Rightarrow$ 4) вытекает из того, что рутинная топология слабее чековой.

Следование 4) $\Rightarrow$ 1) очевидно. $\diamondsuit$

На основе леммы 7.6.1 получается следующее свойство линейных непрерывных отображений.

Лемма 7.6.2 *Пусть $A : SA(n, K) \to SA(m, K)$ линейное отображение. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) отображение A непрерывно из рутинной топологии в рутинную;

2) $g_A \in SA(n, SA(m, Z(K)))$ и ряд $\sum\limits_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} g_A(i)$ суммируем в $SA(m, K)$ в чековой топологии;

3) A непрерывно из чековой топологии в чековую.

Доказательство. Если отображение $A : SA(n, K) \to SA(m, K)$ линейно и непрерывно из рутинной топологии в рутинную, то ряд (7.6.1) с $g = g_A$ должен быть суммируем в $SA(m, K)$ при любой последовательности $a \in SA(n, K)$ в рутинной топологии, т.е. выполнено утверждение 4) леммы 7.6.1. Но тогда выполнено и утверждение 2) леммы 7.6.1, а следовательно и утверждение 2) леммы 7.6.2. Доказано следование 1) $\Rightarrow$ 2).

Эквивалентность 2) $\Leftrightarrow$ 3) — содержание теоремы 7.2.4.

Проверим следование 3) $\Rightarrow$ 1). Если выполнено утверждение 3), то

$$\forall j \in \mathbf{N}_o{}^m \ \exists Q(j) \subset \mathbf{N}_o{}^n, \mid Q(j) \mid < \infty \ \forall a \in SA(n, K) \ \Big| \ A(a)(j) = \sum_{i \in Q(j)} a(i) g_A(i)(j), \tag{7.6.3}$$

где $Q(j) \subset \mathbf{N}_o{}^n$ — конечное подмножество. Но, конечная линейная комбинация в правой части (7.6.3) при фиксированном j задаёт непрерывное линейное отображение из пространства $SA(n, K)$ с рутинной топологией в банахову алгебру K. Следовательно, и всё отображение A непрерывно из рутинной топологии в рутинную. $\diamondsuit$

Итак, множество линейных отображений $A : SA(n, K) \to SA(m, K)$, непрерывных из рутинной топологии в рутинную, совпадает со множеством линейных отображений, непрерывных из чековой топологии в чековую, и поэтому описано в п. 7.2.8.

В случае $n = m \in \mathbf{N}$ операторы дифференцирования $D_\alpha : SA(n, K) \to SA(n, K)$, $\alpha \in \overline{1, n}$ и операторы умножения на фиксированную последовательность из $SA(n, Z(K))$ являются линейными непрерывными операторами из чековой топологии в чековую, ибо координата образа зависит лишь от конечного числа координат прообраза. Итак, множество линейных непрерывных отображений $L(n, n)$ пространства $SA(n, K)$ с рутинной топологией в себя есть алгебра над полем Λ, включающая все операторы частного дифференцирования D_α и все операторы умножения на фиксированную последовательность из $SA(n, Z(K))$. Если K — коммутативная баханова алгебра, например $K = \Lambda$, то алгебра $L(n, n)$ содержит операторы умножения на любую фиксированную последовательность из $SA(n, K)$.

§7.7 Суммируемость специального степенного ряда в рутинной топологии

В этом параграфе по-прежнему K — банахова алгебра над полем Λ и на пространстве последовательностей $SA(n, K)$ зафиксирована рутинная топология, соответствующая топологии банаховой алгебры на K.

7.7.1 Множество сходимости специального степенного ряда.

Пусть $a \in SA(n, K)$, $b \in (SA(m, K))^n$. Рассмотрим специальный степенной ряд в $SA(m, K)$.

$$\sum_{j \in \mathbf{N}_o{}^n} a(j) b^j, \quad b \in (SA(m, K))^n. \tag{7.7.1}$$

Нас интересует, при каких $b \in (SA(m, K))^n$ ряд (7.7.1) суммируем в $SA(m, K)$ в рутинной топологии.

Справедливо следующее необходимое условие суммируемости ряда (7.7.1) в $SA(m, K)$.

Утверждение 7.7.1 *Если ряд (7.7.1) суммируем в $SA(m, K)$, то ряд*

$$\sum_{j \in \mathbf{N}_o{}^n} a(j)(b(0))^j \tag{7.7.2}$$

суммируем в K.

Доказательство. Гомоморфизм $P : SA(m, K) \to K$ из п. 7.1.1 последовательности на её нулевую координату является непрерывным линейным отображением, поэтому он переводит суммируемый ряд (7.7.1) в суммируемый ряд (7.7.2). $\diamondsuit$

В следующей ситуации суммируемость ряда (7.7.2) в K достаточна для суммируемости ряда (7.7.1) в $SA(m, K)$.

Лемма 7.7.1 . *Если $b(0)$ принадлежит открытому поликругу сходимости $U(q) \subset K^n$, $q \in \mathbf{R}_+^n$ степенного ряда*

$$\sum_{j \in \mathbf{N}_o{}^n} a(j) z^j, \quad z \in K^n \tag{7.7.3}$$

в алгебре K, то ряд (7.7.1) суммируем в $SA(m, K)$.

Доказательство. Если точка $b(0) \in U(q)$, где $U(q)$ — открытый поликруг сходимости степенного ряда (7.7.3) в алгебре K, то в точке $b(0)$ абсолютно сходится не только степенной ряд (7.7.3), но и все ряды, полученные из него конечным числом формальных дифференцирований. Для $j \in \mathbf{N}_o{}^n$ обозначим через $D^j \equiv D_1^{j_1} D_2^{j_2} \ldots D_n^{j_n}$ дифференциальный оператор, где D_α — формальные дифференциальные операторы вида (7.1.6). Представим $b_\alpha \in SA(m, K)$ в виде

$$b_\alpha = b_\alpha(0) e + d_\alpha, \tag{7.7.4}$$

где $d_\alpha \in SAG(n, K)$, $\alpha \in \overline{1, n}$. Рассмотрим полином

$$b^j = (b_1(0)e + d_1)^{j_1} (b_2(0)e + d_2)^{j_2} \ldots (b_n(0)e + d_n)^{j_n}. \tag{7.7.5}$$

После раскрытия скобок и перемножения b^j будет суммой $2^{|j|}$ мономов $B(j, \alpha)$, $\alpha \in \overline{1, 2^{|j|}}$, из которых $C(|j|, 0)$ мономов принадлежит $SA_0(n, K)$, $C(|j|, 1)$ мономов принадлежат $SA_1(n, K)$, $C(|j|, s)$ мономов принадлежит $SA_s(n, K)$, при $s \in \overline{0, |j|}$.

Рассмотрим двойной ряд

$$\sum_{j \in \mathbf{N}_o{}^n} \sum_{\alpha=1}^{2^{|j|}} a(j) B(j, \alpha) \tag{7.7.6}$$

и убедимся, что он суммируем в $SA(m,K)$ в рутинной топологии. Для этого достаточно доказать, что при любом $i \in \mathbf{N}_o{}^m$ следующий ряд абсолютно суммируем в K

$$\sum_{j\in\mathbf{N}_o{}^n}\sum_{\alpha=1}^{2^{|j|}} a(j)B(j,\alpha)(i). \tag{7.7.7}$$

Введём элементы $\overline{b_\alpha} \in SA(m,Sc)$ вида

$$\overline{b_\alpha} \equiv |b_\alpha(i)|\cdot 1, \quad i\in\mathbf{N}_o{}^m, \quad \alpha\in\overline{1,n}, \tag{7.7.8}$$

где $|b_\alpha(i)|$ — норма элемента $b(i)$ в банаховой алгебре K, и 1 — единица банаховой алгебры K. Разложению (7.7.4) элемента $b_\alpha \in SA(m,K)$ соответствует следующее разложение элемента $\overline{b_\alpha}$:

$$\overline{b_\alpha} = |b_\alpha(0)|e + \overline{d_\alpha} \equiv \overline{b_\alpha(0)}e + \overline{d_\alpha}. \tag{7.7.9}$$

Введём ряд в $SA(m,K)$ вида

$$\sum_{j\in\mathbf{N}_o{}^n} |a(j)|\overline{b}^j. \tag{7.7.10}$$

Произведение $\overline{b}^j$ в силу разложения (7.7.9) является суммой $2^{|j|}$ мономов, получающихся при перемножении всех биномов.

$$\overline{b}^j = \sum_{\alpha=1}^{2^{|j|}} \overline{B}(j,\alpha). \tag{7.7.11}$$

Мы пришли к двойному ряду

$$\sum_{j\in\mathbf{N}_o{}^n}\sum_{\alpha=1}^{2^{|j|}} |a(j)|\overline{B}(j,\alpha). \tag{7.7.12}$$

Двойной ряд (7.7.12) по построению обладает тем свойством, что верно неравенство

$$|a(j)B(j,\alpha)(i)| \le |a(j)|\overline{B}(j,\alpha)(i), \tag{7.7.13}$$

при любых $j\in\mathbf{N}_o{}^n$, $i\in\mathbf{N}_o{}^n$, $\alpha\in\overline{1,2^{|j|}}$. Поэтому для доказательства абсолютной суммируемости ряда (7.7.7) при любом $i\in\mathbf{N}_o{}^m$ достаточно доказать суммируемость ряда (7.7.12), или, что эквивалентно, ряда (7.7.10).

Обозначим $p \equiv (|b_1(0)|, |b_2(0)|, \ldots |b_n(0)|)$. По условию $p\in U(q)$. Перемножая биномы, приведём ряд (7.7.10) к виду

$$\sum_{j\in\mathbf{N}_o{}^n} |a(j)|\overline{b}^j = \sum_{l\in\mathbf{N}_o{}^n} \frac{1}{l!}D^l\left(\sum_{j\in\mathbf{N}_o{}^n}|a(j)|p^j\right)\overline{d}^l. \tag{7.7.14}$$

Отсюда, при $i\in\mathbf{N}_o{}^m$, в силу включения $\overline{d_\alpha}\in SAG(n,K)$, $\alpha\in\overline{1,n}$, получаем

$$\sum_{j\in\mathbf{N}_o{}^n} |a(j)|(\overline{b}^j)(i) = \sum_{\substack{l\in\mathbf{N}_o{}^n\\ |l|\le|i|}} \frac{1}{l!}D^l\left(\sum_{j\in\mathbf{N}_o{}^n}|a(j)|p^j\right)\left(\overline{d}^l\right)(i). \tag{7.7.15}$$

Так как $U(q)$ открытый поликруг сходимости ряда (7.7.3) в банаховой алгебре K, то при $p \in U(q)$ ряд с неотрицательными членами $\sum\limits_{j \in \mathbf{N}_o{}^n} |a(j)| p^j$ суммируем и суммируемы все ряды, полученные из него конечным числом формальных дифференцирований. Итак, ряд (7.7.15) суммируем при любом $i \in \mathbf{N}_o{}^m$ как сумма конечного числа суммируемых рядов. Но это означает суммируемость ряда (7.7.14) в $SA(m, K)$, что, в свою очередь, влечет абсолютную суммируемость ряда (7.7.7) в $SA(m, K)$ при любом $i \in \mathbf{N}_o{}^m$. $\diamondsuit$

Установленные свойства рутинной сходимости специальных степенных рядов позволяют доказать теорему 7.4.2.

7.7.2 Доказательство теоремы 7.4.2. Если ряд (7.7.3) суммируем в банаховой алгебре K для элементов $z \in K^n$ из некоторой окрестности нуля, то существует открытый поликруг $U(q) \subset K^n$ суммируемости степенного ряда (7.7.3). В таком случае по лемме 7.7.1 специальный степенной ряд (7.7.1) суммируем при всех $b \in K^n$, таких, что $b(0) \in U(q)$. Но множество таких $b \in K^n$ есть окрестность нуля в K^n в рутинной топологии. $\diamondsuit$

§7.8 Обобщение пространства последовательностей на случай некоммутирующих переменных

Если K — некоммутативное кольцо, то для элементов $z_1, z_2 \in K$ коэффициенты полиномов $z_1 z_2$ и $z_2 z_1$ образуют последовательность из $SA(2, K)$, но произведение $(z_1 z_2)(z_1 z_2) = z_1 z_2 z_1 z_2 \neq z_1^2 z_2^2$ уже не представимо в виде $\sum\limits_{i \in \mathbf{N}_o{}^2} a(i) z_1^{i_1} z_2^{i_2}$, где $a \in SA(2, K)$. Таким образом, сама форма записи полиномов от некоммутирующих переменных, использованная нами в предыдущих параграфах, по аналогии со случаем коммутирующих переменных несовершенна.

В случае некоммутирующих переменных моном степени l от n переменных более естественно записывать в виде произведения $z_{\alpha_1} z_{\alpha_2} \ldots z_{\alpha_l}$, где $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_l \in \overline{1, n}$. Введём n букв $1, 2, \ldots, n$ и составим из них слово длины l, а именно $i \equiv i_1 i_2 \ldots i_l$. Обозначим $| \, i \, | \equiv l$ — длина слова. Добавим пустое слово $\emptyset$. По определению его длина $|\emptyset| = 0$. Введём умножение слов $i \equiv i_1 i_2 \ldots i_l$ и $j \equiv j_1 j_2 \ldots j_k$ по правилу $ij \equiv i_1 i_2 \ldots i_k j_1 j_2 \ldots j_k$, т.е. произведение слов есть слово, состоящее из всех букв первого и второго слова в том же порядке. По определению $| \, ij \, | = | \, i \, | + | \, j \, |$. Множество всех слов T_n образует с введённым внутренним законом композиции моноид, единица которого — пустое слово $\emptyset$. По определению $T_0 \equiv \{\emptyset\}$.

Каждое отображение $a : T_n \to K$ можно рассматривать как последовательность $\{a(i)\}_{i \in T_n}$, $a(i) \in K$ элементов кольца K, занумерованную индексами $i \in T_n$. Множество всех последовательностей обозначим $SNA(n, K)$. На множестве $SNA(n, K)$ определим четыре закона композиции:

1) внешний закон композиции — умножение последовательности $a \in SNA(n, K)$ слева на элемент $\lambda \in K$ по правилу $(\lambda a)(i) \equiv \lambda a(i)$, $i \in T_n$;

2) внешний закон композиции — умножение последовательности $a \in SNA(n, K)$ справа на элемент $\lambda \in K$ по правилу $(a\lambda)(i) \equiv a(i)\lambda$, $i \in T_n$;

3) внутренний закон композиции — сложение элементов $a, b \in SNA(n, K)$ по правилу $(a + b)(i) \equiv a(i) + b(i)$, $i \in T_n$;

4) внутренний закон композиции — умножение элементов $a, b \in SNA(n, K)$ по правилу

$$(ab)(l) \equiv \sum_{\substack{i,j \in T_n \\ ij = l}} a(i)b(j), \ l \in T_n.$$

Законы композиции 1)–3) задают структуру левого и правого модуля над кольцом K, а законы композиции 3) и 4) — структуру кольца с единицей $e \in SNA(n, K)$ вида

$$e(i) = \begin{cases} 1, & i = \emptyset \\ 0, & i \neq \emptyset \end{cases} \tag{7.8.1}$$

Предполагаем далее, что в кольце K элементы 0 и 1 не равны и введём элементы $h_\alpha \in SNA(n, K), \ \alpha \in \overline{1, n}$ вида

$$h_\alpha(i) \equiv \begin{cases} 0, & |\,i\,| \neq 1; \\ 1, & i = \alpha, \quad |\,i\,| = 1; \\ 0, & i \neq \alpha, \quad |\,i\,| = 1. \end{cases} \tag{7.8.2}$$

При $n > 1$ будет $h_1 h_2 \neq h_2 h_1$, т.е. кольцо $SNA(n, K)$ некоммутативно, если $n > 1$. Заметим однако, что если $a \in SNA(n, Z(K))$, то при любом $\lambda \in K$ верно $\lambda a = a\lambda$, в частности

$$\forall \lambda \in K \ \forall \alpha \in \overline{1, n} \ \Big| \ \lambda h_\alpha = h_\alpha \lambda. \tag{7.8.3}$$

На некоммутативном кольце $SNA(n, K)$ строится теория аналогичная теории параграфов 7.1-7.7 пространства последовательностей $SA(n, K)$. Вводятся топологии чековая и рутинная на топологическом произведении $K^{T_n} = SNA(n, K)$. Определяются идеалы $SNA_k(n, K) \equiv \{a \in SNA(n, K) \mid a(i) = 0 \text{ при } |\,i\,| < k\}$. Для каждого элемента $a \in SNA(n, K)$ справедливо каноническое разложение

$$a = \sum_{i \in T_n} a(i) h^i, \tag{7.8.4}$$

где $h^i \equiv h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_l}$ и ряд суммируем в чековой топологии. Переносятся теоремы о существовании обратного и инверсного элементов и т.д.

Глава 8

Комбинаторная техника

В настоящей главе мы обосновываем метод производящих функций в комбинаторике. В методе производящих функций в комбинаторике для рассмотрения n-мерного массива чисел $a(i_1, i_2, ..., i_n)$ от n целочисленных переменных $i_1, i_2, ..., i_n \in \mathbf{N}_o$ вводится функция n комплексных переменных $f(z_1, z_2, ..., z_n)$, где $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbf{C}$ для которой числа $a(i_1, i_2, ..., i_n)$ её коэффициенты Тейлора. Далее используется богатая техника комплексного анализа.

§8.1 Алгебра голоморфных функций $FA(n, \Lambda)$ и алгебра последовательностей $SA(n, \Lambda)$

8.1.1 Алгебра последовательностей $SA(n, \Lambda)$. В этой главе Λ — поле действительных или комплексных чисел ($\Lambda = \mathbf{R}$ или $\Lambda = \mathbf{C}$). Поле Λ рассматривается также как банахова алгебра с естественной нормой. Согласно предыдущей главе тогда кольцо последовательностей $SA(n,\Lambda)$ является коммутативной уникальной алгеброй. На $SA(n,\Lambda)$ определены две топологии: чековая и рутинная. Рутинная топология соответствует топологии банаховой алгебры на Λ. В рутинной топологии алгебра $SA(n,\Lambda)$ — топологическая алгебра и линейное топологическое пространство Фреше. В силу коммутативности кольца $SA(n,\Lambda)$ операции умножения последовательности $a \in SA(n,\Lambda)$ на скаляр $\lambda \in \Lambda$ слева и справа совпадают $\lambda a = a\lambda$ и в совокупности с операцией сложения задают на $SA(n,\Lambda)$ структуру векторного пространства. Свёртка последовательностей задаёт коммутативный закон умножения.

Кроме операций коммутативной алгебры для последовательностей мы определили дополнительно операцию суперпозиции. Если $a \in SA(n,\Lambda)$, в $b \in (SA(m,\Lambda))^n$, то полагаем $a \circ b \equiv R_a(b)$, где специальный степенной ряд $R_a(b)$ определен в § 7.3. Суперпозиция определена не для всех $a \in SA(n,\Lambda)$, $b \in (SA(m,\Lambda))^n$. Суперпозиция определена, если $b(0) \in U(q)$, где $U(q)$ — открытый поликруг сходимости числового ряда

$$\sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(i) z^i, \quad z \in \Lambda^n. \tag{8.1.1}$$

Суперпозиция $a \circ b$ определена всегда, если $b \in (SAG(m,\Lambda))^n$, т.е. если $b(0) \equiv 0$.

8.1.2 Алгебра голоморфных функций $FA(n,\Lambda)$.

В § 7.4 мы определили множество функций $FA(n,K)$. В случае $K = \Lambda$ множество функций $FA(n,\Lambda)$ естественно наделено структурой векторного пространства. Каждая функция $\varphi \in FA(n,\Lambda)$ есть голоморфная в некоторой окрестности нуля в Λ^n функция со значениями в Λ. Произведение двух функций из $FA(n,\Lambda)$ согласно лемме 7.5.1 также функция из $FA(n,\Lambda)$. Три закона композиции на $FA(n,\Lambda)$: 1) умножение на скаляр $\lambda \in \Lambda$; 2) сложение; 3) умножение — задают на множестве $FA(n,\Lambda)$ структуру коммутативной унитальной алгебры над полем Λ. Трансформация Тейлора $\mathcal{T}_{fs} : FA(n,\Lambda) \to SA(n,\Lambda)$ (см. п. 7.4.2) является инъективным гомоморфизмом алгебр над полем Λ. Далее в этой главе обозначаем трансформацию Тейлора $\mathcal{T} \equiv \mathcal{T}_{fs}$. Множество значений $\mathcal{T}(FA(n,\Lambda))$ отображения $\mathcal{T}$ в алгебре $SA(n,\Lambda)$ является подалгеброй и согласно утверждению 7.5.4 состоит из всех последовательностей экспоненциального роста.

Для голоморфных функций может быть определена дополнительная операция суперпозиции $f \circ g$ если $f \in FA(n,\Lambda)$, $g \in (FA(m,\Lambda))^n$. Операция суперпозиции определена если $g(0) \in U(q)$, где $U(q)$ — открытый поликруг голоморфности функции f. Суперпозиция всегда определена, если $g(0) = 0$.

Гомоморфизм $\mathcal{T}$ позволяет ввести топологию на $FA(n,\Lambda)$, создающую структуру топологической алгебры, как прообраз топологии на $SA(n,\Lambda)$. Таким образом определяются чековая и рутинная топологии на $FA(n,\Lambda)$. В чековой и рутинной топологиях операторы частного дифференцирования и операторы умножения на фиксированную голоморфную функцию становятся линейными непрерывными отображениями.

Мы перенесем обозначения подмножеств из алгебры $SA(n,\Lambda)$ в алгебру $FA(n,\Lambda)$ а именно $\mathcal{T}^{-1}(SAG(n,\Lambda)) \equiv FAG(n,\Lambda)$, $\mathcal{T}^{-1}(SA_k(n,\lambda)) \equiv FA_k(n,\Lambda)$, и т. д.

Вопросы существования обратного и инверсного элементов в алгебрах голоморфных функций решаются аналогично алгебре последовательностей. А именно элемент $f \in FA(n,\Lambda)$ имеет обратный, тогда и только тогда, когда $f(0) \neq 0$. Аналогично элемент $f \in (FA(n,\Lambda))^n$ имеет инверсный тогда и только тогда, когда матрица $D(\mathcal{T}(f)) \in M(n,\Lambda)$ обратима.

Если $I : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ естественное гомоморфное вложение поля действительных чисел в поле комплексных чисел, то согласно теореме 7.4.1 у любой функции $\varphi \in FA(n, \mathbf{R})$ существует I-поднятие до функции $\psi \in FA(n, \mathbf{C})$, т. е. $FA(n, \mathbf{R})$ является замкнутой подалгеброй алгебры $FA(n, \mathbf{C})$.

8.1.3 Продолжение соотношений.

Проводя операции над голоморфными функциями и зная аналоги этих операций в пространствах последовательностей, мы будем получать соотношения между координатами последовательностей, т. е. между занумерованными числами. Это и будут комбинаторные тождества. Различные типы линейных операторов на пространствах голоморфных функций мы рассмотрим в следующем параграфе. А здесь обратимся к нелинейной операции — операции суперпозиции. Согласно лемме 7.5.2 суперпозиции в пространствах функций и в пространствах последовательностей связаны соотношением

$$\mathcal{T}(f \circ g) = \mathcal{T}(f) \circ \mathcal{T}(g), \tag{8.1.2}$$

если $f \in FA(n, \Lambda)$, $g \in (FA(m, \Lambda))^n$ и $g(0) \in U(q)$, где $U(q)$ — открытый полукруг голоморфности функции f. В приведенных условиях существует функция $w \in FA(n, \Lambda)$,

$$w = f \circ g \tag{8.1.3}$$

и соотношение (8.1.3) для функций эквивалентно соотношению

$$\mathcal{T}(w) = \mathcal{T}(f) \circ \mathcal{T}(g) \tag{8.1.4}$$

для последовательностей. Итак, тождество для голоморфных функций (8.1.3) удалённых тождество для их коэффициентов Тейлора (8.1.4)

8.1.4 Частичная трансформация Тейлора.

Возьмём функцию n переменных $\varphi(z_1, z_2, ..., z_k, ..., z_n) \in FA(n, \mathbf{C})$ и зафиксируем у нее все переменные, кроме k-той. Затем у полученной функции одного переменного класса $FA(1, \mathbf{C})$ произведем трансформацию Тейлора, т.е. выпишем её коэффициенты Тейлора как функцию параметров $z_1, z_2, ..., z_{k-1}, z_{k+1}, ..., z_n$ и целочисленного индекса $i_k \in \mathbf{N}_o$. Обозначим коэффициент Тейлора $\varphi(z_1, z_2, ..., z_{k-1}, i_k, z_{k+1}, ..., z_n)$. Переход от функции n комплексных аргументов $\varphi(z_1, z_2, ..., z_k, ..., z_n)$ к функции $(n-1)$ комплексного аргумента и одного целочисленного аргумента $\varphi(z_1, z_2, ..., z_{k-1}, i_k, z_{k+1}, ..., z_n)$ мы называем одномерной трансформацией Тейлора по k-той переменной. Переменные $z_k \in \mathbf{C}$ и $i_k \in \mathbf{N}_o$ назовём сопряжёнными. Проводя последовательно одномерные трансформации Тейлора по нескольким переменным, определяем частичную трансформацию Тейлора по указанным переменным. Для обозначения трансформации Тейлора мы введём следующее соглашение. Через $z_1, z_2, ...z_n$ будем обозначать аргументы из $\mathbf{C}$, а через $i_1, i_2, ...i_n$ — сопряженные аргументы из $\mathbf{N}_o$. Если $\varphi(z_1, z_2, ..., z_n) \in FA(n, \mathbf{C})$, то функцию, получающуюся частичной трансформацией Тейлора по переменным $z_1, z_2, ..., z_k$ будем обозначать тем же символом с заменой переменных $z_1, z_2, ..., z_k$ на $i_1, i_2, ..., i_k$, т.е. $\varphi(z_1, z_2, ..., z_k, z_{k+1}, ..., z_n) \to \varphi(i_1, i_2, ..., i_k, z_{k+1}, ..., z_n)$.

Продолжим функцию $\varphi(i_1, i_2, ..., i_k, z_{k+1}, ..., z_n)$ по целочисленным переменным $i_1, i_2, ..., i_k$ на все целые значения, полагая по определению $\varphi(i_1, i_2, ..., i_k, z_{k+1}, ..., z_n) \equiv 0$, если одна из целочисленных переменных $i_\alpha < 0$, $i_\alpha \in \mathbf{Z}$, $\alpha \in \overline{1, k}$. Данное соглашение упростит нам рассмотрение сумм по целочисленным переменным.

§8.2 Линейные операторы в пространствах голоморфных функций

8.2.1 Линейные операторы в пространствах голоморфных функций и линейные операторы в пространствах последовательностей.

Мы уже знаем из § 7.6, что каждое линейное рутинно непрерывное отображение $A : SA(n, \Lambda) \to SA(m, \Lambda)$ имеет вид

$$A(a) = \sum_{i \in \mathbf{N}_o{}^n} a(i) g_A(i) \tag{8.2.1}$$

при любом $a \in SA(n, \Lambda)$, где $g_A \in SAS(n, SA(m, \Lambda))$. Для любой координаты $A(a)(j)$, $j \in \mathbf{N}_o{}^m$ имеем

$$A(a)(j) = \sum_{j \in Q(j)} a(i) g_A(i)(j), \tag{8.2.2}$$

где $Q(j)$ — конечное подмножество множества $\mathbf{N}_o{}^n$. Таким образом, линейное отображение $A : SA(n, \Lambda) \to SA(m, \Lambda)$ рутинно непрерывно тогда и только тогда, когда каждая координата образа $A(a)(j)$ является линейной комбинацией конечного числа координат прообраза. При этом любое линейное непрерывное отображение A, определенное на пространстве финитных последовательностей $SAF(n, \Lambda)$, однозначно продолжается по непрерывности до линейного непрерывного отображения всего пространства $SA(n, \Lambda)$.

В случае линейных разрывных операторов, определенных на подмножествах пространства $SA(n, \Lambda)$ представление (8.2.2) с финитным множеством $Q(j)$ может уже не иметь места.

Пусть A линейный оператор, определенный на линейном подпространстве пространства $FA(m, \Lambda)$. Сопоставим ему линейный оператор At, из $SA(n, \Lambda)$ в $SA(m, \Lambda)$ по правилу $At \equiv \mathcal{T}_m A \mathcal{T}_n^{-1}$, где $\mathcal{T}_n : FA(n, \Lambda) \to SA(n, \Lambda)$ — трансформация Тейлора. В этом параграфе нас будет интересовать связь между видом операторов A и At для ряда интегральных операторов A.

8.2.2 Мультипликатор и мультипликаторный оператор. Далее всюду в этом пункте $\Lambda = \mathbf{C}$ и $FA(n) \equiv FA(n, \mathbf{C})$, $RA(n) \equiv RA(n, \mathbf{C})$, $SA(n) \equiv SA(n, \mathbf{C})$.

Умножение на фиксированную функцию из $FA(n)$ является линейным оператором, отображающим векторное пространство $FA(n)$ в себя. Операция взятия частной производной также линейный оператор, отображающий векторное пространство $FA(n)$ в себя. Рассмотрим также линейные интегральные операторы.

Пусть $(y_1, y_2, ..., y_n) \equiv y \in \mathbf{C}^n$, $(z_1, z_2, ..., z_n) \equiv z \in \mathbf{C}^n$ и $g(y; z) \in FA(n+m), n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}_o$. Определим линейный оператор I_g, сопоставляющий функции $f \in FA(n)$ функцию $u \in FA(m)$ по правилу

$$u(z) \equiv I_g(f) \equiv \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_1} \dots \int\limits_{\Gamma_n} g\left(\frac{1}{\xi_1}, \frac{1}{\xi_2}, \dots, \frac{1}{\xi_n}; z\right) f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \frac{d\xi_1 \dots d\xi_n}{\xi_1 \dots \xi_n}. \tag{8.2.3}$$

Здесь Γ_k — окружность по переменной ξ_k радиусом $\varepsilon_k > 0$. Радиусы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ выбираются следующим образом. Пусть $r(g) \equiv (r_1(g),\ r_2(g),\ \dots,\ r_n(g),\ r_{n+1}(g),$

$r_{n+2}(g),\ \ldots, r_{n+n}(g))$ — сопряженные радиусы сходимости функции g, а $r(f) \equiv (r_1(f), r_2(f), \ldots, r_n(f))$ — сопряженные радиусы сходимости функции f, мы потребуем, чтобы при $\alpha \in \overline{1,n}$ выполнялись неравенства

$$\varepsilon_k < r_k(f), \tag{8.2.4}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_k} < r_k(g). \tag{8.2.5}$$

Тогда функция $u(z)$ голоморфна в открытом m-мерном поликруге с радиусом $r_\alpha(u) = r_{n+\alpha}(g),\ \alpha \in \overline{1,m}$. Для того чтобы удовлетворяющие (8.2.4,8.2.5) радиусы ε_k существовали необходимо и достаточно, чтобы выполнялись n соотношений

$$\forall k \in \overline{1,n} \ \Big|\ r_k(g) r_k(f) > 1. \tag{8.2.6}$$

Таким образом, интегральный оператор (8.2.3) определен на функциях $f \in FA(n)$, удовлетворяющих ограничению (8.2.6). Для того чтобы, интегральный оператор I_g был определен на всех функциях $f \in FA(n)$ достаточно, чтобы при любом фиксированном аргументе z из некоторой окрестности нуля в $\mathbf{C}^m$ функция $g(y,z)$ была целой функцией по y и, в частности, полиномом.

В предположении выполнения соотношений (8.2.4,8.2.5) для выбора контуров интегрирования применим к равенству (8.2.3) трансформацию Тейлора и получим эквивалентное соотношение для последовательностей

$$\forall i \in {\mathbf{N}_o}^m \ \Big|\ u(i) = \sum_{i \in {\mathbf{N}_o}^k} g(j;i) f(j). \tag{8.2.7}$$

Фиксируем теперь элемент $k(i) \in SA(n)$ и определим линейное отображение пространства $SA(n)$ в себя, сопоставляя элементу $f \in SA(n)$ элемент $u \in SA(n)$ по правилу

$$\forall i \in {\mathbf{N}_o}^n \ \Big|\ u(i) \equiv k(i) f(j). \tag{8.2.8}$$

Определим $g(j;i) \in SA(2n),\ j \in {\mathbf{N}_o}^n,\ i \in {\mathbf{N}_o}^n$ формулой

$$g(j;i) \equiv k(i)\delta(i_1 - j_1)\delta(i_2 - j_2)\ldots\delta(i_n - j_n), \quad i,j \in {\mathbf{N}_o}^n, \tag{8.2.9}$$

где $\delta(\alpha)$ — символ Кронекера, $\delta(0) = 1, \delta(\alpha) = 0$ при $\alpha \neq 0$. Теперь соотношение (8.2.8) является частным случаем соотношения (8.2.7) с последовательностью $g(j;i)$ вида (8.2.9). Если $g(j;i) \in \mathcal{T}(FA(2n))$, то

$$g(y;z) = \sum_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} \sum_{j \in {\mathbf{N}_o}^n} g(j;i) y^j z^i = \sum_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} k(i) z^i \sum_{j \in {\mathbf{N}_o}^n} \delta(i_1 - j_1)\ldots\delta(i_n - j_n) y^j =$$

$$\sum_{i \in {\mathbf{N}_o}^n} k(i) z^i y^i.$$

Поэтому, если $k(z) \in FA(n)$, то $g(y;z) = k(y_1 z_1, y_2 z_2, \ldots y_n z_n)$. Итак, справедлива следующая лемма.

Лемма 8.2.1 *Если $k(z) \in FA(n)$, то следующий линейный оператор отображает векторное пространство $FA(n)$ в себя*

$$u \equiv M_k(f) \equiv \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_1} \ldots \int\limits_{\Gamma_n} k\left(\frac{z_1}{\xi_1}, \frac{z_2}{\xi_2}, \ldots \frac{z_n}{\xi_n}\right) f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_n}{\xi_1 \ldots \xi_n}, \tag{8.2.10}$$

причём верно (8.2.8). Радиусы окружностей $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n \in \mathbf{R}_+$ и $z \in \mathbf{C}^n$ выбраны так, чтобы выполнялись неравенства

$$\forall \alpha \in \overline{1,n} \;\Big|\; \varepsilon_\alpha < r_\alpha(f), \tag{8.2.11}$$

$$\forall \alpha \in \overline{1,n} \;\Big|\; |z_\alpha| < r_\alpha(k)\varepsilon_\alpha. \tag{8.2.12}$$

Интегральный оператор $M_k : FA(n) \to FA(n)$ назовём *мультипликаторным оператором*, а соответствующий оператор на пространстве последовательностей $SA(n)$ вида (8.2.8) — *мультипликатором.* Мультипликатор и мультипликаторный оператор инъективны тогда и только тогда, когда

$$\forall i \in \mathbf{N}_o{}^n \;\Big|\; k(i) \neq 0. \tag{8.2.13}$$

Мультипликатор определен для любой последовательности $k \in SA(n)$ и отображает векторное пространство $SA(n)$ в себя. Мультипликатор будет инъективным оператором пространства $SA(n)$ в себя тогда и только тогда, когда верно (8.2.13), кроме того мультипликатор будет биекцией пространства $SA(n)$ на себя тогда и только тогда, когда верно (8.2.13). Мультипликаторным операторам соответствуют такие последовательности $k \in SA(n)$, которые являются последовательностями экспоненциального роста. Поэтому для того, чтобы у инъективного мультипликаторного оператора обратный оператор также был мультипликаторным необходимо и достаточно, чтобы последовательности $k(i)$ и $\frac{1}{k(i)}$ были последовательностями экспоненциального роста, т. е. существовали $C_1 \in \mathbf{R}_+,\ C_2 \in \mathbf{R}_+,\ t \in \mathbf{R}_+,\ s \in \mathbf{R}_+$, что

$$\forall i \in \mathbf{N}_o{}^n \;\Big|\; C_2 s^{|i|} \leq |k(i)| \leq C_1 t^{|i|}. \tag{8.2.14}$$

Для любой последовательности экспоненциального роста $a(i) \in SA(n)$ существует её прообраз Тейлора — голоморфная функция $a(z) \in SA(n)$, причём описанным линейным преобразованиям последовательностей соответствуют линейные преобразования голоморфных функций. С помощью соответствующего мультипликатора любую последовательность $a \in SA(n)$ можно перевести в последовательность экспоненциального роста для последующего применения техники голоморфных функций. Наиболее популярный в комбинаторике мультипликатор — экспоненциальный с $k(i) = \frac{1}{i!}$. Ему соответствует $k(z) = \exp(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)$ и мультипликаторный оператор

$$M_k(f)(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} \ldots \int\limits_{\Gamma_n} \exp\left(\frac{z_1}{\xi_1} + \frac{z_2}{\xi_2} + \ldots + \frac{z_n}{\xi_n}\right) \frac{d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n}{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n}. \tag{8.2.15}$$

Итак, свёртке последовательностей $a * b, \quad a, b \in SA(n)$ мы сопоставили произведение голоморфных функций $a(z)b(z)$. Обратное верно в следующем смысле. Пусть $c(i) = a(i)b(i)$, где $a(i)$ и $b(i)$ являются образами Тейлора голоморфных функций $a(z)$ и $b(z)$ с $r_\alpha(a) > 1, r_\alpha(b) > 1$ при всех $\alpha \in \overline{1,n}$. Тогда определён мультипликаторный оператор $M_a(b)$ и, полагая в (8.2.10) $\varepsilon_k = 1, \alpha \in \overline{1,n}$, получаем

$$c(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \ldots e^{i\varphi_n}) = \tag{8.2.16}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} a(e^{i(\varphi_1 - t_1)}, e^{i(\varphi_2 - t_2)}, \ldots e^{i(\varphi_n - t_n)}) b(e^{it_1}, e^{it_2}, \ldots e^{it_n})\, dt_1 dt_2 \ldots dt_n,$$

т. е. свертку по переменным $\varphi \in [0, 2\pi]^n, t \in [0, 2\pi]^n$. Равенство (8.2.16) справедливо и в более слабых ограничениях на $a(z), b(z)$.

8.2.3 Суперпозиция интегральных операторов.

В этом пункте поле скаляров $\Lambda = \mathbf{C}$. Пусть $g \in FA(n+s)$, $h \in FA(s+m)$, где $n, s, m \in \mathbf{N}_o$. Интегральный оператор I_g действует из $FA(n)$ в $FA(s)$, а интегральный оператор I_h — из $FA(s)$ в $FA(m)$. Рассмотрим суперпозицию линейных интегральных операторов $I_h I_g$ — это линейный оператор, действующий из $FA(n)$ в $FA(m)$. Нас интересует вопрос о существовании функции $q \in FA(n+m)$ такой что $I_q = I_h I_g$.

Выведем следующие соглашения в этом пункте: если $\eta \in \mathbf{C}^n$ и $\xi \in \mathbf{C}^n$, то $\frac{\eta}{\xi} \equiv \left(\frac{\eta_1}{\xi_1}, \frac{\eta_2}{\xi_2}, \dots \frac{\eta_n}{\xi_n}\right) \in \mathbf{C}^n$, и $\frac{d\eta}{\eta} \equiv \frac{d\eta_1 d\eta_2 \dots d\eta_n}{\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n}$. Согласно определению интегрального оператора I_g — формула (8.2.11) для функции $f \in FA(n)$ верно

$$I_g(f)(z) \equiv \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_1} \dots \int\limits_{\Gamma_n} g\left(\frac{1}{\xi}, z\right) f(\xi) \frac{d\xi}{\xi}$$

и для суперпозиции

$$I_h(I_g(f))(z) \equiv \frac{1}{(2\pi i)^s} \int\limits_{\Theta_1} \dots \int\limits_{\Theta_s} h\left(\frac{1}{\eta}, z\right) \left(\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_1} \dots \int\limits_{\Gamma_n} g\left(\frac{1}{\xi}, z\right) f(\xi) \frac{d\xi}{\xi}\right) \frac{d\eta}{\eta} =$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_1} \dots \int\limits_{\Gamma_n} f(\xi) \left(\frac{1}{(2\pi i)^s} \int\limits_{\Theta_1} \dots \int\limits_{\Theta_s} h\left(\frac{1}{\eta}, z\right) g\left(\frac{1}{\xi}, \eta\right) \frac{d\eta}{\eta}\right) \frac{d\xi}{\xi}. \tag{8.2.17}$$

Введём функцию

$$g(\xi, z) \equiv \frac{1}{(2\pi i)^s} \int\limits_{\Theta_1} \dots \int\limits_{\Theta_s} h\left(\frac{1}{\eta}, z\right) g(\xi, z) \frac{d\eta}{\eta}. \tag{8.2.18}$$

При выполнении условия для сопряженных радиусов сходимости

$$\forall \alpha \in \overline{1, s} \;\Big|\; r_\alpha(h) r_{n+\alpha}(g) > 1. \tag{8.2.19}$$

функция $g(\xi, z)$ определена и принадлежит $FA(n+m)$. В таком случае получаем, что $I_g = I_h I_g$.

Далее рассмотрим частный случай, когда $n = s$. Тогда оператор I_g из $FA(n)$ в $FA(n)$ будет единичным $I_g = E$ тогда и только тогда, когда

$$g(\xi, z) = \frac{1}{\prod_{\alpha=1}^n (1 - \xi_\alpha z_\alpha)}, \tag{8.2.20}$$

так как в этом случае по интегральной формуле Коши получаем

$$I_g(f) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_1} \dots \int\limits_{\Gamma_n} \frac{f(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)}{\left(1 - \frac{z_1}{\xi_1}\right)\left(1 - \frac{z_2}{\xi_2}\right) \dots \left(1 - \frac{z_n}{\xi_n}\right)} \frac{d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n}{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n} =$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_1} \dots \int\limits_{\Gamma_n} \frac{f(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)}{(\xi_1 - z_1)(\xi_2 - z_2) \dots (\xi_n - z_n)} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n = f(z_1, z_2, \dots z_n).$$

Но интегральный оператор I_g с функцией $g \in FA(2n)$ вида (8.2.20) совпадает с мультипликаторным оператором M_k с функцией $k(z) \in FA(n)$ вида

$$k(z) = \frac{1}{\prod_{\alpha=1}^n (1 - z_\alpha)}, \tag{8.2.21}$$

Итак, единичный оператор $E : FA(k) \to FA(n)$ является мультипликаторным оператором.

Переходя от мультипликаторных операторов к соответствующим мультипликаторам на пространстве последовательностей, нетрудно убедиться, что при любых $h, k \in FA(n)$ произведение $M_h M_k = M_q$, где $q = M_h(k) = M_k(h)$. Итак, когда g пробегает $FA(n)$ мультипликаторные операторы M_g образуют коммутативную унитальную алгебру.

Рассмотрим вопрос о существовании обратного интегрального оператора к интегральному оператору I_h, $h \in FA(n+n)$. Если I_g, $g \in FA(n+n)$ — обратный интегральный оператор к I_h, то $I_h I_g = E$. Так как единичный оператор является интегральным оператором с ядром вида (8.2.20), то условие $I_h I_g = E$ эквивалентно интегральному уравнению для функции $g(\xi, r) \in FA(n+n)$:

$$\frac{1}{\prod_{\alpha=1}^{n}(1-\xi_\alpha z_\alpha)} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_1} \dots \int\limits_{\Gamma_n} h\left(\frac{1}{\eta}, z\right) g(\xi, \eta) \frac{d\eta}{\eta}. \tag{8.2.22}$$

В случае мультипликаторных операторов при заданной функции $h(z) \in FA(n)$ мультипликаторный оператор M_g обратный к мультипликаторному оператору M_h определяется из решения интегрального уравнения для функции $g(z) \in FA(n)$ вида

$$\frac{1}{\prod_{\alpha=1}^{n}(1-z_\alpha)} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_1} \dots \int\limits_{\Gamma_n} h\left(\frac{z}{\xi}\right) g(\xi) \frac{d\xi}{\xi}. \tag{8.2.23}$$

Напомним (см. предыдущий пункт), что не у всякого инъективного мультипликаторного оператора обратный оператор является мультипликаторным.

8.2.4 Линейные операторы P_j, X_j, G_j на пространстве последовательностей $SA(n, \mathbf{C})$. Введём для $j \in {\mathbf{N}_o}^n$ линейное подпространство $SAF_j(n, \mathbf{C}) \subset SA(n, \mathbf{C})$, состоящее из всех последовательностей $a(i)$, $i \in {\mathbf{N}_o}^n$, для которых $a(i) = 0$, если условие $i \le j$ не выполняется. Соответственно $FAF_j(n, \mathbf{C}) \equiv \mathcal{T}^{-1}(SAF_j(n, \mathbf{C}))$ есть пространство полиномов, содержащих степени z^i лишь с $i \le j$. Определим линейный проектор $P_j : SA(n, \mathbf{C}) \to SA(n, \mathbf{C})$ по правилу $P_j(a) = b$ означает, что $b(i) = \begin{cases} 0, & i \not\le j; \\ a(i), & i \le j. \end{cases}$. Т. е. $P_j(b) = b$, если $b \in SAF_j(n, \mathbf{C})$ и $P_j^2 = P_j$. Определим также линейный оператор $X_j : SA(n, \mathbf{C}) \to SA(n, \mathbf{C})$ по правилу $X_j(a) = b$ означает, что $b(i) = a(i-j)$, $i \in {\mathbf{N}_o}^n$. Напомним, что в п. 8.1.4 мы ввели соглашение для $a \in SA(n, \mathbf{C})$, что $a(i) = 0$ при $i \in \mathbf{Z}^n \setminus {\mathbf{N}_o}^n$. Определим также линейный оператор $G_j : SA(n, \mathbf{C}) \to SA(n, \mathbf{C})$ по правилу $G_j(a) = b$ означает, что $b(i) = \begin{cases} 0, & i \not\le j, \\ a(j-i), & i \le j \end{cases}$, $i \in {\mathbf{N}_o}^n$.

Введённые линейные операторы обладают свойствами

$$P_j^2 = P_j; \tag{8.2.24}$$

$$G_j^2 = P_j; \tag{8.2.25}$$

$$G_j P_t = G_j = P_t G_j, \ t \in {\mathbf{N}_o}^n, \ t \ge j. \tag{8.2.26}$$

Прообразы операторов P_j, X_j, G_j на $FA(n, \mathbf{C})$ есть линейные операторы вида $\mathcal{T}^{-1} P_j \mathcal{T}$, $\mathcal{T}^{-1} X_j \mathcal{T}$, $\mathcal{T}^{-1} G_j \mathcal{T}$. Оператор $\mathcal{T}^{-1} X_j \mathcal{T}$ есть оператор умножения

$$\mathcal{T}^{-1} X_j \mathcal{T}(f(z)) = z^j f(z), \quad f \in FA(n, \mathbf{C}). \tag{8.2.27}$$

В силу (8.2.26) $G_j = G_j P_j$, поэтому достаточно определить оператор $\mathcal{T}^{-1} P_j \mathcal{T}$ лишь на полиномах из $FAF_j(n, \mathbf{C})$:

$$\forall f(z) \in FAF_j(n, \mathbf{C}) \Bigm| \mathcal{T}^{-1} G_j \mathcal{T}(f(z)) = z^j f\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \dots \frac{1}{z_n}\right). \tag{8.2.28}$$

§8.3 Свойства трансформации Тейлора, биномиальные коэффициенты

8.3.1 Одномерная трансформация Тейлора.

В этом пункте через $f(z) \in FA(1, \mathbf{C})$, $z \in \mathbf{C}$ обозначается голоморфная функция через $a(i) \in SA(1, \mathbf{C})$, $i \in \mathbf{N}_o$ — числовая последовательность. Если последовательность $a(i)$ является трансформацией Тейлора функции $f(z)$, то этот факт мы записываем в виде $f(z) \leftrightarrow a(i)$.

Известны разложения в ряд Тейлора следующих элементарных функций:

$$f(z) \equiv 1 \quad \leftrightarrow \quad a(i) = \begin{cases} 1, i = 0; \\ 0, i \neq 0. \end{cases} \tag{8.3.1}$$

$$f(z) = z^n; n \in \mathbf{N}_o \quad \leftrightarrow \quad a(i) = \begin{cases} 1, i = n; \\ 0, i \neq n. \end{cases} \tag{8.3.2}$$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \quad \leftrightarrow \quad a(i) \equiv 1\,. \tag{8.3.3}$$

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^n}; n \in \mathbf{N} \quad \leftrightarrow \quad a(i) = C(i+n-1), n-1)\,. \tag{8.3.4}$$

$$f(z) = \exp(z) \quad \leftrightarrow \quad a(i) = \frac{1}{i!}\,. \tag{8.3.5}$$

$$f(z) = \tilde{\exp}(z) \equiv \exp(z) - 1 \quad \leftrightarrow \quad a(i) = \begin{cases} 0, i = 0; \\ \frac{1}{i!}; i \neq 0. \end{cases} \tag{8.3.6}$$

$$f(z) = \tilde{\ln}(z) \equiv \ln(1+z) \quad \leftrightarrow \quad a(i) = \begin{cases} 0, i = 0; \\ \frac{-1^{i-1}}{i}, i \neq 0. \end{cases} \tag{8.3.7}$$

Следующее соответствие является определением биномиальных коэффициентов $C(n, i)$:

$$f(z) = (1+z)^n,\ n \in \mathbf{N}_o \leftrightarrow a(i) \equiv C(n, i)\,. \tag{8.3.8}$$

По аналогии с биномиальными коэффициентами определим *числа Винокурова* $V(i, k)$:

$$f(z) = (1+z)^k \ln(1+z),\ k \in \mathbf{N}_o \leftrightarrow a(i) \equiv V(i, k)\,. \tag{8.3.9}$$

Перейдем теперь к соответствию линейных преобразований функций $f(z)$ и последовательностей $a(i)$. Пусть $f(z) \leftrightarrow a(i)$, тогда:

$$f(\lambda z),\ \lambda \in \mathbf{C} \leftrightarrow \lambda^i a(i)\,; \tag{8.3.10}$$

$$z^n f(z),\ n \in \mathbf{N}_o \leftrightarrow a(i-n)\,. \tag{8.3.11}$$

Пусть $w \in SA(1, \mathbf{C})$ последовательность из примера (8.3.3), т.е. $w(i) = 1$ при $i \in \mathbf{N}_o$. Для любой последовательности $a(i) \in SA(1, \mathbf{C})$ свёртка

$$(a * w)(n) = \sum_{i=0}^{n} a(i),\ n \in \mathbf{N}_o\,, \tag{8.3.12}$$

т.е. последовательность $(a * w)(i)$ есть последовательность частных сумм последовательности $a(i)$. Соответственно последовательность

$$(a * \underbrace{w * w * ... * w}_{k})(i) \tag{8.3.13}$$

есть последовательность k-тых частных сумм последовательности $a(i)$.

Напомним, что в этом параграфе и, в частности, в формуле (8.3.11) мы используем соглашение п. 8.1.4 о продолжение последовательностей нулем на отрицательные значения целочисленного индекса, т. е. $a(i) = 0$ при $z \in \mathbf{Z},\ i < 0$.

8.3.2 Двумерная трансформация Тейлора и биномиальные коэффициенты.

В п. 8.1.4 мы ввели обозначения для частичной трансформации Тейлора функции $\varphi(z_1, z_2, ...z_{k-1}, z_k, z_{k+1}, ...z_n) \in FA(n, \mathbf{C})$ по переменной z_k в виде $\varphi(z_1,\ z_2, ...z_{k-1},\ i_k,$ $z_{k+1}, ...z_n)$. При таком соглашение нельзя менять обозначения аргументов. В самом деле, пусть $\varphi(z_1, z_2) \in FA(2, \mathbf{C})$ и $\varphi(z_1, z_2) \equiv z_1 z_2$, тогда $\varphi(i_1, z_2) = \begin{cases} z_2, & i_1 = 1; \\ 0, & i_1 \neq 1. \end{cases}$ Мы видим, что $\varphi(i_1, z_2) \neq i_1 z_2$.

Введём дальнейшую детализацию обозначений для частичной трансформации Тейлора. Пусть на местах аргументов с номерами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ у функции φ стоят комплексные переменные $z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, ..., z_{\alpha_k}$, тогда результат трансформации Тейлора функции φ по этим переменным мы обозначим в виде

$$\cot(\varphi; z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, ..., z_{\alpha_k}; i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, ..., i_{\alpha_k}), \tag{8.3.14}$$

где $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, ..., i_{\alpha_k}$ — целочисленные переменные сопряженные к соответствующим комплексным переменным. Наоборот, если на местах аргументов с номерами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ у функции φ стояли целочисленные переменные $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, ..., i_{\alpha_k}$, то результат обратной трансформации Тейлора по этим переменным мы обозначаем в виде

$$\cot(\varphi; i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, ..., i_{\alpha_k}; z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, ..., z_{\alpha_k}), \tag{8.3.15}$$

где $z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, ..., z_{\alpha_k}$ — комплексные переменные, сопряженные к соответствующим целочисленным переменным.

Используется соглашение п. 8.1.4, что $\varphi(i_1, z_2, ..., z_n) = 0$, при $i_1 \in \mathbf{Z}$, $i_1 < 0$.

В двумерном случае комплексные переменные обозначаем $(z_1, z_2) \equiv (x, y)$, а целочисленные — $(i_1, i_2) \equiv (n, k)$.

Перейдем к рассмотрению биномиальных коэффициентов $C(n, k) \in SA(2, \mathbf{C})$. Согласно (8.3.8) имеем

$$C(n, y) = (1 + y)^n\,. \tag{8.3.16}$$

Поэтому

$$C(x, y) = \sum_{n \in \mathbf{N}_o} (1 + y)^n x^n = \frac{1}{1 - x(1 + y)}\,. \tag{8.3.17}$$

Найдем теперь $C(x, k)$ как результат трансформации Тейлора по переменной $y \in \mathbf{C}$ функции (8.3.17):

$$C(x, y) = \frac{1}{1 - x(1 + y)} = \frac{1}{(1 - x)(1 - (\frac{x}{1-x})y)} = \frac{1}{1 - x} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{x}{1 - x})^k y^k,$$

откуда

$$C(x,k) = \frac{x^k}{1-x^{k+1}},\ k \in \mathbf{N}_o\,. \tag{8.3.18}$$

Для биномиальных коэффициентов известно следующее выражение

$$C(n,k) = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & ,k \in \overline{0,n}; \\ 0 & ,k > n. \end{cases} \tag{8.3.19}$$

8.3.3 Свойства биномиальных коэффициентов.

Согласно предыдущему пункту определением биномиальных коэффициентов может служить формула

$$C(n,k) = \cot\left(\frac{1}{1-x(1+y)}; x, y; n, k\right),\ (n,k) \in {\mathbf{N}_o}^2\,. \tag{8.3.20}$$

Причём согласно нашей договоренности (п. 8.1.4) мы продолжаем $C(n,k)$ на $(n,k) \in \mathbf{Z}^2$, полагая $C(n,k) = 0$ при $(n,k) \in \mathbf{Z}^2 \setminus {\mathbf{N}_o}^2$.

Лемма 8.3.1 *Для биномиальных коэффициентов $C(n,k)$ справедливо основное свойство:*

$$\forall (n,k) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} \;\Big|\; C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k) \tag{8.3.21}$$

и свойство дополнительности:

$$\forall (n,k) \in \mathbf{Z}^2 \;\Big|\; C(n,n-k) = C(n,k)\,. \tag{8.3.22}$$

Доказательство. Если $n < 0$ или $k < 0$ равенство $C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$ выполняется тривиально. Рассмотрим случай $(n,k) \in {\mathbf{N}_o}^2$. Если $n \geq 1$, то

$$(1+y)^n = (1+y)(1+y)^{n-1}.$$

Что влечет для коэффициентов

$$C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1)$$

при $k \in \mathbf{N}_o$. В случае $n = 0$ и $k > 0$ имеем $C(n,k) = 0$, $C(n-1,k-1) = 0$, $C(n-1,k) = 0$. Основное свойство доказано.

Равенство $C(n,n-k) = C(n,k)$ выполнено тривиально при $n < 0$. При $n \geq 0$ и $k < 0$ оно также тривиально выполнено. В случае $(n,k) \in {\mathbf{N}_o}^2$ при $k > n$ имеем $0 = C(n,n-k) = C(n,k) = 0$. В случае $n \in \mathbf{N}_o$, $k \in \overline{0,n}$ равенство $C(n,n-k) = C(n,k)$ выполнено в силу представления (8.3.19). ♢

Следствие 8.3.1 *Если $\theta \in \overline{0,n}$, то*

$$\forall n \in \mathbf{N}_o\ \forall k \in \mathbf{Z} \;\Big|\; C(n+\theta,k) = C(n,k) + \theta C(n,k-1)\,. \tag{8.3.23}$$

При $\theta = 0$ равенство (8.3.23) тривиально, а при $\theta = 1$ вытекает из основного свойства.

8.3.4 Суммы произведений вида $C \cdot C$.

В этом пункте мы вычислим три суммы от произведений вида $C(n,k)C(n',k')$.

Лемма 8.3.2 *При* $(k,n,m) \in {\mathbf{N}_o}^3$ *верно равенство*

$$\sum_{i\in\mathbf{Z}} C(i,k)C(n-i,m) = C(n+1,k+m+1)\,. \tag{8.3.24}$$

Доказательство. Согласно п. 8.3.2 свёртка (8.3.24) представима в виде

$$\sum_{i\in\mathbf{Z}} C(i,k)C(n-i,m) = \cot\left(\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}\cdot\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}};x;n\right) =$$

$$\cot\left(x^{k+m}\frac{1}{(1-x)^{k+m+2}};x;n\right) = \cot\left(\frac{1}{(1-x)^{k+m+2}};x;n-(k+m)\right).$$

Далее согласно примеру (8.3.4)

$$\sum_{i\in\mathbf{Z}} C(i,k)C(n-i,m) = C(n-(k+m)+k+m+1,k+m+1) = C(n+1,k+m+1).$$

$\diamondsuit$

Далее рассматриваем следующую сумму по вторым индексам.

Лемма 8.3.3 *При* $(k,m,n) \in {\mathbf{N}_o}^3$ *верно равенство*

$$\sum_{i\in\mathbf{Z}} C(k,i)C(m,n-i) = C(k+m,n).$$

Доказательство. Рассматриваемая свёртка равна

$$\sum_{i\in\mathbf{Z}} C(k,i)C(m,n-i) = \cot((1+x)^k(1+x)^m;x;n) = \cot((1+x)^{k+m};x;n) = C(k+m,n).$$

$\diamondsuit$

Вычисляем следующую скрещенную сумму.

Лемма 8.3.4 *При* $(m,n,k,) \in {\mathbf{N}_o}^3$ *верно равенство*

$$\sum_{i\in\mathbf{Z}} C(m,i)(-1)^i C(n-i,k) = \begin{cases} C(n-m,n-k) & ,k \ge m; \\ C(m-(k+1),n-k)(-1)^{n-k} & ,k < m. \end{cases}$$

Доказательство. Для рассматриваемой свёртки справедливо представление

$$\sum_{i\in\mathbf{Z}} C(m,i)(-1)^i C(n-i,k) = \cot\left((1-x)^m\cdot\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}};x;n\right) =$$

$$\cot\left(x^k\cdot\frac{1}{(1-x)^{k-m+1}};x;n\right) = \cot\left(\frac{1}{(1-x)^{k-m+1}};x;n-k\right).$$

Далее при $k-m \ge 0$ используем пример (8.3.4), а при $k < m$ — примеры (8.3.8) и (8.3.10). $\diamondsuit$

8.3.5 Числа Моргана.

Числа Моргана определяются равенством (см. [56], стр. 22)

$$(e^z-1)^n=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Delta^n 0^i}{i!}z^i,\quad n\in\mathbf{N}_o. \tag{8.3.25}$$

При $n=0$ и $z\neq 0$ отсюда следует, что $\Delta^0 0^0=1$ и $\Delta^0 0^i=0$ при $i\in\mathbf{N}$.

Число Моргана $\Delta^n 0^i$ равно числу $D(n,i)$ сюръективных отображений множества из i элементов на множество из n элементов ([63], стр. 42). Поэтому $\Delta^n 0^n=n!$ при $n\in\mathbf{N}_o$ и $\Delta^1 0^n=1$ при $n\in\mathbf{N}$.

Числа Моргана обладают следующим свойством.

Лемма 8.3.5 *Для любого $n\in\mathbf{N}$ и любого $i\in\mathbf{N}_o$ справедливо равенство*

$$\Delta^n 0^{i+1}=n\left(\Delta^n 0^i+\Delta^{n-1}0^i\right). \tag{8.3.26}$$

Доказательство. Дифференцируя функцию $(e^z-1)^n$, получаем

$$\frac{d}{dz}(e^z-1)^n=n(e^z-1)^{n-1}e^z=n\left((e^z-1)^n+(e^z-1)^{n-1}\right). \tag{8.3.27}$$

Но дифференцируя ряд (8.3.25) почленно, получаем

$$\frac{d}{dz}(e^z-1)^n=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\Delta^n 0^i}{i!}z^i iz^{i-1}. \tag{8.3.28}$$

Приравнивая коэффициенты степенных рядов в правой части равенств (8.3.27) и (8.3.28), получаем равенство (8.3.26). $\diamondsuit$

Нам потребуется также следующее свойство чисел Моргана.

Лемма 8.3.6 *Для любого натурального числа $n\geq 2$ выполняется равенство*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\Delta^k 0^n=0. \tag{8.3.29}$$

Доказательство. Согласно лемме 8.3.5 верно равенство

$$\Delta^k 0^n=k\left(\Delta^k 0^{n-1}+\Delta^{k-1}0^{n-1}\right)$$

при $k\in\overline{i,n}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\Delta^k 0^n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\Delta^k 0^{n-1}+\Delta^{k-1}0^{n-1}\right)=$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\Delta^k 0^{n-1}+\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{s+1}\Delta^s 0^{n-1}=$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\Delta^k 0^{n-1}+(-1)^n\Delta^n 0^{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\Delta^k 0^{n-1}-\Delta^0 0^{n-1}=0,$$

поскольку $\Delta^n 0^{n-1}=0$ и $\Delta^0 0^{n-1}=0$. $\diamondsuit$

8.3.6 Числа Бернулли.

Числа Бернулли B_i определяются равенством (см. [11], стр. 256)

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}z^i. \tag{8.3.30}$$

Отсюда $B_0=1, B_1=-\frac{1}{2}, B_2=\frac{1}{6}$, и $B_{2k+1}=0$ при $k\in\mathbf{N}$. Числа Бернулли выражаются через числа Моргана.

Утверждение 8.3.1 *([11], стр. 264) Для любого $i\in\mathbf{N}_o$ верно*

$$B_i=\sum_{k=0}^{i}\frac{(-1)^k\Delta^k 0^i}{k+1}. \tag{8.3.31}$$

Для четных чисел Бернулли справедливо представление.

Утверждение 8.3.2 *([11], стр. 37) Для любого $p\in\mathbf{N}$ верно*

$$B_{2p}=\frac{(-1)^{p-1}(2p)!}{2^{2p-1}\pi^{2p}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}}. \tag{8.3.32}$$

§8.4 Числа Винокурова

8.4.1 Двумерная трансформация Тейлора.

В примере (8.3.9) мы определили числа Винокурова формулой

$$V(n,k)=\cot\left((1+x)^k\ln(1+x);x;n\right), \tag{8.4.1}$$

поэтому

$$V(x,k)=(1+x)^k\ln(1+x). \tag{8.4.2}$$

Исходя из формулы (8.4.2), обратная трансформация Тейлора чисел $V(n,k)$ по двум переменным равна

$$V(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}((1+x)^k\ln(1+x))y^k=\frac{\ln(1+x)}{1-y(1+x)}. \tag{8.4.3}$$

Найдем теперь функцию $V(n,y)$. Так как функция $V(x,y)$ есть произведение

$$V(x,y)=\ln(1+x)\cdot\frac{1}{1-y(1+x)},$$

то

$$V(n,y)=\sum_{i=1}^{n}\cot\,(\ln(1+x);x;i)\,\cot\left(\frac{1}{1-y(1+x)};x;n-i\right)=$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}\,\cot\left(\frac{1}{(1-y)-yx};x;n-i\right)=$$
$$\frac{1}{1-y}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}\,\cot\left(\frac{1}{1-(\frac{y}{1-y}x)};x;n-i\right)=$$

$$\frac{1}{1-y}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{n-i}=\frac{1}{(1-y)^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}y^{n-i}(1-y)^{i}.$$

Итак, мы получили формулу

$$V(n,y)=\frac{1}{(1-y)^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}y^{n-i}(1-y)^{i}. \tag{8.4.4}$$

Перейдем к вычислению чисел $V(n,k)$ при $(n,k)\in {\mathbf{N}_o}^2$. Согласно формуле (8.4.1)

$$\forall k\in\mathbf{N}_o \;\Big|\; V(0,k)=0. \tag{8.4.5}$$

В случае $n\in\mathbf{N}$, в силу формулы (8.4.1) имеем

$$V(n,k)=\operatorname{cot}\Big((1+x)^k\ln(1+x);x;n\Big)= \tag{8.4.6}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\operatorname{cot}\,(\ln(1+x);x;i)\operatorname{cot}\Big((1+x)^k;x;n-i\Big)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i}C(k,n-i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 x^{i-1}\,dx\right)(-1)^{i-1}C(k,n-i)=$$

$$\int_0^1\left(\sum_{i=1}^{n}(-x)^{i-1}C(k,n-i)\right)dx=\int_0^1\left(\sum_{j=0}^{n-1}(-x)^{j}C(k,(n-1)-j)\right)dx=$$

$$\int_0^1\left(\sum_{t=0}^{n-1}(-x)^{n-1-t}C(k,t)\right)dx=\int_0^1(-x)^{n-1-k}\left(\sum_{t=0}^{n-1}(-x)^{k-t}C(k,t)\right)dx.$$

Далее рассматриваем случай $k\in\overline{0,(n-1)}$, тогда формула (8.4.6) даёт

$$V(n,k)=(-1)^{n-1-k}\int_0^1 x^{n-1-k}\left(\sum_{t=0}^{k}(-x)^{k-t}C(k,t)\right)dx=(-1)^{n-1-k}\int_0^1 x^{n-k-1}(1-x)^k\,dx. \tag{8.4.7}$$

Таким образом,

$$V(n,k)=(-1)^{n-1-k}B(n-k,k+1),\ n\in\mathbf{N},\ k\in\overline{0,n-1}, \tag{8.4.8}$$

где $B(a,b)$ — бэта-функция. Используем представление бэта-функции через гамма-функцию ([29], с. 964):

$$V(n,k)=(-1)^{n-1-k}\frac{\Gamma(n-k)\Gamma(k+1)}{\Gamma(n+1)}. \tag{8.4.9}$$

Итак, при $n\in\mathbf{N}$, $k\in\overline{0,n-1}$, получаем формулу

$$V(n,k)=(-1)^{n-1-k}\frac{(n-k-1)!k!}{n!}. \tag{8.4.10}$$

Формула (8.4.10) имеет для нас важное значение, ибо в приложениях мы будем использовать числа $V(n,k)$ лишь когда $n\in\mathbf{N}$ и $k\in\overline{0,n-1}$.

8.4.2 Общие свойства.

В силу формулы (8.4.3) числа Винокурова могут быть определены соотношением

$$V(n,k) = \cot\left(\frac{\ln(1+x)}{1-y(1+x)}; x, y; n, k\right). \tag{8.4.11}$$

Как принято, мы полагаем $V(n,k) = 0$ при $(n,k) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \mathbf{N}_o{}^2$.

Лемма 8.4.1 *Для чисел Винокурова справедливо* <u>*основное свойство*</u>*:*

$$\forall (n,k) \in \mathbf{Z}^2 \setminus (\mathbf{N} \times 0) \;\Big|\; V(n,k) = V(n,k-1) + V(n-1,k-1) \tag{8.4.12}$$

и <u>*свойство дополнительности*</u>*:*

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \forall k \in \overline{0, n-1} \;\Big|\; V(n, n-1-k) = (-1)^{n-1} V(n,k). \tag{8.4.13}$$

Доказательство. Равенство

$$V(n,k) = V(n,k-1) + V(n-1,k-1) \tag{8.4.14}$$

тривиально выполнено при $n \le 0$ или $k < 0$. Рассмотрим случай $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}_o$. В подслучае $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$ из равенства функций

$$(1+x)^k \ln(1+x) = (1+x) \cdot ((1+x)^{k-1} \ln(1+x))$$

следует соотношение (8.4.14) при $n \in \mathbf{N}$. При $k = 0$, $n \in \mathbf{N}$

$$V(n,0) = \frac{(-1)^{n-1}}{n},\ V(n,k-1) = 0,\ V(n-1,k-1) = 0$$

и равенство (8.4.14) не выполнено. Формула (8.4.12) доказана.

Формула (8.4.13) непосредственно вытекает из формулы (8.4.10). $\diamondsuit$

Следствие 8.4.1 *Если* $(n,k) \in \mathbf{N}_o{}^2$, $\theta \in \overline{0,1}$, *то*

$$V(n, k+\theta) = V(n,k) + \theta V(n-1,k). \tag{8.4.15}$$

В самом деле, при $\theta = 0$ равенство (8.4.15) тривиально, а при $\theta = 1$ следует из (8.4.12).

Формулу (8.4.10) можно записать в эквивалентном виде

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \forall k \in \overline{0, n-1} \;\Big|\; V(n,k) = \frac{(-1)^{n-1-k}}{n \cdot C(n-1,k)}, \tag{8.4.16}$$

откуда следует, что

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \forall k \in \overline{0, n-1} \;\Big|\; \frac{2^{-(n-1)}}{n} \le |V(n,k)| \le \frac{1}{n}. \tag{8.4.17}$$

8.4.3 Суммы произведений вида $C \cdot V$.

В этом пункте мы вычислим три суммы от произведений вида $C(n,k)V(n',k')$.

Лемма 8.4.2 *При* $(r,n,k) \in \mathbf{N}_o{}^3$ *и* $k \geq r+1$ *верно равенство*

$$\sum_{i \in \mathbf{Z}} C(i,r)(-1)^i V(n-1,k) = (-1)^r V(n-r, k-(r+1)). \tag{8.4.18}$$

Доказательство. Искомая свёртка равна

$$\sum_{i \in \mathbf{Z}} C(i,r)(-1)^i V(n-i,k) = \cot \left(\frac{(-x)^r}{(1+x)^{r+1}} \cdot (1+x)^k \ln(1+x); x; n \right) =$$

$$(-1)^r \cot \left((1+x)^{k-(r+1)} \ln(1+x); x; n-r \right) = (-1)^r V(n-r, k-(r+1)).$$

$\diamondsuit$

Далее вычисляем сумму по второму и первому индексу.

Лемма 8.4.3 *При* $(r,n,k) \in \mathbf{N}_o{}^3$ *верно равенство*

$$\sum_{i \in \mathbf{N}} C(r,i)V(n-i,k) = V(n,k+r). \tag{8.4.19}$$

Доказательство. Искомая свёртка равна

$$\sum_{i \in \mathbf{Z}} C(r,i)V(n-i,k) = \cot \left((1+x)^r ((1+x)^k \ln(1+x)); x; n \right) =$$

$$\cot \left((1+x)^{r+k} \ln(1+x); x; n \right) = V(n, r+k). \quad \diamondsuit$$

Вычисляем также сумму по второму и первому индексу.

Лемма 8.4.4 *При* $(r,n,k) \in \mathbf{N}_o{}^3$ *верно равенство*

$$\sum_{i \in \mathbf{Z}} C(r,i)(-1)^i V(n,k+i) = (-1)^r V(n-r,k). \tag{8.4.20}$$

Доказательство. В силу линейности трансформации Тейлора

$$\sum_{i \in \mathbf{Z}} C(r,i)(-1)^i V(n,k+1) = \sum_{i=0}^{r} C(r,i)(-1)^i \cot \left((1+x)^{k+i} \ln(1+x); x; n \right) =$$

$$\cot \left(\left(\sum_{i=1}^{n} C(r,i)(-1)^i (1+x)^i \right) (1+x)^k \ln(1+x); x; n \right) =$$

$$\cot \left((-x)^r (1+x)^k \ln(1+x); x; n \right) = (-1)^r \cot \left((1+x)^k \ln(1+x); x; n-r \right) =$$

$$(-1)^r V(n-r,k). \quad \diamondsuit$$

8.4.4 Сумма произведений вида $C \cdot C \cdot V$.

В этом пункте мы вычислим две суммы специального вида.

Лемма 8.4.5 *При* $(p, q, r, n) \in \mathbf{N}_o{}^4$ *и* $n - 1 \geq \min\{r, q\}$, $q \geq p$ *для суммы*

$$S(p, q, r, n) \equiv \sum_{i \in \mathbf{Z}} C(p, q - i) C(r, i) V(n, i) \tag{8.4.21}$$

верно равенство

$$S(p, q, r, n) = \begin{cases} C(n-1-q, r+p-q)V(n, r)(-1)^{q-p+r}, & n - 1 \geq \max\{r + p, q - p\}; \\ C(r + p - n, r + p - q)V(n, r), & \max\{r, q - p\} \leq n - 1 < r + p; \\ 0, & r \leq n - 1 < q - p; \\ C(r, n)V(r + p - q, r + p - n), & q \leq n - 1 < r. \end{cases} \tag{8.4.22}$$

Доказательство. В сумме $S(p, q, r, n)$ достаточно проводить суммирование лишь по тем значениям индекса $i \in \mathbf{Z}$, при которых $C(p, q - i) \neq 0$ и $C(n, i) \neq 0$. Условие $C(p, q - i) \neq 0$ эквивалентно условию

$$(p \geq q - i) \bigwedge (q - i \geq 0),$$

т.е. эквивалентно условию

$$i \in [q - p, q]. \tag{8.4.23}$$

А условие $C(r, i) \neq 0$ эквивалентно условию

$$i \in [0, r]. \tag{8.4.24}$$

Введём обозначения

$$\alpha \equiv \max\{0, q - p\}, \tag{8.4.25}$$

$$\beta \equiv \min\{r, q\}, \tag{8.4.26}$$

тогда для суммы (8.4.21) получаем

$$S(p, q, r, n) = \sum_{i=\alpha}^{\beta} C(p, q - i) C(r, i) V(n, i). \tag{8.4.27}$$

В силу условия леммы $n-1 \geq \min\{r, q\}$ при $i \in [\alpha, \beta]$ величины $C(p, q-i)$, $C(r, i)$ и $V(n, i)$ в (8.4.27) допускают представление через факториалы вида (8.3.19) и (8.4.10). Поэтому, при $i \in [\alpha, \beta]$ верно равенство

$$C(r, i)V(n, i) = \frac{r!}{i!(r - i)!}(-1)^{n-1-i}\frac{i!(n - 1 - i)!}{n!} = (-1)^{n-1-i}\frac{n!}{n!}\frac{(n - 1 - i)!}{(r - 1)!}. \tag{8.4.28}$$

Далее рассматриваем два подслучая: I. $N - 1 \geq r$; II. $N - 1 < r$.

I. $n - 1 \geq r$. В этом случае соотношение (8.4.28) перепишем в виде

$$C(r, i)V(n, i) = (-1)^{n-1-r}\frac{r!(n - 1 - r)!}{n!} \cdot \frac{(n - 1 - i)!}{(r - i)!(n - 1 - r)!}(-1)^{r-i} = \tag{8.4.29}$$

$$V(n, r)C(n - 1 - i, n - 1 - r)(-1)^{r-i}.$$

Подставляя (8.4.29) в сумму (8.4.27), получаем

$$S(p,q,r,n) = \left(\sum_{i=\alpha}^{\beta} C(p,q-i)(-1)^i C(n-1-i,n-1-r) \right) (-1)^r V(n,r). \tag{8.4.30}$$

Рассмотрим сумму

$$Q \equiv \sum_{i=\alpha}^{\beta} C(p,q-i)(-1)^i C(n-1-i,n-1-r). \tag{8.4.31}$$

Она содержит ненулевые слагаемые лишь, когда выполнены условия

$$(i \in [q-p,q]) \wedge (i \leq r),$$

т.е. при

$$i \in [q-p,\beta]. \tag{8.4.32}$$

В силу условия леммы $q \geq p$ сегменты $[\alpha,\beta]$ и $[q-p,\beta]$ совпадают, поэтому

$$q = \sum_{i\in\mathbf{Z}} C(p,q-i)(-1)^i C(n-1-i,n-1-r) = \tag{8.4.33}$$

$$(-1)^{p-q} \sum_{i\in\mathbf{Z}} C(p,p-q+i) C(n-1+p-q-(p-q+i),n-1-r)(-1)^{p-q+i} =$$

$$(-1)^{q-p} \sum_{j\in\mathbf{Z}} C(p,j) C((n-1+p-q)-j,n-1-r)(-1)^j.$$

В силу леммы 8.3.4 получаем для суммы Q:

$$Q = \begin{cases} C(n-1-q,r+p-q)(-1)^{q-p} & , \ n-1 \geq \max\{r+p,q-p\}; \\ C(p+r-n,r+p-q)(-1)^r & , \ q-p \leq n-1 < r+p; \\ 0 & , \ n-1 < q-p. \end{cases} \tag{8.4.34}$$

В случае I получаем для суммы S выражение

$$S = V(n,r) \begin{cases} C(n-1-q,r+p-q)(-1)^{q-p+r} & , \ n-1 \geq \max\{r+p,q-p\}; \\ C(p+r-n,p+r-q) & , \ q-p \leq n-1 < r+p; \\ 0 & , \ n-1 < q-p. \end{cases} \tag{8.4.35}$$

II. $n-1<r$. В этом случае соотношение (8.4.28) перепишем в виде

$$C(r,i)V(n,i) = \frac{r!}{n!(r-n)!}(-1)^{r-i-1-(r-n)} \frac{(n-1-i)!(r-n)!}{(r-i)!} = C(r,n)V(r-i,r-n). \tag{8.4.36}$$

Сумма $S(p,q,r,n)$ в этом случае принимает вид:

$$S(p,q,r,n) = C(r,n) \sum_{i=\alpha}^{\beta} C(p,q-i) V(r-i,r-n). \tag{8.4.37}$$

Условие

$$(C(p,q-i) \neq 0) \wedge (V(r-i,r-n) \neq 0)$$

принимает вид

$$(i \in [q-p, q]) \wedge (i \leq r)$$

или

$$i \in [q-p, \beta] = [\alpha, \beta]. \tag{8.4.38}$$

Поэтому выражение (8.4.37) можно записать в виде

$$S(p, q, r, n) = C(r, n) \sum_{i \in \mathbf{Z}} C(p, q-i) V(r-i, r-n) = \tag{8.4.39}$$

$$C(r, n) \sum_{i \in \mathbf{Z}} C(p, p-q+i) V(r-i, r-n) = C(r, n) \sum_{j \in \mathbf{Z}} C(p, j) V(r-(q-p)-j, r-n).$$

В силу леммы 8.4.3 получаем

$$S(p, q, r, n) = C(r, n) V(r+p-q, r+p-n). \tag{8.4.40}$$

Объединяя формулы (8.4.35) и (8.4.40), получаем формулу (8.4.22). $\diamondsuit$

Лемма 8.4.6 *При* $(r, n, k, t) \in \mathbf{N}_o{}^4$ *и* $n-1-t \geq \min\{r, n-k\}$ *для суммы*

$$S(r, n, k, t) \equiv \sum_{i \in \mathbf{Z}} C(r, i) C(n-i, k) V(n-i, t) \tag{8.4.41}$$

верно равенство

$$S(r, n, k, t) = \begin{cases} 0 & , \quad k-1 \geq \max\{n, t\}; \\ V(k, t) C(n-(t+1)-r, n-k)(-1)^{n-k} & , \quad n > k-1 \geq t+r; \\ V(k, t) C(r+t-k, n-k) & , \quad \min\{n, r+t\} > k-1. \end{cases} \tag{8.4.42}$$

Доказательство. Сумма $S(r, n, k, t)$ вида (8.4.41) имеет ненулевые сомножители $C(r, i)$ и $C(n-i, k)$ лишь при условии

$$(i \in [0, r]) \wedge (i \leq n-k) \tag{8.4.43}$$

или эквивалентно при

$$i \in [0, \beta], \tag{8.4.44}$$

где

$$\beta \equiv \min\{r, n-k\}. \tag{8.4.45}$$

Поэтому сумму S можно представить в виде

$$S = \sum_{i=0}^{\beta} C(r, i) C(n-i, k) V(n-i, t). \tag{8.4.46}$$

Из условия леммы $n-1-t \geq \min\{r, n-k\}$ следует, что если $i \in [0, \beta]$, то

$$n-1-i \geq n-1-\beta = n-1-\min\{r, n-k\} \geq t,$$

поэтому при $i \in [0, \beta]$ можно пользоваться представлением чисел $C(r, i)$, $C(n-i, k)$ и $V(n-i, t)$ через факториалы вида (8.3.19) и (8.4.10).

Рассмотрим при $i \in [0, \beta]$произведение

$$C(n-i,k)V(n-i,t) = \frac{(n-i)!}{k!(n-i-k)!}(-1)^{n-i-t-1}\frac{t!(n-i-t-1)!}{(n-i)!} = \tag{8.4.47}$$

$$\frac{t!}{k!} \cdot \frac{(n-t-1-i)!}{(n-k-i)!}(-1)^{n-t-1-i}.$$

Далее рассматриваем два подслучая: $I.\ n-1-t \geq n-k$; $II.\ n-1-t < n-k$.

$I.\ n-1-t \geq n-k$. В этом подслучае формула (8.4.47) приводится к виду

$$C(n-i,k)V(n-i,t) = (-1)^{k-t-1}\frac{t!(k-t-1)!}{k!} \cdot \frac{(n-t-1-i)!}{(n-k-i)!(k-(t+1))!}(-1)^{n-i-k} = \tag{8.4.48}$$

$$V(k,t)(-1)^{n-k-i}C(n-t-1-i, k-(t+1)).$$

Подставляем (8.4.48) в (8.4.46) и приводим сумму S к виду

$$S = V(k,t)(-1)^{n-k}\sum_{i=0}^{\beta}(-1)^i C(r,i)C(n-t-1-i, k-(t+1)). \tag{8.4.49}$$

Сомножители $C(r,i)$ и $C(n-t-1-i, k-(t+1))$ отличны от нуля одновременно лишь когда

$$(i \in [0,r]) \wedge (i \leq n-k),$$

т.е. лишь при $i \in [0, \beta]$. Поэтому

$$S = V(k,t)(-1)^{n-k}\sum_{i\in\mathbf{Z}} C(r,i)(-1)^i C(n-(t+1)-i, k-(t+1)). \tag{8.4.50}$$

Используя лемму 8.3.4, получаем

$$S = V(k,t)(-1)^{n-k}\left\{\begin{array}{lcl} C(n-(t+1)-r, n-k) & , & k-(t+1) \geq r; \\ C(r-k+t, n-k)(-1)^{n-k} & , & k-(t+1) < r. \end{array}\right. \tag{8.4.51}$$

$II.\ n-(t+1) < n-k$. Этот случай невозможен в силу условия леммы $n-(t+1) \geq \min\{r, n-k\}$.

Заметим, что в рассуждениях далее формулы (8.4.45) мы предполагали, что $n-k \in \mathbf{N}_o$, так как при $n-k < 0$ из формул (8.4.41 - 8.4.45) следует, что $S(r,n,k,t) = 0$.

Итак, формула (8.4.51)доказывает лемму. $\diamondsuit$

Замечание 8.4.1 *При* $(r,n,k,t) \in {\mathbf{N}_o}^4$ *соотношение* $S(r,n,k,t) = 0$ *верно при* $n < k$ *без дополнительных ограничений, как это следует из начальной части доказательства леммы.*

Замечание 8.4.2 *Соотношение* $n-t-1 \geq \min\{r, n-k\}$ *эквивалентно соотношению* $t \leq \max\{n-1-r, k-1\}$.

8.4.5 Основная комбинаторная теорема.

В следующей главе мы будем опираться на свойство комбинаторных сумм, которое мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 8.4.1 *При выполнении условий:* $n \in \mathbf{N}$, $k \in \overline{0, n-1}$, $r \in \overline{0, n-1}$, $t \in \overline{\max\{0, r-k\}, \min\{r, n-1-k\}}$ *— верно равенство*

$$(-1)^k V(n,r) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} C(n-1-r, i) C(n-1-i, n-1-k) V(n-i, t). \tag{8.4.52}$$

Доказательство. В сумме

$$S(n,r,k,t) \equiv \sum_{i \in \mathbf{Z}} C(n-1-r, i) C(n-1-i, n-1-k) V(n-i, t) \tag{8.4.53}$$

достаточно провести суммирование по значениям индекса $i \in \mathbf{Z}$, при которых $C(n-1-r, i) \neq 0$ и $C(n-1-i, n-1-k) \neq 0$ или эквивалентно при

$$(i \in [0, n-1-r]) \wedge (i \leq k).$$

Обозначим $\beta \equiv \min\{k, n-1-r\}$, тогда сумму (8.4.53) можно записать в виде

$$S(n,r,k,t) = \sum_{i=0}^{\beta} C(n-1-r, i) C(n-1-i, n-1-k) V(n-i, t). \tag{8.4.54}$$

Если $i \in \overline{0, \beta}$, то

$$n-i-1 \geq n-1-\beta = n-1-\min\{k, n-1-r\} = \max\{n-1-k, r\} \geq \min\{n-1-k, r\} \geq t,$$

поэтому, при $i \in \overline{0, \beta}$, можно использовать для величин $C(n-1-r, i)$, $C(n-1-i, n-1-k)$, $V(n-i, t)$ их представления через факториалы вида (8.3.19) и (8.4.10).

Введём обозначения

$$\gamma \equiv \max\{0, r-k\}, \tag{8.4.55}$$

$$\theta \equiv \min\{r, n-1-k\}. \tag{8.4.56}$$

В силу ограничений теоремы $0 \leq \gamma \leq \theta \leq n-1$.

Вычислим величину $S(n,r,k,\theta)$. Рассмотрим два подслучая: *I.* $\theta = r \leq n-1-k$; *II.* $\theta = n-1-k < r$.

I. $\theta = r \leq n-1-k$. В этом подслучае

$$S(n,r,k,\theta) = \sum_{i=0}^{\beta} C(n-1-r, i) C(n-1-i, n-1-k) V(n-i, r). \tag{8.4.57}$$

Рассмотрим произведение при $i \in \overline{0, \beta}$:

$$C(n-1-r, i) V(n-i, r) = \frac{(n-1-r)!}{i!(n-1-r-i)!} (-1)^{n-i-1-r} \frac{r!(n-i-r-1)!}{(n-i)!} = \tag{8.4.58}$$

$$(-1)^{n-r-1} \frac{(n-1-r)! r!}{n!} \cdot \frac{n!}{i!(n-i)!} (-1)^i = V(n,r) C(n,i) (-1)^i.$$

Подставим (8.4.58) и (8.4.57) и получим

$$S(n,r,k,\theta) = V(n,r)\sum_{i=0}^{\beta} C(n,i)(-1)^i C(n-1-i,n-1-k). \qquad (8.4.59)$$

Слагаемые в последней сумме отличны от нуля лишь при

$$(i \in [0,n]) \wedge (i \leq k),$$

т.е. при $i \in \overline{0,k}$. Но в подслучае I верно $k \leq n-1-r$ и $\beta = k$, т.е. $\overline{0,\beta} = \overline{0,k}$. Итак, в сумме (8.4.59) можно распространить суммирование на $i \in \mathbf{Z}$:

$$S(n,r,k,\theta) = V(n,r)\sum_{i\in\mathbf{Z}} C(n,i)(-1)^i C(n-1-i,n-1-k).$$

В силу леммы 8.3.4 получаем

$$S(n,r,k,\theta) = V(n,r)\left\{\begin{array}{lll} C(n-1-n,k) & , & n-1-k \geq n; \\ C(n-n+k,k)(-1)^k & , & n-1-k < n; \end{array}\right.$$

т.е. с учётом ограничений на значения индексов получаем

$$S(n,r,k,\theta) = (-1)^k V(n,r). \qquad (8.4.60)$$

II. $\theta = n-1-k < r$. В этом подслучае

$$S(n,r,k,\theta) = \sum_{i=0}^{\beta} C(n-1-r,i)C(n-1-i,n-1-k)V(n-i,n-1-k). \qquad (8.4.61)$$

Рассмотрим произведение при $i \in \overline{0,\beta}$:

$$C(n-1-i,n-1-k)V(n-i,n-1-k) = \qquad (8.4.62)$$

$$\frac{(n-1-i)!}{(n-1-k)!(k-i)!}(-1)^{n-i-1-(n-1)+k}\frac{(n-i-1-(n-1)+k)!(n-1-k)!}{(n-i)!} =$$

$$V(n-i,0)(-1)^{k+1-n}.$$

Подставим (8.4.62) в (8.4.61) и получим

$$S(n,r,k,\theta) = (-1)^{k-(n-1)}\sum_{i=0}^{\beta} C(n-1-r,i)V(n-i,0). \qquad (8.4.63)$$

Величина $C(n-1-r,i) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $i \in \overline{0,(n-1-r)}$, но в подслучае II верно $\beta = n-1-r$, поэтому сумму в (8.4.63) можно распространить на $i \in \mathbf{Z}$:

$$S(n,r,k,\theta) = (-1)^{k-(n-1)}\sum_{i\in\mathbf{Z}} C(n-1-r,i)V(n-i,0). \qquad (8.4.64)$$

Согласно лемме (8.4.3) получаем

$$S(n,r,k,\theta) = (-1)^{k-(n-1)}V(n,n-1-r) = (-1)^k V(n,r). \qquad (8.4.65)$$

Итак, мы убедились, что $S(n,r,k,\theta) = (-1)^k V(n,r)$. В случае $\gamma = \theta$ теорема доказана. В случае $\gamma < \theta$ покажем теперь, что

$$S(n,r,k,t) = S(n,r,k,t-1) \tag{8.4.66}$$

если $t > \gamma$.

Рассмотрим разницу

$$S(n,r,k,t) - S(n,r,k,t-1) = \tag{8.4.67}$$

$$\sum_{i=0}^{\beta} C(n-1-r,i)C(n-1-i,n-1-k)(V(n-i,t) - V(n-i,t-1)).$$

Если $t > \gamma$, то $t-1 \geq \gamma \geq 0$ и в силу основного свойства чисел Винокурова (лемма 8.4.1) верно

$$V(n-i,t) - V(n-i,t-1) = V(n-i-1,t-1). \tag{8.4.68}$$

Подставим (8.4.67) в (8.4.68) и распространим суммирование на $i \in \mathbf{Z}$:

$$S(n,r,k,t) - S(n,r,k,t-1) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} C(n-1-r,i)C(n-1-i,n-1-k)V(n-1-i,t-1). \tag{8.4.69}$$

Последняя сумма вычислена нами в лемме 8.4.6 при выполнении неравенства

$$t-1 \leq \max\{n-1-(n-1-r)-1, n-1-k-1\} = \max\{r, n-1-k\} - 1.$$

Но по условию теоремы

$$t \leq \min\{r, n-1-k\} \leq \max\{r, n-1-k\}.$$

Итак, лемма 8.4.6 применима, и для индексов имеет место соотношение:

$$\min\{n-1, n-1-r+t-1\} > n-1-k-1, \tag{8.4.70}$$

эквивалентное соотношению

$$\min\{0, t-(r+1)\} > -(k+1). \tag{8.4.71}$$

Так как $k \geq 0$, для выполнения (8.4.71) достаточно, чтобы

$$(t-(r+1) > -(k+1)) \Leftrightarrow (t > r-k).$$

Неравенство $t > r-k$ выполнено, ибо мы рассматриваем случай $t > \theta = \max\{0, r-k\}$. Согласно лемме 8.4.6 получаем

$$S(n,r,k,t) - S(n,r,k,t-1) = \tag{8.4.72}$$

$$V(n-1-k,t-1)C(n-1-r+t-1-(n-1-k), n-1-(n-1-k)) =$$
$$V(n-1-k,t-1)C(k+t-r-1,k).$$

Но

$$k+t-r-1 < k,$$

ибо по условию на индексы

$$t \leq r < r+1,$$

поэтому $C(k+t-r-1,k) = 0$ и выполнено равенство (8.4.66). $\diamondsuit$

8.4.6 Таблица чисел Винокурова.

Приведём таблицу чисел $V(n,k)$ для дальнейшего употребления для значений аргумента $n \in \overline{1,7}$, $k \in \overline{0,n-1}$, основываясь на формуле (8.4.16).

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
1	1						
2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$				
4	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$			
5	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		
6	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$	
7	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{42}$	$\frac{1}{105}$	$-\frac{1}{140}$	$\frac{1}{105}$	$-\frac{1}{42}$	$\frac{1}{7}$

Таблица 8.4.1: Значения чисел $V(n,k)$ при $0 \le k \le n-1 \le 6$.

§8.5 Функционалы подъёмов и спадов, группа перестановок P_n

8.5.1 Определение и свойства функционалов $u(f)$, $h(f)$, $\operatorname{rav}(f)$.

Упорядоченным множеством Y мы называем линейно упорядоченное множество Y, т.е. множество, на котором введено отношение порядка, так что для любых двух элементов $a, b \in Y$ $a \neq b$ выполнено $a < b$ или $b > a$, причём совместное выполнение этих соотношений невозможно и если $a < b$ и $b < c$, то выполнено и $a < c$.

Пусть $f : \overline{1,n} \to Y$ отображение упорядоченного множества $\overline{1,n}$ в упорядоченное множество Y. Сравнивая значения $f(i)$ и $f(i+1)$, мы говорим, что имеет место: *подъем*, если $f(i) < f(i+1)$; *спад*, если $f(i) > f(i+1)$; *застой*, если $f(i) = f(i+1)$. Пусть i пробегает значения $1, 2, \dots n-1$, обозначим через $u(f)$ — число подъёмов, через $h(f)$ — число спадов, через $\operatorname{rav}(f)$ — число застоев функции f. По построению числа $u(f)$, $h(f)$, $\operatorname{rav}(f)$ принимают значения $0, 1, 2, \dots n-1$. При $n = 1$ по определению полагаем $u(f) = h(f) = \operatorname{rav}(f) \equiv 0$. По определению величин $u(f)$, $h(f)$, $\operatorname{rav}(f)$ справедливо равенство

$$u(f) + h(f) + \operatorname{rav}(f) = n - 1. \tag{8.5.1}$$

Отображение $f : X \to Y$ упорядоченного множества X в упорядоченное множество Y мы называем монотонным (антимонотонным), если для любых $a, b \in X$, таких что $a < b$ следует $f(a) < f(b)$ $(f(a) > f(b))$. Монотонное и антимонотонное отображения инъективны. Монотонную функцию мы называем монотонным изоморфизмом.

Далее в этом пункте X — конечное упорядоченное множество, Y — упорядоченное множество, $f : X \to Y$ отображение.

Для любого конечного упорядоченного множества X из n элементов существует единственный монотонный изоморфизм $\varphi_X : \overline{1,n} \to X$. Для отображения $f\varphi_X : \overline{1,n} \to Y$ мы уже определили функционалы подъёмов, спадов и застоев.

Определение 8.5.1 *Полагаем*

$$u(f) \equiv u(f\varphi_X), h(f) \equiv h(f\varphi_X), \operatorname{rav}(f) \equiv \operatorname{rav}(f\varphi_X). \tag{8.5.2}$$

В силу единственности монотонного изоморфизма φ_X функционалы $u(f)$, $h(f)$, $\operatorname{rav}(f)$ однозначно определены формулой (8.5.2). Функционалы $u(f)$, $h(f)$, $\operatorname{rav}(f)$ мы назовём функционалами порядка.

Рассмотрим сначала, при каких преобразованиях множества определения и множества значений функционалы $u(f)$, $h(f)$, $\operatorname{rav}(f)$ не изменяются.

Утверждение 8.5.1 *Если отображение $g : X' \to X$ упорядоченного множества X' на конечное упорядоченное множество X — монотонный изоморфизм, то*

$$u(fg) = u(f), h(fg) = h(f), \operatorname{rav}(fg) = \operatorname{rav}(f). \tag{8.5.3}$$

Доказательство. Пусть $\varphi_{X'} : \overline{1,n} \to X'$ и $\varphi_X : \overline{1,n} \to X$ монотонные изоморфизмы, тогда и отображение $g\varphi_{X'} : \overline{1,n} \to X$ монотонный изоморфизм, и в силу единственности монотонного изоморфизма $\varphi_X : \overline{1,n} \to X$, получаем $g\varphi_{X'} = \varphi_X$. Тогда

$$u(f) \equiv u(f\varphi_X) = u(fg\varphi_{X'}) \equiv u(fg)$$

и аналогично для функционалов $h(fg)$ и $\operatorname{rav}(fg)$. ♢

Утверждение 8.5.2 *Если $g : Y \to Y'$ монотонное отображение упорядоченных множеств, то*

$$u(gf) = u(f),\ h(gf) = h(f),\ \operatorname{rav}(gf) = \operatorname{rav}(f). \tag{8.5.4}$$

Доказательство. В силу монотонности отображения g сравнение величин $gf\varphi_X(i)$ и $gf\varphi_X(i+1)$ даёт тот же результат, что и сравнение величин $f\varphi_X(i)$ и $f\varphi_X(i+1)$. ♢

Пусть $i : f(X) \to Y$ тождественное вложение подмножества $f(X) \subset Y$ во множество Y, тогда существует единственное отображение $\overline{f} : X \to f(X)$, такое, что $f = i\overline{f}$. Согласно утверждению 8.5.2 получаем.

Утверждение 8.5.3 $u(f) = u(\overline{f})$, $h(f) = h(\overline{f})$, $\operatorname{rav}(f) = \operatorname{rav}(\overline{f})$.

Из утверждений 8.5.1 и 8.5.2 справедлив вывод.

Лемма 8.5.1 . *Функционалы $u(f)$, $h(f)$, $\operatorname{rav}(f)$ не изменяются при монотонных изоморфизмах X или Y .*

Кроме того, утверждения 8.5.1 - 8.5.3 позволяют нам сводить вычисление функционалов $u(f)$, $h(f)$, $\operatorname{rav}(f)$ для случая произвольных упорядоченных множеств к случаю, когда отображение f отображает множество $\overline{1,n}$ в себя.

Для антимонотонного случая справедливы следующие утверждения.

Утверждение 8.5.4 *Если $p : X' \to X$ антимонотонная биекция, то*

$$u(fp) = h(f),\ h(fp) = u(f),\ \operatorname{rav}(fp) = \operatorname{rav}(f). \tag{8.5.5}$$

Доказательство. По определению функционалы порядка на функциях f и $f\varphi_X$ совпадают и на функциях fp и $fp\varphi_X$ совпадают. Далее, $fp\varphi_{X'} = f\varphi_X(\varphi_X^{-1}p\varphi_{X'})$, причём отображение $\psi \equiv \varphi_X^{-1}p\varphi_{X'}$ есть антимонотонная биекция $\psi : \overline{1,n} \to \overline{1,n}$, поэтому $\psi(i) = n - i + 1$, $i \in \overline{1,n}$. Сравнение величин $fp\varphi_{X'}(i)$ и $fp\varphi_{X'}(i+1)$, $i \in \overline{1,n-1}$ есть сравнение величин $f\varphi_X(\psi(i))$ и $f\varphi_X(\psi(i+1))$, т.е. величин $f\varphi_X(n-i+1)$ и $f\varphi_X(n-i)$, $i \in \overline{1,n-1}$, откуда следуют равенства (8.5.5). $\diamondsuit$

Утверждение 8.5.5 *Если отображение $q : Y \to Y'$ антимонотонно, то*

$$u(qf) = h(f),\ h(qf) = u(f),\ \operatorname{rav}(qf) = \operatorname{rav}(f).$$

Доказательство. В силу антимонотонности отображения q сравнение $qf\varphi_X(i)$ и $qf\varphi_X(i+1)$ имеет противоположный смысл сравнению $f\varphi_X(i)$ и $f\varphi_X(i+1)$. $\diamondsuit$

Перейдем к изучению свойств функционалов порядка. Рассмотрим связь значений функционалов порядка для исходной функции и её сужений на подмножество.

Лемма 8.5.2 *Пусть $X = A \cup B$, где $A \cap B = \emptyset$, причём множество X состоит из n элементов, множество B — из $m < n$ элементов. Тогда справедливы неравенства:*

$$u(f\big|_A) \le u(f) \le u(f\big|_A) + m, \tag{8.5.6}$$

$$h(f\big|_A) \le h(f) \le h(f\big|_A) + m, \tag{8.5.7}$$

$$|\operatorname{rav}(f) - \operatorname{rav}(f\big|_A)| \le m. \tag{8.5.8}$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение леммы для случая $X = \overline{1,n}$ и $m = 1$. В этом случае множество X получается добавлением к множеству A одной точки $k \in \overline{1,n}$. Если $k = 1$ или $k = n$, то добавление точки k может лишь увеличить на 1 значения функционалов порядка, т.е. тогда неравенства (8.5.6 - 8.5.8) верны. Если $k \in \overline{2,(n-1)}$, то мы проводим при вычислении функционалов порядка для функции $f\big|_A$ те же сравнения, что и при вычислении функционалов порядка для функции f, кроме сравнения $f(k-1)$ и $f(k+1)$, которые заменяются парой сравнений $f(k-1)$ и $f(k)$, а также $f(k)$ и $f(k+1)$.

Рассмотрим три случая: $1) f(k-1) < f(k+1),\ 2) f(k-1) > f(k+1),\ 3) f(k-1) = f(k+1)$.

В случаях 1) и 2) одно из сравнений $f(k-1)$ и $f(k)$, а также $f(k)$ и $f(k+1)$ должно иметь тот же смысл, что и сравнение $f(k-1)$ и $f(k+1)$, поэтому будут выполнены неравенства (8.5.6 - 8.5.8). В случае 3) функционалы $u(f)$ и $h(f)$ могут лишь увеличиваться на 1 по сравнению с $u(f\big|_A)$ и $h(f\big|_A)$ соответственно, а функционал застоя может или уменьшиться на 1 или увеличиться на 1. И в этом случае неравенства (8.5.6 - 8.5.8) выполнены. $\diamondsuit$

Следствие 8.5.1 *Если в k точках значения функции f совпадают, то*

$$u(f) \le n-k,\ h(f) \le n-k,\ |\operatorname{rav}(f) - (k-1)| \le n-k. \tag{8.5.9}$$

Достаточно для доказательства объединить эти k точек во множество A и применить лемму 8.5.2.

Рассмотрим теперь случай, когда выбор подмножеств A и B согласован с порядком.

Лемма 8.5.3 *Пусть* $a \in X$, $A = \{x \in X \;\Big|\; x \le a\}$, $B = \{x \in X \;\Big|\; x \ge a\}$, *тогда справедливы равенства*

$$u(f\Big|_A) + u(f\Big|_B) = u(f), \tag{8.5.10}$$

$$h(f\Big|_A) + h(f\Big|_B) = h(f), \tag{8.5.11}$$

$$\mathrm{rav}\,(f\Big|_A) + \mathrm{rav}\,(f\Big|_B) = \mathrm{rav}\,(f). \tag{8.5.12}$$

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно рассмотреть случай $X = \overline{1,n}$, но в этом случае свойства (8.5.10 -8.5.12) очевидны. $\diamondsuit$

Проведём теперь оценку функционалов порядка для функции fg^{-1} через функционалы порядка для функции f.

Лемма 8.5.4 *Пусть* $a \in X$, $A = \{x \in X \;\Big|\; x \le a\}$, $B = \{x \in X \;\Big|\; x \ge a\}$ *и* $g : X \to X$ *биекция, такая, что отображение* $g\Big|_A$ *антимонотонно, а отображение* $g\Big|_B$ *монотонно, тогда справедливы неравенства*

$$\max\{k - \mathrm{rav}\,(f\Big|_A), u(f)\} \le u(fg^{-1}) + u(f\Big|_A) \le \min\{n-1-\mathrm{rav}\,(f\Big|_A), u(f)+k\}, \tag{8.5.13}$$

$$\max\{k - \mathrm{rav}\,(f\Big|_A), h(f)\} \le h(fg^{-1}) + h(f\Big|_A) \le \min\{n-1-\mathrm{rav}\,(f\Big|_A), h(f)+k\}. \tag{8.5.14}$$

где n *— число элементов множества* X, $(k+1)$ *— число элементов множества* A.

Доказательство проведём для неравенств (8.5.13), ибо доказательство неравенств (8.5.14) аналогично. Согласно лемме 8.5.2 справедливы неравенства

$$u(fg^{-1}\Big|_{g(A)}) \le u(fg^{-1}) \le u(fg^{-1}\Big|_{g(A)}) + n - (k+1), \tag{8.5.15}$$

$$u(fg^{-1}\Big|_{g(B)}) \le u(fg^{-1}) \le u(fg^{-1}\Big|_{g(B)}) + k. \tag{8.5.16}$$

Согласно утверждению 8.5.1 верно

$$u(fg^{-1}\Big|_{g(B)}) = u(fg^{-1}g\Big|_B) = u(f\Big|_B), \tag{8.5.17}$$

а согласно утверждению 8.5.3 верно

$$h(fg^{-1}\Big|_{g(A)}) = h(fg^{-1}g\Big|_A) = h(f\Big|_A). \tag{8.5.18}$$

Прибавим к неравенствам (8.5.15, 8.5.16) величину $u(f\Big|_A)$ и с учётом (8.5.17, 8.5.18) получим

$$u(f\Big|_A) + \max\{h(f\Big|_A), u(f\Big|_B)\} \le u(fg^{-1}) + u(f\Big|_A) \le \tag{8.5.19}$$

$$u(f\Big|_A) + \min\{h(f\Big|_A) + n - 1 - k, u(f\Big|_B) + k\}.$$

С учётом равенства (8.5.1) и леммы 8.5.3 получаем неравенство (8.5.13). $\diamondsuit$

8.5.2 Функционалы порядка $u(\xi)$, $h(\xi)$, $\operatorname{rav}(\xi)$ на множестве Y^n .

В этом пункте мы рассматриваем отображения $f : \overline{1,n} \to Y$ множества n натуральных чисел $\overline{1,n}$ в упорядоченное множество Y. Отображение f можно задать совокупностью его значений в точках $1, 2, \dots n$, т.е. набором $(f(1), f(2), \dots f(n)) \equiv (\xi(1), \xi(2), \dots \xi(n)) \equiv \xi \in Y^n$. Итак, отображение f можно рассматривать как элемент $\xi \in Y^n$. Таким образом, для любого $\xi \in Y^n$ определены функционалы порядка

$$u(\xi) \equiv u(f),\ h(\xi) \equiv h(f),\ \operatorname{rav}(\xi) \equiv \operatorname{rav}(f). \tag{8.5.20}$$

При таком определении функционалов $u(\xi)$, $h(\xi)$, $\operatorname{rav}(\xi)$ лемма 8.5.3 приводит к следующему свойству аддитивности

$$u(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \sum_{i=1}^{n-1} u(\xi_i, \xi_{i+1});\ h(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \sum_{i=1}^{n-1} h(\xi_i, \xi_{i+1}); \tag{8.5.21}$$

$$\operatorname{rav}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{rav}(\xi_i, \xi_{i+1}).$$

Согласно следствию 8.5.1, если $\xi_1 = \xi_n$, то верны неравенства при $n \geq 2$

$$u(\xi) \leq n-2,\ h(\xi) \leq n-2. \tag{8.5.22}$$

Если $\xi_1 = \xi_n$ и $\operatorname{rav}(\xi) = 0$, то при $n \geq 3$ верны неравенства

$$1 \leq u(\xi) \leq n-2,\ 1 \leq h(\xi) \leq n-2, \tag{8.5.23}$$

следующие из неравенств (8.5.22) и неравенства (8.5.1), которое в этом случае принимает вид

$$u(\xi) + h(\xi) = n-1 \tag{8.5.24}$$

Если отображение f инъективно, то для любого подмножества $X \subset \overline{1,n}$ будет $\operatorname{rav}(f\big|_X) = 0$ и, в частности верно (8.5.24).

В случае $n = 2$ и $\operatorname{rav}(\xi) = 0$, т.е. $\xi_1 \neq \xi_2$ справедливы простейшие соотношения

$$u(\xi_1, \xi_2) + h(\xi_1, \xi_2) = 1, \tag{8.5.25}$$

$$u(\xi_1, \xi_2) = h(\xi_2, \xi_1). \tag{8.5.26}$$

8.5.3 Группа перестановок P_n.

Множество всех биекций $f : \overline{1,n} \to \overline{1,n}$ множества $\overline{1,n}$ на себя мы называем группой перестановок и обозначаем P_n (в литературе обычно называют эту группу симметричной группой и обозначают S_n). Итак, каждое отображение $f \in P_n$ по определению инъективно, поэтому $\operatorname{rav}(f) = 0$.

В отличие от функционала "чётность перестановки"функционалы порядка, вообще говоря, не удовлетворяют соотношениям $u(f^{-1}) = u(f)$, $h(f^{-1}) = h(f)$, как показывает следующий пример.

Пример 8.5.1

$n = 4$. Отображение $f \in P_4$ задаётся набором значений $(3, 1, 4, 2)$, отображение f^{-1} — набором значений $(2, 4, 1, 3)$. Тогда $u(f) = 1$, $u(f^{-1}) = 2$.

Рассмотрим теперь различные способы описания отображений $f \in P_n$. Первый способ описания биекции $f : \overline{1,n} \to \overline{1,n}$ — это задание таблицы значений функции f в точках $i = 1, 2, \dots n$, т.е. отображению f сопоставляется n натуральных чисел $f \to (f(1), f(2), \dots f(n)) \equiv (i_1, i_2, \dots i_n)$. Числа $i_1, i_2, \dots i_n$ —перестановка n чисел $1, 2, \dots n$. Второй способ описания — задание обратной к f функции таблицей значений $(j_1, j_2, \dots j_n) \equiv (f^{-1}(1), f^{-1}(2), \dots f^{-1}(n))$. Числа $j_1, j_2, \dots j_n$ также перестановка чисел $1, 2, \dots n$. При этом j_α — номер места, на котором стоит α в строке $(i_1, i_2, \dots i_n)$, соответствующей функции f.

Определим точное антипредставление $Ta : P_n \to O(n)$ группы P_n в ортогональную группу. Сопоставим отображению $f \in P_n$ матрицу $Ta(f)$, у которой в каждой строке с номером α элемент в столбце i_α равен 1, а остальные элементы строки равны нулю, $\alpha = 1, 2, \dots n$. Тождественному отображению $e \in P_n$ будет сопоставлена единичная матрица $E \in O(n)$. В каждом столбце матрицы $Ta(f)$ будет одна и только одна единица, а все остальные элементы — нули. В β-том столбце единица будет стоять в строке с номером j_β, $\beta = 1, 2, \dots n$.

Пусть $\xi \equiv \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$, тогда $Ta(f)\xi = \begin{pmatrix} \xi_{f(1)} \\ \xi_{f(2)} \\ \vdots \\ \xi_{f(n)} \end{pmatrix}$, т.е. матрица $Ta(f)$ — матрица перестановки переменных. Рассмотрим при $f, g \in P_n$ произведение

$$Ta(f)Ta(g)\xi = Ta(f) \begin{pmatrix} \xi_{g(1)} \\ \xi_{g(2)} \\ \vdots \\ \xi_{g(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{g(f(1))} \\ \xi_{g(f(2))} \\ \vdots \\ \xi_{g(f(n))} \end{pmatrix} = Ta(gf)\xi.$$

Мы убеждаемся, что $Ta(gf) = Ta(f)Ta(g)$, т.е. $Ta(f)$ — антипредставление.

По рецепту п. 4.1.6 перейдем от антипредставления к представлению с помощью инволюции $\operatorname{inv} : P_n \to P_n$ вида $\operatorname{inv}(f) = f^{-1}$. Тогда $T(f) \equiv Ta(f^{-1})$ будет представление группы P_n в группе $O(n)$. При этом

$$T(f) = Ta(f^{-1}) = Ta^{-1}(f) = Ta^\top(f),$$

т.е. матрица $T(f)$ получается из матрицы $Ta(f)$ транспонированием. Итак, $T(f) \in O(n)$ матрица, у которой n элементов равны единице, а остальные — нулю. Причём в каждой строке и в каждом столбце стоит один и только один единичный элемент. Число i_α — номер строки единичного элемента в столбце с номером $\alpha \in \overline{1,n}$, число j_β — номер столбца единичного элемента в строке с номером $\beta = 1, 2, \dots n$.

Введём множество

$$Q(e) \equiv \{\xi \in \mathbf{R}^n \mid 0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n\} \tag{8.5.27}$$

и для каждого $f \in P_n$ — множество

$$Q(f) \equiv Ta(f)Q(e). \tag{8.5.28}$$

Пусть точка $\eta \in Q(f)$, — нас интересуют значения функционалов $u(\eta)$ и $h(\eta)$. По определению $\eta = Ta(f)\xi$, где $\xi \in Q(e)$. Отображение $\varphi : \overline{1,n} \to \{\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n\}$ вида $\varphi(i) = \xi(i)$ будет монотонным изоморфизмом. Далее $\eta = Ta(f)\xi = (\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots \xi_{i_n})$, т.е. элемент η, рассматриваемый как отображение $\eta : \overline{1,n} \to \{\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n\}$ является суперпозицией

$$\eta = \varphi \circ f. \tag{8.5.29}$$

Так как φ — монотонный изоморфизм, то по лемме 8.5.1

$$u(\eta) = u(f),\ h(\eta) = h(f). \tag{8.5.30}$$

Вывод 8.5.1 *Если* $\eta \in Q(f)$, *то* $u(\eta) = u(f)$ *и* $h(\eta) = h(f)$.

Рассмотрим функционалы $u(\xi)$, $h(\xi)$, $\operatorname{rav}(\xi)$ при $\xi \in \mathbf{R}^n$, как функции на $\mathbf{R}^n$. Отметим, что эти три функции принимают значения из $\overline{0,(n-1)}$ и однородны нулевой степени однородности, т.е.

$$\forall t \in \mathbf{R}_+\ \forall \xi \in \mathbf{R}^n \ \Big|\ u(t\xi) = u(\xi),\ h(t\xi) = h(\xi),\ \operatorname{rav}(t\xi) = \operatorname{rav}(xi). \tag{8.5.31}$$

Равенства в правой части (8.5.31) следуют из того, что отображение $g_t : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ вида $g_t(\xi) \equiv t\xi$ — монотонный изоморфизм при $t \in \mathbf{R}_+$.

8.5.4 Функции $\operatorname{val} n(\xi)$.

Определим теперь при каждом натуральном числе n функцию $\operatorname{val} n(\xi)$ на $\mathbf{R}^n$ следующей формулой

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^n \ \Big|\ \operatorname{val} n(\xi) \equiv V(n, u(\xi)). \tag{8.5.32}$$

Функция $\operatorname{val} n(\xi)$ принимает на $\mathbf{R}^n$ n значений: $V(n,0), V(n,1), \dots V(n, n-1)$. Согласно свойствам чисел Винокурова — неравенства (8.4.17) справедлива оценка

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^n \ \Big|\ \frac{2^{-(n-1)}}{n} \le |\operatorname{val} n(\xi)| \le \frac{1}{n}. \tag{8.5.33}$$

Согласно предыдущему пункту функция $\operatorname{val} n(\xi)$ обладает также следующими свойствами.

Свойство 8.5.1 *Однородна степени* 0.

$$\forall t \in \mathbf{R}_+\ \forall \xi \in \mathbf{R}^n \ \Big|\ \operatorname{val} n(t\xi) = \operatorname{val} n(\xi). \tag{8.5.34}$$

Свойство 8.5.2 *Не изменяется при добавлении ко всем координатам точки* $\xi \in \mathbf{R}^n$ *одного и того же числа*

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}\ \forall \xi \in \mathbf{R}^n \ \Big|\ \operatorname{val} n(\xi_1 + \lambda, \xi_2 + \lambda, \dots \xi_n + \lambda) = \operatorname{val} n(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n). \tag{8.5.35}$$

Свойство 8.5.3 *Значения функции* $\operatorname{val} n(\xi)$ *в точках* ξ *и* $-\xi$ *связаны следующим образом*

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^n, \operatorname{rav}(\xi) = 0 \ \Big|\ \operatorname{val} n(-\xi) = (-1)^{n-1} \operatorname{val} n(\xi). \tag{8.5.36}$$

Свойство 8.5.3 проверяется следующим образом. Согласно утверждению 8.5.1 верно $u(-\xi) = h(\xi)$. Так как $\operatorname{rav}(\xi) = 0$, то согласно (8.5.1) $h(\xi) = (n-1) - u(\xi)$. Поэтому $\operatorname{val} n(-\xi) = V(n, u(-\xi)) = V(n, (n-1) - u(\xi)) = (-1)^{n-1} V(n, u(\xi)) = (-1)^{n-1} \operatorname{val} n(\xi)$ (мы использовали свойство дополнительности чисел Винокурова из п. 8.4.2).

Заметим, что условие $\operatorname{rav}(\xi) = 0$ выполнено почти всюду в $\mathbf{R}^n$, кроме $(n-1)$-ой гиперплоскости.

§8.6 Вычисление специального интеграла с функцией подъёмов

8.6.1 Интеграл с числами Винокурова.

В этом параграфе наша задача — вычисление следующего интеграла:

$$I \equiv \int\limits_{\Pi_k} \dots \int V(n, m + u(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k))\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_k, \tag{8.6.1}$$

где $\Pi_k \subset \mathbf{R}^k$ единичный куб $\Pi_k = [0,1]^k, k \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}_o, n \in \mathbf{N}$. Так как $V(n,k) = \cot\Big((1+x)^k \ln(1+x); x; n\Big)$, то для интеграла (8.6.1) получаем

$$I = \cot\left((1+x)^m \ln(1+x) \int\limits_{\Pi_k} \dots \int (1+x)^{u(\xi)}\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_k; x; n\right). \tag{8.6.2}$$

Вычисление интеграла (8.6.1) сведено к вычислению интеграла

$$W(x,k) \equiv \int\limits_{\Pi_k} \dots \int (1+x)^{u(\xi)}\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_k. \tag{8.6.3}$$

Так как функция $u(\xi)$ при $\xi \in \mathbf{R}^k$ принимает значение из $\overline{0,(k-1)}$, то $W(x,k)$ - полином степени $k-1$, т.е. $W(n,k) = 0$ при $n \geq k$.

Из формулы (8.6.3) нетрудно вычислить,что

$$W(x,1) = 1, \tag{8.6.4}$$

$$W(x,2) = 1 + \frac{x}{2}. \tag{8.6.5}$$

Кроме того, непосредственно видно, что

$$W(0,k) = 1,\ k \in \mathbf{N}, \tag{8.6.6}$$

$$W(k-1,k) = \frac{1}{k!},\ k \in \mathbf{N}. \tag{8.6.7}$$

Доопределим

$$W(x,0) \equiv 1. \tag{8.6.8}$$

8.6.2 Вычисление $W(x,k)$.

Вычислим коэффициенты многочлена $W(x,k)$.

Лемма 8.6.1 *При $k \in \mathbf{N}$, $n \in \overline{0,k}$ верно*

$$W(n,k) = \cot\left(\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^{k-n}; x; n\right). \tag{8.6.9}$$

Прежде, чем доказывать лемму 8.6.1, вычислим вспомогательный интеграл.

Утверждение 8.6.1 *При $k \in \mathbf{N}$ верно*

$$\int\limits_{\Pi_k}\dots\int u(\xi_1,\xi_2)u(\xi_2,\xi_3)\dots u(\xi_{k-1},\xi_k)\,d\xi_1 d\xi_2\dots d\xi_k = \frac{1}{k!}.$$

Доказательство. Функция $u(\xi_1,\xi_2)u(\xi_2,\xi_3)\dots u(\xi_{k-1},\xi_k)$ равна 1 при $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \dots < \xi_k$ и равна нулю, если хоть одно из этих неравенств не верно, поэтому

$$\int\limits_{\Pi_k}\dots\int u(\xi_1,\xi_2)u(\xi_2,\xi_3)\dots u(\xi_{k-1},\xi_k)\,d\xi_1 d\xi_2\dots d\xi_2 = \int\limits_{Q(e)\cap\Pi_k}\dots\int d\xi_1 d\xi_2\dots d\xi_k = \frac{1}{k!}.\ \diamondsuit$$

Доказательство леммы 1. Введём функцию

$$\psi(x) \equiv \frac{e^x-1}{x} = \sum_{q\in\mathbf{N}_o}\frac{x^q}{(q+1)!}. \tag{8.6.10}$$

При $r \in \mathbf{N}$ верно

$$(\psi(x))^r = \sum_{q_1,q_2,\dots q_r\in\mathbf{N}_o}\frac{x^{q_1+q_2+\dots q_r}}{(q_1+1)!(q_2+1)!\dots(q_n+1)!} =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}x^j \sum_{\substack{q_1,q_2,\dots q_r\in\mathbf{N}_o\\ q_1+q_2+\dots q_r=j}}\frac{1}{(q_1+1)!\dots(q_r+1)!}$$

Итак, получаем

$$\cot\left(\psi(x)^{k-n};x;n\right) = \sum_{\substack{q_1,q_2,\dots q_{k-n}\in\mathbf{N}_o\\ q_1+q_2+\dots q_{k-n}=n}}\frac{1}{(q_1+1)!(q_2+1)!\dots(q_{k-n}+1)!}. \tag{8.6.11}$$

Теперь возвращаемся к интегралу (8.6.3). Обозначим $\theta_i \equiv u(\xi_i,\xi_{i+1}), i \in \overline{1,(k-1)}$, тогда

$$(1+x)^{u(\xi)} = (1+x)^{\sum\limits_{i=1}^{k-1}\theta_i} = (1+x)^{\theta_i}(1+x)^{\theta_2}\dots(1+x)^{\theta_{k-1}} = (1+\theta_1 x)(1+\theta_2 x)\dots(1+\theta_{k-1}x) = \tag{8.6.12}$$

$$\sum_{n=0}^{k-1}x^n\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_n\le k-1}\theta_{i_1}\theta_{i_2}\dots\theta_{i_n},$$

где последняя сумма берется по всем наборам n различных чисел, взятых из $k-1$ чисел $1,\dots k-1$.В силу равенств (8.6.12) и (8.6.3) для $W(n,k)$ при $n \in \overline{0,(k-1)}$ получаем представление

$$W(n,k) = \int\limits_{\Pi_k}\dots\int\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le k-1}\theta_{i_1}\theta_{i_2}\dots\theta_{i_k}\,d\xi_1 d\xi_2\dots d\xi_k. \tag{8.6.13}$$

Пусть $\vec{i} \equiv (i_1,i_2,\dots i_n)$ — n различных чисел, взятых из чисел $1,2\dots k-1$ и расположенных в порядке возрастания. Разобьём их на подгруппы, идущие подряд без пропусков натуральных чисел по $p_1, p_2, \ldots p_r$ членов. Число таких подгрупп r ограничено сверху

$$r \leq min\{n, k-n\}. \tag{8.6.14}$$

Числа $p_1, p_2, \ldots p_r$ натуральные и $p_1 + p_2 + \ldots p_r = n$. Обозначим $\vec{p}(\vec{i}) \equiv (p_1, p_2, \ldots p_r)$. Согласно утверждению 8.6.1 из формулы (8.6.13) следует

$$W(n,k) = \sum_{0 \leq i_1 < i_2 \ldots < i_n \leq k-1} \frac{1}{(p_1(\vec{i})+1)!(p_2(\vec{i})+1)!\ldots(p_r(\vec{i})+1)!}. \tag{8.6.15}$$

Представим сумму (8.6.15) в следующем виде

$$W(n,k) = \sum_{r=1}^{\min\{n,k-n\}} \sum_{\substack{p_1,p_2,\ldots p_r \in \mathbf{N} \\ p_1+p_2+\ldots p_r = n}} \frac{1}{(p_1+1)!(p_1+1)!\ldots(p_r+1)!} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots i_n \leq k-1 \\ \vec{p}(\vec{i}) = (p_1,p_2,\ldots p_r)}} 1(\vec{i}). \tag{8.6.16}$$

Вернемся к формуле(8.6.11) и преобразуем её

$$\cot\Big(\psi^{k-n}(x); x; n\Big) = \sum_{\substack{q_1,q_2,\ldots q_{k-n} \in \mathbf{N}_o \\ q_1+q_2+\ldots q_{k-n} = n}} \frac{1}{(q_1+1)!(q_2+1)!\ldots(q_{k-n}+1)!} = \tag{8.6.17}$$

$$\sum_{r=1}^{\min\{n,k-n\}} \sum_{\substack{p_1,p_2,\ldots p_r \in \mathbf{N} \\ p_1+p_2+\ldots p_r = n}} \frac{1}{(p_1+1)!(p_2+1)!\ldots(p_r+1)!} \sum_{\substack{q_1,q_2,\ldots q_{k-n} \in \mathbf{N}_o \\ \vec{p}(\vec{q}) = (p_1,p_2,\ldots p_r)}} 1(q_1, q_2, \ldots q_{k-n}).$$

В последнем преобразовании мы для данного набора $k-n$ неотрицательных целых чисел $\vec{q} \equiv (q_1, q_2, \ldots q_{k-n}) \in {\mathbf{N}_o}^{k-n}$, таких, что $q_1 + q_2 + \ldots q_{k-n} = n$ выделим все ненулевые числа, их будет $r \leq (k-n) : (p_1, p_2, \ldots p_r) \equiv \vec{p}(\vec{q})$. Чтобы убедиться, что суммы (8.6.16) и (8.6.17) совпадают, теперь достаточно доказать, что

$$\sum_{\substack{q_1,q_2,\ldots q_{k-n} \in \mathbf{N}_o \\ q_1+q_2+\ldots q_{k-n} = n \\ \vec{p}(\vec{q}) = (p_1,p_2,\ldots p_r)}} 1(\vec{q}) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots i_n \leq k-1 \\ \vec{p}(\vec{i}) = (p_1,p_2,\ldots p_r)}} 1(\vec{i}) = C(k-n, r). \tag{8.6.18}$$

При фиксированном наборе $(p_1, p_2, \ldots p_r)$, чтобы получить набор $q_1, q_2, \ldots q_{k-n}$ из левой суммы в (8.6.18) нужно добавить к r числам $p_1, p_2, \ldots p_r$ нулевые числа q_2 в числе $(k-n-r)$. Это можно сделать $C(k-n, k-n-r) = C(k-n, r)$ способами.

Фиксируем $\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots p_r)$ и выясняем сколькими способами можно выбрать n разных чисел $(i_1, i_2, \ldots i_n)$ из $k-1$ чисел $1, 2, \ldots k-1$, чтобы $\vec{p}(\vec{i}) = \vec{p} = Const$. Чтобы числа $i_1, i_2, \ldots i_n$ разбивались ровно на r групп, идущих подряд чисел заданной длины $p_1, p_2, \ldots p_r$, необходимо из $(k-1)$ точек выбрать $r-1$ точек как разделяющих для идущих подряд групп. Останется после выбора идущих подряд групп и разделяющих точек $k-1-n-(r-1) = k-n-r$ элементов, которые можно распределить на $r+1$ место. Это можно сделать $C(k-n-r+(r+1)-1, (r+1)-1) = C(k-n, r)$ способами. Формула (8.6.18) доказана. $\diamondsuit$

8.6.3 Числа $W(n,k)$.

В предыдущем пункте мы вычислили числа $W(n,k)$. Результат можно записать в следующей форме

$$W(n,k) = \begin{cases} \cot\left(\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{k-n}; x, n\right), & k \in \mathbf{N}_o,\ n \in \overline{0,k}; \\ 0, & k \in \mathbf{N}_o,\ n > k. \end{cases} \tag{8.6.19}$$

Используя свойства трансформации Тейлора можно следующим образом преобразовать формулу (8.6.19) при $k \in \mathbf{N}_o,\ n \in \overline{0,k}$:

$$\cot\left((e^x-1)^{k-n}; x; k\right) = \cot\left(x^{k-n}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{k-n}; x; k\right) =$$

$$\cot\left(\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{k-n}; x; k-(k-n)\right) = \cot\left(\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{k-n}; x; n\right) = W(n,k).$$

Итак, при $k \in \mathbf{N}$, $n \in \overline{0,k}$

$$W(n,k) = \cot\left((e^x-1)^{k-n}; x; k\right). \tag{8.6.20}$$

Введём вспомогательную последовательность

$$U(n,k) \equiv \cot\left((e^y-1)^n; y; k\right),\ (n,k) \in {\mathbf{N}_o}^2, \tag{8.6.21}$$

где как принято в п. 8.1.4 $U(n,k) = 0$ при $(n,k) \in \mathbf{Z}^2 \setminus {\mathbf{N}_o}^2$. В силу (8.6.21) имеем

$$U(n,y) = (e^y-1)^n, \tag{8.6.22}$$

поэтому

$$U(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}(e^y-1)^n x^n = \frac{1}{1-x(e^y-1)}. \tag{8.6.23}$$

Ряд Тейлора функции $(e^y-1)^n$ начинается с y^n, поэтому, согласно формуле (8.6.21) $U(n,k) = 0$ при $k < n$. Функция

$$U(x,k) = \sum_{n=0}^{\infty} U(n,k)x^n = \sum_{n=0}^{k} U(n,k)x^k \tag{8.6.24}$$

поэтому — полином степени k. В силу п. 8.2.4 поэтому при фиксированном k следует, что равенство

$$W(n,k) = U(k-n,k),\ (n,k) \in {\mathbf{N}_o}^2 \tag{8.6.25}$$

влечет равенства

$$W(x,k) = x^k U\left(\frac{1}{x}, k\right),\ k \in \mathbf{N}_o. \tag{8.6.26}$$

Но из (8.6.26) получаем

$$W(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} W(x,k)y^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k U\left(\frac{1}{x}, k\right) y^k = \sum_{k=0}^{\infty} U\left(\frac{1}{x}, k\right)(xy)^k = U\left(\frac{1}{x}, xy\right). \tag{8.6.27}$$

Итак, функция $W(x,y)$ в силу (8.6.23) равна

$$W(x,y) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}\left(e^{xy} - 1\right)}. \tag{8.6.28}$$

В силу определяющей формулы (8.6.22) числа $U(n,k)$ следующим образом связаны с числами Моргана $\Delta^n 0^k$, (см.[40], с.22):

$$U(n,k) = \frac{1}{k!}\Delta^n 0^k,\ (n,k) \in \mathbf{N}_o{}^2, \tag{8.6.29}$$

где

$$\Delta^n 0^k = \sum_{j=0}^{n} C(n,j)(-1)^j (n-j)^k = n! S(k,n), \tag{8.6.30}$$

(см. [8], с.44). Числа $S(n,k)$ здесь — числа Стирлинга второго рода. Для $U(n,k)$ и $W(n,k)$ получаем следующие выражения через числа Стирлинга второго рода

$$U(n,k) = \frac{n!}{k!} S(k,n),\ (n,k) \in \mathbf{N}_o{}^2, \tag{8.6.31}$$

$$W(n,k) = \frac{(k-n)!}{k!} S(k,k-n),\ (n,k) \in \mathbf{N}_o{}^2. \tag{8.6.32}$$

Для построения многочленов $W(x,k)$ с $k \in \overline{0,4}$ выделим теперь в $W(x,y)$ полином Тейлора степени не более 4 по y. Согласно (8.6.28)

$$W(x,y) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \ldots, \tag{8.6.33}$$

где

$$z = \frac{e^{xy} - 1}{x} = \frac{1}{x}\left(xy + \frac{(xy)^2}{2!} + \frac{(xy)^3}{3!} + \frac{(xy)^4}{4!} + \ldots\right) = y + \frac{xy^2}{2!} + \frac{x^2y^3}{3!} + \frac{x^3y^4}{4!} + \ldots \tag{8.6.34}$$

Подставим (8.6.34) в (8.6.33) и оставим лишь степени не выше 4 по y:

$$W(x,y) = 1 + \left(y + \frac{xy^2}{2!} + \frac{x^2y^3}{3!} + \frac{x^3y^4}{4!} + \ldots\right) + \left(y + \frac{xy^2}{2!} + \frac{x^2y^3}{3!} + \ldots\right)^2 + \tag{8.6.35}$$

$$\left(y + \frac{xy^2}{2!} + \ldots\right)^3 + (y + \ldots)^4 + \ldots =$$

$$1 + y + \left(\frac{x}{2!} + 1\right)y^2 + \left(\frac{x^3}{3!} + x + 1\right)y^3 + \left(\frac{x^3}{3!} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x^2 + \frac{3}{2}x + 1\right)y^4 + \ldots$$

Мы получили следующие выражения для первых многочленов $W(x,k)$:

$$W(x,0) = 1, \tag{8.6.36}$$

$$W(x,1) = 1, \tag{8.6.37}$$

$$W(x,2) = 1 + \frac{1}{2!}x, \tag{8.6.38}$$

$$W(x,3) = 1 + x + \frac{1}{3!}x^2, \tag{8.6.39}$$

$$W(x,4) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{12}x^2 + \frac{1}{4!}x^3. \tag{8.6.40}$$

8.6.4 Числа $Wd(n,k)$.

При фиксированном $k \in \mathbf{N}$ величина $W(x,k)$ — полином степени $(k-1)$ от x. Проведём замену переменной $1+x=z$, тогда

$$W(x,k) = \sum_{n=0}^{k-1} W(n,k)x^n = \sum_{n=0}^{k-1} W(n,k)(z-1)^n \equiv Wd(z,k), \tag{8.6.41}$$

где $Wd(z,k)$ — полином степени $k-1$ от переменной $z \in \mathbf{C}$. По определению

$$\forall k \in \mathbf{N}_o \;\Big|\; Wd(x,k) = W(x-1,k). \tag{8.6.42}$$

Что эквивалентно равенству голоморфных функций

$$Wd(x,y) = W(x-1,y). \tag{8.6.43}$$

Так как функция $W(x,y)$ нам известна, то получаем

$$Wd(x,y) = \frac{1}{1-\frac{e^{(x-1)y}-1}{x-1}}. \tag{8.6.44}$$

Из формулы (8.6.42) вытекает выражение чисел $Wd(n,k)$ через числа $W(n,k)$:

$$Wd(x,k) = \sum_{n=0}^{k-1} Wd(n,k)x^n = \sum_{j=0}^{k-1} W(j,k)(x-1)^j =$$

$$\sum_{j\in\mathbf{N}_o} W(j,k) \sum_{n\in\mathbf{N}_o} C(j,n)(-1)^{j-n}x^n = \sum_{n\in\mathbf{N}_o} x^n \sum_{j\in\mathbf{N}_o} W(j,k)C(j,n)(-1)^{j-n}.$$

Отсюда

$$Wd(n,k) = \sum_{j\in\mathbf{N}_o} W(j,k)C(j,n)(-1)^{j-n},\ (n,k) \in {\mathbf{N}_o}^2. \tag{8.6.45}$$

Зная первые полиномы $W(x,k)$ — формулы (8.6.36), выпишем первые полиномы $Wd(x,k)$, $k \in \overline{0,4}$:

$$Wd(x,0) = 1, \tag{8.6.46}$$
$$Wd(x,1) = 1, \tag{8.6.47}$$
$$Wd(x,2) = \frac{1}{2!}(1+x), \tag{8.6.48}$$
$$Wd(x,3) = \frac{1}{3!}(1+4x+x^2), \tag{8.6.49}$$
$$Wd(x,4) = \frac{1}{4!}(1+11x+11x^2+x^3). \tag{8.6.50}$$

Совпадение коэффициентов $Wd(0,4) = Wd(3,4)$ и $Wd(1,4) = Wd(2,4)$ не случайно, ибо справедлива следующая лемма.

Лемма 8.6.2 *Справедливо равенство*

$$\forall (n,k) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0),(-1,0)\} \;\Big|\; Wd(n,k) = Wd(k-1-n,k). \tag{8.6.51}$$

Доказательство. При $k < 0$ равенства в (8.6.51) тривиальны.При $k = 0$ отлично от нуля лишь число $Wd(0,0) = 1$ и если $n \neq 0$, $0 - 1 - n \neq 0$, то равенство в (8.6.51) верно. Рассматриваем далее случай $k \in \mathbf{N}$, $n \in \overline{0,(k-1)}$.

При $k \in \mathbf{N}$ выполнение соотношения

$$\forall n \in \overline{0,k-1} \;\Big|\; Wd(n,k) = Wd(k-1-n,k)$$

эквивалентно согласно п. 8.1.4 выполнению соотношения

$$Wd(x,k) = x^{k-1} Wd\left(\frac{1}{x},k\right). \tag{8.6.52}$$

Выполнение соотношения (8.6.52) при каждом $k \in \mathbf{N}$ эквивалентно выполнению равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} Wd(x,k)y^k = \sum_{k=1}^{\infty} Wd\left(\frac{1}{x},k\right) x^{k-1}y^k = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty} Wd\left(\frac{1}{x},k\right)(xy)^k, \tag{8.6.53}$$

но последнее равенство эквивалентно равенству

$$Wd(x,y) - 1 = \frac{1}{x}\left(Wd\left(\frac{1}{x},xy\right) - 1\right). \tag{8.6.54}$$

Равенство (8.6.54)проверяется непосредственной подстановкой аргументов в выражение (8.6.44) для функции $Wd(x,y)$. $\diamondsuit$

8.6.5 Распределение значений функционала $U(f)$ на группе перестановок P_k.

В п. 8.5.3 мы сопоставим каждой перестановке $f \in P_k$ открытое подмножество $Q(f) \subset \mathbf{R}^k$ вида (8.6.28). $k!$ множеств $Q(f)$, $f \in P_k$ образуют дизъюнктную систему множеств, объединение которых $\bigcup\limits_{f\in P_k} Q(f)$ содержит все множество $\mathbf{R}^k_+$, кроме подмножества меры нуль. Введём дизъюнктную систему подмножеств

$$Q(f,t) \equiv Q(f) \cap t\Pi_k,\ f \in P_k, \tag{8.6.55}$$

здесь $t \in \mathbf{R}_+$. Тогда единичный куб Π_k с точностью до множества меры нуль равен объединению $\bigcup\limits_{f\in P_k} Q(f,1)$. Множества $Q(f,t)$ имеют все один и тот же объем $\frac{t^k}{k!}$. Возвращаясь к интегралу (8.6.3) и вспоминая, что на каждом множестве $Q(f)$ функция $u(\xi)$ постоянна и равна $u(f)$ (вывод 8.5.1), приводим интеграл (8.6.3) к виду

$$W(x,k) = \frac{1}{k!}\sum_{f\in P_k}(1+x)^{u(f)}. \tag{8.6.56}$$

Согласно предыдущему пункту

$$W(x,k) = Wd(x+1,k) = \sum_{n=0}^{k-1}(1+x)^n Wd(n,k). \tag{8.6.57}$$

Сравнивая выражения (8.6.56) и (8.6.57), мы видим, что

$$Wd(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{\substack{f\in P_k\\ u(f)=n}} 1(f), \quad k \in \mathbf{N},\ n \in \mathbf{N}_o, \tag{8.6.58}$$

т.е. $Wd(n,k)$ равно числу элементов группы P_k , на которых функционал $u(f)$ принимает постоянное значение n, делённому на $k!$. Таким образом, число $Wd(n,k)$ при $k \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}_o$ есть вероятность того, что функционал $u(f)$ принимает значение n. При фиксированном $k \in \mathbf{N}$ числа $Wd(n,k)$ дают вероятности распределения значений функционала $u(f)$ на P_k.

Вернемся к формуле (8.6.56) и применим формулу бинома

$$W(x,k) = \frac{1}{k!}\sum_{f\in P_k}\sum_{n\in\mathbf{N}_o} C(u(f),n)x^n = \sum_{n\in\mathbf{N}_o} x^n \sum_{f\in P_k} C(u(f),n)\frac{1}{k!}. \tag{8.6.59}$$

Таким образом, при $k \in \mathbf{N}$, имеем

$$W(n,k) = \sum_{f\in P_k} C(u(f),n)\frac{1}{k!}. \tag{8.6.60}$$

Последняя величина есть биномиальный момент распределения $B_n(k)$ функционала $u(f)$ на P_k (см. [8], с.41). Мы убедились, что при фиксированном $k \in \mathbf{N}$ коэффициенты

$$W(n,k) = B_n(k),\ n \in \mathbf{N}_o, \tag{8.6.61}$$

есть биномиальные моменты распределения функционала $u(f)$.

Переход от биномиальных моментов распределения к обычным моментам распределения для случайной величины, принимающей конечное число целых неотрицательных значений, сводится к элементарной замене переменных в производящей функции. В самом деле, при $k \in \mathbf{N}$ верно

$$W(x,k) = \frac{1}{k!}\sum_{f\in P_k}(1+x)^{u(f)} = \frac{1}{k!}\sum_{f\in P_k} e^{u(f)\ln(1+x)} = \tag{8.6.62}$$

$$\sum_{s\in\mathbf{N}_o}\frac{(\ln(1+x))^s}{s!}\left(\frac{1}{k!}\sum_{f\in P_k}(u(f))^s\right) = \sum_{s\in\mathbf{N}_o}\frac{(\ln(1+x))^s}{s!}m(s,k),$$

где $m(s,k)$ есть s-тый момент распределения функционала $u(f)$ на P_k. В полученном равенстве проведём замену переменных $\widetilde{\ln}(x) \equiv \ln(1+x) = z$ и получим

$$W(e^z-1,k) = \sum_{s\in\mathbf{N}_o}\frac{z^s}{s!}m(s,k). \tag{8.6.63}$$

Отсюда

$$m(n,k) = n!\ \mathrm{cot}\ (W(e^x-1,k);x;n) = n!\ \mathrm{cot}\ (W(e^x-1,y);x,y;n,k)\,.$$

Получаем следующее выражение для моментов $m(n,k)$:

$$m(n,k) = n!\ \mathrm{cot}\ \left(\frac{e^x-1}{e^x-e^{(e^x-1)y}};x,y;n,k\right). \tag{8.6.64}$$

Перейдем теперь к распределению значений функционала спадов $h(f)$ на группе перестановок P_k. Рассмотрим интеграл

$$Wh(x,k) \equiv \int\limits_{\Pi_k}\!\!\ldots\!\int (1+x)^{h(\xi)}\,d\xi_1 d\xi_2\ldots d\xi_k \tag{8.6.65}$$

и проведём в нём замену переменных $\xi = Ta(q)\eta$, т.е. $(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_k) = (\eta_n, \eta_{n-1}, \dots \eta_1)$.

Тогда $h(\xi) = h(\eta_n, \eta_{n-1}, \dots, \eta_1) = u(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ и интеграл (8.6.65) принимает вид

$$Wh(x,k) = \int_{\Pi_k} \dots \int (1+x)^{u(\eta)}\, d\eta_1 d\eta_2 \dots d\eta_k = W(x,k).$$

Мы убедились, что при $k \in \mathbf{N}$

$$Wh(x,k) = W(x,k), \tag{8.6.66}$$

т.е. распределения значений функционалов $u(f)$ и $h(f)$ совпадают.

8.6.6 Таблицы чисел $W(n,k)$ и $Wd(n,k)$ при $k \in \overline{0,4}$.

Из формул (8.6.36) получаем следующую таблицу чисел $W(n,k)$.

$k \backslash n$	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
2	1	$\frac{1}{2!}$	0	0
3	1	1	$\frac{1}{3!}$	0
4	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4!}$

Таблица 8.6.1: Числа $W(n,k)$ при $k \in 0,4$.

Из формул (8.6.46) следует таблица чисел $Wd(n,k)$.

$k \backslash n$	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
2	1	1	0	0
3	1	4	1	0
4	1	11	11	1

Таблица 8.6.2: Числа $k!Wd(n,k)$ при $k \in 0,4$.

Глава 9

Логарифм решения линейного дифференциального уравнения

Построение решения задачи Коши для линейного однородного дифференциального уравнения в $\mathbf{R}^n$ вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in [0, T], \tag{9.0.1}$$

где $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $A(t) \in M(n)$, сводится к построению решения линейного однородного дифференциального уравнения в алгебре матриц $M(n)$ с единичным начальным условием

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \tag{9.0.2}$$

$$X(0) = E, \tag{9.0.3}$$

($X(t) \in M(n)$), ибо $x(t) = X(t)x(0)$. В случае $A(t) = Const = A$ решение системы (9.0.2, 9.0.3) является экспонентой $X(t) = \exp(tA)$, т.е. $\ln X(t) = tA$. Вопрос, интересующий нас в этой главе, — построение $\ln(X(t))$ в общем случае переменной матрицы

$A(t)$. Мы находим для $\ln(X(t))$ следующее представление

$$\ln(X(t)) = \int\limits_0^t A(t)\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t \text{val }2(\tau_1,\tau_2)[A(\tau_2),A(\tau_1)]\,d\tau_1 d\tau_2 + \ldots \tag{9.0.4}$$

$$+\frac{1}{n}\int\limits_0^t\int\limits_0^t\ldots\int\limits_0^t \text{val }n(\tau_1,\tau_2,\ldots\tau_n)[A(\tau_n),\ldots[A(\tau_3),[A(\tau_2),A(\tau_1)]]\ldots]\,d\tau_1 d\tau_2\ldots d\tau_n + \ldots,$$

где функции $\text{val }n(\tau_1,\tau_2,\cdots\tau_n)$ указаны ниже. Формулу (9.0.4) мы называем формулой для логарифма решения. Как следствие, мы получаем из формулы для логарифма решения формулу Хаусдорфа для логарифма произведения конечного числа экспонент.

Рассуждения в этой главе проводятся в более общей ситуации, когда $A(t)$, $X(t)$ принадлежат банаховой алгебре, затем в § 10.2 результаты применяются к конечномерному случаю.

§9.1 Логарифм решения линейного однородного уравнения как сумма однородных полиномов J_n

9.1.1 Банахова алгебра.

Пусть $\mathbf{A}$ — банахова алгебра над полем Λ, где $\Lambda = \mathbf{R}$ или $\Lambda = \mathbf{C}$. Т.е. $\mathbf{A}$ есть: 1)унитальная алгебра, 2) банахово пространство, 3) норма элемента $|A|$, где $A \in \mathbf{A}$ удовлетворяет условиям: $|E| = 1$ и $|A_1A_2| \le |A_1||A_2|$ при любых $A_1, A_2 \in \mathbf{A}$.

Рассматривается линейное однородное уравнение

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \quad t \in [a,b], \tag{9.1.1}$$

где $X(t) \in \mathbf{A}$ неизвестная функция, $A(t) \in \mathbf{A}$ заданная функция скалярного аргумента $t \in [a,b]$ со значениями в $\mathbf{A}$, суммируемая на $[a,b]$, т.е. $A(t) \in L[a,b]$. Через $W(t,t_1)$ обозначим решение дифференциального уравнения (9.1.1) с единичным начальным условием в точке $t = t_1$:

$$\frac{d}{dt}W(t,t_1) = A(t)W(t,t_1), \tag{9.1.2}$$

$$W(t_1,t_2) = E. \tag{9.1.3}$$

Так как мы не требуем непрерывности функции $A(t)$, то системы (9.1.2, 9.1.3) понимается в интегральном смысле

$$W(t,t_1) = E + \int\limits_{t_1}^t A(\tau)W(\tau,t_1)\,d\tau. \tag{9.1.4}$$

Краевую задачу (9.1.2, 9.1.3) и соответствующее интегральное уравнение (9.1.4) мы будем рассматривать не только на сегменте $[t_1,t_2], t_2 > t_1$, но и на любом связном подмножестве числовой оси, содержащем точку t_1. Введём обозначение $Ic(t_1,t_2)$ для замкнутого сегмента, соединяющего точки t_1 и t_2, т.е. $Ic(t_1,t_2) \equiv [t_1,t_2]$, если $t_2 \ge t_1$ и $Ic(t_1,t_2) \equiv [t_2,t_1]$, если $t_2 < t_1$.

Следующая лемма фиксирует свойство дифференциального уравнения (9.1.1).

Лемма 9.1.1 *Если функция $W_1(t,t_1)$ - непрерывное решение интегрального уравнения (9.1.4) при $t \in Ic(t_1,t_2)$, а функция $W_2(t,t_2)$ - непрерывное решение интегрального уравнения вида (9.1.4) при $t \in Ic(t_2,t_3)$, то функция*

$$W_3(t,t_1) \equiv \begin{cases} W_1(t,t_1) \quad , \quad t \in Ic(t_1,t_2); \\ W_2(t,t_2)W_1(t_2,t_1) \quad , \quad t \in Ic(t_2,t_3) \end{cases} \tag{9.1.5}$$

есть непрерывное решение интегрального уравнения (9.1.4) при $t \in I_c(t_1,t_3)$.

Доказательство. Функция $W_3(t,t_1)$ непрерывна при $t \neq t_2$ по условию и непрерывна при $t = t_2$, ибо $W_3(t_2,t_1) = W_2(t_2,t_2)W_1(t_2,t_2)$, так как $W_2(t_2,t_2) = E$.

Интегральное уравнение

$$W_3(t,t_1) = E + \int_{t_1}^{t} A(\tau)W_3(\tau,t_1)\,d\tau \tag{9.1.6}$$

при $t \in Ic(t_1,t_2)$ совпадает с уравнением

$$W_1(t,t_1) = E + \int_{t_1}^{t} A(\tau)W_1(\tau,t_1)\,d\tau \tag{9.1.7}$$

и поэтому выполняется, а при $t \in Ic(t_2,t_3)$ имеет вид:

$$W_2(t,t_1)W_1(t_2,t_1) = E + \int_{t_1}^{t_2} A(\tau)W_1(\tau,t_1)\,d\tau + \int_{t_2}^{t} A(\tau)W_2(\tau,t_2)W_1(t_2,t_1)\,d\tau. \tag{9.1.8}$$

В силу выполнения соотношения (9.1.7) последнее соотношение принимает вид

$$W_2(t,t_2)W_1(t_2,t_1) = W_1(t_2,t_1) + \int_{t_2}^{t} A(\tau)W_2(\tau,t_2)\,d\tau W_1(t_2,t_1). \tag{9.1.9}$$

Выполнение соотношения (9.1.9) следует из выполнения соотношения

$$W_2(t,t_2) = E + \int_{t_2}^{t} A(\tau)W_2(\tau,t_2)\,d\tau. \quad \diamondsuit$$

Следствие 9.1.1 *Если $W(t,t_1)$ и $W(t,t_2)$ непрерывные решения по $t \in Ic(t_1,t_2)$ интегрального уравнения вида (9.1.4), то $W^{-1}(t_2,t_1) = W(t_1,t_2)$.*

В случае локально интегрируемой функции $A(t)$ существование и единственность функции $W(t,t_1)$ устанавливается методом последовательных приближений.

Пусть $A(t)$ — суммируемая на сегменте $[a,b]$ функция со значениями в банаховой алгебре $\mathbf{A}$. Через $C[a,b]$ обозначим банахово пространство функций $X(t)$ непрерывных по $t \in [a,b]$ со значениями в банаховой алгебре $\mathbf{A}$ и нормой $||X|| \equiv \sup\limits_{t\in[a,b]} |X(t)|$.

Введём линейные операторы

$$S_{t_1}(X) \equiv \int_{t_1}^{t} A(\tau)X(\tau)\,d\tau, \tag{9.1.10}$$

отображающие пространство $C[a,b]$ в себя при любом $t_1 \in [a,b]$. Справедлива оценка для нормы операторов

$$||S_{t_1}|| \le \int\limits_a^b |A(\tau)|\, d\tau \equiv M, t_1 \in [a,b]. \tag{9.1.11}$$

Оценка (9.1.11) следующим образом продолжается на степени оператора S_{t_1}.

Лемма 9.1.2 *Если функция $A(t)$ интегрируема на $[a,b]$ и $t_1 \in [a,b]$, то при любом натуральном n верно неравенство*

$$||S^n_{t_1}|| \le \frac{M^n}{n!}. \tag{9.1.12}$$

Доказательство. Для любой функции $X(t) \in C[a,b]$ при $t \ge t_1$ имеем

$$S^n_{t_1}(X)(t) = \int\limits_{t_1}^{t} A(\xi_n) \int\limits_{t_1}^{\xi_n} A(\xi_{n-1}) \dots \int\limits_{t_1}^{\xi_3} A(\xi_2) \int\limits_{t_1}^{\xi_2} A(\xi_1) X(\xi_1)\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n, \tag{9.1.13}$$

поэтому

$$|S^n_{t_1}(X)(t)| \le ||X|| \int\limits_{t_1}^{t} |A(\xi_n)| \int\limits_{t_1}^{\xi_n} |A(\xi_{n-1})| \dots \int\limits_{t_1}^{\xi_2} |A(\xi_1)|\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n. \tag{9.1.14}$$

Положим

$$q \equiv \int\limits_{t_1}^{t} |A(\xi_n)| \int\limits_{t_1}^{\xi_n} |A(\xi_{n-1})| \dots \int\limits_{t_1}^{\xi_2} |A(\xi_1)|\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n. \tag{9.1.15}$$

Введём обозначения параграфов §8.5, §8.6, т.е. положим $Q(e) \equiv \{\xi \in \mathbf{R}^n \mid 0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n\}$, $\Pi_n \equiv [0,1]^n$ и $\Pi_n(t) \equiv t\Pi_n$ при $t \in \mathbf{R}_+$. Заменой переменных $\xi_1 = t_1 + \eta_1$, $\xi_2 = t_1 + \eta_2$, $\ldots$ $\xi_n = t_1 + \eta_n$ интеграл (9.1.15) приводится к виду

$$q = \int\limits_0^{t-t_1} |A(t_1+\eta_n)| \int\limits_0^{\eta_n} |A(t_1+\eta_{n-1})| \dots \int\limits_0^{\eta_2} |A(t_1+\eta_1)|\, d\eta_1 d\eta_2 \dots d\eta_n = \tag{9.1.16}$$

$$\int\!\!\dots\!\!\int\limits_{Q(e)\cap\Pi_n(t-t_1)} |A(t_1+\eta_n)||A(t_1+\eta_{n-1}| \dots |A(t_1+\eta_1)|\, d\eta_1 \dots d\eta_n.$$

Введём интеграл в обозначениях § 8.5

$$q(f) \equiv \int\!\!\dots\!\!\int\limits_{Q(f)\cap\Pi_n(t-t_1)} |A(t_1+\eta'_n)||A(t_1+\eta'_{n-1})| \dots |A(t_1+\eta'_1)|\, d\eta'_1 \dots d\eta'_n, \tag{9.1.17}$$

и проведём в нём замену переменных $\eta' = T_a(f)\eta$. Получим

$$q(f) \equiv \int\!\!\dots\!\!\int\limits_{Q(e)\cap\Pi_n(t-t_1)} |A(t_1+\eta'_n(\eta))||A(t_1+\eta'_{n-1}(\eta))| \dots |A(t_1+\eta'_1(\eta))|\, d\eta_1 \dots d\eta_n = \tag{9.1.18}$$

$$\int\!\!\dots\!\!\int\limits_{Q(e)\cap\Pi_n(t-t_1)} |A(t_1+\eta_n)||A(t_1+\eta_{n-1}| \dots |A(t_1+\eta_1)|\, d\eta_1 \dots d\eta_n = q.$$

Для суммы по всем перестановкам $f \in P_n$ получаем

$$\sum_{f\in P_n} q(f) = n!q = \int\limits_{\Pi_n(t-t_1)}\!\!\ldots\!\int |A(t_1+\eta_n)||A(t_1+\eta_{n-1}|\ldots|A(t_1+\eta_1)|\,d\eta_1\ldots d\eta_n = \qquad (9.1.19)$$

$$\left(\int\limits_{t_1}^{t}|A(\tau)|\,d\tau\right)^n \le \left(\int\limits_{a}^{b}|A(\tau)|\,d\tau\right)^n = M^n.$$

Итак, в случае $t \ge t_1$ получаем

$$|S^n_{t_1}(X)(t)| \le \frac{M^n}{n!}||X||. \qquad (9.1.20)$$

В случае $t \le t_1$ неравенство (9.1.20) доказывается аналогично. Из справедливости неравенства (9.1.20) при $t \in [a,b]$ вытекает оценка (9.1.12). ♢

Для построения решения интегрального уравнения (9.1.4) применяем метод последовательных приближений с начальным приближением $W_{-1}(t,t_1) = 0$. Тогда нулевое приближение $W_0(t,t_1) = E$, первое приближение $W_1(t,t_1) = E + S(E)$, n-ное приближение $W_n(t,t_1) = E + S(E) + S^2(E) + \ldots S^n(E)$. Сформулируем теорему о представимости решения $W(t,t_1)$ в виде суммы ряда

$$W(t,t_1) = E + S(E) + S^2(E) + \ldots S^n(E) + \ldots. \qquad (9.1.21)$$

Теорема 9.1.1 *Если функция $A(t)$ суммируема на $[a,b]$, то при любом $t_1 \in [a,b]$ существует единственное непрерывное решение $W(t,t_1)$ интегрального уравнения (9.1.4) на отрезке $[a,b]$ и является суммой абсолютно и равномерно по $(t,t_1) \in [a,b]^2$ сходящегося ряда (9.1.21). Для любых $(t,t_1) \in [a,b]^2$ и $n = -1,0,1,2,\ldots$ справедливо неравенство*

$$|W(t,t_1) - W_n(t,t_1)| \le \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}\exp(M). \qquad (9.1.22)$$

Доказательство. По построению

$$W(t,t_1) - W_n(t,t_1) = S^{n+1}(E) + S^{n+2}(E) + \ldots. \qquad (9.1.23)$$

В силу леммы 9.1.2 при любом $n = -1,0,1,2,\ldots$ имеем

$$|W(t,t_1) - W_n(t,t_1)| \le \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{M^{n+2}}{(n+2)!} + \ldots =$$

$$\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{M}{n+2} + \frac{M^2}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) \le$$

$$\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + M + \frac{M^2}{2!} + \ldots\right) = \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}\exp(M).$$

Неравенство (9.1.22) доказано. Остальные утверждения теоремы следует из неравенства (9.1.22) и леммы 9.1.2. ♢

Из теоремы 9.1.1 вытекает, что если функция $A(t)$ принадлежит пространству $L[a,b]$ интегрируемых функций на сегменте $[a,b]$, то функции $W(t,t_1)$ и $W(t,t_2)$ непрерывны по $t \in [a,b]$ при любых $t_1,t_2 \in [a,b]$. По следствию 9.1.1 тогда $W(t_1,t) = W^{-1}(t,t_1)$ при любом $t \in [a,b]$ и любом $t_1 \in [a,b]$. Таким образом, $W(t_2,t_1) \in \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$

при любых $(t_1, t_2) \in [a, b] \times [a, b]$ и функция $W(t, t_1)$, рассматриваемая как отображение в топологическую группу $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ непрерывна по аргументу $t \in [a, b]$ при любом фиксированном аргументе $t_1 \in [a, b]$. Тогда и функция $W^{-1}(t, t_1)$ непрерывна по аргументу $t \in [a, b]$ как отображение сегмента $[a, b]$ в топологическую группу $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$. А так как топология в $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A}) \subset \mathbf{A}$ наследственная, то функция $W(t_1, t) = W^{-1}(t, t_1)$ непрерывно отображает сегмент $[a, b]$ в банахову алгебру $\mathbf{A}$ при любом фиксированном $t_1 \in [a, b]$. Для любого $(t_1, t_2) \in [a, b] \times [a, b]$ согласно лемме 9.1.1 имеем $W(t_2, t_1) = W(t_2, a)W(a, t_1)$. По доказанному функция $W(t_2, a)$ непрерывна по аргументу $t_2 \in [a, b]$ и не зависит от аргумента t_1. Поэтому функция $W(t_2, a)$ является и непрерывным отображением пары (t_1, t_2) в топологическую группу $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$. Аналогично функция $W(a, t_1)$ есть непрерывное отображение пары (t_1, t_2) в топологическую группу $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$. Итак, функция $W(t_2, t_1)$ задаёт непрерывное отображение топологического произведения $[a, b] \times [a, b]$ в топологическую группу $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$, а следовательно, и в банахову алгебру $\mathbf{A}$. Доказана следующая лемма.

Лемма 9.1.3 *Если функция $A(t)$ принадлежит $L[a, b]$, то функция $W(t_2, t_1)$ задаёт непрерывное отображение топологического произведения $[a, b] \times [a, b]$ в топологическую группу $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$.*

Из неравенства (9.1.22) следует оценка для роста нормы функции $W(t, t_1)$ вида

$$|W(t, t_1)| \le \exp\left(\left|\int_{t_1}^{t} |A(\tau)|\, d\tau\right|\right),$$

откуда при любых $(t_1, t_2) \in [a, b]$ верно неравенство

$$\ln |W(t, t_1)| \le \left|\int_{t_1}^{t} |A(\tau)|\, d\tau\right|. \tag{9.1.24}$$

С другой стороны, в силу равенства

$$W(t, t_1)W(t_1, t) = E$$

верно неравенство

$$|W(t, t_1)||W(t_1, t)| \ge 1,$$

т.е.

$$-\ln |W(t, t_1)| \le \ln |W(t, t_1)| \le \left|\int_{t_1}^{t} |A(\tau)|\, d\tau\right|. \tag{9.1.25}$$

Из (9.1.24, 9.1.25) получаем двустороннюю оценку

$$\ln |W(t, t_1)| \le \left|\int_{t_1}^{t} |A(\tau)|\, d\tau\right|, \tag{9.1.26}$$

верную для $A(t) \in L[a, b]$ при любых $(t_1 \in [a, b],\ t_2 \in [a, b]$.

При $t > t_1$ ряд (9.1.21) для функции $W(t, t_1)$ имеет вид

$$W(t, t_1) = E + \int_{t_1}^{t} A(\xi_1)\, d\xi_1 + \int_{t_1}^{t} A(\xi_2) \int_{t_1}^{\xi_2} A(\xi_1)\, d\xi_1 d\xi_2 + \ldots + \tag{9.1.27}$$

$$\int\limits_{t_1}^{t} A(\xi_n) \int\limits_{t_1}^{\xi_n} A(\xi_{n-1}) \dots \int\limits_{t_1}^{\xi_2} A(\xi_1)\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n + \dots .$$

Введём последовательность $I \in SAG(1, \mathbf{A})$ в обозначениях § 7.1, полагая $I(0) \equiv I_0 \equiv 0$, $I(1) \equiv I_1 \equiv \int\limits_{t1}^{t} A(\xi_1)\, d\xi_1$,

$$I_n \equiv I(n) \equiv \int\limits_{t_1}^{t} A(\xi_n) \int\limits_{t_1}^{\xi_n} A(\xi_{n-1}) \dots \int\limits_{t_1}^{\xi_2} A(\xi_1)\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n. \tag{9.1.28}$$

Тогда

$$W(t, t_1) = E + \sum_{n=1}^{\infty} I_n, \tag{9.1.29}$$

и в силу леммы 9.1.2 справедлива оценка

$$|I_n| \le \frac{\left(\int\limits_{t_1}^{t} |A(\tau)|\, d\tau \right)^n}{n!}, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{9.1.30}$$

Из неравенства (9.1.30) следует, что последовательность I — последовательность экспоненциального роста, и степенной ряд

$$\sum_{n \in \mathbf{N}_0} I_n b^n \tag{9.1.31}$$

абсолютно сходится в алгебре $\mathbf{A}$ при любом $b \in \mathbf{A}$.

Достаточное условие $A(t) \in L[a, b]$ для существования функции $W(t, t_1)$ — решения интегрального уравнения (9.1.4) не ослабляемо, как показывает следующий пример.

Пример 9.1.1

$[a, b] = [0, 1]$, $\mathbf{A} = \mathbf{R}$, полагаем $A(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & , \quad t \in]0, 1]; \\ 0 & , \quad t = 0. \end{cases}$ При $t > 0$ любое решение уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ аналитично и равно $x(t) = ct$, $c \in \mathbf{R}$. Поэтому при $t_1 \in]0, 1]$ будет $W(t, t_1) = \frac{t}{t_1}$, более того, функция $W(t, t_1) = \frac{t}{t_1}$ — непрерывное по $t \in]0, 1]$ решение интегрального уравнения (9.1.4) на $[a, b]$. В случае $t_1 = 0$, если функция $W(t, 0)$ при $t > 0$ решение уравнения (9.1.4), то $W(t, 0) = ct$ при $t > 0$, где $c \in \mathbf{R}$. По определению $W(0, 0) = E$ и интегральное уравнение (9.1.4) не выполняется ни при каком $c \in \mathbf{R}$, ибо принимает вид $ct = 1 + \int\limits_{0}^{t} \frac{c\tau}{\tau}\, d\tau = 1 + ct$. Итак, не существует измеримой функции $W(t, 0)$ являющейся решением интегрального уравнения (9.1.4).

9.1.2 Построение логарифма.

Мы определили в предыдущем пункте последовательность $I \in SAG(1, \mathbf{A})$. Последовательность $\widetilde{\ln} \in SAG(1, \Lambda)$ согласно теореме 7.4.1 поднимаем в пространство $SAG(1, \mathbf{A})$ используя естественное изоморфное вложение алгебры Λ в алгебру $\mathbf{A}$ и сохраним то же обозначение для $\widetilde{\ln} \in SAG(1, \mathbf{A})$. Согласно теореме 7.3.1 определена суперпозиция — последовательность

$$J = \widetilde{\ln} \circ I \tag{9.1.32}$$

причём согласно п. 7.3.3 имеем $J \in SAG(1, \mathbf{A})$, т.е. $J_0 = 0$. Справедливо и обратное равенство

$$I = \widetilde{\exp} \circ J \tag{9.1.33}$$

(пример 7.3.2). Из равенства (9.1.36) согласно § 7.3 следует, что величина $J_n \in \mathbf{A}$, $n \in \mathbf{N}$ является следующим полиномом от величины $I_1, I_2, \ldots I_n \in \mathbf{A}$:

$$J_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \Pi(j, n, I), \tag{9.1.34}$$

где

$$\Pi(j, n, I) = \sum_{\substack{i_j, \ldots, i_2, i_1 \in \mathbf{N} \\ i_j + \ldots i_2 + i_1 = n}} I_{i_j} I_{i_{j-1}} \ldots I_{i_1}. \tag{9.1.35}$$

(соответственно формулы (7.3.11) и (7.3.9) из § 7.3). Итак, при $n \in \mathbf{N}$

$$J_n = I_n - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i_2, i_1 \in \mathbf{N} \\ i_2 + i_1 = n}} I_{i_2} I_{i_1} + \frac{1}{3} \sum_{\substack{i_3, i_2, i_1 \in \mathbf{N} \\ i_3 + i_2 + i_1 = n}} I_{i_3} I_{i_2} I_{i_1} + \ldots \frac{(-1)^{n-1}}{n} I_1^n. \tag{9.1.36}$$

Наша следующая задача в этой главе — преобразование выражения (9.1.36) для величины J_n.

9.1.3 Свойства дифференцируемости решения интегрального уравнения (9.1.4).

Возвратимся к вопросам п. 9.1.1. Пусть $I \subset \mathbf{R}$ связное подмножество прямой и функция $A : I \to \mathbf{A}$ принадлежит классу $L_{loc}(I)$ функций, локально суммируемых на I. В силу теоремы 9.1.1 тогда для любого числа $t_1 \in I$ существует единственная непрерывная по аргументу $t_2 \in I$ функция $W(t_2, t_1)$, являющаяся решением интегрального уравнения (9.1.4). Будет ли при этом выполняться уравнение (9.1.2)?

Предварительно напомним, что если функция $A(t)$ суммируема на сегменте $[a, b]$, то почти во всех точках $t \in [a, b]$ выполняется равенство

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} A(\tau)\, d\tau = A(t). \tag{9.1.37}$$

Точки $t \in I$, в которых выполняется равенство 9.1.37, будем называть *точками интегральной гладкости* функции $A(t)$. Дополнение $P_A \subset I$ ко множеству I_A точек интегральной гладкости локально-суммируемой на множестве I функции $A(t)$ имеет меру нуль (см. [71], с.101).

Теорема 9.1.2 *Если функция $A \in L_{loc}(I)$, то:*

1) для любого числа $t_1 \in I$ существует единственное непрерывное по $t \in I$ решение $W(t, t_1) \in \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ интегрального уравнения (9.1.4);

2) отображение $W : I \times I \to \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ непрерывно;

3) пусть точка $t_1 \in I$ и точка $\xi \in I$ является общей точкой интегральной гладкости функций $A(t)$ и $|A|(t)$, тогда функция $W(t, t_1)$ дифференцируема по аргументу t в точке ξ и справедливо равенство (9.1.2).

Доказательство. Справедливость утверждений 1) и 2) теоремы 9.1.2 вытекает из теоремы 9.1.1 и леммы 9.1.3. Перейдем к доказательству утверждения 3).

Если функция $A \in L_{loc}(I)$, то ([71], с.101) функция $|A|$ также локально суммируема на I и существует множество $P \subset I$ меры нуль, что в точках $t \in I \setminus P$ верно

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} A(\tau)\, d\tau = A(t), \tag{9.1.38}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} |A(\tau)|\, d\tau = |A(t)|. \tag{9.1.39}$$

Пусть функция $W(t,t_1)$ — решение интегрального уравнения (9.1.4), тогда в точке $t \in I \setminus P$ имеем

$$\frac{d}{dt}W(t,t_1) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} A(\tau)W(\tau,t_1)\, d\tau = \tag{9.1.40}$$

$$\left(\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} A(\tau)\, d\tau\right) W(t,t_1) + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} A(\tau)(W(\tau,t_1) - W(t,t_1))\, d\tau.$$

Первый предел в правой части (9.1.40) существует в силу (9.1.38). Второй предел в правой части (9.1.40) оценим следующим образом

$$\left|\frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} A(\tau)(W(\tau,t_1) - W(t,t_1))\, d\tau\right| \le \frac{1}{|h|} \left|\int\limits_t^{t+h} |A(\tau)|\, d\tau\right| \sup_{\tau\in I\cap[t-|h|,t+|h|]} |W(\tau,t_1) - W(t,t_1)| \tag{9.1.41}$$

Величина

$$\frac{1}{|h|} \left|\int\limits_t^{t+h} |A(\tau)|\, d\tau\right| = \left|\frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} |A(\tau)|\, d\tau\right| \left|\frac{\int_t^{t+h} A(\tau)\, d\tau}{h}\right| \tag{9.1.42}$$

имеет при $h \to 0$ предел согласно (9.1.39) и поэтому ограничена. В силу непрерывности функции $W(t,t_1)$

$$\lim_{h\to 0} \sup_{\tau\in I\cap[t-|h|,t+|h|]} |W(\tau,t_1) - W(t,t_1)| = 0. \tag{9.1.43}$$

Таким образом из (9.1.40) получаем равенство при $t \in I \setminus P$

$$\frac{d}{dt}W(t,t_1) = A(t)W(t,t_1). \quad \diamondsuit$$

9.1.4 Свойства функций $I_n(t,t_1)$ и функции $W(t,t_1)$.

Рассмотрим зависимость интегралов (9.1.28) от пределов интегрирования, т.е. введём интегралы

$$I_n(t,t_1) = \int\limits_{t_1}^{t} A(\xi_n) \int\limits_{t_1}^{\xi_n} A(\xi_{n-1}) \ldots \int\limits_{t_1}^{\xi_2} A(\xi_1)\, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n, \tag{9.1.44}$$

зависящие от аргументов $t \in [a,b]$, $t_1 \in [a,b]$ и определенные для натуральных номеров $n \in \mathbf{N}$. Определим также

$$I_0(t,t_1) \equiv E. \tag{9.1.45}$$

Из леммы 9.1.2 вытекает следующая оценка величины $I_n(t,t_1)$.

Следствие 9.1.2 *Для любых $t \in [a,b]$, $t_1 \in [a,b]$ и любого номера $n = 0,1,2,\ldots$ справедливо неравенство*

$$|I_n(t,t_1)| \leq \frac{M^n}{n!}. \tag{9.1.46}$$

Из интегрального представления (9.1.44) следует итерационная формула

$$I_n(t,t_1) = \int\limits_{t_1}^{t} A(\xi) I_{n-1}(\xi,t_1) d\xi, \tag{9.1.47}$$

справедливая для всех $t \in [a,b]$, $t_1 \in [a,b]$ и $n \in \mathbf{N}$.

Поменяем в интеграле (9.1.44) порядок интегрирования и запишем его в виде повторного интеграла

$$I_n(t,t_1) = \int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{\xi_1}^{t} \left(\int\limits_{\xi_2}^{t} \ldots \left(\int\limits_{\xi_{n-1}}^{t} A(\xi_n) A(\xi_{n-1}) \ldots A(\xi_1) d\xi_n \right) d\xi_{n-1} \ldots \right) d\xi_2 \right) d\xi_1. \tag{9.1.48}$$

Тогда получаем итерационную формулу

$$I_n(t,t_1) = \int\limits_{t_1}^{t} I_{n-1}(t,\xi) A(\xi) d\xi, \quad n \in \mathbf{N},\ t \in [a,b],\ t_1 \in [a,b]. \tag{9.1.49}$$

Используя представление (9.1.47) и неравенство (9.1.46), оценим приращение

$$|I_n(t',t_1) - I_n(t,t_1)| \leq \left| \int\limits_{t_1}^{t'} A(\xi) I_{n-1}(\xi,t_1)\, d\xi - \int\limits_{t_1}^{t} A(\xi) I_{n-1}(\xi,t_1)\, d\xi \right| \tag{9.1.50}$$

$$\leq \left| \int\limits_{t}^{t'} |A(\xi)| |I_{n-1}(\xi,t_1)|\, d\xi \right| \leq \left| \int\limits_{t}^{t'} |A(\xi)| d\xi \right| \frac{M^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Аналогично, используя представление (9.1.49) и неравенство (9.1.46), оценим приращение

$$|I_n(t,t_1') - I_n(t,t_1)| \leq \left| \int\limits_{t_1'}^{t} I_{n-1}(t,\xi) A(\xi)\, d\xi - \int\limits_{t_1}^{t} I_{n-1}(t,\xi) A(\xi)\, d\xi \right| \leq \tag{9.1.51}$$

$$\left| \int\limits_{t_1}^{t_1'} |I_{n-1}(t,\xi)| |A(\xi)|\, d\xi \right| \leq \left| \int\limits_{t_1}^{t_1'} |A(\xi)|\, d\xi \right| \frac{M^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Из неравенств (9.1.50) и (9.1.51) следует справедливость леммы.

Лемма 9.1.4 *Для любых t, t_1, t', t_1' из сегмента $[a,b]$ и любого номера $n \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство*

$$|I_n(t',t_1') - I_n(t,t_1)| \leq \left(\left| \int\limits_{t}^{t'} |A(\xi)|\, d\xi \right| + \left| \int\limits_{t_1}^{t_1'} |A(\xi)|\, d\xi \right| \right) \frac{M^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{9.1.52}$$

Итак, функции $I_n(t,t_1)$ определены и непрерывны на произведении $[a,b]\times[a,b]$ при любом $n=0,1,2,\ldots$. Функция $W(t,t_1)$ согласно теореме 9.1.1 есть сумма ряда

$$W(t,t_1)=\sum_{n=0}^{\infty} I_n(t,t_1) \tag{9.1.53}$$

сходящегося абсолютно и равномерно на произведении $[a,b]\times[a,b]$ к непрерывной функции $W(t,t_1)$. Из неравенств (9.1.52) следует оценка приращения функции $W(t,t_1)$.

Лемма 9.1.5 *Для любых t,t_1,t',t'_1 из сегмента $[a,b]$ справедливо неравенство*

$$|W(t',t'_1)-W(t,t_1)|\le\left(\left|\int\limits_{t}^{t'}|A(\xi)|\,d\xi\right|+\left|\int\limits_{t_1}^{t'_1}|A(\xi)|\,d\xi\right|\right)\exp(M). \tag{9.1.54}$$

Из итерационных Формул (9.1.47) и (9.1.48) следует справедливость леммы 9.1.6.

Лемма 9.1.6 *Для любых t,t_1 из сегмента $[a,b]$ справедливы равенства*

$$W(t,t_1)=E+\int\limits_{t1}^{t}A(\xi)W(\xi,t_1)\,d\xi, \tag{9.1.55}$$

$$W(t,t_1)=E+\int\limits_{t1}^{t}W(t,\xi)A(\xi)\,d\xi. \tag{9.1.56}$$

9.1.5 Существование предела в бесконечности функций $I_n(t,t_1)$ и функции $W(t,t_1)$.

Пусть функция $A(t)$ определена на неограниченном интервале $[a,+\infty[$ и

$$\int\limits_{a}^{\infty}|A(\xi)|\,d\xi=M<\infty. \tag{9.1.57}$$

Тогда продлим величины $I_n(t,t_1)$ на $[a,+\infty]$, допуская $t_1=+\infty$ и $t=+\infty$ в интегралах (9.1.44) и (9.1.48), существующих в силу условия (9.1.57). Доопределим $I_n(+\infty,+\infty)\equiv 0$, $n\in\mathbf{N}$. При таком продлении сохраняются неравенства (9.1.46) для всех t и t_1 из $[a,+\infty]$ и $n=0,1,2,\ldots$. В силу неравенства (9.1.52) леммы 9.1.4 продленная функция $I_n(t,t_1)$ будет непрерывна на $[a,+\infty]\times[a,+\infty]$, причём для всех t,t_1,t',t'_1 из $[a,+\infty]$ сохраняется неравенство (9.1.52).

Доопределим $W(t,t_1)$ на $[a,+\infty]\times[a,+\infty]$ как сумму ряда (9.1.53). В силу неравенства (9.1.46) ряд (9.1.53) сходятся равномерно и абсолютно и определяет непрерывную на $[a,+\infty]\times[a,+\infty]$ функцию, для которой справедливы неравенства (9.1.22), (9.1.54) и соотношения (9.1.55, 9.1.56).

Аналогичным образом, если функция $A(t)$ определена на неограниченном множестве $]-\infty,b]$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{b}|A(\xi)\,d\xi=M<\infty, \tag{9.1.58}$$

то функции $I_n(t,t_1)$ продолжаются интегралами (9.1.44, 9.1.48) на значениях $t=-\infty$ и $t_1=-\infty$ с сохранением непрерывности на $[-\infty,b]\times[-\infty,b]$ и сохранением основных соотношений (9.1.46, 9.1.47, 9.1.49, 9.1.52). Функция $W(t,t_1)$продолжается на $[-\infty,b]\times[-\infty,b]$ рядом (9.1.53), сходящимся абсолютно и равномерно на $[-\infty,b]\times[-\infty,b]$ и задающим непрерывную на $[-\infty,b]\times[-\infty,b]$ функцию с сохранением неравенств (9.1.22, 9.1.54) и соотношений (9.1.55, 9.1.56).

Пусть теперь функция $A(t)$ определена на всей вещественной прямой $\mathbf{R}=]-\infty,+\infty[$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|A(\xi)|\,d\xi=M<\infty. \tag{9.1.59}$$

Обозначим через $\bar{\mathbf{R}}=[-\infty,+\infty]$ компакт, топологически содержащий прямую $\mathbf{R}$. Тогда в силу вышесказанного справедливы следующие лемма 9.1.7 и теорема 9.1.3.

Лемма 9.1.7 *Пусть функция $A(t)$ определена и суммируема на $\mathbf{R}$ и выполнено соотношение (9.1.59). Тогда величины $I_n(t,t_1)$ определены формулами (9.1.44, 9.1.48) для всех $(t,t_1)\in\bar{\mathbf{R}}^2$ и непрерывны на $\bar{\mathbf{R}}^2$. На $\bar{\mathbf{R}}^2$ выполнены неравенства (9.1.46, 9.1.52) и соотношения (9.1.47, 9.1.49).*

Теорема 9.1.3 *Пусть функция $A(t)$ определена и суммируема на $\mathbf{R}$ и выполнено соотношение (9.1.59). Тогда ряд (9.1.53) сходится абсолютно и равномерно на $\bar{\mathbf{R}}^2$ и определяет непрерывную на $\bar{\mathbf{R}}^2$ функцию $W(t,t_1)$. Функция $W(t,t_1)$ удовлетворяет соотношениям (9.1.55, 9.1.56). Функция $W(t,t_1)$ удовлетворяет соотношению*

$$W(t_3,t_2)W(t_2,t_1)=W(t_3,t_1) \tag{9.1.60}$$

для любых t_1,t_2,t_3 из $\bar{\mathbf{R}}$. Справедливы неравенства (9.1.22) и (9.1.54) для любых значений аргументов из $\bar{\mathbf{R}}$. Функция $W(t,t_1)$ осуществляет непрерывное отображение $W:\bar{\mathbf{R}}^2\to\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$.

§9.2 Преобразование величины J_n к интегральному виду

В этом параграфе $t_1=0$, $t>0$.

В предыдущем параграфе мы выразили величину $J_n\in\mathbf{A}$ как полином от n интегралов $J_1,J_2,\dots J_n$ с рациональными коэффициентами. Далее в этом параграфе мы используем обозначения § 9.1 и § 8.5. В частности, для множеств $Q(e)\subset{\mathbf{R}_+}^n$ и $Q(f)\subset{\mathbf{R}_+}^n$, где $e,f\in P_n$, P_n — группа перестановок, для множества $\Pi_n(t)\equiv t[0,1]^n\subset\mathbf{R}^n$, $t\in\mathbf{R}_+$, и линейного представления $T(f)$ и линейного представления $Ta(f)$, так, что $Ta(f)\xi=(\xi_{i_1},\xi_{i_2},\dots\xi_{i_n})$, $T(f)\xi=(\xi_{j_1},\xi_{j_2},\dots\xi_{j_n})$ при $\xi\in\mathbf{R}^n$. Пусть $\chi_n(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)\equiv\chi_n(\xi)$ — характеристическая функция множества $Q(e)\subset\mathbf{R}^n$. Введём обозначение

$$A(i_k,i_{k-1},\dots i_1)\equiv A(\xi_{i_k})A(\xi_{i_{k-1}})\dots A(\xi_{i_1}), \tag{9.2.1}$$

а при $f\in P_n$

$$A(f)\equiv A(i_n,i_{n-1},\dots i_2,i_1). \tag{9.2.2}$$

Для преобразования суммы (9.1.41) сначала рассмотрим величину

$$Y(m,n) \equiv \sum_{\substack{k_m,\dots k_2,k_1\in\overline{1,n}\\ k_m+\dots+k_2+k_1=n}} I_{k_m}\dots I_{k_2}I_{k_1}. \tag{9.2.3}$$

Положим $s_1 = k_1, s_2 = k_1+k_2, \dots s_{m-1} = k_{m-1}+\dots+k_2+k_1, s_m = n$. Запишем интегралы для I_n вида (9.1.32) с помощью характеристических функций $\chi_k(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_k)$

$$I_k = \int\limits_{\Pi_k(t)}\!\!\cdots\!\!\int \chi_k(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_k)A(\xi_k)\dots A(\xi_2)A(\xi_1)\,d\xi_1 d\xi_2\dots d\xi_k. \tag{9.2.4}$$

Тогда

$$I_{k_m}\dots I_{k_2}I_{k_1} = \int\limits_{\Pi_k(t)}\!\!\cdots\!\!\int \chi_{k_m}(\xi_{s_{m-1}+1},\dots\xi_{n-1},\xi_n)\chi_{k_{m-1}}(\xi_{k_{m-2}+1},\dots\xi_{s_{m-1}-1},\xi_{s_{m-1}})\dots$$
$$\chi_{k_1}(\xi_1,\dots\xi_{s_1})A(e)\,d\xi_1 d\xi_2\dots d\xi_n. \tag{9.2.5}$$

Введём для набора $(m-1)$ натуральных чисел $s_1,s_2,\dots s_{m-1}\in\overline{1,n-1}$, $1\le s_1 < s_2 < \dots < s_{m-1} \le n-1$ множество перестановок $P_n^{m-1}(s_1,s_2,\dots s_{m-1})\subset P_n$ для которых каждая точка множества $\overline{1,n-1}\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{m-1}\{s_i\}$ есть точка подъема.

Лемма 9.2.1 . *Если $\xi \in \mathbf{R_+}^n$ точка, все координаты которой различны, и $(s_1,s_2,\dots s_{m-1})$ набор $m-1$ различных чисел из множества $\overline{1,(n-1)}$, расположенных в порядке возрастания, то справедливо равенство*

$$\chi_{k_m}(\xi_{s_{m-1}+1},\dots\xi_{n-1},\xi_n)\chi_{k_{m-1}}(\xi_{s_{m-2}+1},\dots\xi_{s_{m-1}})\dots\chi_{k_1}(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_{s_1}) = \tag{9.2.6}$$
$$\sum_{f\in P_n^{m-1}(s_1,s_2,\dots s_{m-1})}\chi_n(T(f)\xi).$$

Доказательство. Каждой точке $\xi\in\mathbf{R_+}^n$, все координаты которой различны, сопоставим инъективное отображение $\psi_\xi : \overline{1,n}\to\mathbf{R}_+$ по правилу $\psi_\xi(i)\equiv\xi_i$, $i\in\overline{1,n}$. Множество $\psi_\xi(\overline{1,n})\subset\mathbf{R}_+$ состоит из n различных элементов. Существует единственный монотонный изоморфизм $\varphi_\xi : \overline{1,n}\to\psi_\xi(\overline{1,n})$. Положим $f_\xi\equiv\varphi_\xi^{-1}\psi_\xi$, тогда f_ξ принадлежит группе перестановок P_n.

Левая часть равенства (9.2.6) может принимать значения 0 и 1. Значение 1 она принимает тогда и только тогда, когда выполнено m систем неравенств

$$\begin{cases} 0<\xi_1<\xi_2<\dots<\xi_{s_1};\\ \xi_{s_1+1}<\dots<\xi_{s_2-1}<\xi_{s_2};\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \xi_{s_{m_1}+1}<\xi_{s_{m-1}+2}<\dots<\xi_n. \end{cases} \tag{9.2.7}$$

Каждая из систем неравенств (9.2.7) эквивалентна монотонности функции ψ_ξ на множествах $X_1\equiv\overline{1,s_1}, X_2\equiv\overline{s_1+1,s_2},\dots X_m\equiv\overline{s_{m-1}+1,s_m}$, соответственно, а так как отображение φ_ξ — монотонный изоморфизм, то выполнение системы неравенств (9.2.7) эквивалентно монотонности отображения f_ξ на каждом из подмножеств $X_1\subset\overline{1,n}, X_2\subset\overline{1,n},\dots X_m\subset\overline{1,n}$.

Вывод 1: Левая часть равенства (9.2.6) принимает значение 1 тогда и только тогда, когда $f_\xi \in P_n^{m-1}(s_1, s_2, \dots s_{m-1})$.

Величина $\chi_n(T(f)\xi)$ принимает значение 1 тогда и только тогда, когда $T(f)\xi \in Q(e)$, т.е. тогда и только тогда, когда отображение $\theta : \overline{1,n} \to \mathbf{R}_+$ вида $\theta(i) = \xi_{f^{-1}(i)} = \psi_\xi(f^{-1}(i))$, $i \in \overline{1,n}$, является монотонным изоморфизмом. По построению $\psi_\xi = \varphi_\xi f_\xi$, поэтому $\theta = \varphi_\xi f_\xi f^{-1}$. Так как отображение φ_ξ — монотонный изоморфизм, то отображение θ — монотонный изоморфизм тогда и только тогда, когда перестановка $f_\xi f^{-1} \in P_n$ является монотонным изоморфизмом, т.е. когда $f_\xi f^{-1} = e$ или $f_\xi = f$.

Вывод 2: Правая часть равенства (9.2.6) равна 1 тогда и только тогда, когда $f_\xi \in P_n^{m-1}(s_1, s_2, \dots s_{m-1})$.

Из выводов (9.2.1) и (9.2.2) следует справедливость леммы. ◊

Возвращаясь к равенству (9.2.5), получаем на основании леммы 9.2.1

$$I_{k_m} \dots I_{k_2} I_{k_1} = \int\!\!\cdots\!\!\int\limits_{\Pi_n(t)} \left(\sum_{f \in P_n^{m-1}(s_1, s_2, \dots s_{m-1})} \chi_n(T(f)\xi) \right) A(e)\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n. \tag{9.2.8}$$

Далее заметим, что существует лишь одно множество $P_n^{n-1}(s_1, s_2, \dots s_{n-1}) = P_n^{n-1}(1, 2, \dots n-1) = P_n$. По определению положим также $P_n^0 \equiv \{e\}$. Подставим теперь (9.2.8) в (9.2.3) и получим

$$Y(m,n) = \int\!\!\cdots\!\!\int\limits_{\Pi_n(t)} \left(\sum_{1 \le s_1 < s_2 < \dots s_{m-1} \le n-1} \left(\sum_{f \in P_n^{m-1}(s_1, s_2, \dots s_{m-1})} \chi_n(Y(f)\xi) \right) \right) A(e)\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n. \tag{9.2.9}$$

Проведём замену переменных $\eta = T(f)\xi$ в интеграле

$$\int\!\!\cdots\!\!\int\limits_{\Pi_n(t)} \chi_n(T(f)\xi) A(\xi_n) \dots A(\xi_2) A(\xi_1)\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n = \tag{9.2.10}$$

$$\int\!\!\cdots\!\!\int\limits_{\Pi_n(t)} \chi_n(\eta) A((T^{-1}(f)\eta)_n) \dots A((T^{-1}(f)\eta)_2) A((T^{-1}(f)\eta)_1)\, d\eta_1 d\eta_2 \dots d\eta_n =$$

$$\int\!\!\cdots\!\!\int\limits_{\Pi_n(t)} \chi_n(\xi) A(f)\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n = \int\!\!\dots\!\!\int\limits_{Q(e)\cap\Pi_n(t)} A(f)\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

Выражение (9.1.41) для J_n с учётом (9.2.9, 9.2.10) преобразуется к виду

$$J_n = \int\!\!\dots\!\!\int\limits_{Q(e)\cap\Pi_n(t)} \left(A(e) - \frac{1}{2} \sum_{1 \le s_1 \le n-1} \sum_{f \in P_n^1(s_1)} A(f) + \frac{1}{3} \sum_{1 \le s_1 < s_2 \le n-1} \sum_{f \in P_n^2(s_1, s_2)} A(f) + \dots \right. \tag{9.2.11}$$
$$\left. + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{1 \le s_1 < s_2 < \dots < s_n \le n-1} \sum_{f \in P_n^{n-1}(s_1, s_2, \dots s_{n-1})} A(f) \right) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

Введём сумму $S_n \in \mathbf{A}$ вида

$$S_n \equiv A(e) - \frac{1}{2} \sum_{1 \le s_1 \le n-1} \sum_{f \in P_n^1(s_1)} A(f) + \frac{1}{3} \sum_{1 \le s_1 < s_2 \le n-1} \sum_{f \in P_n^2(s_1, s_2)} A(f) + \dots \tag{9.2.12}$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{1\le s_1<s_2<\dots s_{n-1}\le n-1}\ \sum_{f\in P_n^{n-1}(s_1,s_2,\dots s_{n-1})}A(f)\equiv\sum_{f\in P_n}a(f)A(f),$$

где $a(f)\in\mathbf{R}$ — рациональные числа. Следующая наша задача — сосчитать числа $a(f)$, $f\in P_n$.

В обозначениях § 8.5 для $f\in P_n$ величина $u(f)$ — число подъёмов, $h(f)$ — число спадов. В обозначениях § 8.4 $V(n,k)$ — числа Винокурова.

Лемма 9.2.2 . *Для любой перестановки $f\in P_n$ верно*

$$a(f)=V(n,u(f)). \tag{9.2.13}$$

Доказательство. Выделим все точки спада $\{z_1,z_2,\dots z_r\}\equiv Z(f)$ перестановки $f\in p_n$ с числами спадов $r\in\overline{0,(n-1)}$. Получим подмножество $Z(f)\subset\overline{1,n}$. Перестановка $f\in P_n^k(s_1,s_2,\dots s_k)$ тогда и только тогда, когда справедливо включение множеств $Z(f)\subset\{s_1,s_2,\dots s_k\}$. Поэтому

$$a(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\sum_{\substack{1\le s_1<s_2<\dots s_k\le n-1\\ Z(f)\subset\{s_1,s_2,\dots s_k\}}}1(s_1,s_2,\dots s_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}C(n-1-r,k-r)=$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}C(n-1-r,n-(k+1))=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C(n-1-r,n-k)=$$

$$\cot\Big((1+x)^{n-1-r}\ln(1+x);x;n\Big)=V(n,n-1-r)=V(n,u(f)).\quad\diamondsuit$$

Сумма S_n вида (9.2.12) является однородным полиномом степени n от n величин $A(n),\dots A(2),A(1)\in\mathbf{A}$, более того, суммой всевозможных перестановок n сомножителей $A(n),\dots A(2),A(1)\in\mathbf{A}$. Наша следующая задача — показать, что S_n — однородный лиев полином степени n от n переменных $A(n),\dots A(2),A(1)\in\mathbf{A}$.

§9.3 Групповая алгебра группы перестановок P_n. Функционалы $D(f)$ и $D_k(f)$

9.3.1 Групповая алгебра $\mathcal{A}P_n$ и линейное отображение $\mathrm{Lor}:\mathcal{A}P_n\to\mathbf{A}$.

Для любой группы Gr введём групповую алгебру $\mathcal{A}Gr$ над группой Gr над полем $\mathbf{R}$ следующим образом. Элементы $a\in\mathcal{A}Gr$ — всевозможные линейные комбинации $a\equiv\sum\limits_{g\in Gr}\lambda(g)g$, где $\lambda(g)\in\mathbf{R}$ и лишь конечное число скаляров $\lambda(g)\ne 0$ при $g\in Gr$. Умножение элементов $a\equiv\sum\limits_{g\in Gr}\lambda'(g)g$ и $b\equiv\sum\limits_{f\in Gr}\lambda''(f)f$ определяется по правилу

$$ab=\sum_{g\in Gr}\lambda'(g)g\sum_{f\in Gr}\lambda''(f)f=\sum_{g\in Gr,f\in Gr}\lambda'(g)\lambda''(f)gf=\sum_{q\in Gr}\lambda(q)q.$$

$\mathcal{A}Gr$ — унитальная алгебра для любой группы Gr. Элементы группы Gr естественно вкладываются в алгебру $\mathcal{A}Gr$ по правилу $g\mapsto\sum\limits_{f\in Gr}\lambda_g(f)f$, где $\lambda_g(f)=\begin{cases}1 & , \quad f=g,\\ 0 & , \quad f\ne g,\end{cases}$

причём единица группы e при этом вложении становится единицей алгебры e и мы сохраняем за ней то же обозначение. Множество $Gr \subset \mathcal{A}Gr$ образует линейный базис Гаммеля алгебры $\mathcal{A}Gr$.

Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}P_n$ над группой перестановок P_n. Зафиксируем n элементов $A(n), \dots A(2), A(1)$ банаховой алгебры $\mathbf{A}$ и введём линейное отображение $\mathrm{Lor} : \mathcal{A}P_n \to \mathbf{A}$, определенное на элементах линейного базиса $P_n \subset \mathcal{A}P_n$ правилом: для $f \in P_n$

$$\mathrm{Lor}\,(f) \equiv A(f(n)) \dots A(f(2))A(f(1)). \tag{9.3.1}$$

По построению полином $S_n \in \mathbf{A}$ (9.2.12) представим в виде $S_n = \mathrm{Lor}\,(\mathcal{S}a_n)$, где $\mathcal{S}a_n \in \mathcal{A}P_n$ — следующий элемент

$$\mathcal{S}a_n \equiv \sum_{f \in P_n} a(f) f. \tag{9.3.2}$$

9.3.2 Прообразы элементов $A(f)$ и $A[f]$ при отображении Lor.

Для элемента $f \in P_n$ введём обозначения:

$$\overset{k}{A}(f) \equiv A(f(k)) \dots A(f(2))A(f(1)), \quad k \in \overline{1, n}, \tag{9.3.3}$$

$$\overset{k}{A}[f] \equiv [A(f(k)), \dots [A(f(3)), [A(f(2)), A(f(1))\underbrace{]] \dots]}_{k-1}, \quad k \in \overline{2, n}, \tag{9.3.4}$$

где $[A, B] \equiv AB - BA$ при $A, B \in \mathbf{A}$. По определению $\overset{n}{A}(f) \equiv A(f)$ и $\overset{n}{A}[f] \equiv A[f]$. Введём линейные отображения $\overset{k}{\mathrm{Lor}} : \mathcal{A}P_n \to \mathbf{A}$, $k \in \overline{1, n}$, определенные на элементах линейного базиса $f \in P_n$ по правилу

$$\overset{k}{\mathrm{Lor}}\,(f) \equiv \overset{k}{A}(f), \; k \in \overline{1, n}, \; f \in P_n. \tag{9.3.5}$$

По построению $\overset{n}{\mathrm{Lor}} \equiv \mathrm{Lor}$.

Введём $(n-1)$ элементов $g_2, g_3, \dots g_n \in P_n$, задавая их согласно п. 8.5.3 набором значений в точке $1, 2, \dots n$. А именно,

$$g_2 \equiv (2, 1, 3, 4, 5, \dots n), g_3 \equiv (3, 1, 2, 4, 5, 6, \dots n), \dots \tag{9.3.6}$$

$$g_k \equiv (\underbrace{k, 1, 2, \dots, k-1}_{k}, k+1, k+2, \dots n), \quad k \in \overline{2, n}.$$

Каждое отображение g_k на подмножестве $\overline{k+1, n} \subset \overline{1, n}$ совпадает с тождественным отображением. Точки $f \in \mathcal{A}P_n$ по построению являются прообразами точек $\overset{k}{A}(f) \in \mathbf{A}$ при отображении $\overset{k}{\mathrm{Lor}}$ — формула (9.3.5). Предъявим теперь прообразы точек $\overset{k}{A}[f] \in \mathbf{A}$ при отображении $\overset{k}{\mathrm{Lor}}$.

Лемма 9.3.1 *Для любого числа $k \in \overline{2, n}$ и любой перестановки $f \in P_n$ верно равенство*

$$\mathrm{Lor}^k(f(e - g_2)(e - g_3) \dots (e - g_k)) = \overset{k}{A}[f]. \tag{9.3.7}$$

Доказательство индукцией по $k = 2, 3, \dots n$. При $k = 2$ имеем

$$\overset{2}{\mathrm{Lor}}\ (f(e - g_2)) = \overset{2}{\mathrm{Lor}}\ (f - fg_2) = \overset{2}{\mathrm{Lor}}\ (f) - \overset{2}{\mathrm{Lor}}\ (fg_2) =$$

$$A(f(2))A(f(1)) - A(fg_2(2))A(fg_2(1)) = A(f(2))A(f(1)) - A(f(1))A(f(2)) = \overset{2}{A}\ [f].$$

Пусть соотношение (9.3.7) верно при $k \in \overline{2, (n-1)}$, покажем, что тогда оно верно и при замене k на $k + 1$.

Элемент алгебры $\mathcal{A}P_n$ допускает единственное представление в виде линейной комбинации элементов из P_n, поэтому

$$(e - g_2)(e - g_3) \dots (e - g_k) = \sum_{t \in Us} \lambda(t) t, \tag{9.3.8}$$

где $Us \subset P_n$ и множество Us содержит лишь такие элементы $t \in P_n$, которые на подмножестве $\overline{k+1, n} \subset \overline{1, n}$ совпадают с тождественным отображением $e \in P_n$. Для любого $f \in P_n$ имеем

$$\overset{k+1}{\mathrm{Lor}}\ (f(e - g_2)(e - g_3) \dots (e - g_k)) = \overset{k+1}{\mathrm{Lor}} \left(\sum_{t \in Us} \lambda(t) f t \right) = \sum_{t \in Us} \lambda(t)\ \overset{k+1}{\mathrm{Lor}}\ (ft) = \tag{9.3.9}$$

$$\sum_{t \in Us} \lambda(t) A(ft(k+1)) \left(A(ft(k)) \dots A(ft(2)) A(ft(1)) \right) =$$

$$\sum_{t \in Us} \lambda(t) A(f(k+1)) A(ft(k)) \dots A(ft(2)) A(ft(1)) =$$

$$A(f(k+1)) \sum_{t \in Us} \lambda(t)\ \overset{k}{A}\ (ft) = A(f(k+1)) \sum_{t \in Us} \lambda(t)\ \overset{k}{\mathrm{Lor}}\ (ft) =$$

$$A(f(k+1))\ \overset{k}{\mathrm{Lor}} \left(f \sum_{t \in Us} \lambda(t) t \right) = A(f(k+1))\ \overset{k}{\mathrm{Lor}}\ (f(e - g_2)(e - g_3) \dots (e - g_k)) .$$

Аналогичным образом,

$$\overset{k+1}{\mathrm{Lor}}\ (f(e - g_2)(e - g_3) \dots (e - g_k) g_{k+1}) = \tag{9.3.10}$$

$$\overset{k+1}{\mathrm{Lor}} \left(f \left(\sum_{t \in Us} \lambda(e) t \right) g_{k+1} \right) = \sum_{t \in Us} \lambda(t)\ \overset{k+1}{\mathrm{Lor}}\ (ftg_{k+1}) =$$

$$\sum_{t \in Us} \lambda(t) A(ftg_{k+1}(k+1)) (A(ftg_{k+1}(k)) \dots A(ftg_{k+1}(2)) A(ftg_{k+1}(1)) =$$

$$\sum_{t \in Us} \lambda(t) A(ft(k)) A(ft(k-1)) \dots A(ft(1)) A(ft(k+1)) =$$

$$\left(\sum_{t \in Us} \lambda(t)\ \overset{k}{A}\ (ft) \right) A(f(k+1)) = \overset{k}{\mathrm{Lor}}\ (f(e - g_2)(e - g_3) \dots (e - g_k)) A(f(k+1)).$$

Из соотношений (9.3.9, 9.3.10) получаем

$$\overset{k+1}{\mathrm{Lor}}\ (f(e - g_2)(e - g_3) \dots (e - g_{k+1})) = \tag{9.3.11}$$

$$\overset{k+1}{\mathrm{Lor}}\ (f(e - g_2)(e - g_3) \dots (e - g_k)) - \overset{k+1}{\mathrm{Lor}}\ (f(e - g_2)(e - g_3) \dots (e - g_k) g_{k+1}) =$$

$$[A(f(k+1)), \overset{k}{\mathrm{Lor}}\ (f(e - g_2)(e - g_3) \dots (e - g_k))].$$

Из соотношения (9.3.11) и предположения индукции следует справедливость леммы. $\diamondsuit$

Следствие 9.3.1 *Справедливо утверждение*

$$\forall f \in P_n \mid \ \mathrm{Lor}\,(f(e-g_2)(e-g_3)\dots(e-g_n)) = A[f]. \tag{9.3.12}$$

Наряду с элементом $\mathcal{S}a_n \in \mathcal{AP}_n$ вида (9.3.2) введём элемент $\mathcal{K}a_n \in \mathcal{AP}_n$ вида

$$\mathcal{K}a_n \equiv \left(\sum_{f\in P_n} a(f)f\right)(e-g_2)(e-g_3)\dots(e-g_n) = \mathcal{S}a_n\cdot(e-g_2)(e-g_3)\dots(e-g_n). \tag{9.3.13}$$

Согласно (9.3.12) $\mathrm{Lor}\,(\mathcal{K}a_n) = \sum\limits_{f\in P_n} a(f)A[f] \equiv K_n \in \mathbf{A}$. Наша задача показать, что

$$K_n = nS_n, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{9.3.14}$$

для чего в силу линейности отображения Lor достаточно доказать, что элементы $\mathcal{K}a_n \in \mathcal{AP}_n$ и $\mathcal{S}a_n \in \mathcal{AP}_n$ связаны равенством

$$\mathcal{K}a_n = n\ \mathcal{S}a_n, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{9.3.15}$$

9.3.3 Изучение элемента $\mathcal{K}a_n \in \mathcal{AP}_n$. Функционалы D и D_k на группе P_n. В этом пункте натуральное число n, отмечающее группу P_n, фиксировано и поэтому опускается в индексах у элементов $\mathcal{S}a_n \equiv \mathcal{S}a$ и $\mathcal{K}a_n \equiv \mathcal{K}a$.

Преобразуем элемент $\mathcal{K}a \in \mathcal{AP}_n$:

$$\mathcal{K}a = \mathcal{S}a(e-g_2)(e-g_3)\dots(e-g_n) = \tag{9.3.16}$$

$$\mathcal{S}a\left(e - \sum_{i_1=2}^{n} g_{i_1} + \sum_{2\le i_1<i_2\le n} g_{i_1}g_{i_2} + (-1)^3 \sum_{2\le i_1<i_2<i_3\le n} g_{i_1}g_{i_2}g_{i_3} + \dots\right.$$
$$\left. +(-1)^k \sum_{2\le i_1<i_2<\dots i_k\le n} g_{i_1}g_{i_2}\dots g_{i_k} + \dots + (-1)^{n-1}g_2g_3\dots g_n\right).$$

Введём элементы $H_k \in \mathcal{AP}_n$, $k = 0, 1, \dots n-1$ вида

$$\begin{cases} H_0 & \equiv & \mathcal{S}a\cdot e; \\ H_1 & \equiv & \mathcal{S}a\cdot\left(\sum\limits_{2\le i_1\le n} g_{i_1}\right); \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ H_k & \equiv & \mathcal{S}a\cdot\left(\sum\limits_{2\le i_1<i_2<\dots i_k<n} g_{i_1}g_{i_2}\dots g_{i_k}\right). \end{cases} \tag{9.3.17}$$

Теперь наша задача доказать, что

$$H_k = (-1)^k H_0 = (-1)^k\ \mathcal{S}a, \quad k \in \overline{0, n-1}. \tag{9.3.18}$$

Если выполнено (9.3.18), то будет

$$\mathcal{K}a = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k H_k = n\ \mathcal{S}a,$$

т.е. будет доказано соотношение (9.3.15. Преобразуем элемент $H_k \in AP_n$:

$$H_k \equiv \; Sa \cdot \left(\sum_{2 \le i_1 < i_2 < \dots i_k < n} g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n} \right) = \left(\sum_{f \in P_n} a(f) f \right) \left(\sum_{2 \le i_1 < i_2 < \dots i_k < n} g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n} \right) = \tag{9.3.19}$$

$$\sum_{2 \le i_1 < i_2 < \dots i_k < n} \left(\sum_{f \in P_n} a(f) f g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n} \right).$$

При фиксированном наборе индексов $i_1, i_2, \dots i_n$ произведение $g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n}$ — фиксированный элемент группы P_n, поэтому, когда элемент f пробегает всю группу P_n элемент $f' = f \cdot (g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n})$ также пробегает всю группу P_n. Преобразуем следующую сумму

$$\sum_{f \in P_n} a(f) f (g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n}) = \sum_{f' \in P_n} a(f' (g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n})^{-1}) f' = \sum_{f \in P_n} a(f (g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n})^{-1}) f. \tag{9.3.20}$$

Подставив (9.3.20) в (9.3.19) получаем

$$H_k = \sum_{2 \le i_1 < i_2 < \dots i_k < n} \; \sum_{f \in P_n} a(f (g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n})^{-1}) f = \tag{9.3.21}$$

$$\sum_{f \in P_n} \left(\sum_{2 \le i_1 < i_2 < \dots i_k < n} a(f (g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n})^{-1}) \right) f.$$

Введём теперь n функционалов $D_k : P_n \to \mathbf{R}$, $k = 1, 2, \dots n-1$ на группе P_n:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} D_0(f) & \equiv & a(f); \\ D_1(f) & \equiv & \sum\limits_{2 \le i_1 \le n} a(f(g_{i_1})^{-1}); \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_k(f) & \equiv & \sum\limits_{2 \le i_1 < i_2 < \dots i_k \le n} a(f(g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_k})^{-1}). \end{array} \right. \tag{9.3.22}$$

По определению

$$H_k = \sum_{f \in P_n} D_k(f) f, \quad k \in \overline{0, n-1}. \tag{9.3.23}$$

Равенства (9.3.18) будут доказаны, если мы докажем, что при любом $k \in \overline{0, n-1}$ и любом $f \in P_n$ верно

$$D_k(f) = (-1)^k D_0(f). \tag{9.3.24}$$

Свойство (9.3.24) функционалов $D_k(f)$ мы докажем в следующем параграфе, а пока сформулируем некоторые свойства отображений $g_k \in P_n$, $k \in \overline{2, n}$.

9.3.4 Свойства перестановок $g_i \in P_n$.

Согласно формуле (9.3.6) отображение $g_i \in P_n$, $i \in \overline{2, n}$ имеет вид

$$g_i = (i, 1, 2, \dots i-1, i+1, i+2, \dots n), \tag{9.3.25}$$

т.е.

$$g_i(j) = \left\{ \begin{array}{lcl} i & , & j = 1; \\ j-1 & , & j \in \overline{2, i}; \\ j & , & j \in \overline{i+1, n}. \end{array} \right.$$

В частности, отображение g_i монотонно на множестве $\overline{2,n}$. Обратное отображение g_i^{-1} равно

$$g_i^{-1} = (2, 3, \dots i, 1, i+1, i+2, \dots n). \tag{9.3.26}$$

Число спадов $h(g_i) = 1$ и $h(g_i^{-1}) = 1$ при любом $i \in \overline{2,n}$.

Пусть $2 \le i_1 < i_2 \le n$. Рассмотрим суперпозицию $g_{i_1} g_{i_2}$. Имеем

$$g_{i_1} g_{i_2} = (g_{i_1} g_{i_2}(1), g_{i_1} g_{i_2}(2), \dots g_{i_1} g_{i_2}(n)) = g_{i_1}(i_2, 1, 2, \dots i_2 - 1, i_2 + 1, i_2 + 2, \dots n) =$$

$$(i_2, i_1, 1, \dots, i_2 + 1, i_2 + 2, \dots n).$$

Здесь на месте 1 стоит i_2, на месте 2 — i_1, а далее места $3, 4, \dots n$ занимают $n-2$ числа множества $\overline{1,n} \setminus \{i_1, i_2\}$, расположенные в порядке возрастания. В общем случае $2 \le i_1 < i_2 < \dots i_k \le n$ будет

$$g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_k} = (i_k, i_{k-1}, \dots i_2, i_1, 1, \dots n), \tag{9.3.27}$$

где первые k мест занимают числа $i_1, i_2, \dots i_k$, взятые в обратном порядке, на $k+1$ месте стоит 1 и места с $k+1$ по n занимают $n-k$ чисел множества $\overline{1,n} \setminus \{i_1, i_2, \dots i_k\}$, взятые в порядке возрастания. Обратный элемент будет равен

$$(g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_k})^{-1} = (k+1, \dots, k, \dots, k-1, \dots, 2, \dots, 1, i_k + 1, i_k + 2, \dots n). \tag{9.3.28}$$

Здесь на месте i_k стоит 1, на месте i_{k-1} — 2, и т.д., на месте i_1 — k, на месте 1 — $k+1$ и места с номерами $\overline{1,n} \setminus \{i_1, i_2, \dots i_k\}$ занимают числа множества $\overline{k+1,n}$, взятые в порядке возрастания.

У отображения $g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_k}$ точками спада являются k точек $1, 2, \dots k$ и число спадов $h(g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_k}) = k$. У отображения $(g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_k})^{-1}$ точками спада являются k точек $i_1 - 1, i_2 - 1, \dots i_k - 1$ и число спадов $h((g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_k})^{-1}) = k$.

§9.4 Доказательство формулы $D_k(f) = (-1)^k D_0(f)$

Настоящий параграф посвящен доказательству формулы $D_k(f) = (-1)^k D_0(f)$ для произвольной перестановки $f \in P_n$ и произвольного числа $k \in \overline{0,(n-1)}$. На протяжении параграфа фиксируется натуральное число $n \in \mathbf{N},\ n \ge 2$, натуральное число $k \in \overline{1,(n-1)}$ и элемент $f \in P_n$.

9.4.1 Вспомогательные обозначения.

Через $i_1, i_2, \dots, i_k$ в этом параграфе обозначается набор k натуральных чисел,таких что $2 \le i_1 < i_2 < \dots i_k \le n$. Каждое из чисел $i_1, i_2, \dots i_k$ может принимать значения в пределах

$$\left\{ \begin{array}{ccccll} 2 & \le & i_1 & \le & n-k+1 & \equiv n_1, \\ 3 & \le & i_2 & \le & n-k+2 & \equiv n_2, \\ \dots\dots & . & .. & . & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots, \\ m+1 & \le & i_m & \le & n-k+m & \equiv n_m, \\ \dots\dots & . & .. & . & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots, \\ k+1 & \le & i_k & \le & n & \equiv n_k. \end{array} \right. \tag{9.4.1}$$

По определению полагаем $i_0 \equiv 1$.

Через $\mathrm{fr}\,[i_1, i_2, \dots i_k] \in P_n$ обозначаем перестановку

$$\mathrm{fr}\,[i_1, i_2, \dots i_k] \equiv f \cdot (g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_k})^{-1} \in P_n\,. \tag{9.4.2}$$

Согласно формуле (9.3.28)

$$\mathrm{fr}\,[i_1, i_2, \dots, i_k] = \begin{pmatrix} f(k+1), & f(k+2), & \dots & f(k), & f(i_1+k), & f(i_1+k+1), & \dots \\ 1 & 2 & \dots & i_1 & (i_1+1) & (i_1+2) & \dots \end{pmatrix} \tag{9.4.3}$$

$$\begin{matrix} f(k-1), & f(i_2+k-1), & \dots & f(1), & f(i_k+1), & \dots & f(n-1), & f(n)) \,. \\ i_2 & (i_2+1) & \dots & i_k & (i_k+1) & \dots & (n-1) & n \end{matrix}$$

Через $\mathrm{fr}\,[i_1, i_2, \dots i_m]$ при $m \in \overline{1, k-1}$ мы обозначаем сужение отображения $\mathrm{fr}\,[i_1, i_2, \dots i_k]$ со множества $\overline{1,n}$ на множество $\overline{1,n} \setminus \{i_{m+1}, i_{m+2}, \dots i_k\}$. Через fr обозначаем сужение отображения $\mathrm{fr}\,[i_1, i_2, \dots i_k]$ на множество $\overline{1,n} \setminus \{i_1, i_2, \dots i_k\}$.

Введём следующие значения функционала подъёмов из §8.5:

$$u[i_1, i_2, \dots i_m] \equiv u(\,\mathrm{fr}\,[i_1, i_2, \dots i_m]), \tag{9.4.4}$$

$$\mathrm{ur} \equiv u(\,\mathrm{fr}\,). \tag{9.4.5}$$

Введём также обозначение

$$\mathrm{us}\,(l_1, l_2, \dots l_p) \equiv u(f(l_1, l_2, \dots l_p)) \tag{9.4.6}$$

при $p \in \overline{1,n}$ и $l_i \in \overline{1,n}$ при $i \in \overline{1,p}$.

Введём числа

$$\theta_m(i_1, i_2, \dots i_m) \equiv u[i_1, i_2, \dots i_m] - u[i_1, i_2, \dots i_{m-1}] = \tag{9.4.7}$$

$$u(\,\mathrm{fr}\,[i_1, i_2, \dots i_m]) - u(\,\mathrm{fr}\,[i_1, i_2, \dots i_{m-1}]).$$

Согласно (9.4.3) и определению отображения $\mathrm{fr}\,[i_1, i_2, \dots i_m]$ для значения функционала числа подъёмов имеем

$$u[i_1, i_2, \dots i_m] = \mathrm{us}\,\Big(\begin{matrix} (k+1), & (k+2), & \dots k, & (i_1+k), & \dots (k-1), & (i_2+k-1), & \dots \\ 1 & 2 & \dots i_1 & (i_1+1) \dots & i_2 & (i_2+1) & \dots \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} (k-m+2), & (i_{m-1}+1+k-(m-1)), & \dots (k-m+1), & (i_m+1+(k-m)), & \dots \\ i_{m-1} & i_{m-1}+1 & \dots \quad i_m & i_m+1 & \dots \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} (n-1), & n \\ (n-(k-m)-1) & (n-(k-m)) \end{matrix}\Big). \tag{9.4.8}$$

В силу аддитивности функционала подъёмов для разности $\theta_m \equiv \theta_m(i_1, i_2, \dots i_m)$ справедлива формула

$$\theta_m = \begin{cases} \mathrm{us}\,(k-m+2, k-m+1), \quad i_{m-1} = n_{-1}; \\ \mathrm{us}\,(k-m+2, k-m+1, i_m+1(k-m)) - \mathrm{us}\,(k-m+2, i_m+1+(k-m))\,, \\ \qquad\qquad (i_{m-1} < n_{m-2}) \bigwedge (i_m = i_{m-1}+1); \\ \mathrm{us}\,(i_m+k-m, k-m+1, i_m+1+k-m) - \mathrm{us}\,(i_m+k-m, i_m+1+k-m), \\ \qquad\qquad (i_{m-2} < n_{m-1}) \bigwedge (i_{m-1}+1 < i_m < n_m); \\ \mathrm{us}\,(i_m+k-m, k-m+1), \quad (i_{m-1} < n_{m-1}) \bigwedge (i_m = n_m). \end{cases} \tag{9.4.9}$$

Так как отображение $\mathrm{fr}\,[i_1, i_2, \ldots i_{m-1}]$ получается из отображения $\mathrm{fr}\,[i_1, i_2, \ldots i_m]$ удалением из области определения одной точки i_m, то из леммы 8.5.2 следует, что величина $\theta_m(i_1, i_2, \ldots i_m)$ принимает значения 0 и 1.

По индукции определяем величины $Q_k, Q_{k-1}, \ldots Q_0$ следующим образом :

$$Q_k(i_1, i_2, \ldots i_k) \equiv V(n, u[i_1, i_2, \ldots i_k]), \tag{9.4.10}$$

$$Q_{m-1}(i_1, i_2, \ldots i_{m-1}) \equiv \sum_{i_m=i_{m-1}+1}^{n_m} Q_m(i_1, i_2, \ldots i_m), \quad m \in \overline{1, k}. \tag{9.4.11}$$

По построению $D_k(f) \equiv Q_0$.

9.4.2 Введение величин $b_m(j; i_1, i_2, \ldots i_m)$ и их свойства.

Приведём теперь величины $Q_m(i_1, i_2, \ldots i_m)$ к следующему специальному виду при $m \in \overline{0, k}$

$$Q_m(i_1, i_2, \ldots i_m) = \sum_{j=0}^{k-m} b_m(j; i_1, i_2, \ldots i_m) V(n-j, u[i_1, i_2, \ldots i_m]). \tag{9.4.12}$$

В самом деле по определению верно (9.4.10) , то есть

$$Q_k(i_1, i_2, \ldots i_k) = \sum_{j=0}^{0} b_k(j; i_1, i_2, \ldots i_k) V(n-j, u[i_1, i_2, \ldots]),$$

если положить

$$B_k(0; i_1, i_2, \ldots i_k) \equiv 1. \tag{9.4.13}$$

Далее строим представление (9.4.12) по индукции от $m = k$ к $m = 0$. Если верно (9.4.12) при данном $m > 0$, то

$$Q_{m-1}(i_1, i_2, \ldots i_{m-1}) = \sum_{i_m=i_{m-1}+1}^{n_m} Q_m(i_1, i_2, \ldots i_m) = \tag{9.4.14}$$

$$\sum_{i_m=i_{m-1}+1}^{n_m} \sum_{j=0}^{k-m} b_k(j; i_1, i_2, \ldots i_m) V(n-j, u[i_1, i_2, \ldots i_m]).$$

По определению величины $\theta_m(i_1, i_2, \ldots i_m)$ — формула (9.4.7) и по следствию 8.5.1 верно

$$V\,(n-j, u[i_1, i_2, \ldots i_m]) = V\,(n-j, u[i_1, i_2, \ldots i_{m-1}] + \theta_m(i_1, i_2, \ldots i_m)) = \tag{9.4.15}$$

$$V\,(n-j, u[i_1, i_2, \ldots i_{m-1}]) + \theta_m(i_1, i_2, \ldots i_m) V\,(n-j-1, u[i_1, i_2, \ldots i_{m-1}])\,.$$

Подставим (9.4.15) в (9.4.14) и получим

$$Q_{m-1}(i_1, i_2, \ldots i_{m-1}) = \sum_{i_m=i_{m-1}+1}^{n_m} \sum_{j=0}^{k-m} b_m(j; i_1, i_2, \ldots i_m)\,(V\,(n-j, u[i_1, i_2, \ldots i_{m-1}]) +$$

$$\theta_m(i_1, i_2, \ldots i_m) V\,(n-j-1, u[i_1, i_2, \ldots i_m])) = \tag{9.4.16}$$

$$\sum_{j=0}^{k-m} \left(\sum_{i_m=i_{m-1}+1}^{n_m} b_m(j; i_1, i_2, \ldots i_m) \right) V\,(n-j, u[i_1, i_2, \ldots i_{m-1}]) +$$

$$\sum_{j=1}^{k-m+1}\left(\sum_{i_m=i_{m-1}+1}^{n_m}\theta_m(i_1,i_2,\dots i_m)b_m(j-1;i_1,i_2,\dots i_m)\right)V\left(n-j,u[i_1,i_2,\dots i_{m-1}]\right).$$

Положим :

$$b_{m-1}(j;i_1,i_2,\dots i_{m-1})\equiv\sum_{i_m=i_{m-1}+1}^{n_m}b_m(j;i_1,i_2,\dots i_m),\quad j=0; \tag{9.4.17}$$

$$b_{m-1}(j;i_1,i_2,\dots i_{m-1})\equiv\sum_{i_m=i_{m-1}+1}^{n_m}\Big(b_m(j;i_1,i_2,\dots i_m)+ \tag{9.4.18}$$

$$\theta_m(i_1,i_2,\dots i_m)b_m(j-1;i_1,i_2,\dots i_m)\Big),\quad j\in\overline{1,k-m};$$

$$b_{m-1}(j;i_1,i_2,\dots i_{m-1})\equiv\sum_{i_m=i_{m-1}+1}^{n_m}\theta_m(i_1,i_2,\dots i_m)b_m(j-1;i_1,i_2,\dots i_m),\quad j=k-m+1; \tag{9.4.19}$$

$$b_{m-1}(j;i_1,i_2,\dots i_{m-1})\equiv 0,\quad j=k-m+2,k-m+3,\dots \tag{9.4.20}$$

Формула (9.4.16) тогда принимает вид :

$$Q_{m-1}=\sum_{j=0}^{k-(m-1)}b_{m-1}(j;i_1,i_2,\dots i_{m-1})V\left(n-j;u[i_1,i_2,\dots i_{m-1}]\right), \tag{9.4.21}$$

то есть представление (9.4.12) при всех $m\in\overline{0,k}$ доказано.

В силу соотношения (9.4.20) естественно доопределить $b_k(j;i_1,i_2,\dots i_m)\equiv 0$ при $m=k$ и $j\in\mathbf{N}$. Доопределим также все величины $b_m(j;i_1,i_2,\dots i_m)$ нулем на целые отрицательные значения j. С помощью этих соглашений равенства (9.4.17–9.4.20) могут быть записаны как одно равенство

$$b_{m-1}(j;i_1,i_2,\dots i_{m-1})=\sum_{i_m=i_{m-1}+1}^{n_m}\Big(b_m(j;i_1,i_2,\dots i_m)+ \tag{9.4.22}$$

$$\theta_m(i_1,i_2,\dots i_m)b_m(j-1;i_1,i_2,\dots i_m)\Big),$$

верное при всех $j\in\mathbf{Z}$ и всех $m=k,k-1,\dots 1$.

В самом деле : 1) при $j<0$ левая и правая части в (9.4.22) обращается в нуль ; 2) при $j=0$ получаем формулу (9.4.17) ; 3) при $j\in\overline{1,k-m}$ — формулу (9.4.18) ; 4) при $j=k-m+1$ — формулу (9.4.19) ; 5) при $j>k-m+1$ левая и правая части (9.4.22) обращается в нуль .

Формула (9.4.9) показывает , что величина $\theta_m(i_1,i_2,\dots i_m)$ не зависит от чисел $i_1,i_2,\dots i_{m-2}$, а является лишь функцией от двух чисел i_{m-1} и i_m

$$\theta_m=\theta_m(i_{m-1},i_m). \tag{9.4.23}$$

Величина $b_k(j;i_1,i_2,\dots i_k)$ не зависит согласно формуле (9.4.13) от чисел $i_1,i_2,\dots i_k$, поэтому из формулы (9.4.22) следует, что величина $b_{k-1}(j;i_1,i_2,\dots i_{k-1})$ не зависит от чисел $i_1,i_2,\dots i_{k-2}$, а является лишь функцией двух чисел j и i_{k-1}:

$$b_{k-1}=b_{k-1}(j;i_{k-1}).$$

Продолжая это рассуждение, из формулы (9.4.22) получаем, что величины $b_m(j; i_1, i_2, \dots, i_m)$ зависят лишь от двух чисел

$$b_m = b_m(j; i_m), \quad m \in \overline{0, k} \tag{9.4.24}$$

и определены при $j \in \mathbf{Z}$, $i_m \in \overline{m+1, n_m}$. Если мы доопределим $b_m(j; i_m) \equiv 0$ при $i_m > n_m$, то соотношение (9.4.22) можно записать в следующем виде

$$b_{m-1}(j; i_{m-1}) = \sum_{i_m = i_{m-1}+1}^{\infty} \left(b_m(j; i_m) + \theta_m(i_{m-1}, i_m) b_m(j-1; i_m) \right), \tag{9.4.25}$$

при всех $j \in \mathbf{Z}$, $i_{m-1} = m, m+1, m+2, \dots$

Замечание 9.4.1 *Соотношение (9.4.25) однозначно определяет функции b_{k-1}, b_{k-2}, …, b_1, b_0 при заданной функции $b_k(j; i_k)$. Рассматривая систему (9.4.25) как систему линейных уравнений для функций $b_k, b_{k-1}, \dots, b_1, b_0$, можно сказать, что при заданной функции b_k система (9.4.25) имеет единственное решение.*

9.4.3 Выражение для величин $b_m(j; i_m)$.

Прежде чем предъявить явное выражение величин $b_m(j; i_m)$ введём следующее обозначение для значений функционала спадов из § 8.5, аналогичное обозначению $\operatorname{us}(l_1, l_2, \dots l_p)$ для функционала подъёмов. А именно , если $l_1, l_2, \dots l_p$ есть p чисел из множества $\overline{1, n}$, то

$$\operatorname{hs}(l_1, l_2, \dots l_p) \equiv h\left(f(l_1), f(l_2), \dots f(l_p)\right) \tag{9.4.26}$$

Лемма 9.4.1 *Для любых чисел* $m \in \overline{0, k}$, $j \in \mathbf{Z}$, $i_m \in \mathbf{N}$, $i_m \geq m$ *справедлива формула*

$$b_m(j; i_m) = C(n - i_m - j, k - m - j) C\left(\operatorname{hs}\left(\overline{1, k-m+1}, \overline{i_m + k - m + 1, n}\right), j\right). \tag{9.4.27}$$

Доказательство. Для доказательства формулы (9.4.27) в силу замечания 9.4.1 достаточно проверить справедливость формулы (9.4.27) при $m = k$ и убедиться , что величины (9.4.27) удовлетворяют системе уравнений (9.4.25).

При $m = k$ из (9.4.27) получаем

$$b_k(j; i_k) = C(n - i_m - j, -j) C\left(\operatorname{hs}(1, \overline{i_k + 1, n}, j\right), \tag{9.4.28}$$

откуда

$$b_k(0; i_k) = \begin{cases} 1, & i_k \in \overline{k+1, n}; \\ 0, & i_k > n; \end{cases}$$

и $b_k(j; i_k) = 0$ при $j \neq 0$.

Теперь нашей задачей является проверка соотношений (9.4.25) для величин (9.4.27). Предварительно введём и исследуем вспомогательные величины .

Величину $\theta_m(i_{m-1}, i_m)$ определенную при $i_m \in \overline{i_{m-1}+1, n_m}$ доопределим нулем для натуральных значений $i_m > n_m$, то есть $\theta_m(i_{m-1}, i_m) \equiv 0$ при $i_m = n_m + 1, n_m + 2, \dots$. Введём величины

$$\begin{aligned} q_m(\nu) &\equiv \operatorname{hs}\left(\overline{1, k-m+1}, \overline{\nu + k - m + 1, n}\right), \quad \nu \in \mathbf{N}, & (9.4.29) \\ w_m(\nu) &\equiv \theta_m(i_{m-1}, \nu) + q_m(\nu), \qquad \nu = i_{m-1}+1, i_{m-1}+2, \dots & (9.4.30) \end{aligned}$$

Заметим, что при $\nu+k-m+1>n$ множество $\overline{\nu+k-m+1,n}=\emptyset$ и поэтому

$$q_m(\nu)=q_m(n_m)=\operatorname{hs}\left(\overline{1,k-m+1}\right),\quad \nu=n_m,n_m+1,\dots \tag{9.4.31}$$

Используя выражение (9.4.9) для величин $\theta_m(i_{m-1},i_m)$, получим следующие выражения для величины $w_m(\nu)$.

$\underline{\nu=i_{m-1}+1,\ i_{m-1}=n_{m-1}}$. В этом случае

$$\begin{aligned} w_m(\nu) \;=\;& \operatorname{hs}\left(\overline{1,k-m+1},\overline{n-k+m+k-m+1,n}\right)+\operatorname{us}(k-m+2,k-m+1)=\\ & \operatorname{hs}\left(\overline{1,k-m+1}\right)+\operatorname{hs}(k-m+1,k-m+2)=\operatorname{hs}\left(\overline{1,k-m+2}\right)=\\ & \operatorname{hs}\left(\overline{1,k-m+2},\overline{i_{m-1}+1+k-m+1,n}\right)=q_{m-1}(i_{m-1}). \end{aligned} \tag{9.4.32}$$

$\underline{\nu=i_{m-1}+1,\ i_{m-1}<n_{m-1}}$. В этом случае

$$\begin{aligned} w_m(\nu) \;=\;& \operatorname{hs}\left(\overline{1,k-m+1},\overline{\nu+k-m+1,n}\right)+\\ & \operatorname{us}(k-m+2,k-m+1,\nu+k-m+1)-\operatorname{us}(k-m+2,\nu+k-n+1)=\\ & \operatorname{hs}\left(\overline{1,k-m+1}\right)+\operatorname{hs}(k-m+1,\nu+k-m+1)+\operatorname{hs}\left(\overline{\nu+k-m+1,n}\right)\\ & +\operatorname{hs}(k-m+1,k-m+2)+\operatorname{us}(k-m+1,\nu+k-m+1)-\\ & \operatorname{us}(k-m+2,\nu+k-m+1)=\\ & \operatorname{hs}\left(\overline{1,k-m+2}\right)+\operatorname{hs}(k-m+2,\nu+k-m+1)+\operatorname{hs}(\nu+k-m+1,n)\\ & =\operatorname{hs}\left(\overline{1,k-m+2},\overline{\nu+k-m+1,n}\right)=\\ & \operatorname{hs}\left(\overline{1,k-(m-1)+1},\overline{i_{m-1}+k-(m-1)+1}\right)=q_{m-1}(i_{m-1}). \end{aligned} \tag{9.4.33}$$

$\underline{i_{m-1}+1<\nu<n_m}$. В этом случае

$$\begin{aligned} w_m(\nu) \;=\;& \operatorname{hs}\left(\overline{1,k-m+1}\right)+\operatorname{hs}(k-m+1,\nu+k-m+1)+\\ & \operatorname{hs}\left(\overline{\nu+k-m+1,n}\right)+\operatorname{us}(\nu+k-m,k-m+1,\nu+k-m+1)-\\ & \operatorname{us}(\nu+k-m,\nu+k-m+1)=\\ & \operatorname{hs}\left(\overline{1,k-m+1}\right)+\operatorname{hs}(\nu+k-m,\nu+k-m+1)+\\ & \operatorname{us}(\nu+k-m,k-m+1)+\operatorname{hs}\left(\overline{\nu+k-m+1,n}\right)=\\ & \operatorname{hs}\left(\overline{1,k-m+1}\right)+\operatorname{hs}(k-m+1,\nu+k-m)+\\ & \operatorname{hs}(\nu+k-m,\nu+k-m+1)+\operatorname{hs}\left(\overline{\nu+k-m+1,n}\right)=\\ & \operatorname{hs}\left(\overline{1,k-m+1},\overline{\nu+k-m,n}\right)=q_m(\nu-1). \end{aligned} \tag{9.4.34}$$

$\underline{i_{m-1}+1<\nu=n_m}$. В этом случае согласно (9.4.28)

$$\begin{aligned} w_m(\nu) \;=\;& \operatorname{hs}\left(\overline{1,k-m+1}\right)+\operatorname{us}(n,k-m+1)=\operatorname{hs}\left(\overline{1,k-m+1},n\right)=\\ & q_m(n_m-1)=q_m(\nu-1). \end{aligned} \tag{9.4.35}$$

$\underline{n_m < \nu}$. В этом случае $\theta_m(i_{m-1},\nu) = 0$ и согласно (9.4.28)

$$w_m(\nu) = q_m(\nu) = q_m(\nu - 1). \tag{9.4.36}$$

Из соотношений (9.4.33-9.4.36) мы делаем следующий вывод:

$$w_m(\nu) = \begin{cases} q_{m-1}(\nu-1), & \nu = i_{m-1}+1; \\ q_m(\nu-1), & \nu > i_{m-1}+1. \end{cases} \tag{9.4.37}$$

Перейдём теперь к вычислению суммы

$$\begin{aligned} A \ &\equiv \sum_{\nu=i_{m-1}+1}^{\infty} \theta(i_{m-1},\nu) b_m(j-1;\nu) = \qquad (9.4.38) \\ &\sum_{\nu=i_{m-1}+1}^{\infty} \theta_m(i_{m-1},\nu) C\left(q_m(\nu), j-1\right) C(n-\nu-j+1, k-m-j+1), \end{aligned}$$

входящей в правую часть равенства (9.4.25). Рассмотрим два подслучая:
1) $k-m-j+1 = \nu$, 2) $k-m-j+1 \neq 0$.

В первом подслучае имеем

$$\begin{aligned} A \ &= \sum_{\nu=i_{m-1}+1}^{\infty} \theta_m(i_{m-1},\nu) C\left(q_m(\nu), j-1\right) C(n-j+1-\nu, 0) = \\ &\sum_{\nu=i_{m-1}+1}^{n-j+1} \theta_m(i_{m-1},\nu) C\left(q_m(\nu), j-1\right). \end{aligned} \tag{9.4.39}$$

Во втором подслучае ($k-m-j+1 \neq 0$) применим к сумме (9.4.38) преобразование Абеля

$$\sum_{\nu=a}^{b} u_\nu v_\nu = \sum_{\nu=a}^{b-1} U_\nu \left(v_\nu - v_{\nu+1}\right) + U_b v_b, \tag{9.4.40}$$

где $U_p = u_a + u_{a+1} + \dots u_p$, для $p = a, a+1, \dots b$. Получим в силу основного свойства биномиальных коэффициентов (лемма 8.3.1):

$$\begin{aligned} A = &\sum_{\nu=i_{m-1}+1}^{\infty} \left(\theta_m(i_{m-1},\nu) C\left(q_m(\nu), j-1\right)\right) C(n-j+1-\nu, k-m-j+1) = \\ &\sum_{\nu=i_{m-1}+1}^{\infty} \left(\sum_{\sigma=i_{m-1}+1}^{\nu} \theta_m(i_{m-1},\nu) C\Big(q_m(\nu), j-1\Big)\right) \Big(C\left(n-j+1-\nu, k-m-j+1\right) - \\ &C\left(n-j-\nu, k-m-j+1\right)\Big) = \\ &\sum_{\nu=i_{m-1}+1}^{\infty} \left(\sum_{\sigma=i_{m-1}+1}^{\nu} \theta_m(i_{m-1},\nu) C\left(q_m(\nu), j-1\right)\right) C\left(n-j-\nu, k-m-j\right). \end{aligned} \tag{9.4.41}$$

Наша следующая задача — вычисление суммы

$$B(\nu) \equiv \sum_{\sigma=i_{m-1}+1}^{\nu} \theta_m(i_{m-1},\nu) C(q_m(\nu), j-1). \tag{9.4.42}$$

Согласно следствию (8.3.1) справедливо равенство

$$\theta_m(i_{m-1},\nu)C\left(q_m(\nu),j-1\right)=C\left(\theta_m(i_{m-1},\nu)+q_m(\nu),j\right)-C\left(q_m(\nu),j\right)= \tag{9.4.43}$$

$$C\left(w_m(\nu),j\right)-C\left(q_m(\nu),j\right).$$

Подставим (9.4.43) в (9.4.42) и используем (9.4.37), получим

$$\begin{aligned} B(\nu) \;\; = \;\; & \sum_{\sigma=i_{m-1}+1}^{\nu} C\left(w_m(\sigma),j\right)-\sum_{\sigma=i_{m-1}+1}^{\nu} C\left(q_m(\sigma),j\right)= \\ & C\left(w_m(i_{m-1}+1),j\right)+\sum_{\sigma=i_{m-1}+2}^{\nu} C\left(q_m(\sigma-1),j\right)-\sum_{\sigma=i_{m-1}+1}^{\nu} C\left(q_m(\sigma),j\right)= \\ & C\left(q_{m-1}(i_{m-1}),j\right)-C\left(q_m(\nu),j\right). \end{aligned} \tag{9.4.44}$$

Вернёмся снова к вычислению суммы A вида (9.4.38). В случае $j=k-m+1$ получаем согласно (9.4.39)

$$A=\begin{cases} 0 & , \;\; n-j+1<i_{m-1}+1; \\ C\left(q_{m-1}(i_{m-1}),j\right)-C\left(q_m(n-j+1),j\right) & , \;\; n-j+1\ge i_{m-1}+1. \end{cases} \tag{9.4.45}$$

А в случае $j\ne k-m+1$ получаем согласно (9.4.41, 9.4.44)

$$A=\sum_{\nu=i_{m-1}+1}^{\infty} C(n-j-\nu,k-m-j)\Big(C\left(q_{m-1}(i_{m-1},j\right)-C\left(q_m(\nu),j\right)\Big). \tag{9.4.46}$$

Обозначим через F правую часть равенства (9.4.25) после подстановки в неё величин $b_m(j;i_m)$ вида (9.4.27)

$$F\equiv\sum_{\nu=i_{m-1}+1}^{\infty} C(n-\nu-j,k-m-j)C\left(q_m(\nu),j\right)+\sum_{\nu=i_{m-1}+1}^{\infty}\theta_m(i_{m-1},\nu)b_m(j-1;\nu)=$$

$$\sum_{\nu=i_{m-1}+1}^{\infty} C(n-j-\nu,k-m-j)C\left(q_m(\nu),j\right)+A. \tag{9.4.47}$$

В случае $j=k-m+1$ будет $C(n-j-\nu,k-m-j)=C(n-j-\nu,-1)=0$ и

$$F=A=\begin{cases} 0 & , \;\; n-j<i_{m-1}; \\ C\left(q_{m-1}(i_{m-1}),j\right)-C\left(q_m(n-k+m), \;\; j\right) & , \;\; n-j\ge i_{m-1}; \end{cases}$$

или

$$F=\begin{cases} 0 & , \;\; i_{m-1}>n-j; \\ C\left(q_{m-1}(i_{m-1}),j\right)-C\left(q_m(n_m),j\right) & , \;\; i_{m-1}\le n-j. \end{cases} \tag{9.4.48}$$

В случае $j=k-m+1$ величина $b_{m-1}(j;i_{m-1})$ из формулы (9.4.27) равна

$$b_{m-1}(j;i_{m-1})=C(n-i_{m-1}-j,k-m+1)C\left(q_{m-1}(i_{m-1}),j\right)=$$

$$C(n-j-i_{m-1},0)C\left(q_{m-1}(i_{m-1}),j\right)$$

или

$$b_{m-1}(j;i_{m-1})=\begin{cases} 0 & , \;\; i_{m-1}>n-j; \\ C\left(q_{m-1}(i_{m-1}),j\right) & , \;\; i_{m-1}\le n-j. \end{cases} \tag{9.4.49}$$

Чтобы убедиться, что $b_{m-1}(j;i_{m-1}) = F$, осталось в этом случае заметить, что при $i_{m-1} \le n-j,\ j = k-m+1$ будет

$$q_m(n_m) = \text{ hs }\left(\overline{1, k-m+1}\right) \le k-m < k-m+1 = j,$$

поэтому $C\left(q_m(n_m), j\right) = 0$.

В случае $j \ne k-m+1$ формулы (9.4.46) и (9.4.47) дают

$$\begin{aligned} F \ = \ & \sum_{\nu=i_{m-1}+1}^{\infty} C(n-j-\nu, k-m-j) C\left(q_m(\nu), j\right) + \qquad (9.4.50) \\ & \sum_{\nu=i_{m-1}+1}^{\infty} C(n-j-\nu, k-m-j)\left(C\left(q_{m-1}(i_{m-1}), j\right) - C\left(q_m(\nu), j\right)\right) = \\ & \sum_{\nu=i_{m-1}+1}^{\infty} C(n-j-\nu, k-m-j) C\left(q_{m-1}(i_{m-1}), j\right) = \\ & C\left(q_{m-1}(i_{m-1}), j\right) \sum_{\nu=i_{m-1}+1}^{\infty} C(n-j-\nu, k-m-j). \qquad (9.4.51) \end{aligned}$$

Согласно лемме (8.3.2)

$$\sum_{\nu=i_{m-1}+1}^{\infty} C(n-j-\nu, k-m-j) = \sum_{i=-\infty}^{n-j-i_{m-1}-1} C(i, k-m-j) = \qquad (9.4.52)$$

$$\sum_{i\in\mathbf{Z}} C(i, k-m-j) C(n-j-i_{m-1}-1-i, 0) = C(n-j-i_{m-1}, k-m-j+1).$$

Поэтому из (9.4.50, 9.4.52) получаем

$$F = C\left(q_{m-1}(i_{m-1}), j\right) C\left(n-j-i_{m-1}, k-(m-1)-j\right) =$$

$$C\left(n-i_{m-1}-j, k-(m-1)-j\right) C\Big(\text{hs}\left(\overline{1, k-(m-1)+1}, \overline{i_{m-1}+k-(m-1)+1, n}\right), j\Big)$$

$$= b_{m-1}(j;i_{m-1}).$$

Лемма 9.4.1 доказана . $\diamondsuit$

9.4.4 Лиевость полинома S_n.

Опираясь на лемму 9.4.1, завершим доказательство лиевости полиномов $\mathcal{S}a_n \in \mathcal{AP}_n$ и $S_n \in \mathbf{A}$.

Согласно лемме 9.4.1

$$b_0(j) = C(n-1-j, k-j) C\left(\text{ hs }\left(\overline{1, k+1},\ \overline{k+2, n}\right), j\right) = C(n-1-j, k-j) C\left(h(f), j\right). \qquad (9.4.53)$$

Согласно формуле (9.4.12), определяющей коэффициенты $b_m(j;i_m)$, имеем

$$D_k(f) = Q_0 = \sum_{i=0}^{k} b_0(i) V(n-i, \text{ ur }) = \sum_{i=0}^{k} C(n-1-i, k-i) C\left(h(f), i\right) V(n-i, \text{ ur }), \quad (9.4.54)$$

где $\text{ur} \equiv u\left(f\Big|_{\overline{k+1,n}}\right)$. Сумму (9.4.54) запишем в следующей форме

$$D_k(f) = \sum_{i\in\mathbf{Z}} C\left(n-1-u(f), i\right) C(n-1-i, n-1-k) V(n-i, \text{ ur }), \qquad (9.4.55)$$

здесь $C(n-1-i,k-i) = C(n-1-i,n-1-k)$ по свойству дополнительности биномиальных коэффициентов — лемма 8.3.1, $C\left(h(f),i\right) = C\left(n-1-u(f),i\right)$, ибо $h(f) = n-1-u(f)$ — формула (8.5.1). В формуле (9.4.54) целые величины $n, k, u(f)$, ur принимают значения:

$$n \in \mathbf{N},\ k \in \overline{0,n-1},\ u(f) \in \overline{0,n-1},\ \text{ur} = u\left(f\Big|_{\overline{k+1,n}}\right) \in \overline{\min\{0,r-k\},\max\{r,n-1\}},$$

поэтому применима теорема (8.4.1) для вычисления суммы (9.4.55). По теореме (8.4.1) имеем

$$D_k(f) = (-1)^k V\left(n,u(f)\right) = (-1)^k D_0(f).$$

Доказан следующий результат.

Теорема 9.4.1 *Для* $n \in \mathbf{N},\ k \in \overline{0,n-1},\ f \in P_n$ *верно*

$$D_k(f) = (-1)^k D_0(f). \tag{9.4.56}$$

Из справедливости равенств (9.4.56) вытекает согласно п. 9.3.3 справедливость равенств (9.3.18), а следовательно, согласно п. 9.3.2 справедливость равенства $Sa_n = \frac{1}{n}\ Ka_n$ и равенства $S_n = \frac{1}{n}K_n$ при $n = 2, 3, \ldots$ Зафиксируем этот вывод.

Теорема 9.4.2 *Для любого* $n \in \mathbf{N}$ *при любом выборе элементов* $A(1)$, $A(2)$, $\ldots A(n) \in \mathbf{A}$ *справедливо равенство*

$$S_n = \sum_{f\in P_n} V\left(n,u(f)\right) A(f) = \frac{1}{n}\sum_{f\in P_n} V\left(n,u(f)\right) A[f]. \tag{9.4.57}$$

Замечание 9.4.2 *При* $n = 1$ *мы полагаем по определению* $A[f] \equiv A(f) = A(1)$.

§9.5 Формула для логарифма решения линейного однородного дифференциального уравнения в банаховой алгебре

На протяжении этого параграфа $[a,b] = [0,T]$ и функция $A(t) \in L_1[0,T]$.

Мы используем обозначения п. 8.5.3 для подмножеств $Q_n(f) \equiv Q(f) \subset \mathbf{R}^n$ при $f \in P_n$ и множества $\Pi_n(t) \subset \mathbf{R}^n$ при $t \in \mathbf{R}_+$. Обозначим $Q_n(f,t) \equiv Q_n(f) \cap \Pi_n(t)$ при $n \in \mathbf{N}$, $f \in P_n$, $t \in \mathbf{R}_+$.

В § 9.1 мы ввели величины J_n, $n \in \mathbf{N}$ и в § 9.2 получили для них интегральное представление (9.2.11). Полагая $t_1 = 0$, $t > 0$, мы в § 9.2 получили для величин J_n, $n \in \mathbf{N}$, с учётом введенных обозначений, представление

$$J_n = \int\limits_{Q_n(e;t)}\!\!\!\cdots\!\int S_n\, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n = \tag{9.5.1}$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^{\xi_n}\ldots\int\limits_0^{\xi_3}\int\limits_0^{\xi_2} \sum_{f\in P_n} V(n,u(f)) A(\xi_{f(n)}) \ldots A(\xi_{f(2)}) A(\xi_{f(1)})\, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n\,.$$

В силу теоремы 9.4.2 равенство (9.5.1) эквивалентно равенству

$$J_n = \frac{1}{n}\int\limits_{Q_n(e;t)}\!\!\dots\!\int K_n\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n = \tag{9.5.2}$$

$$\frac{1}{n}\int\limits_0^t\int\limits_0^{\xi_n}\dots\int\limits_0^{\xi_3}\int\limits_0^{\xi_2}\sum_{f\in P_n} V(n,u(f))[A(\xi_{f(n)}),\dots[A(\xi_{f(3)}),[A(\xi_{f(2)}),A(\xi_{f(1)})\underbrace{]]\dots]}_{n-1}\, d\xi_1 d\xi_2\dots d\xi_n.$$

Преобразуем интеграл по множеству $Q_n(e;t)$ согласно §9.2 формула (9.2.10):

$$\int\limits_{Q_n(e;t)}\!\!\dots\!\int A(f)\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n = \int\limits_{Q_n(f;t)}\!\!\dots\!\int A(e)\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n, \tag{9.5.3}$$

аналогично

$$\int\limits_{Q_n(e;t)}\!\!\dots\!\int A[f]\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n = \int\limits_{Q_n(f;t)}\!\!\dots\!\int A[e]\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n. \tag{9.5.4}$$

Далее, согласно п. 8.5.3, вывод 8.5.1 имеем

$$u(f) = u(\xi) \tag{9.5.5}$$

при $\xi \in Q_n(f;t)$. С учётом (9.5.3, 9.5.5) формула (9.5.1) преобразуется к виду

$$J_n = \sum_{f\in P_n}\int\limits_{Q_n(e;t)}\!\!\dots\!\int V(n,u(f))A(f)\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n = \sum_{f\in P_n}\int\limits_{Q_n(f;t)}\!\!\dots\!\int V(n,u(\xi))A(e)\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n =$$
$$\int\limits_{\Pi_n(t)}\!\!\dots\!\int V(n,u(\xi))A(\xi_n)A(\xi_{n-1})\dots A(\xi_2)A(\xi_1)\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n. \tag{9.5.6}$$

Введём функции $\operatorname{val} n(\xi) \equiv V(n,u(\xi))$, $n \in \mathbf{N}$. Каждая функция $\operatorname{val} n(\xi)$ определена на $\mathbf{R}^n$, является однородной функцией $\xi \in \mathbf{R}^n$ степени 0 и принимает n значений. Согласно (9.5.6) получаем следующее представление для J_n при $n \in \mathbf{N}$

$$J_n = \int\limits_0^t\!\dots\!\int\limits_0^t \operatorname{val} n(\xi)A(\xi_n)\dots A(\xi_2)A(\xi_1)\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n. \tag{9.5.7}$$

Представление (9.5.2) с учётом формул (9.5.4, 9.5.5) принимает вид

$$J_n = \frac{1}{n}\int\limits_0^t\!\dots\!\int\limits_0^t \operatorname{val} n(\xi)[A(\xi_n),\dots[A(\xi_3),[A(\xi_2)A(\xi_1)\underbrace{]]\dots]}_{n-1}\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n,\ n\in\mathbf{N}, \tag{9.5.8}$$

где при $n = 1$ верно $\operatorname{val} 1(\xi) = V(1,u(\xi)) = V(1,0) = 1$ и формула (9.5.8) понимается как

$$J_1 = \int\limits_0^t A(\xi_1)\, d\xi_1. \tag{9.5.9}$$

Для чисел Винокурова справедлива оценка (8.4.17), поэтому

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^n \;\Big|\; |\operatorname{val} n(\xi)| \le \frac{1}{n}. \tag{9.5.10}$$

С учётом (9.5.10) из формулы (9.5.7) следует оценка

$$|J_n| \le \frac{1}{n}\left(\int\limits_0^t |A(\tau)|d\tau\right)^n, \quad n\in\mathbf{N}, \quad t\in[0,T], \tag{9.5.11}$$

из которой вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 9.5.1 *Если $M \equiv \int\limits_0^T |A(t)|dt$, то для любого элемента $b\in\mathbf{A}$, такого, что $|b| < \frac{1}{M}$ ряд*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}_0} J_n b^n \tag{9.5.12}$$

абсолютно суммируем в банаховой алгебре $\mathbf{A}$.

Доказательство состоит из оценки

$$|J_n b^n| \le \frac{1}{n}M^n|b|^n = \frac{1}{n}\left(M|b|\right)^n. \quad \diamondsuit$$

Сформулируем теперь основной результат данной главы.

Теорема 9.5.1 *Если $\int\limits_0^t |A(t)|dT < 1$, то существует единственное непрерывное решение $W(t,0)$ интегрального уравнения $W(t,0) = E + \int\limits_0^t A(\tau)W(\tau,0)d\tau$, $t\in[0,T]$ и даётся формулой*

$$W(t,0) = \exp(J_1 + J_2 + \ldots + J_n + \ldots), \tag{9.5.13}$$

где ряд $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}_0} J_n$ абсолютно суммируем в банаховой алгебре $\mathbf{A}$, сходится равномерно по $t\in[0,T]$ и величины J_n непрерывно зависят от $t\in[0,T]$.

Доказательство. В условиях теоремы в силу утверждения 9.5.1 ряд (9.5.12) абсолютно суммируем в алгебре $\mathbf{A}$ в замкнутом круге $U[1]\subset\mathbf{A}$ радиуса 1 с центром в нуле. По лемме 7.5.3 справедливо равенство

$$\widetilde{\exp}\left(\sum_{j=1}^{\infty} J_j\right) = \sum_{l=1}^{\infty} I_l, \tag{9.5.14}$$

где ряды $\sum_{j=1}^{\infty} J_j$ и $\sum_{l=1}^{\infty} I_l$ абсолютно суммируемы в банаховой алгебре $\mathbf{A}$. По теореме 9.1.1 верно $W(t,0) = E + \sum_{l=1}^{\infty} I_l$, что доказывает в силу (9.5.14) формулу (9.5.13). $\diamondsuit$

Замечание 9.5.1 *Согласно теореме 9.1.1 для существования единственного непрерывного решения $W(t,0)$ интегрального уравнения $W(t,0) = E + \int\limits_0^t A(\tau)W(\tau,0)d\tau$ достаточно условия $\int\limits_0^t |A(t)|dt < \infty$, условие $\int\limits_0^t |A(t)|dt < 1$ потребовалось нам для доказательства представимости решения $W(t,0)$ в виде экспоненты (9.5.13).*

Формула для логарифма решения. Если $\int\limits_0^t |A(t)|dt < 1$, то непрерывное решение $X(t)$ задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= A(t)X(t), \quad t \in [0,T], \\ X(0) &= E \end{cases}$$

в банаховой алгебре $\mathbf{A}$ существует, единственно и представимо в виде

$$X(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \underbrace{\int\limits_0^t \ldots \int\limits_0^t}_{n} \operatorname{val} n(\xi)[A(\xi_n), \ldots [A(\xi_3), [A(\xi_2), A(\xi_1)]] \ldots] \, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n\right). \tag{9.5.15}$$

Возвращаясь к обозначениям п. 9.1.1 для функции $W(t_2, t_1)$ — решению задачи Коши (9.1.2, 9.1.3), сформулируем результат теоремы 9.5.1 в следующей более общей форме.

Теорема 9.5.2 . *Пусть* $M \equiv \int\limits_{Ic(a,b)} |A(\tau)|d\tau < 1$, *тогда при* $t \in Ic(a,b)$ *существует единственная непрерывная функция* $W(t,a)$ *и верно представление*

$$W(b,a) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} J_n\right), \tag{9.5.16}$$

где при $a \le b$ *верно*

$$J_n = \frac{1}{n} \int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b \operatorname{val} n(\xi)[A(\xi_n), \ldots [A(\xi_3), [A(\xi_2), A(\xi_1)]] \ldots] \, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n = \tag{9.5.17}$$

$$\int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b \operatorname{val} n(\xi) A(\xi_n) \ldots A(\xi_3) A(\xi_2) A(\xi_1) \, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n \,,$$

а при $a \ge b$ *верно*

$$J_n = -\frac{1}{n} \int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b \operatorname{val} n(\xi)[A(\xi_n), \ldots [A(\xi_3), [A(\xi_2), A(\xi_1)]] \ldots] \, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n = \tag{9.5.18}$$

$$-\int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b \operatorname{val} n(\xi) A(\xi_n) \ldots A(\xi_3) A(\xi_2) A(\xi_1) \, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} J_n$ *абсолютно суммируем и справедлива оценка*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| \le -\ln(1-M). \tag{9.5.19}$$

Доказательство. При $a < b$ введём функцию $A'(t) \equiv A(a+t)$, $t \in [0, b-a]$. При этом

$$\int\limits_0^{b-a} |A'(\tau)|d\tau = \int\limits_a^b |A(\tau)|d\tau < 1. \tag{9.5.20}$$

Через $W'(t,0)$, $t\in[0,b-a]$, обозначим решение задачи Коши с функцией $A'(t)$, которое по теореме (9.5.1) существует единственно, непрерывно и допускает представление в виде экспоненты. Проверим, что $W'(t-a,0)=W(t,a)$, $t\in[a,b]$.

В самом деле, при $t=a$ имеем $W'(a-a,0)=W'(0,0)=E=W(a,a)$. Кроме того

$$\frac{d}{dt}W'(t-a,0)=A'(t-a)W'(t-a,0)=A(t)W'(t-a,0).$$

В силу единственности решения задачи Коши получаем, что $W'(t-a,0)=W(t,a)$, $t\in[a,b]$ и, в частности, $W'(b-a,0)=W(b,a)$.

Согласно теореме 9.5.1 функция $W'(b-a,0)$ допускает представление

$$W'(b-a,0)=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}J'_n\right), \tag{9.5.21}$$

где

$$J'_n=\frac{1}{n}\int\limits_{b-a}^{b-a}\dots\int\limits_{b-a}^{b-a}\mathrm{val}\;n(\xi)[A'(\xi_n),\dots[A'(\xi_3),[A'(\xi_2),A'(\xi_1)]]\dots]\,d\xi_1d\xi_2\dots d\xi_n= \tag{9.5.22}$$

$$\int\limits_{0}^{b-a}\dots\int\limits_{0}^{b-a}\mathrm{val}\;n(\xi)A'(\xi_n),\dots A'(\xi_3)A'(\xi_2)A'(\xi_1)\,d\xi_1d\xi_2\dots d\xi_n.$$

Проведём в интегралах (9.5.22) замену переменных $\eta_i=\xi_i+a_i$, $i\in\overline{1,n}$. Согласно свойству 8.5.2 имеем

$$\mathrm{val}\;n(\xi)=\;\mathrm{val}\;n(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)=\;\mathrm{val}\;n(\eta_1,\eta_2,\dots\eta_n)=\;\mathrm{val}\;n(\eta). \tag{9.5.23}$$

С учётом (9.5.23) интегралы (9.5.22) приводятся к виду (9.5.17).

В случае $b\le a$ по доказанному справедливо представление

$$W(a,b)=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}J'_n\right),$$

где

$$J'_n=\frac{1}{n}\int\limits_{b}^{a}\dots\int\limits_{b}^{a}\mathrm{val}\;n(\xi)[A(\xi_n),\dots[A(\xi_3),[A(\xi_2),A(\xi_1)]]\dots]\,d\xi_1d\xi_2\dots d\xi_n=$$

$$\int\limits_{b}^{a}\dots\int\limits_{b}^{a}\mathrm{val}\;n(\xi)A(\xi_n)\dots A(\xi_3)A(\xi_2)A(\xi_1)\,d\xi_1d\xi_2\dots d\xi_n.$$

Но согласно п. 9.1.1 имеем $W^{-1}(a,b)=W(b,a)$, т.е. $W(b,a)=\exp\left(-\sum\limits_{n=1}^{\infty}J'_n\right)=\exp\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}J_n\right)$, где $J_n\equiv -J'_n$, что доказывает формулу (9.5.18).

Из формул (9.5.17, 9.5.18) и с учётом неравенства (9.5.10) для функции $\mathrm{val}\;n(\xi)$, получаем неравенство

$$\forall n\in\mathbf{N}\;\Big|\;|J_n|\le\frac{1}{n}\left(\int\limits_{Ic(a,b)}|A(\tau)|d\tau\right)^n, \tag{9.5.24}$$

из которого следует неравенство (9.5.19). $\diamondsuit$

§9.6 Функции $J_n(t, t_1)$ и функция $J(t, t_1)$

В этом параграфе рассмотрим зависимость величин J_n, $n \in \mathbf{N}$, определенных формулой (9.5.7), от пределов интегрирования. А именно, пусть $A(t)$ суммируемая на $[a, b]$ функция и

$$\int\limits_a^b |A(\xi)| d\xi \equiv M.$$

По условию суммируемости верно неравенство

$$M < +\infty. \tag{9.6.1}$$

Определим величины

$$J_n(t, t_1) \equiv \int\limits_{t_1}^{t} \ldots \int\limits_{t_1}^{t} \text{val } n(\xi) A(\xi_n) \ldots A(\xi_2) A(\xi_1) \, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n \tag{9.6.2}$$

для номеров $n \in \mathbf{N}$ и значений аргументов t, t_1, $t \geq t_1$ из $[a, b]$. В случае $t \leq t_1$, полагаем

$$J_n(t, t_1) \equiv -J_n(t_1, t). \tag{9.6.3}$$

9.6.1 Свойства величин $J_n(t, t_1)$

Неравенство (9.5.11) зафиксируем как утверждение.

Утверждение 9.6.1 *Для любых значений t, t_1 из $[a, b]$ и любого номера $n \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство*

$$|J_n(t, t_1)| \leq \frac{M^n}{n}. \tag{9.6.4}$$

Для приращения функции $J_n(t, t_1)$ справедлива оценка.

Лемма 9.6.1 . *Для любых значений чисел t, t_1, t', t_1' из $[a, b]$ и любого номера $n \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство*

$$|J_n(t', t_1') - J_n(t, t_1)| \leq \left(\left| \int\limits_t^{t'} |A(\xi)| d\xi \right| + \left| \int\limits_{t_1}^{t_1'} |A(\xi)| d\xi \right| \right) M^{n-1}. \tag{9.6.5}$$

Доказательство. Пусть $t_1' = t_1$ и $t_1' \geq t \geq t_1$. Введём параллелепипед $\Pi_n(t, t_1) \equiv [t_1, t]^n$. Тогда

$$|J_n(t', t_1) - J_n(t, t_1)| = \left| \int\limits_{t_1}^{t'} \ldots \int\limits_{t_1}^{t'} \text{val } n(\xi) A(\xi_n) \ldots A(\xi_2) A(\xi_1) \, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n - \right.$$

$$\left. \int\limits_{t_1}^{t} \ldots \int\limits_{t_1}^{t} \text{val } n(\xi) A(\xi_n) \ldots A(\xi_2) A(\xi_1) \, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n \right| =$$

$$\left| \int \ldots \int\limits_{\Pi_n(t', t_1) \setminus \Pi_n(t, t_1)} \text{val } n(\xi) A(\xi_n) \ldots A(\xi_2) A(\xi_1) \, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n \right| \leq$$

$$\int_{\Pi_n(t',t_1)\setminus\Pi_n(t,t_1)} \!\!\!\ldots \int \frac{1}{n}\,|A(\xi_n)|\ldots|A(\xi_2)|\,|A(\xi_1)|\; d\xi_1 d\xi_2\ldots d\xi_n =$$

$$\frac{1}{n}\left(\int_{\Pi_n(t',t_1)}\!\!\!\ldots\int |A(\xi_n)|\ldots|A(\xi_2)||A(\xi_1)|\, d\xi_1 d\xi_2\ldots d\xi_n - \right.$$

$$\left.\int_{\Pi_n(t,t_1)}\!\!\!\ldots\int |A(\xi_n)|\ldots|A(\xi_2)||A(\xi_1)|\, d\xi_1 d\xi_2\ldots d\xi_n\right) =$$

$$\frac{1}{n}\left(\left(\int_{t_1}^{t'}|A(\xi)|d\xi\right)^n - \left(\int_{t_1}^{t}|A(\xi)|d\xi\right)^n\right) \le \int_t^{t'}|A(\xi)|d\xi\cdot M^{n-1}.$$

Итак, формула (9.6.5) в указанном частном случае доказана. В *подслучае* $t_1' = t_1$ при $t \ge t' \ge t_1$ лишь t и t' меняются местами, а при $t_1 \ge t \ge t'$ и $t_1 \ge t' \ge t$ величины $J_n(t',t_1)$ и $J_n(t,t_1)$ заменяются согласно (9.6.3) на $-J_n(t_1,t')$ и $-J_n(t_1,t)$. Осталось рассмотреть ситуацию, когда t' и t лежат по разные стороны от числа t_1, т.е., например, $t' \ge t_1 \ge t$. В этой ситуации согласно утверждению 9.6.1 верны неравенства

$$|J_n(t',t_1)| \le \frac{\left(\int_{t_1}^{t'}|A(\xi)|d\xi\right)^n}{n},\quad |J_n(t,t_1)| \le \frac{\left(\int_{t'}^{t_1}|A(\xi)|d\xi\right)^n}{n}. \tag{9.6.6}$$

Поэтому

$$|J_n(t',t_1) - J_n(t,t_1)| \le |J_n(t',t_1)| + |J_n(t,t_1)| \le \frac{1}{n}\left(\left(\int_{t_1}^{t}|A(\xi)|\,d\xi\right)^n + \left(\int_{t}^{t_1}|A(\xi)|\,d\xi\right)^n\right) \le$$

$$\frac{1}{n}\left(\int_{t_1}^{t'}|A(\xi)|\,d\xi + \int_{t}^{t_1}|A(\xi)|\,d\xi\right)\cdot M^{n-1} \le \int_t^{t'}|A(\xi)|\,d\xi\cdot M^{n-1}.$$

Т.е. снова верно неравенство (9.6.5) в подслучае $t_1' = t_1$ и $t' \ge t_1 \ge t$. Ситуация, когда $t \ge t_1 \ge t'$ рассматривается аналогично.

Доказав неравенство (9.6.5) в подслучае $t_1' = t_1$, перейдем к общему случаю. Тогда

$$|J_n(t',t_1') - J_n(t,t_1)| = |J_n(t',t_1') - J_n(t,t_1') + J_n(t,t_1') - J_n(t,t_1)| \le$$

$$|J_n(t',t_1') - J_n(t,t_1')| + |J_n(t_1',t) - J_n(t_1,t)|.$$

Из последнего неравенства в силу доказанного следует неравенство (9.6.5). $\diamondsuit$

Следствие 9.6.1 *Для суммируемой функции $A(\xi)$ величина $J_n(t,t_1)$, $n \in \mathbf{N}$, непрерывна на произведении $[a,b]\times[a,b]$.*

9.6.2 Функция $J(t, t_1)$

Введём следующее усиление условия (9.6.1):

$$M < 1, \tag{9.6.7}$$

предполагающееся далее в этом пункте. Введём сумму ряда

$$J(t, t_1) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} J_n(t, t_1) \tag{9.6.8}$$

Из утверждения 9.6.1 и леммы 9.6.1 вытекает справедливость утверждения.

Утверждение 9.6.2 *При выполнении неравенства (9.6.7) ряд (9.6.8) сходится абсолютно и равномерно по аргументам $(t, t_1) \in [a, b]^2$ в банаховой алгебре $\mathbf{A}$ к непрерывной на $[a, b]^2$ функции $J(t, t_1)$. При этом справедливо при всех $(t, t_1) \in [a, b]^2$ представление*

$$W(t, t_1) = \exp(J(t, t_1)) \tag{9.6.9}$$

и неравенство

$$|J(t, t_1)| \leq -\ln(1 - M). \tag{9.6.10}$$

Из леммы 9.6.1 следует лемма 9.6.2.

Лемма 9.6.2 *Для любых чисел t, t_1, t', t'_1 из сегмента $[a, b]$ справедливо неравенство*

$$|J(t', t'_1) - J(t, t_1)| \leq \frac{1}{1 - M}\left(\left|\int\limits_{t}^{t'} |A(\xi)|\, d\xi\right| + \left|\int\limits_{t_1}^{t'_1} |A(\xi)|\, d\xi\right|\right). \tag{9.6.11}$$

Пусть t_1, t_2, t_3 произвольные точки сегмента $[a, b]$. Согласно лемме 9.1.1 верно равенство

$$W(t_3, t_2)W(t_2, t_1) = W(t_3, t_1), \tag{9.6.12}$$

где для каждой величины $W(t_\alpha, t_\beta)$, $\alpha \in \overline{1, 3}$, $\beta \in \overline{1, 3}$, верно представление (9.6.9). Таким образом свойство (9.6.12) функции $W(t, t_1)$ влечет следующее свойство функции $J(t, t_1)$.

Лемма 9.6.3 *Если справедливо неравенство*

$$M < 1 - \exp(-\gamma), \tag{9.6.13}$$

где $\gamma = 1 - \exp(-\pi)$, то для чисел t_1, t_2, t_3 из сегмента $[a, b]$, таких что число t_2 лежит между t_1 и t_3, выполняется равенство

$$J(t_3, t_1) = H(J(t_2, t_1), J(t_3, t_2)), \tag{9.6.14}$$

где $H(A(1), A(2))$ — определенная на множестве $\{(A(1), A(2)) \in \mathbf{A}^2 \;\Big|\; A(1)| + |A(2)| < 1\}$ функция Хаусдорфа (см. пункт 10.1.1). При выполнении более сильного чем (9.6.13) условия

$$M < \frac{1}{2}\left(1 - \exp(-\gamma)\right), \tag{9.6.15}$$

равенство (9.6.14) верно для любых чисел t_1, t_2, t_3 из сегмента $[a, b]$.

Доказательство леммы 9.6.3. Пусть выполнено условие (9.6.13) и число t_2 лежит между числами t_1 и t_3. Тогда

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} |A(\xi)|\,d\xi\right| + \left|\int_{t_2}^{t_3} |A(\xi)|\,d\xi\right| = \left|\int_{t_1}^{t_3} |A(\xi)|\,d\xi\right| \le M.$$

Согласно утверждению 9.6.2 тогда выполнены неравенства

$$|J(t_2,t_1)| \le -\ln\left(1 - \left|\int_{t_1}^{t_2} |A(\xi)|\,d\xi\right|\right), \tag{9.6.16}$$

$$|J(t_3,t_2)| \le -\ln\left(1 - \left|\int_{t_2}^{t_3} |A(\xi)|\,d\xi\right|\right), \tag{9.6.17}$$

$$|J(t_3,t_1)| \le -\ln\left(1 - \left|\int_{t_1}^{t_3} |A(\xi)|\,d\xi\right|\right). \tag{9.6.18}$$

Поэтому верны неравенства

$$|J(t_2,t_1)| + |J(t_3,t_2)| \le -\ln\left(\left(1 - \left|\int_{t_1}^{t_2} |A(\xi)|\,d\xi\right|\right)\left(1 - \left|\int_{t_2}^{t_3} |A(\xi)|\,d\xi\right|\right)\right) \le \tag{9.6.19}$$

$$-\ln\left(1 - \left(\left|\int_{t_1}^{t_2} |A(\xi)|d\xi\right| + \left|\int_{t_2}^{t_3} |A(\xi)|\,d\xi\right|\right)\right) \le -\ln(1-M) < \gamma,$$

и

$$|J(t_3,t_1)| \le -\ln\left(1 - \left|\int_{t_1}^{t_3} |A(\xi)|\,d\xi\right|\right) < \gamma. \tag{9.6.20}$$

Из неравенства (9.6.16) , формулы (10.1.7) и неравенства (9.6.10) следует, что

$$|H(J(t_1,t_2),J(t_3,t_2))| \le -\ln(1 - (|J(t_1,t_2)| + |J(t_3,t_2)|)) < -\ln(\exp(-\pi)) = \pi. \tag{9.6.21}$$

Из неравенства (9.6.17) следует, что

$$|J(t_3,t_1)| < 1. \tag{9.6.22}$$

В силу утверждения 9.6.2 и равенства (9.6.12) верно равенство

$$\exp(J(t_3,t_2))\exp(J(t_2,t_1)) = \exp(J(t_3,t_1)). \tag{9.6.23}$$

Из неравенства (9.6.16) и теоремы 10.1.1 следует, что

$$\exp(J(t_3,t_2))\exp(J(t_2,t_1)) = \exp(H(J(t_2,t_1),J(t_3,t_2)))$$

и поэтому в силу (9.6.21) верно равенство

$$\exp(H(J(t_2,t_1),J(t_3,t_2))) = \exp(J(t_3,t_1)). \tag{9.6.24}$$

Но в круге $\{A \in \mathbf{A} \Big| \, |A| < \pi\}$ экспонента осуществляет взаимно-однозначное отображение (см. [57, стр. 288]), поэтому из равенства (9.6.21) и неравенств (9.6.21, 9.6.22) следует равенство (9.6.14).

В случае произвольного расположения точек t_1, t_2, t_3 на сегменте $[a, b]$, но при выполнении неравенства (9.6.15), по-прежнему справедливо неравенство (9.6.19), ибо верна оценка

$$\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} |A(\xi)| \, d\xi\right| + \left|\int\limits_{t_2}^{t_3} |A(\xi)| \, d\xi\right| < 2 \cdot \frac{1}{2} (1 - \exp(-\gamma)) = (1 - \exp(-\gamma)).$$

Поэтому справедливо неравенство (9.6.21). Поэтому из равенства (9.6.24) при выполнении неравенств (9.6.21) и (9.6.22) снова следует равенство (9.6.14). Лемма 9.6.3 доказана.

9.6.3 Случай неограниченного интервала.

Рассмотрим теперь случай неограниченного интервала $[a, +\infty[$ определения функции $A(t)$, причём величину

$$M \equiv \int\limits_{a}^{\infty} |A(\xi)| \, d\xi \tag{9.6.25}$$

будем предполагать конечной.

Тогда при любых числах t, t_1 из $[a, +\infty[$ определены интегралы (9.6.2) и существует интеграл

$$J_n(+\infty, t_1) = \int\limits_{t_1}^{+\infty} \dots \int\limits_{t_1}^{+\infty} \mathrm{val}\ n(\xi) A(\xi_n) \dots A(\xi_2) A(\xi_1) \, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n$$

по неограниченному множеству. Положим $J_n(+\infty, +\infty) \equiv 0$ и $J_n(t, +\infty) \equiv -J_n(+\infty, t)$ при $t \in [a, +\infty[$. Таким образом функция $J_n(t, t_1)$ продолжена на компактное множество $[a, +\infty] \times [a, +\infty]$ с сохранением непрерывности. При этом для любых точек t, t_1 из множества $[a, +\infty[$ сохраняется неравенство (9.6.4) и для любых точек t, t_1, t', t'_1 из множества $[a, +\infty[$ сохраняется неравенство (9.6.5).

Введём дополнительное условие (9.6.7), тогда сходится ряд (9.6.8) для любых значений аргументов t и t_1 из $[a, +\infty]$ и определяет функцию $J(t, t_1)$, непрерывную на произведении $[a, +\infty] \times [a, +\infty]$. Для продолженной на компакт $[a, +\infty]^2$ функции $J(t, t_1)$ сохраняются равенства (9.6.9) и (9.6.12) и неравенства (9.6.10) и (9.6.11), а при дополнительных ограничениях (9.6.13) или (9.6.15) равенство (9.6.14) для соответствующих значений аргументов.

Аналогичным образом для функции $A(t)$, заданной на неограниченном множестве $]-\infty, b]$ при условии конечности интеграла

$$M = \int\limits_{-\infty}^{b} |A(\xi)| \, d\xi$$

продолжаются величины $J_n(t, t_1)$ на произведение компактов $[-\infty, b] \times [-\infty, b]$ с сохранением непрерывности и неравенств (9.6.4) и (9.6.5). При дополнительном условии (9.6.7) функция $J(t, t_1)$ продолжается с сохранением непрерывности на $[-\infty, b]^2$, причём сохраняются равенства (9.6.9) и (9.6.12) и неравенства (9.6.10) и (9.6.11), а также равенство (9.6.14) при дополнительных ограничениях (9.6.13) или (9.6.15).

Наконец, в случае когда функция $A(t)$ определена и суммируема на всей прямой $\mathbf{R} \equiv]-\infty, +\infty[$ и величина

$$M = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |A(\xi)|\, d\xi \tag{9.6.26}$$

конечна, функции $J_n(t, t_1)$ продолжаются интегралом (9.6.2) на бесконечные значения аргумента. При этом по определению $J_n(t, t) = 0$ при любом $t \in \overline{\mathbf{R}} \equiv [-\infty, +\infty]$ и $J_n(t, t_1) = -J_n(t_1, t)$ при любых t и t_1 из компакта $\overline{\mathbf{R}}$. Из результатов пункта (9.6.1) следует справедливость леммы.

Лемма 9.6.4 *Если функция $A(t)$ определена и суммируема на вещественной прямой $\mathbf{R}$, то каждая функция $J_n(t, t_1)$, $n \in \mathbf{N}$, продолжается интегралом (9.6.2) и соотношением (9.6.3) на значениях аргументов t и t_1 из компакта $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty]$ с сохранением непрерывности. При любых t и t_1 из $\overline{\mathbf{R}}$ выполнено неравенство (9.6.4). При любых t, t_1, t', t_1' из $\overline{\mathbf{R}}$ выполнено неравенство (9.6.5).*

Соберем все полученные результаты о свойствах функции $J(t, t_1)$ в следующей теореме.

Теорема 9.6.1 *Пусть функция $A(t)$ определена на действительной прямой $\mathbf{R}$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |A(t)|\, dt = M$. Тогда, если $M < 1$, то ряд $J(t, t_1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} J_n(t, t_1)$ сходится абсолютно и равномерно на компактном множестве $\overline{\mathbf{R}}^2$ и определяет непрерывную на $\overline{\mathbf{R}}^2$ функцию $J(t, t_1)$. При любых t, t_1 из $\overline{\mathbf{R}}$ верно равенство*

$$W(t, t_1) = \exp(J(t, t_1))$$

и неравенство

$$|J(t, t_1)| \le -\ln(1 - M).$$

При любых t, t_1, t', t_1' из $\overline{\mathbf{R}}$ верно неравенство

$$|J(t', t_1') - J(t, t_1)| \le \frac{1}{1 - M} \left(\left| \int\limits_{t}^{t'} |A(\xi)|\, d\xi \right| + \left| \int\limits_{t_1}^{t_1'} |A(\xi)|\, d\xi \right| \right).$$

Если $M < 1 - \exp(-\gamma)$, $\gamma \equiv 1 - \exp(-\pi)$, то для t_1, t_2, t_3 из $\overline{\mathbf{R}}$, таких, что t_2 лежит между t_1 и t_3 верно равенство

$$J(t_3, t_1) = H(J(t_2, t_1), J(t_3, t_2)), \tag{9.6.27}$$

а если $M < \frac{1}{2}(1 - \exp(-\gamma))$, то равенство (9.6.27) верно при любых t_1, t_2, t_3 из $\overline{\mathbf{R}}$.

Глава 10

Группы Ли

§ 10.1. Формула Хаусдорфа

§ 10.2. Свойства экспоненты и сходимость ряда Хаусдорфа

§ 10.3. Построение группы Ли с помощью экспоненты

§ 10.4. Свойства подгрупп группы Ли

§ 10.5. Ортогональная и симплектическая группы в бесконечномерном случае и их обобщения

Настоящая глава посвящена построению теории экспоненциальной группы как специальной линейной группы Ли. В основу моего построения положены свойства экспоненты и функции Хаусдорфа.

Здесь $\mathbf{A}$ — банахова алгебра над полем Λ. Функции экспонента и логарифм на банаховой алгебре получены поднятием тех же функций с поля Λ на банахову алгебру $\mathbf{A}$ согласно § 7.4. В некоторой окрестности нуля $W \subset \mathbf{A}^m,\ m \in \mathbf{N}$ определено аналитическое отображение $H : W \to \mathbf{A}$ вида

$$H(A(1), A(2), \dots, A(m)) = \ln\left(\exp(A(m))\exp(A(m-1))\dots\exp(A(2))\exp(A(1))\right) \tag{10.0.1}$$

от m аргументов $A(1) \in \mathbf{A}, A(2) \in \mathbf{A}, \dots, A(m) \in \mathbf{A}$. Эту функцию я называю функцией Хаусдорфа. Вид функции Хаусдорфа и её разложение в степенной ряд в окрестности нуля я получаю из формулы для логарифма решения лоду теоремы 9.5.1. §§ 10.1 и 10.2 посвящены исследования свойств функции Хаусдорфа и экспоненты.

В § 10.3 строится теория экспоненциальной группы. Пусть поле скаляров $\Lambda = \mathbf{R}$. Если $L \subset \mathbf{A}$ одномерное линейное подпространство, то множество значений экспоненты $\exp(L) \subset \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ есть подгруппа по умножению. Здесь $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A}) \subset \mathrm{GL}(\mathbf{A}) \subset \mathbf{A}$ есть связная компонента единицы группы обратимых элементов $\mathrm{GL}(\mathbf{A})$ банаховой алгебры $\mathbf{A}$. Причём для любых двух элементов $A(1), A(2) \in L$ верно равенство

$$\exp(A(2))\exp(A(1)) = \exp(A(2) + A(1)). \tag{10.0.2}$$

Если линейное подпространство L не одномерно, то множество значений экспоненты $\exp(L) \subset \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ может уже не быть подгруппой по умножению. Мы хотим по линейному подпространству $L \subset \mathbf{A}$ определить наименьшую подгруппу $G(L)$ в группе $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ по умножению, содержащую множество $\exp(L)$ и такую, у которой существует окрестность единицы W, являющаяся образом $W = \exp(U)$ некоторой окрестности нуля $U \in L$ линейного подпространства L. Оказывается, если линейное подпространство L есть замкнутая алгебра Ли, то такая подгруппа $G(L) \in \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ существует и единственна. Она называется экспоненциальной группой данной алгебры Ли и обозначается $\mathrm{Expm}\,(L)$. При этом равенство 10.0.2 уже, вообще говоря, не выполняется, но вместо него для элементов $A(1) \in U$ и $A(2) \in U$ выполняется равенство

$$\exp(H(A(1), A(2))) = \exp(A(2)) \exp(A(1)), \tag{10.0.3}$$

где элемент $H(A(1), A(2)) \in L$, т.е. в окрестности единицы $W \subset \mathrm{Expm}\,(L)$ элементы $A(1), A(2), A(3) \equiv H(A(1), A(2))$ линейного подпространства L служат координатами на группе $\mathrm{Expm}\,(L)$.

В параграфе 10.4 устанавливается, что любая связная замкнутая подгруппа $G_1 \subset \mathrm{Expm}\,(L)$ экспоненциальной группы, является экспоненциальной группой $G_1 = \mathrm{Expm}\,(L_1)$ некоторой замкнутой алгебры Ли L_1.

В параграфе 10.5 рассматриваются два важных примера групп Ли: ортогональная и симплектическая группы. Причём моё построение экспоненциальной группы в § 10.3 позволяет одновременно рассматривать конечномерный и бесконечномерный случаи.

§10.1 Формула Хаусдорфа

Формула Хаусдорфа для логарифма произведения экспонент от некоммутирующих аргументов связывает группы Ли и алгебры Ли. Извлечем формулу Хаусдорфа из формулы предыдущего параграфа и получим выражения для коэффициентов ряда Хаусдорфа.

10.1.1 Получение формулы Хаусдорфа из формулы для логарифма решения.

Формулой Хаусдорфа мы называем формулу

$$H(A(1), A(2), \ldots A(m)) = \ln\left(\exp(A(m)) \exp(A(m-1)) \ldots \exp(A(2)) \exp(A(1)\right), \tag{10.1.1}$$

где $A(1), A(2), \ldots A(m)$ элементы банаховой алгебры $\mathbf{A}$. Функция $H(A(1),\ A(2),\ \ldots\ A(m))$, определенная в некоторой окрестности нуля в $\mathbf{A}^m$, называется функцией Хаусдорфа.

Для получения явного вида функции Хаусдорфа введём функцию $A(t) \equiv A(i)$, при $t \in]i-1, i]$, где $i \in \overline{1, m}$, и $A(0) \equiv A(1)$. Функция $W(m, 0)$ есть решение следующей задачи Коши в алгебре $\mathbf{A}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} W(t, 0) = A(t) W(t, 0), \quad t \in \overline{0, m}; \\ W(0, 0) = E. \end{cases} \tag{10.1.2}$$

Согласно лемме 9.1.1 верно

$$W(m, 0) = W(m, m-1) \ldots W(2, 1) W(1, 0) = \exp(A(m)) \ldots \exp(A(2)) \exp(A(1)). \tag{10.1.3}$$

А согласно теореме 9.5.1 верно

$$W(m,0) = \exp(J_1 + J_2 + \ldots + J_n + \ldots). \tag{10.1.4}$$

при условии, что

$$\sum_{i=1}^{m} |A(i)| < 1. \tag{10.1.5}$$

Определим функцию Хаусдорфа $H(A(1), A(2), \ldots A(m))$ формулой

$$H(A(1), A(2), \ldots A(m)) \equiv J_1 + J_2 + \ldots + J_n + \ldots \tag{10.1.6}$$

Тогда при условии (10.1.5) функция (10.1.6) определена и ряд в правой части, который мы назовём рядом Хаусдорфа, абсолютно суммируем в банаховой алгебре $\mathbf{A}$. Обозначим через

$$H_n(A(1), A(2), \ldots A(m)) \equiv J_n,$$

$$J_n = \frac{1}{n} \int\limits_{\Pi_n(m)}\!\!\ldots\!\int \text{val } n(\xi)[A(\xi_n), \ldots [A(\xi_3), [A(\xi_2), A(\xi_1)]] \ldots]\, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n \tag{10.1.7}$$

n-ный член ряда Хаусдорфа, $n \in \mathbf{N}$, $H_n(A(1), A(2), \ldots A(m))$ — однородный полином степени n от m переменных $A(1), A(2), \ldots A(m) \in \mathbf{A}$ с действительными (более точно рациональными) коэффициентами. Так как функция $A(t)$ кусочно постоянна на сегменте $[0, m]$, то

$$J_n(m) = \tag{10.1.8}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{(i_1, i_2, \ldots i_n) \in (\overline{1,m})^n} \int\limits_{i_n - 1}^{i_n} \int\limits_{i_{n-1} - 1}^{i_{n-1}} \ldots \int\limits_{i_2 - 1}^{i_2} \int\limits_{i_1 - 1}^{i_1} \text{val } n(\xi)[A(i_n), \ldots [A(i_3), [A(i_2), A(i_1)]] \ldots] \times$$

$$d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i \in (1,m)^n} \int\limits_{\Pi_n(1)}\!\!\ldots\!\int \text{val } n(i_1 - 1 + \xi_1, i_2 - 1 + \xi_2, \ldots i_n - 1 + \xi_n) A[i]\, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n,$$

где $A[i] \equiv [A(i_n), \ldots [A(i_2), A(i_1)] \ldots]$. Далее полагаем $\Pi_n(1) \equiv \Pi_n$ и $A[i_1] \equiv A(i_1)$ при $i_1 \in \overline{1, m}$.

Согласно свойствам 1-3 функции $\text{val } n(\xi)$ из п. 8.5.4 имеем

$$\text{val } n(i_1 - 1 + \xi_1, i_2 - 1 + \xi_2, \ldots, i_n - 1 + \xi_n) = \text{val } n(i + \xi).$$

Поэтому из формулы (10.1.8) получаем

$$H_n(A(1), A(2), \ldots A(m)) \equiv J_n(m) = \frac{1}{n} \sum_{i \in (\overline{1,m})^n} \text{kap } n(i) A[i], \tag{10.1.9}$$

где

$$\text{kap } n(i) \equiv \int\limits_{\Pi_n}\!\!\ldots\!\int \text{val } n(i + \xi)\, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n. \tag{10.1.10}$$

Доказан следующий результат.

Теорема 10.1.1 *Если* $\sum\limits_{i=1}^{m}|A(i)|<1$ *и полиномы* $H_n(A(1),A(2),\dots A(m))$, $n\in\mathbf{N}$, *задаются формулами (10.1.9,10.1.10), то ряд*

$$H(A(1),A(2),\dots A(m))=\sum_{n=1}^{\infty}H_n(A(1),A(2),\dots A(m)) \qquad (10.1.11)$$

абсолютно суммируем в банаховой алгебре $\mathbf{A}$ *и справедливо равенство*

$$\exp(H(A(1),A(2),\dots A(m))=\exp(A(m))\dots\exp(A(2))\exp(A(1)). \qquad (10.1.12)$$

Ряд Хаусдорфа (10.1.11) порождает степенной ряд в банаховой алгебре $\mathbf{A}$ от m переменных. Этот степенной ряд от аргумента $(A(1),A(2),\dots A(m))\in\mathbf{A}^m$ абсолютно суммируем в окрестности нуля в $\mathbf{A}^m$ вида $\sum_{i=1}^{m}|A(i)|\le\frac{1}{2}$, что следует из сходимости числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{i\in(\overline{1,m})^n}|\operatorname{kap}\, n(i)||A[i]|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot 2^{n-1}\cdot\sum_{i\in(\overline{1,m})^n}|A(i_1)||(A(i_2)|\dots|A(i_n)|\le$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}2^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{m}|A(i)|\right)^n\le\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty. \qquad (10.1.13)$$

Замечание 10.1.1 *Если вместо представления (9.5.8) для величин* J_n *использовать представление (9.5.7), то получается следующая формула*

$$H_n(A(1),A(2),\dots A(m))=\sum_{i\in(\overline{1,m})^n}\operatorname{kap}\, n(i)A(i), \qquad (10.1.14)$$

где $A(i)\equiv A(i_n)\dots A(i_2)A(i_1)$.

Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i\in(\overline{1,m})^n}\operatorname{kap}\, n(i)A(i), \qquad (10.1.15)$$

как ряд в $\mathbf{A}$, члены которого — величины $\operatorname{kap}\, n(i)A(i)$. В силу оценки

$$|\operatorname{kap}\, n(i)||A(i)|\le\frac{1}{n}|A(i_n)|\dots|A(i_2)||A(i_1)| \qquad (10.1.16)$$

при выполнении условия (10.1.5) этот ряд абсолютно сходится в $\mathbf{A}$ к функции Хаусдорфа $H(A(1),A(2),\dots A(m))$.

10.1.2 Перестановка аргументов у функции Хаусдорфа.

Обозначим через $q_m:\overline{1,m}\to\overline{1,m}$, $m\in\mathbf{N}$, антимонотонную биекцию множества $\overline{1,m}$ на себя. Если $i_1\in\overline{1,m}$, то $q_m(i_1)=m+1-i_1$. Положим для $i\in(\overline{1,m})^n$, что $q_m(i)\equiv(q_m(i_1),q_m(i_2),\dots q_m(i_n))$.

Коэффициенты $\operatorname{kap}\, n(i)$ обладает следующим свойством.

Лемма 10.1.1 *Справедливо утверждение*

$$\forall n\in\mathbf{N}\;\forall m\in\mathbf{N}\;\forall i\in(\overline{1,m})^n\;\Big|\;\operatorname{kap}\, n(q_m(i))=(-1)^{n-1}\operatorname{kap}\, n(i). \qquad (10.1.17)$$

Доказательство. Пусть $\xi \in \Pi_n$, тогда по свойствам 1-3 из п. 8.5.4 имеем

$$\text{val } n(q_m(i)+\xi) = \text{ val } n(m+1-i_1+\xi_1, m+1-i_2+\xi_2, \dots m+1-i_n+\xi_n) = \text{ val } n(\xi-i) =$$

$$(-1)^{n-1} \text{ val } n(i-\xi) = (-1)^{n-1} \text{ val } n(i_1+1-\xi_1, i_2+1-\xi_2, \dots i_n+1-\xi_n).$$

Поэтому согласно формуле (10.1.10)

$$\text{kap } n(q_m(i)) = \int\limits_{\Pi_n}\!\!\dots\!\!\int \text{val } n(q_m(i)+\xi)\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n =$$

$$(-1)^{n-1} \int\limits_{\Pi_n}\!\!\dots\!\!\int \text{val } n(i_1+(1-\xi_1), i_2+(1-\xi_2), \dots i_n+(1-\xi_n))\, d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n =$$

$$(-1)^{n-1} \int\limits_{\Pi_n}\!\!\dots\!\!\int \text{val } n(i_1+\eta_1, i_2+\eta_2, \dots i_n+\eta_n)\, d\eta_1 d\eta_2 \dots d\eta_n =$$

$$(-1)^{n-1} \text{ kap } n(i). \ \diamondsuit$$

В силу леммы 10.1.1 верно равенство

$$H_n(A(m), \dots, A(2), A(1)) = \frac{1}{n} \sum_{i \in (\overline{1,m})^n} \text{kap } n(i) A[q_m(i)] = \tag{10.1.18}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i \in (\overline{1,m})^n} \text{kap } n(q_m(i)) A[i] = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \sum_{i \in (\overline{1,m})^n} \text{kap } n(i) A[i] =$$

$$(-1)^{n-1} H_n(A(1), A(2), \dots, A(m)) = -H_n(-A(1), -A(2), \dots, -A(m))$$

при любых $n \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$ и $(A(1), A(2), \dots, A(m)) \in \mathbf{A}^m$. Из равенства (10.1.18) получаем.

Лемма 10.1.2 *Если верно (10.1.5), то верно*

$$H(-A(m), \dots, -A(2), -A(1)) = -H(+A(1), +A(2), \dots, +A(m)). \tag{10.1.19}$$

Последнее равенство вытекает из свойства экспоненты $\exp(-A) = (\exp(A))^{-1}$, ибо в достаточно малой окрестности нуля в $\mathbf{A}^m$ выполнено

$$H(-A(m), \dots, -A(2), -A(1)) = \ln\left(\exp(-A(1)) \exp(-A(2)) \dots \exp(-A(m))\right) =$$

$$\ln\Big((\exp(A(m)) \dots \exp(A(2)) \exp(A(1)))^{-1}\Big) = \ln\Big(\exp^{-H(A(1), A(2), \dots, A(m))}\Big) =$$

$$-H(A(1), A(2), \dots, A(m))$$

(п. 10.2.1).

10.1.3 Вспомогательные понятия — опись и веерный многочлен.

Возникает вопрос: какой информации о наборе $i = (i_1, i_2, \dots i_n) \in \mathbf{N}^n$ достаточно для вычисления коэффициента $\operatorname{kap} n(i)$? Знания одного лишь функционала $u(i)$ — числа подъёмов, вообще говоря, недостаточно, а именно, требуется кроме функционала $u(i)$ знание описи. Введём это новое понятие.

Определение 10.1.1 *Описью* $F \equiv ((k_1, r_1), (k_2, r_2), \dots (k_s, r_s))$ *будем называть конечный набор пар натуральных чисел* (k_α, r_α), $\alpha \in \overline{1, s}$, *такой, что* $k_1 < k_2 < \dots < k_s$.

Определение 10.1.2 *Ценой описи* $F = ((k_1, r_1), (k_2, r_2), \dots (k_s, r_s))$ *называется число*

$$\operatorname{pr}(F) \equiv \sum_{\alpha=1}^{s} k_\alpha r_\alpha. \tag{10.1.20}$$

Включим во множество описей пустое множество $F = \emptyset$, назвав его *пустой описью* и положив его цену $\operatorname{pr}(\emptyset) \equiv 0$.

По какой описи $F = ((k_1, r_1), (k_2, r_2), \dots (k_s, r_s))$ построим многочлен $\operatorname{wer}(F; x)$ по переменной x, который назовём *веерным многочленом*

$$\operatorname{wer}(F; x) \equiv \prod_{\alpha=1}^{s} \left(W(x, k_\alpha + 1)\right)^{r_\alpha}, \tag{10.1.21}$$

где многочлены $W(x, k)$ определены формулой (8.6.3). В случае $F = \emptyset$ по определению $\operatorname{wer}(\emptyset, x) = 1$. Степень веерного многочлена равна цене описи.

Сопоставим теперь каждому вектору $i \in \mathbf{N}^n$ опись $\operatorname{rer}(i) = ((k_1, r_1),\ (k_2, r_2),\ \dots (k_3, r_3))$ цены, равной $\operatorname{rav}(i)$, следующим образом. Выпишем максимальные длины участков застоя в наборе $(i_1, i_2, \dots i_n)$, т.е. когда $i_\beta = i_{\beta+1} = \dots = i_{\beta+p_\beta}$. Получим набор чисел $p_1, p_2, \dots p_v$, среди которых могут быть совпадающие. Далее возьмём наименьшее из чисел $p_1, p_2, \dots p_v$ и назовём его k_1. Сосчитаем сколько раз встречается k_1 в наборе $p_1, p_2, \dots p_v$ и назовём это число r_1. Далее среди чисел больших k_1 в наборе $p_1, p_2, \dots p_v$ выберем наименьшее число — k_2 и сосчитаем сколько раз оно встречается в наборе $p_1, p_2, \dots p_v$ — получим число r_2 и т.д. Получаем опись $((k_1, r_1), (k_2, r_2), \dots (k_3, r_3)) \equiv \operatorname{rer}(i)$. По построению верно

$$\forall i \in \mathbf{N}^n \;\Big|\; \operatorname{pr}(\operatorname{rer}(i)) = \operatorname{rav}(i). \tag{10.1.22}$$

Если $\operatorname{rav}(i) = 0$, то $\operatorname{rer}(i) \in \emptyset$ по определению.

Пример 10.1.1

$i = (2, \underline{1, 1}, 2, \underline{4, 4}, 1, \underline{2, 2, 2}, \underline{1, 1}) \in \mathbf{N}^{12}$.

1) Подчеркнем участки застоя в наборе i.

2) Выпишем их длины 1,1,2,1.

3) Получаем опись $\operatorname{rer}(i) = ((1, 3), (2, 1))$.

Изложение примера закончено.

Выпишем теперь все описи F цены не более 3 и соответствующие им веерные многочлены $\operatorname{wer}(F;x)$:

$$
\begin{array}{lll}
\underline{\operatorname{pr}(F)=0.} & F=\emptyset; & \operatorname{wer}(F;x)=1.\\
\underline{\operatorname{pr}(F)=1.} & F=(1,1); & \operatorname{wer}(F;x)=W(x,2)=1+x/2.\\
\underline{\operatorname{pr}(F)=2.} & 1)F=(2,1); & \operatorname{wer}(F;x)=W(x,3)=1+x+x^2/6.\\
 & 2)F=(1,2); & \operatorname{wer}(F;x)=(W(x,2))^2=1+x+x^2/4.\\
\underline{\operatorname{pr}(F)=3.} & 1)F=(3,1); & \operatorname{wer}(F;x)=w(x,4)=1+3x/2+7x^2/12+x^3/24.\\
 & 2)F=(1,1),(2,1)); & \operatorname{wer}(F;x)=W(x,2)W(x,3)=\\
 & & (1+x/2)(1+x+x^2/6)=1+3x/2+2x^2/3+x^3/12.\\
 & 3)F=(1,3); & \operatorname{wer}(F;x)=W(x,2)^3=(1+x/2)^3=\\
 & & 1+3x/2+3x^2/4+x^3/8.
\end{array}
\tag{10.1.23}
$$

Мы использовали формулы (8.6.36) для многочленов $W(x,k)$.

10.1.4 Вычисление коэффициентов $\operatorname{kap} n(i)$.

Коэффициенты $\operatorname{kap} n(i)$, $i\in\mathbf{N}^n$ однозначно вычисляются по значению функционала подъемом $u(i)$ и по описи $\operatorname{rer}(i)$. Проведём соответствующее построение.

По определению функции $\operatorname{val} n(\xi)$ (см. п. 8.5.4) и по определению чисел Винокурова $V(n,k)$ (см. п. 8.4.1) верно

$$\operatorname{val} n(i+\xi)=V(n,u(i+\xi))=\cot\Big((1+x)^{u(i+\xi)}\ln(1+x);x;n\Big). \tag{10.1.24}$$

Согласно формуле (10.1.10) получаем

$$\operatorname{kap} n(i)=\cot\left(\left(\int\limits_{\Pi_n}\!\!\dots\!\int(1+x)^{u(i+\xi)}\,d\xi_1d\xi_2\dots d\xi_n\right)\ln(1+x);x;n\right), \tag{10.1.25}$$

т.е. вычисление $\operatorname{kap} n(i)$ сведено к вычислению интеграла

$$I\equiv\int\limits_{\Pi_n}\!\!\dots\!\int(1+x)^{u(i+\xi)}\,d\xi_1d\xi_2\dots d\xi_n. \tag{10.1.26}$$

Переходя к вычислению интеграла (10.1.26), заметим, что если $i_\alpha\neq i_{\alpha+1}$ и $\xi_\alpha\in\,]0,1[$, то следующая величина постоянна

$$\operatorname{sign}((i_{\alpha+1}+\xi_{\alpha+1})-(i_\alpha+\xi_\alpha))=\operatorname{sign}((i_{\alpha+1}-i_\alpha)+(\xi_{\alpha+1}-\xi_\alpha))=\operatorname{sign}(i_{\alpha+1}-i_\alpha).$$

Поэтому при $i_\alpha\neq i_{\alpha+1}$ и $\xi_\alpha\in]0,1[$ и функционал

$$u(i_\alpha+\xi_\alpha,i_{\alpha+1}+\xi_{\alpha+1})=u(i_\alpha,i_{\alpha+1}) \tag{10.1.27}$$

постоянен. Если же $i_\alpha=i_{\alpha+1}=\ldots=i_{\alpha+\beta}$, то $u(i_\alpha+\xi_\alpha,i_{\alpha+1}+\xi_{\alpha+1},\ldots,i_{\alpha+\beta}+\xi_{\alpha+\beta})=u(\xi_\alpha,\xi_{\alpha+1},\ldots,\xi_{\alpha+\beta})$. Поэтому по формуле (8.6.3) получаем

$$I=(1+x)^{u(i)}\prod_{\alpha=1}^{s}(W(x,k_\alpha+1))^{r_\alpha}=(1+x)^{u(i)}\operatorname{wer}(\operatorname{rer}(i);x), \tag{10.1.28}$$

где $((k_1,r_1),(k_2,r_2),\ldots,(k_s,r_s))\equiv\operatorname{rer}(i)$.

Получаем следующий результат.

Теорема 10.1.2 *Верна формула*

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \forall i \in \mathbf{N}^n \ \Big|\ \operatorname{kap} n(i) = \operatorname{cot}\Big((1+x)^{u(i)} \operatorname{wer}(\operatorname{rer}(i); x)\ln(1+x); x; n\Big). \quad (10.1.29)$$

Формула (10.1.29) принимает простейший вид, когда $\operatorname{rav}(i) = 0$. В этом случае $\operatorname{wer}(\operatorname{rer}(i); x) \equiv 1$ и

$$\operatorname{kap} n(i) = \operatorname{cot}\Big((1+x)^{u(i)}\ln(1+x); x; n\Big) = V(n, u(i)).$$

Выпишем реализацию формулы (10.1.29) в случае $\operatorname{rav}(i) \in \overline{0,3}$. Согласно формулам (10.1.23) получаем:

$\underline{\operatorname{rav}(i) = 0.}$ $\operatorname{kap} n(i) = V(n, n(i))$.

$\underline{\operatorname{rav}(i) = 1.}$ $\operatorname{kap} n(i) = \operatorname{cot}\Big((1+\frac{1}{2}x)(1+x)^{u(i)}\ln(1+x); x; n\Big)$,
$\operatorname{kap} n(i) = V(n, u(i)) + \frac{1}{2}V(n-1, u(i))$.

$\underline{\operatorname{rav}(i) = 2.}$ 1) $\operatorname{rer}(i) = (2,1)$; $\operatorname{kap} n(i) = \operatorname{cot}\Big((1+x+\frac{1}{6}x^2)(1+x)^{u(i)}\ln(1+x); x; n\Big)$,
$\operatorname{kap} n(i) = V(n, u(i)) + V(n-1, u(i)) + \frac{1}{6}V(n-2, u(i))$.
2) $\operatorname{rer}(i) = (1,2)$; $\operatorname{kap} n(i) = \operatorname{cot}\Big((1+x+\frac{1}{4}x^2)(1+x)^{u(i)}\ln(1+x); x; n\Big)$,
$\operatorname{kap} n(i) = V(n, u(i)) + V(n-1, u(i)) + \frac{1}{4}V(n-2, u(i))$.

$\underline{\operatorname{rav}(i) = 3.}$ 1) $\operatorname{rer}(i) = (3,1)$; $\operatorname{kap} n(i) =$
$\operatorname{cot}\Big((1+\frac{3}{2}x+\frac{7}{12}x^2+\frac{1}{24}x^3)(1+x)^{u(i)}\ln(1+x); x; n\Big)$,
$\operatorname{kap} n(i) =$
$V(n, u(i)) + \frac{3}{2}V(n-1, u(i)) + \frac{7}{12}V(n-2, u(i)) + \frac{1}{24}V(n-3, u(i))$.
2) $\operatorname{rer}(i) = ((1,1),(2,1))$; $\operatorname{kap} n(i) =$
$\operatorname{cot}\Big((1+\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}x^2++\frac{1}{12}x^3)(1+x)^{u(i)}\ln(1+x); x; n\Big)$,
$\operatorname{kap} n(i) =$
$V(n, u(i)) + \frac{3}{2}V(n-1, u(i)) + \frac{2}{3}V(n-2, u(i)) + \frac{1}{12}V(n-3, u(i))$.
3) $\operatorname{rer}(i) = (1,3)$; $\operatorname{kap} n(i) =$
$\operatorname{cot}\Big((1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{8}x^3)(1+x)^{u(i)}\ln(1+x); x; n\Big)$,
$\operatorname{kap} n(i) =$
$V(n, u(i)) + \frac{3}{2}V(n-1, u(i)) + \frac{3}{4}V(n-2, u(i)) + \frac{1}{8}V(n-3, u(i))$.

(10.1.30)

Замечание 10.1.2 *При* $i_1 = i_2$ *коэффициент* $\operatorname{kap} n(i)$, $n \geq 2$ *встречается в полиноме* $H_n(A(1), A(2), \ldots A(m))$ *в следующем сочетании*

$$\operatorname{kap} n(i)A[i] = \operatorname{kap} n(i)[A(i_n), \ldots [A(i_3), [A(i_2), A(i_1)]]..] = 0$$

в силу свойства коммутатора $[A(i_1), A(i_1)] = 0$. *Поэтому для вычисления полинома* $H_n(A(1), A(2), \ldots A(m))$, *а следовательно и функции Хаусдорфа* $H(A(1), A(2), \ldots A(m))$ *не требуется знания коэффициента* $\operatorname{kap} n(i)$ *с* $i_1 = i_2$.

10.1.5 Вычисление коэффициентов $\operatorname{kap} n(i)$ при $n \in \overline{1,5}$.

На основании предыдущего пункта выпишем явные выражения для первых пяти массивов коэффициентов $\operatorname{kap} n(i)$. Причём на основании замечания 10.1.2 мы рассматриваем лишь случай $i_1 \neq i_2$.

$\underline{n = 1.}$ $i = (i_1) \in \mathbf{N}$. В этом случае $u(i) = 0$, $\operatorname{rav}(i) = 0$ и согласно формулам (10.1.30)

$$\operatorname{kap} 1(i) = 1. \quad (10.1.31)$$

Полином $H_1(A(1), A(2), \ldots A(m))$ в этом случае равен

$$H_1(A(1), A(2), \ldots A(m)) = \sum_{i=1}^{m} A(i). \tag{10.1.32}$$

<u>$n = 2.$</u> $i = (i_1, i_2)$. В этом случае $\operatorname{rav}(i) = 0$ и по формулам (10.1.30)

$$\operatorname{kap} 2(i_1, i_2) = V(2, u(i_1, i_2)) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & i_1 < i_2; \\ -\frac{1}{2}, & i_1 > i_2. \end{cases} \tag{10.1.33}$$

Полином $H_2(A(1), A(2), \ldots A(m))$ равен

$$H_2(A(1), A(2), \ldots A(m)) = \frac{1}{2} \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m} [A(i_2), A(i_1)]. \tag{10.1.34}$$

<u>$n = 3.$</u> $i = (i_1, i_2, i_3), i_1 \neq i_2$. В силу $i_1 \neq i_2$ функционал $\operatorname{rav}(i)$ может принимать лишь значения 0 и 1. В силу формул (10.1.30) получаем

$$\operatorname{kap} 3(i) = \begin{cases} V(3, u(i)), & \operatorname{rav}(i) = 0; \\ V(3, u(i)) + \frac{1}{2} V(2, u(i)), & \operatorname{rav}(i) = 1. \end{cases} \tag{10.1.35}$$

Формула (10.1.35) даёт следующую таблицу значений

$$\operatorname{kap} 3(i_1, i_2, i_3) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & i_1 < i_2 < i_3; \\ -\frac{1}{6}, & i_1 < i_2 > i_3; \\ \frac{1}{12}, & i_1 < i_2 = i_3; \\ \frac{1}{12}, & i_1 > i_2 = i_3; \\ -\frac{1}{6}, & i_1 > i_2 < i_3; \\ \frac{1}{3}, & i_1 > i_2 > i_3. \end{cases} \tag{10.1.36}$$

<u>$n = 4.$</u> $i = (i_1, i_2, i_3, i_4), i_1 \neq i_2$. В этом случае $\operatorname{rav}(i) \le 2$ и при $\operatorname{rav}(i) = 2$ возможна лишь одна опись $\operatorname{rer}(i) = (2, 1)$. Поэтому согласно (10.1.30) получаем

$$\operatorname{kap} 4(i) = \begin{cases} V(4, u(i)), & \operatorname{rav}(i) = 0; \\ V(4, u(i)) + \frac{1}{2} V(3, u(i)), & \operatorname{rav}(i) = 1; \\ V(4, u(i)) + V(3, u(i)) + \frac{1}{6} V(2, u(i)), & \operatorname{rav}(i) = 2. \end{cases} \tag{10.1.37}$$

<u>$n = 5.$</u> $i = (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$, $i_1 \neq i_2$. В этом случае $\operatorname{rav}(i) \le 3$ и при $\operatorname{rav}(i) = 3$ возможна лишь одна опись $\operatorname{rer}(i) = (3, 1)$. Согласно формулам (10.1.30) получаем

$$\operatorname{kap} 5(i) = \begin{cases} V(5, u(i)), & \operatorname{rav}(i) = 0; \\ V(5, u(i)) + \frac{1}{2} V(4, u(i)), & \operatorname{rav}(i) = 1; \\ V(5, u(i)) + \frac{1}{6} V(3, u(i)), & \operatorname{rav}(i) = 2, \quad \operatorname{rer}(i) = (2, 1); \\ V(5, u(i)) + \frac{1}{4} V(3, u(i)), & \operatorname{rav}(i) = 2, \quad \operatorname{rer}(i) = (1, 2); \\ V(5, u(i)) + \frac{3}{2} V(4, u(i)) + & \\ \frac{7}{12} V(3, u(i)) + \frac{1}{24} V(2, u(i)), & \operatorname{rav}(i) = 3. \end{cases} \tag{10.1.38}$$

10.1.6 Случай $m = 2$.

Рассмотрим теперь ряд Хаусдорфа $H(A(1), A(2))$ в случае $m = 2$ и вычислим первые пять полиномов $H_n(A(1), A(2))$. Согласно замечанию 10.1.2 достаточно ограничиться вычислением коэффициентов $\operatorname{kap} n(i)$ с $i_1 \neq i_2$. Согласно лемме 10.1.1 верно $\operatorname{kap} n(q_2(i)) = (-1)^{n-1} \operatorname{kap} n(i)$, т.е. при замене $A(1)$ на $A(2)$ и $A(2)$ на $A(1)$ коэффициент $\operatorname{kap} n(i)$ при n нечётном не меняет знака, а при n чётном меняет знак. В силу последнего достаточно вычислить $\operatorname{kap} n(i)$ при $i_1 < i_2$.

<u>$n = 1$.</u> $H_1(A(1), A(2)) = A(1) + A(2)$. (10.1.39)

<u>$n = 2$.</u> $H_2(A(1), A(2)) = \frac{1}{2}[A(2), A(1)]$. (10.1.40)

<u>$n = 3$.</u> $i = (i_1, i_2, i_3)$. Всего имеется $2^3 = 8$ коэффициентов $(i_1, i_2, i_3) \in (\overline{1,2})^3$. Условие $i_1 = i_2$ выделяет $2^2 = 4$ коэффициента, которые не нужно вычислять. Из оставшихся $2^3 - 2^2 = 2^2$ коэффициентов выделим коэффициенты с $i_1 < i_2$, т.е. с $i_1 = 1$ $i_2 = 2$ — их два. Согласно формуле (10.1.36)

$$\begin{array}{c} \operatorname{kap} 3(1,2,1) = -\frac{1}{6}, \\ \operatorname{kap} 3(1,2,2,) = \frac{1}{12}. \end{array} \tag{10.1.41}$$

Оставшиеся два коэффициента согласно лемме 10.1.1

$$\begin{array}{c} \operatorname{kap} 3(2,1,2) = -\frac{1}{6}, \\ \operatorname{kap} 3(2,1,1) = \frac{1}{12}. \end{array} \tag{10.1.42}$$

Из (10.1.41, 10.1.42) получаем

$$H_3(A(1), A(2)) = \frac{1}{3} \sum_{i \in (\overline{1,2})^3} \operatorname{kap} 3(i) A[i] = \tag{10.1.43}$$

$$\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}A[1,2,1] - \frac{1}{6}A[2,1,2] + \frac{1}{12}A[1,2,2,] + \frac{1}{12}A[2,1,1,]\right).$$

В силу антисимметричности коммутатора $A[1,2,i] = -A[2,1,i]$, $i \in \overline{1,2}$, поэтому (10.1.43) переходит в следующую формулу

$$H_3(A(1), A(2)) = \frac{1}{12}A[1,2,2] + \frac{1}{12}A[2,1,1] = \tag{10.1.44}$$

$$\frac{1}{12}[A(2), [A(2), A(1)]] + \frac{1}{12}[A(1), [A(1), A(2)]].$$

<u>$n = 4$.</u> Всего имеется 2^4 коэффициентов $\operatorname{kap} 4(i_1, i_2, i_3, i_4)$. Отбрасываем 2^3 коэффициентов с $i_1 = i_2$ — остается 2^3 коэффициентов. Условие $i_1 < i_2$, т.е. $i_1 = 1$, $i_2 = 2$ выделяет из 2^3 коэффициентов 2^2 коэффициентов вида $\operatorname{kap} 4(1, 2, i_3, i_4)$. Согласно (10.1.37) имеем

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{kap} 4(1,2,1,1) &=& V(4,1) + \frac{1}{2}V(3,1) = 0, \\ \operatorname{kap} 4(1,2,1,2) &=& V(4,2) = -\frac{1}{12}, \\ \operatorname{kap} 4(1,2,2,1) &=& V(4,1) + \frac{1}{2}V(3,1) = 0, \\ \operatorname{kap} 4(1,2,2,2) &=& V(4,1) + V(3,1) + \frac{1}{6}V(2,1) = 0. \end{array} \tag{10.1.45}$$

Из формул (10.1.45) и леммы 10.1.1 получаем

$$H_4(A(1), A(2)) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{12}A[1,2,1,2] + \frac{1}{12}A[2,1,2,1]\right). \tag{10.1.46}$$

Согласно тождеству Якоби

$$A[2,1,2,1]=[A(1),[A(2),A[2,1]]]=-[A[2,1],[A(1),A(2)]]-[A(2),[A[2,1],A(1)]]= \tag{10.1.47}$$
$$-[[A(1),A(2)],[A(1),A(2)]]+[A(2),[A(1),A[2,1]]]=A[2,1,1,2]=-A[1,2,1,2].$$

Подставляя (10.1.47) в (10.1.46), получаем следующее выражение

$$H_4(A(1),A(2))=-\frac{1}{24}A[1,2,1,2]=-\frac{1}{24}[A(2),[A(1),[A(2),A(1)]]]. \tag{10.1.48}$$

<u>$n=5.$</u> Всего коэффициентов kap $5(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5)$ — 2^5. Отбрасываем 2^4 коэффициентов с $i_1=i_2$, остается 2^4 коэффициентов. Условие $i_1<i_2$ оставляет 2^3 коэффициентов вида kap $5(1,2,i_3,i_4,i_5)$, которые вычисляем по формуле (10.1.38):

$$\begin{array}{rcl}
\text{kap } 5(1,2,1,1,1) &=& V(5,1)+V(4,1)+\frac{1}{6}V(3,1)=-\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}(-\frac{1}{6})=\frac{1}{180},\\
\text{kap } 5(1,2,1,1,2) &=& V(5,2)+\frac{1}{2}V(4,2)=\frac{1}{30}+\frac{1}{2}(-\frac{1}{12})=-\frac{1}{120},\\
\text{kap } 5(1,2,1,2,1) &=& V(5,2)=\frac{1}{30},\\
\text{kap } 5(1,2,1,2,2) &=& V(5,2)+\frac{1}{2}V(4,2)=\frac{1}{30}+\frac{1}{2}(-\frac{1}{12})=-\frac{1}{120},\\
\text{kap } 5(1,2,2,1,1) &=& V(5,1)+V(4,1)+\frac{1}{4}V(3,1)=-\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}(-\frac{1}{6})=-\frac{1}{120},\\
\text{kap } 5(1,2,2,1,2) &=& V(5,2)+\frac{1}{2}V(4,2)=\frac{1}{30}+\frac{1}{2}(-\frac{1}{12})=-\frac{1}{120},\\
\text{kap } 5(1,2,2,2,1) &=& V(5,1)+V(4,1)+\frac{1}{6}V(3,1)=\frac{1}{180},\\
\text{kap } 5(1,2,2,2,2) &=& V(5,1)+\frac{3}{2}V(4,1)+\frac{7}{12}V(3,1)+\frac{1}{24}V(2,1)=\\
&& -\frac{1}{20}+\frac{3}{2}(\frac{1}{12})+\frac{7}{12}(-\frac{1}{6})+\frac{1}{24}(\frac{1}{2})=-\frac{1}{720}.
\end{array} \tag{10.1.49}$$

В силу леммы 10.1.1 для коэффициентов вида kap $(2,1,i_3,i_4,i_5)$ из формул (10.1.49) следует

$$\begin{array}{rcl}
\text{kap } 5(2,1,2,2,2) &=& \frac{1}{180},\\
\text{kap } 5(2,1,2,2,1) &=& -\frac{1}{120},\\
\text{kap } 5(2,1,2,1,2) &=& \frac{1}{30},\\
\text{kap } 5(2,1,2,1,1) &=& -\frac{1}{120},\\
\text{kap } 5(2,1,1,2,2) &=& -\frac{1}{120},\\
\text{kap } 5(2,1,1,2,1) &=& -\frac{1}{120},\\
\text{kap } 5(2,1,1,1,2) &=& \frac{1}{180},\\
\text{kap } 5(2,1,1,1,1) &=& -\frac{1}{720}.
\end{array} \tag{10.1.50}$$

Далее используем свойство симметричности коммутатора $A[1,2,i_3,i_4,i_5]=-A[2,1,i_3,i_4,i_5]$ и проведём вычисление суммы

$$H_5(A(1),A(2))=\frac{1}{5}\sum_{i_3,i_4,i_5\in\overline{1,2}}\text{kap } 5(1,2,i_3,i_4,i_5)A[1,2,i_3i_4,i_5]+ \tag{10.1.51}$$
$$\frac{1}{5}\sum_{i_3,i_4,i_5\in\overline{1,2}}\text{kap } 5(2,1,i_3,i_4,i_5)A[2,1,i_3,i_4,i_5]=$$
$$\frac{1}{5}\sum_{i_3,i_4,i_5\in\overline{1,2}}(\text{kap } 5(1,2,i_3,i_4,i_5)-\text{kap } 5(2,1,i_3,i_4,i_5))\,A[1,2,i_3,i_4,i_5]=$$
$$\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1}{180}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{180}\right)A[1,2,1,1,1]+\left(-\frac{1}{120}-\frac{1}{180}\right)A[1,2,1,1,2]+\right.$$
$$\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{120}\right)A[1,2,1,2,1]+\left(-\frac{1}{120}+\frac{1}{120}\right)A[1,2,1,2,2]+$$

$$\left(-\frac{1}{120}+\frac{1}{120}\right)A[1,2,2,1,1]+\left(-\frac{1}{120}-\frac{1}{30}\right)A[1,2,2,1,2]+$$
$$\left(\frac{1}{180}+\frac{1}{120}\right)A[1,2,2,2,1]+\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{180}-\frac{1}{180}\right)A[1,2,2,2,2]\Big)=$$
$$\frac{1}{5}\Big(\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{180}A[1,2,1,1,1]-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{180}A[1,2,2,2,2]-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{180}A[1,2,1,1,2]+$$
$$\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{180}A[1,2,2,2,1]+\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{180}A[1,2,1,2,1]-\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{180}A[1,2,2,1,2]\Big)=$$
$$\frac{1}{120}\Big(\frac{1}{6}A[1,2,1,1,1]-\frac{1}{6}A[1,2,2,2,2]-\frac{1}{3}A[1,2,1,1,2]+$$
$$\frac{1}{3}A[1,2,2,2,1]+A[1,2,1,2,1]-A[1,2,2,1,2]\Big).$$

С учётом (10.1.47) получаем следующую формулу

$$H_5(A(1),A(2))=\frac{1}{120}\Big(-\frac{1}{6}A[1,2,2,2,2]-\frac{1}{6}A[2,1,1,1,1]+\frac{1}{3}A[1,2,2,2,1]+ \qquad (10.1.52)$$
$$\frac{1}{3}A[2,1,1,1,2]+A[1,2,2,1,1,]+A[2,1,1,2,2]\Big).$$

10.1.7 Оценки функции Хаусдорфа.

Для дальнейшего нам будет полезна следующая оценка функции Хаусдорфа, следующая из оценки (9.5.11) для величин J_n.

Лемма 10.1.3 *При любом $n\in\mathbf{N}$ верно неравенство*

$$|H_n(A(1),A(2),\dots A(m))|\le\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{m}|A(i)|\right)^n,$$

поэтому, если $\sum_{i=1}^{m}|A(i)|<1$, то верно неравенство

$$|H(A(1),A(2),\dots A(m))|\le-\ln\left(1-\sum_{i=1}^{m}|A(i)|\right). \qquad (10.1.53)$$

Доказательство. Согласно (9.5.11) имеем

$$|H_n(A(1),A(2),\dots A(m))|\le\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{m}|A(i)|\right)^n.$$

Поэтому

$$|H(A(1),A(2),\dots A(m))|\le\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{m}|A(i)|\right)^n=-\ln\left(1-\sum_{i=1}^{m}|A(i)|\right). \quad \diamondsuit$$

Следствие 10.1.1 *Если $\sum_{i=1}^{m}|A(i)|<\frac{1}{2}$, то*

$$|H(A(1),A(2),\dots A(m))|\le\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{m}|A(i)|. \qquad (10.1.54)$$

В самом деле, если $x \equiv \sum\limits_{i=1}^{m} |A(i)|$, то

$$|H(A(1), A(2), \dots A(m))| \leq -\ln\left(1 - \sum_{i=1}^{m} |A(i)|\right) = -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots =$$

$$x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots\right) \leq x\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1-x}\right)\right) \leq \frac{3}{2}x.$$

В случае элементов $A, B \in \mathbf{A}$ таких, что $|-A| + |B| + |A| < 1$ определена функция Хаусдорфа $H(-A, B, A)$ и справедливо равенство

$$\exp(H(-A, B, A)) = \exp(A)\exp(B)\exp(-A). \qquad (10.1.55)$$

Первые два члена ряда Хаусдорфа в этом случае имеют вид согласно формулам (10.1.32, 10.1.34):

$$H_1(-A, B, A) = B. \qquad (10.1.56)$$

$$H_2(-A, B, A) = [A, B]. \qquad (10.1.57)$$

Лемма 10.1.4 *Если* $|A| \leq q, |B| \leq q$ *и* $q \leq \frac{1}{6}$, *то*

$$|H(-A, B, A) - (B + [A, B])| \leq |[A, B]| \cdot 12q. \qquad (10.1.58)$$

Доказательство. В условиях леммы 10.1.4 имеем $|-A| + |B| + |A| \leq 3q \leq \frac{1}{2} < 1$, поэтому ряд Хаусдорфа абсолютно суммируем и верно равенство $H(-A, B, A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} H_n(-A, B, A)$. Для n-ного члена справедливо представление при $n \geq 3$:

$$H_n(-A, B, A) = \frac{1}{n} \sum_{i_1, i_2, \dots i_n \in \overline{1,3}} \operatorname{kap} n(i_1, i_2, \dots i_n) A[i_1, i_2, \dots i_n]. \qquad (10.1.59)$$

Одночлен $A[i_1, i_2, \dots i_n] = 0$ в сумме (10.1.59), если $i_1 = i_2$ или $i_1 = 1$, $i_2 = 3$ или $i_1 = 3$, $i_2 = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} H_n(-A, B, A) \ = \ & \frac{1}{n} \sum_{i_3, i_4, \dots i_n \in \overline{1,3}} \operatorname{kap} n(1, 2, i_3, i_4, \dots i_n)[A(i_n), \dots [A(i_3), [B, -A]] \dots] + \\ & \frac{1}{n} \sum_{i_3, i_4, \dots i_n \in \overline{1,3}} \operatorname{kap} n(2, 1, i_3, i_4, \dots i_n)[A(i_n), \dots [A(i_3), [-A, B]] \dots] + \\ & \frac{1}{n} \sum_{i_3, i_4, \dots i_n \in \overline{1,3}} \operatorname{kap} n(2, 3, i_3, i_4, \dots i_n)[A(i_n), \dots [A(i_3), [A, B]] \dots] + \\ & \frac{1}{n} \sum_{i_3, i_4, \dots i_n \in \overline{1,3}} \operatorname{kap} n(3, 2, i_3, i_4, \dots i_n)[A(i_n), \dots [A(i_3), [B, A]] \dots]. \end{aligned} \qquad (10.1.60)$$

Далее используем неравенство

$$|[A, B]| \leq 2|A||B|. \qquad (10.1.61)$$

и следующую оценку

$$\forall n \in \mathbf{N} \ \ \forall i \in (\overline{1, m})^n \ \Big| \ |\operatorname{kap} n(i)| \leq \frac{1}{n}, \qquad (10.1.62)$$

вытекающую из формулы (10.1.10) и неравенства (8.5.33). Получим оценку

$$|H_n(-A,B,A)| \le \frac{1}{n}\cdot 4\cdot \frac{1}{n}\cdot 3^{n-2}\cdot 2^{n-2}\cdot q^{n-2}\cdot |[A,B]| = |[A,B]|\cdot \frac{(6q)^{n-2}}{n^2}\cdot 4. \quad (10.1.63)$$

Суммируя неравенство (10.1.63), получаем

$$|\sum_{n=3}^{\infty} H_n(-A,B,A)| \le |[A,B]|\cdot 4\cdot \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(6q)^{(n-2)}}{n^2} \le |[A,B]|\cdot 4\cdot (6q)\cdot \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2} \le$$

$$|[A,B]|\cdot 24q\cdot \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)} = |[A,B]|\cdot 12q. \quad (10.1.64)$$

Лемма 10.1.4 доказана. $\diamondsuit$

Следствие 10.1.2 *В условиях леммы 10.1.4 верны неравенства*

$$|H(-A,B,A)| \le |B|(1+2q+24q^2) \le 2|B|. \quad (10.1.65)$$

Ввиду важности оценки (10.1.62) выделим её в отдельный результат.

Лемма 10.1.5 *Справедливо неравенство*

$$|\operatorname{kap} n(i)| \le \frac{1}{n}. \quad (10.1.66)$$

при любых $n \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$, $i \in (\overline{1,m})^n$.

10.1.8 Зависимость функции Хаусдорфа от одного аргумента.

Функция Хаусдорфа $H(A(1),A(2),\ldots A(m))$ определена в области $\operatorname{Rah}_m(1) \in \mathbf{A}^m$, задаваемой условием (10.1.5) и представляется в этой области абсолютно суммируемым рядом Хаусдорфа. В этой же области согласно п. 10.1.1 функция Хаусдорфа представима абсолютно суммируемым рядом из одночленов

$$H(A(1),A(2),\ldots A(m)) = \sum_{n\in\mathbf{N},\ i\in(\overline{1,m})^n} \operatorname{kap} n(i)A(i). \quad (10.1.67)$$

Фиксируем одни из аргументов $A(k)$, $k \in \overline{1,m}$, тогда функция Хаусдорфа, как функция оставшихся $m-1$ аргументов, представима в области $\operatorname{Rah}_{m-1}(1-|A(k)|) \subset \mathbf{A}^{m-1}$ абсолютно сходящимся рядом Хаусдорфа и абсолютно сходящимся рядом (10.1.67), поэтому непрерывна в области $\operatorname{Rah}_{m-1}(1-|A(k)|)$ и

$$H(0,0,\ldots 0,A(k),0,0,\ldots 0) = A(k). \quad (10.1.68)$$

Обозначая $U(\alpha) \equiv \{A \in \mathbf{A} \mid |A| < \alpha\}$, получаем утверждение.

Утверждение 10.1.1 *Если* $A(k) \in U(\alpha)$, $\alpha \le 1$, *то существует число* $\varepsilon > 0$, *что*

$$\forall (A(1),A(2),\ldots A(k-1),A(k+1),A(k+2),\ldots A(m)) \in \operatorname{Rah}_{m-1}(\varepsilon)$$

$$\Big| \; H(A(1),A(2),\ldots A(m)) \in U(\alpha). \quad (10.1.69)$$

При $m = 2$ функция $H(A(1), A(2))$ при фиксированном аргументе $A(2) \in U(1)$ как функция первого аргумента и непрерывна в шаре $U(1-|A(2)|)$ и принимает значение в алгебре $\mathbf{A}$. Обратимо ли это отображение в окрестности нуля?

При фиксированном $A(2) \in U(1)$ рассмотрим две функции $H(A(1), A(2))$ и $H(A(1), -A(2))$, представимые в шаре $U(1-|A(2)|)$ абсолютно сходящимся рядом Хаусдорфа. Пусть $A(2) \in U(\frac{1}{2})$, тогда согласно утверждению 10.1.1 существует число $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]$, что

$$\forall A(1) \in U(\varepsilon) \Bigm| \left(H(A(1), A(2)) \in U\left(\frac{1}{2}\right)\right) \bigwedge \left(H(A(1), -A(2)) \in U\left(\frac{1}{2}\right)\right). \quad (10.1.70)$$

Поэтому определено значение функции Хаусдорфа

$$H(H(A(1), A(2)), -A(2)) \quad (10.1.71)$$

и верны равенства

$$\exp(H(H(A(1), A(2)), -A(2)) = \exp(-A(2)) \exp(H(A(1), A(2))) =$$

$$\exp(-A(2)) \exp(A(2)) \exp(A(1)) = \exp(A(1)).$$

Функция $H(H(A(1), A(2)), -A(2))$ непрерывна по аргументу $A(1)$ при $A(1) \in U(\varepsilon)$ и $H(0, A(2)) = A(2), H(A(2), -A(2)) = 0$, поэтому существует число $\eta \in]0, \varepsilon]$, что

$$\forall A(1) \in U(\eta) \Bigm| H(H(A(1), A(2)), -A(2)) \in U\left(\frac{1}{2}\right). \quad (10.1.72)$$

Но тогда из взаимно-однозначности ограничения экспоненты на шар $U\left(\frac{1}{2}\right)$ и равенства (10.1.71) вытекает, что

$$\forall A(1) \in U(\eta) \Bigm| H(H(A(1), A(2)), -A(2)) = A(1). \quad (10.1.73)$$

Заменяя $A(2)$ на $-A(2)$, получаем, что существует число $\mu > 0$, что

$$\forall A(1) \in U(m) \Bigm| H(H(A(1), -A(2)), A(2)) = A(1). \quad (10.1.74)$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 10.1.2 *Для любого элемента $A(2) \in U(\frac{1}{2})$ существует число $\delta > 0$, что при любом $A(1) \in U(\delta)$ верно*

$$H(H(A(1), A(2)), -A(2)) = A(1) = H(H(A(1), -A(2)), A(2)). \quad (10.1.75)$$

Введём функцию $h_B(A) \equiv H(A, B)$, определенную в шаре $U(1-|B|)$ и представимую в этом шаре абсолютно суммируемым рядом Хаусдорфа. Тогда из утверждения 10.1.2 следует, что функции h_B и h_{-B} взаимно обратны в некотором шаре $U(\delta) \subset \mathbf{A}$, $\delta \in \mathbf{R}_+$, если $|B| < \frac{1}{2}$, т.е. верно соотношение

$$\forall A \in U(\delta) \Bigm| h_{-B}(h_B(A)) = A = h_B(h_{-B}(A)). \quad (10.1.76)$$

Итак, функция h_B гомеоморфно отображает некоторую окрестность нуля на некоторую окрестность точки $B \in \mathbf{A}$ при $|B| < \frac{1}{2}$.

Из структуры ряда Хаусдорфа вытекает также следующее утверждение.

Утверждение 10.1.3 *Если $L \subset \mathbf{A}$ замкнутая алгебра Ли, то для любого элемента $B \in L \cap U(1)$ верно*

$$h_B(L \cap U(1 - |B|)) \subset L. \qquad (10.1.77)$$

Таким образом, отображение h_B переводит замкнутую алгебру Ли $L \ni B$ в себя.

Функция Хаусдорфа $H(A(1), A(2))$ обладает также следующим свойством.

Утверждение 10.1.4 *Если $|A(1)| < \frac{1}{2}$ и $|A(2)| < \frac{1}{2}$, то следующие утверждения эквивалентны:*

I. $A(1) + A(2) = 0$;

II. $H(A(1), A(2)) = 0$;

III. $\exp(A(2)) \exp(A(1)) = E$.

Доказательство. В условиях утверждения 10.1.4 функция Хаусдорфа $H(A(1), A(2))$ определена, представима абсолютно суммируемым рядом Хаусдорфа и справедливо равенство

$$\exp(H(A(1), A(2))) = \exp(A(2)) \exp(A(1)). \qquad (10.1.78)$$

I. $\Rightarrow$ II. Если $A(2) = -A(1)$, то все члены $H_n(A(1), A(2))$, $n \in \mathbf{N}$ ряда Хаусдорфа равны нулю и $H(A(1), A(2)) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} H_n(A(1), A(2)) = 0$.

II. $\Rightarrow$ III. В силу (10.1.78).

III. $\Rightarrow$ I. Из верности III следует, что $\exp(A(2) = \exp(-A(1))$. Но $|A(2)| < \frac{1}{2}$ и $|-A(1)| < \frac{1}{2}$, а в шаре $U(\frac{1}{2}) \subset \mathbf{A}$ согласно п. 7.5.5 экспонента является инъективным отображением, поэтому и $A(2) = -A(1)$, т.е. верно I. $\diamondsuit$

10.1.9 Оценка остаточного члена ряда Хаусдорфа при $m = 2$.

Рассмотрим остаточный член ряда Хаусдорфа при $m = 2$.

$$R_k(A(1), A(2)) \equiv \sum_{n=k}^{\infty} H_n(A(1), A(2)), \quad k \in \mathbf{N} \qquad (10.1.79)$$

Оценим общий член ряда Хаусдорфа H_n и остаточный член R_3 через норму коммутатора $|[A(2), A(1)]|$ и сумму норм $|A(1)| + |A(2)| \equiv \alpha$.

Лемма 10.1.6 *Пусть $|A(1)| + |A(2)| = \alpha \leq \frac{1}{2}$, тогда при $k = 3, 4, \ldots$ справедливы неравенства*

$$|H_k(A(1), A(2))| \leq \frac{(2\alpha)^{k-2}}{2k(k-1)} |[A(2), A(1)]| \qquad (10.1.80)$$

и справедливо неравенство

$$|R_3(A(1), A(2))| \leq \alpha \frac{1}{2} |[A(2), A(1)]|. \qquad (10.1.81)$$

Доказательство. Фиксируем натуральное число $k \geq 3$. Если в индексе $i = (i_1, i_2, \ldots i_k)$ выполнено $i_1 = i_2$, то $A[i] = 0$, поэтому согласно формуле (10.1.9) имеем

$$H_k(A(1), A(2)) = \frac{1}{k} \sum_{i' \in (\overline{1,2})^{(k-2)}} (\,\mathrm{kap}\; k(1, 2, i') - \,\mathrm{kap}\; k(2, 1, i'))\, A[1, 2, i']. \qquad (10.1.82)$$

Согласно формуле (10.1.10) для коэффициентов $\mathrm{kap}\,(i)$ верно

$$\mathrm{kap}\ k(1,2,i') - \mathrm{kap}\ k(2,1,i') = \int\limits_{\Pi_k}\!\!\ldots\!\!\int \mathrm{val}\ k(1+\xi_1, 2+\xi_2, i'+\xi')d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \ldots d\xi_k -$$

$$\int\limits_{\Pi_k}\!\!\ldots\!\!\int \mathrm{val}\ k(2+\xi_2, 1+\xi_1, i'+\xi')d\xi_2 d\xi_1 d\xi_3 \ldots d\xi_k =$$

$$\int\limits_{\Pi_k}\!\!\ldots\!\!\int (\mathrm{val}\ k(1+\xi_1, 2+\xi_2, i'+\xi') - \mathrm{val}\ k(2+\xi_2, 1+\xi_1, i'+\xi'))\, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_k\,, \tag{10.1.83}$$

где $\xi' \equiv (\xi_3, \xi_4, \ldots \xi_k) \in \Pi_{k-2}$. Согласно определению функции $\mathrm{val}\ k$ из п. 8.5.4 получаем для разности

$$D \equiv \mathrm{val}\ k(1+\xi_1, 2+\xi_2, i'+\xi') - \mathrm{val}\ k(2+\xi_2, 1+\xi_1, i'+\xi') = \tag{10.1.84}$$

$$V(k, u(1+\xi_1, 2+\xi_2, i'+\xi')) - V(k, u(2+\xi_2, 1+\xi_1, i'+\xi')),$$

где $V(k,j)$ — числа Винокурова.

Пусть

$$\theta \equiv u(1+\xi_1, 2+\xi_2, i'+\xi') - u(2+\xi_2, 1+\xi_1, i'+\xi') = \tag{10.1.85}$$

$$u(1+\xi_1, 2+\xi_2, i_3+\xi_3) - u(2+\xi_2, 1+\xi_1, i_3+\xi_3).$$

При условиях $\xi_1 \in [0,1]$, $\xi_2 \in [0,1]$, $\xi_3 \in [0,1]$ и $i_3 \in \overline{1,2}$ величина θ может принимать лишь значения 0 и 1. В самом деле, если $1+\xi_1 = 2+\xi_2$, то $\theta = 0$. Если же $1+\xi_1 \neq 2+\xi_2$, то $1+\xi_1 < 2+\xi_2$ и возможны следующие случаи:

$$(i_3+\xi_3 > 2+\xi_2) \ \Rightarrow\ \Big((i_3=2)\bigwedge(\xi_3>\xi_2)\Big) \Rightarrow (\theta=1); \tag{10.1.86}$$

$$(i_3+\xi_3 = 2+\xi_2) \ \Rightarrow\ (\theta=0); \tag{10.1.87}$$

$$(1+\xi_1 < i_3+\xi_3 < 2+\xi_2) \ \Rightarrow\ (\theta=0); \tag{10.1.88}$$

$$(1+\xi_1 = i_3+\xi_3) \ \Rightarrow\ \Big(\big((i_3=2)\bigwedge(\xi_1=1)\bigwedge(\xi_3=0)\big) \tag{10.1.89}$$

$$\bigvee\big((i_3=1)\bigwedge(\xi_1=\xi_3)\big)\Big) \Rightarrow (\theta=1);$$

$$(i_3+\xi_3 < 1+\xi_1) \ \Rightarrow\ \Big((i_3=1)\bigwedge(\xi_3<\xi_1)\Big) \Rightarrow (\theta=1). \tag{10.1.90}$$

Так как величина θ принимает значения 0 и 1, то согласно следствию 8.4.1 для разности (10.1.84) верно

$$D = \theta \cdot V(k-1, u(2+\xi_2, 1+\xi_1, i'+\xi')). \tag{10.1.91}$$

Подставляя представление (10.1.91) разности (10.1.84) в интеграл (10.1.83), получаем оценку

$$|\ \mathrm{kap}\ k(1,2,i') - \mathrm{kap}\ k(2,1,i')| \le \int\limits_{\Pi_k}\!\!\ldots\!\!\int \theta |V(k-1, u(2+\xi_2, 1+\xi_1, i'+\xi'))|\, d\xi_1 d\xi_2 .. d\xi_k \le$$

$$\frac{1}{k-1}\int\limits_{\Pi_k}\!\!\ldots\!\!\int \theta\, d\xi_1 d\xi_2 .. d\xi_k. \tag{10.1.92}$$

Величина θ согласно (10.1.85) есть функция аргументов ξ_1, ξ_2, ξ_3 и i_3, т.е. $\theta = \theta(\xi_1, \xi_2, \xi_3; i_3)$, поэтому

$$\int\limits_{\Pi_k} \ldots \int \theta \, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_k = \iiint\limits_{\Pi_3} \theta(\xi_1, \xi_2, \xi_3; i_3) \, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \tag{10.1.93}$$

Но $\theta \neq 0$ лишь в случаях (10.1.86),(10.1.89),(10.1.90), поэтому

$$\iiint\limits_{\Pi_3} \theta(\xi_1, \xi_2, \xi_3; i_3) \, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \frac{1}{2}. \tag{10.1.94}$$

Из (10.1.92-10.1.94) получаем неравенство

$$|\ \mathrm{kap}\ k(1, 2, i') - \ \mathrm{kap}\ k(2, 1, i')| \leq \frac{1}{2(k-1)}. \tag{10.1.95}$$

Для величины k-ого члена ряда Хаусдорфа при $k \geq 3$ из формул (10.1.82) и (10.1.95) следует оценка

$$|H_k(A(1), A(2))| \leq \frac{1}{2k(k-1)} \sum_{i' \in (\overline{1,2})^{k-2}} |A[1, 2, i']| \leq$$

$$\frac{1}{2k(k-1)} 2^{k-2} |A[1, 2]| \sum_{(i_3, i_4, \ldots i_k) \in (\overline{1,2})^{k-2}} |A(i_k)||A(i_{k-1}| \ldots |A(i_3)| =$$

$$\frac{1}{2k(k-1)} (2\alpha)^{k-2} |A[1, 2]|. \tag{10.1.96}$$

Первое утверждение леммы доказано.

Доказательство неравенства (10.1.81) получается теперь из неравенств (10.1.80) суммированием. В самом деле

$$|R_3(A(1), A(2))| = \left| \sum_{k=3}^{\infty} H_k(A(1), A(2)) \right| \leq \sum_{k=3}^{\infty} |H_k(A(1), A(2))| \leq$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(2\alpha)^{k-2}}{2k(k-1)} |[A(2), A(1)]| \leq \alpha |[A(2), A(1)]| \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(2\alpha)^{k-3}}{k(k-1)} \leq$$

$$\alpha |[A(2), A(1)]| \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{\alpha}{2} |[A(2), A(1)]|.$$

Неравенство (10.1.81) доказано. $\diamondsuit$

Следствие 10.1.3 *Пусть элементы $A(1), A(2)$ банаховой алгебры $\mathbf{A}$ удовлетворяют условию $|A(1)| + |A(2)| \leq \frac{1}{2}$, тогда справедливы неравенства*

$$\frac{1}{4} |[A(2), A(1)]| \leq R_2(A(1), A(2)) \leq \frac{3}{4} |[A(2), A(1)]|. \tag{10.1.97}$$

и $R_2(A(1), A(2)) = 0$ иф $[A(2), A(1)] = 0$.

10.1.10 Оценка приращения общего члена H_n ряда Хаусдорфа.

Рассмотрим два набора $(A(1,\alpha), A(2,\alpha), \dots A(m,\alpha)) \in \mathbf{A}^m$ с $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. Введём в этом пункте элементы банаховой алгебры $\mathbf{A}$ вида

$$B(s) = A(s,0) + A(s,1), \quad s \in \overline{1,m}. \tag{10.1.98}$$

Рассмотрим сумму

$$H_n(B(1), B(2) \dots B(m)) = \frac{1}{n} \sum_{i \in (\overline{1,m})^n} \text{kap } n(i) B[i]. \tag{10.1.99}$$

Подставляя (10.1.98) в (10.1.99), получаем

$$H_n(B(1), B(2) \dots B(m)) = \tag{10.1.100}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i \in (\overline{1,m})^n} \text{kap } n(i_1, i_2, \dots i_n)[B(i_n), [B(i_{n-1}, \dots [B(i_2), B(i_1)] \dots] =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i \in (\overline{1,m})^n} \text{kap } n(i_1, i_2, \dots i_n)[A(i_n,0) + A(i_n,1), [A(i_{n-1},0) + A(i_{n-1},1), \dots [A(i_2,0)+$$

$$A(i_2,1), A(i_1,0) + A(i_1,1)] \dots] = \frac{1}{n} \sum_{i \in (\overline{1,m})^n} \text{kap } n(i_1, i_2, \dots i_n) \sum_{j \in D^n} A[i,j].$$

Здесь введены следующие обозначения: $D = \{0,1\}$ — множество из двух элементов 0 и 1; D^n — его n−ная степень; $j \equiv (j_1, j_2, \dots j_n)$; при $n \le 2$

$$A[i,j] \equiv [A(i_n, j_n), [A(i_{n-1}, j_{n-1}, \dots [A(i_2, j_2), A(i_1, j_1)] \dots], \tag{10.1.101}$$

при n=1

$$a[i,j] \equiv A(i_1, j_1).$$

Введём модуль мультииндекса $|j| = j_1 + j_2 + \dots j_n$ для $j \in D^n$ и введём множества $D^n_s \equiv \{j \in D^n \bigm| |j| = s\}$ для $n \in \mathbf{N}$ и $s \in \overline{0,n}$. Введём суммы

$$\text{Shpc}_{n,s} \equiv \frac{1}{n} \sum_{j \in D^n_s} \sum_{i \in (\overline{1,m})^n} \text{kap } n(i) A[i,j]. \tag{10.1.102}$$

В этих обозначениях равенство (10.1.100) принимает вид

$$H_n(B(1), B(2), \dots B(m)) = \sum_{s=0}^{n} \text{Shpc}_{n,s}. \tag{10.1.103}$$

С другой стороны, согласно замечанию 10.1.1 справедливо представление

$$H_n(B(1), B(2), \dots B(m)) = \sum_{i \in (\overline{1,m})^n} \text{kap } n(i) B(i), \tag{10.1.104}$$

где

$$B(i) = B(i_n) B(i_{n-1}) \dots B(i_2) B(i_1). \tag{10.1.105}$$

Подставим в формулы (10.1.104, 10.1.105) представление (10.1.98), и введём сумму

$$\text{Shpm}_{n,s} \equiv \sum_{j \in D^n_s} \sum_{i \in (\overline{1,m})^n} \text{kap } n(i) A(i,j). \tag{10.1.106}$$

Здесь введено обозначение при $i \in (\overline{1,m})^n$, $j \in D^n$

$$A(i,j) \equiv A(i_n,j_n)A(i_{n-1},j_{n-1})\dots A(i_1,j_1). \tag{10.1.107}$$

Тогда, аналогично формуле (10.1.103) верна формула

$$H_n(B(1),B(2),\dots B(m)) = \sum_{s=0}^{n} \operatorname{Shpm}_{n,s}. \tag{10.1.108}$$

Убедимся, что суммы $\operatorname{Shpc}_{n,s}$ и $\operatorname{Shpm}_{n,s}$ совпадают.

Утверждение 10.1.5 *Для любого числа $n \in \mathbf{N}$, любого числа $s \in \overline{0,n}$ и любых наборов $(A(1,\alpha),A(2,\alpha),\dots A(m,\alpha)) \in \mathbf{A}^m$, $\alpha \in D$, выполнено равенство*

$$\operatorname{Shpc}_{n,s} = \operatorname{Shpm}_{n,s} \tag{10.1.109}$$

Доказательство. Пусть число $t \in \mathbf{R}$. Возьмём вместо элемента $B(s) \in \mathbf{A}$ элемент $B_t(s) \in \mathbf{A}$ вида

$$B_t(s) \equiv A(s,0) + tA(s,1), \quad s \in \overline{1,m}.$$

Тогда согласно предыдущему

$$H_n(B_t(1),B_t(2),\dots B_t(m)) = \sum_{s=0}^{n} t^s \operatorname{Shpc}_{n,s}(A(1,0),A(2,0),\dots A(m,0),A(1,1),$$
$$A(2,1),\dots A(m,1)) \tag{10.1.110}$$

и

$$H_n(b_t(1),B_t(2),\dots B_t(m)) = \sum_{s=0}^{n} t^s \operatorname{Shpm}_{n,s}(A(1,0),A(2,0),\dots A(m,0),A(1,1),$$
$$A(2,1),\dots A(m,1)) \tag{10.1.111}$$

Из равенства двух многочленов (10.1.110) и (10.1.111) скалярного аргумента следует равенство их коэффициентов, т.е. равенство (10.1.109). $\diamondsuit$

Введём следующие суммы

$$\operatorname{Shp}_{n,s} \equiv \operatorname{Shpc}_{n,s},\ n \in \mathbf{N},\ s \in \overline{0,n}. \tag{10.1.112}$$

Сумма $\operatorname{Shp}_{n,s}$ является однородным полиномом степени s по переменным $A(1,1)$, $A(2,1)$, $\dots A(m,1)$ и согласно утверждению 10.1.1 верно равенство $\operatorname{Shp}_{n,s} = \operatorname{Shpm}_{n,s}$ при любом числе $n \in \mathbf{N}$ и любом числе $s \in \overline{0,n}$. Введём полиномы степени k по переменным $A(1,1)$, $A(2,1)$, $\dots A(m,1)$ вида

$$\operatorname{Shs}_{n,k}(A(1,0),A(2,0),\dots A(m,0),A(1,1),A(2,1),\dots A(m,1)) \equiv$$
$$\sum_{s=0}^{k} \operatorname{Shp}_{n,s}(A(1,0),A(2,0),\dots A(m,0),A(1,1),A(2,1),\dots A(m,1)) \tag{10.1.113}$$

при $n \in \mathbf{N}$ и $k \in \overline{0,n}$. Введём также при $n \in \mathbf{N}$ и $k \in \overline{0,n}$ суммы

$$\operatorname{Shr}_{n,k}(A(1,0),A(2,0),\dots A(m,0),A(1,1),A(2,1),\dots A(m,1)) \equiv$$

$$\sum_{s=k}^{n} \operatorname{Shp}_{n,s}(A(1,0), A(2,0), \ldots A(m,0), A(1,1), A(2,1), \ldots A(m,1)). \qquad (10.1.114)$$

При $k > n$ положим

$$\operatorname{Shr}_{n,k}(A(1,0), A(2,0), \ldots A(m,0), A(1,1), A(2,1), \ldots A(m,1)) \equiv 0. \qquad (10.1.115)$$

Согласно формуле (10.1.103) для любого $k \in \overline{0,n}$ верно равенство

$$H_n(A(1,0) + A(1,1), A(2,0) + A(2,1), \ldots A(m,0) + A(m,1)) = \qquad (10.1.116)$$
$$\operatorname{Shs}_{n,k}(A(1,0), A(2,0), \ldots A(m,0), A(1,1), A(2,1), \ldots A(m,1)) +$$
$$\operatorname{Shr}_{n,k+1}(A(1,0), A(2,0), \ldots A(m,0), A(1,1), A(2,1), \ldots A(m,1)).$$

Для сумм $\operatorname{Shr}_{n,k}$ справедлива следующая оценка.

Лемма 10.1.7 *Для любого числа $n \in \mathbf{N}$, любого числа $k \in \overline{0,n}$, любых двух наборов $(A(1,j), A(2,j), \ldots A(m,j)) \in A^m$, $j \in \{0,1\}$ верно неравенство*

$$|\operatorname{Shr}_{n,k}(A(1,0), A(2,0), \ldots A(m,0), A(1,1), A(2,1), \ldots A(m,1))| \le \qquad (10.1.117)$$
$$\frac{1}{n} C(n,k) \left(\sum_{r=1}^{m} (|A(r,0)| + |A(r,1)|) \right)^{n-k} \cdot \left(\sum_{r=1}^{m} |A(r,1)| \right)^{k}.$$

Доказательство. Согласно равенству (10.1.106) и утверждению 10.1.1 верно неравенство

$$|\operatorname{Shr}_{n,k}(A(1,0), A(2,0), \ldots A(m,0), A(1,1), A(2,1), \ldots A(m,1))| \le \qquad (10.1.118)$$
$$\frac{1}{n} \sum_{s=k}^{n} \sum_{j \in D_s^n} \sum_{i \in (\overline{1,m})^n} |A(i_n, j_n)||A(i_{n-1}, j_{n-1})| \ldots |A(i_1, j_1)|.$$

Сумма

$$\sum_{s=k}^{n} \sum_{j \in D_s^n} \sum_{i \in (\overline{1,m})^n} |A(i_n, j_n)||A(i_{n-1}, j_{n-1})| \ldots |A(i_1, j_1)| = \left(\sum_{r=1}^{m} (|A(r,0)| + |A(r,1)|) \right)^{n}, \qquad (10.1.119)$$

таким образом, в случае $k = 0$ формула (10.1.117) доказана. В случае $k \ge 1$ справедливо равенство

$$\sum_{s=k}^{n} \sum_{j \in D_s^n} \sum_{i \in (\overline{1,m})^n} |A(i_n, j_n)||A(i_{n-1}, j_{n-1})| \ldots |A(i_1, j_1)| = \qquad (10.1.120)$$
$$\left(\sum_{r=1}^{m} |A(r,0)| + \sum_{r=1}^{m} |A(r,1)| \right)^{n} - Pt_{k-1},$$

где Pt_{k-1} — полином Тейлора порядка $k-1$ степенной функции вещественного аргумента x^n с центром в точке $x_0 = \sum\limits_{r=1}^{m} |A(r,0)|$ и приращением аргумента $\Delta x = \sum\limits_{r=1}^{m} |A(r,1)|$.

Тогда по формуле Тейлора

$$\frac{1}{n} \sum_{s=k}^{n} \sum_{j \in D_s^n} \sum_{i \in (\overline{1,m})^n} |A(i_n, j_n)||A(i_{n-1}, j_{n-1})| \ldots |A(i_1, j_1)| \le \qquad (10.1.121)$$
$$\frac{1}{n} \left(\sum_{r=1}^{m} |A(r,1)| \right)^{k} C(n,k) \left(\sum_{r=1}^{m} (|A(r,0)| + |A(r,1)|) \right)^{n-k}.$$

Из неравенств (10.1.118, 10.1.121) следует неравенство (10.1.117). $\diamondsuit$

10.1.11 Оценка приращения функции Хаусдорфа.

Введём дополнительное предположение

$$\sum_{j=0}^{1}\sum_{r=1}^{m}|A(r,j)| \equiv q < 1. \tag{10.1.122}$$

Тогда ряды

$$H(A(1,0),A(2,0),\dots A(m,0)) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(A(1,0),A(2,0),\dots A(m,0)) \tag{10.1.123}$$

и

$$H(B(1),B(2),\dots B(m)) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(B(1),B(2),\dots B(m)) \tag{10.1.124}$$

абсолютно сходятся и определена их сумма — функция Хаусдорфа.

Утверждение 10.1.6 *Если выполнено условие (10.1.122), то при любом $k \in \mathbf{N}_0$ ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Shr}_{n,k}(A(1,0),A(2,0),\dots A(m,0),A(1,1),A(2,1),\dots A(m,1)) \tag{10.1.125}$$

сходится абсолютно и справедливы неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Shr}_{n,k}(A(1,0),A(2,0),\dots A(m,0),A(1,1),A(2,1),\dots A(m,1))| \le$$

$$\frac{1}{k}\left(\sum_{r=1}^{m}|A(r,1)|\right)^{k}\frac{1}{(1-q)^{k}} \tag{10.1.126}$$

при $k \in \mathbf{N}$, а при $k = 0$ верно неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Shr}_{n,0}(A(1,0),A(2,0),\dots A(m,0),A(1,1),A(2,1),\dots A(m,1))| \le \ln\left(\frac{1}{1-q}\right). \tag{10.1.127}$$

Доказательство. Согласно лемме 10.1.7 верно неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Shr}_{n,k}(A(1,0),A(2,0),\dots A(m,0),A(1,1),A(2,1),\dots A(m,1))| \le$$

$$\left(\sum_{r=1}^{m}|A(r,1)|\right)^{k}\sum_{n=1}^{\infty} C(n,k)\frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{1}\sum_{r=1}^{m}|A(r,j)|\right)^{n-k}. \tag{10.1.128}$$

При $q < 1$ сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} C(n,k)\frac{q^{n-k}}{n} \tag{10.1.129}$$

является k — той производной по аргументу q от суммы степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n} = -\ln(1-q) = \ln\left(\frac{1}{1-q}\right). \tag{10.1.130}$$

При $k=0$ получаем неравенство (10.1.127), а при $k \in \mathbf{N}$ получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} C(n,k)\frac{q^{n-k}}{n} = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dq^k}(-1)\ln(1-q) = \frac{1}{k!}\frac{(k-1)!}{(1-q)^k} = \frac{1}{k}\frac{1}{(1-q)^k}. \qquad (10.1.131)$$

Подставляем (10.1.131) в (10.1.128) , получаем (10.1.126). ◇

Из абсолютной сходимости ряда (10.1.124), представления общего члена (10.1.116) и утверждения 10.1.2 следует справедливость следующей леммы.

Лемма 10.1.8 *При выполнении условия (10.1.122) при любом $k \in \mathbf{N}_o$ ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n(A(1,0)+A(1,1), A(2,0)+A(2,1), \dots A(m,0)+A(m,1))$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Shs}_{n,k}(A(1,0), A(2,0), \dots A(m,0), A(1,1), A(2,1), \dots A(m,1))$$

сходятся абсолютно и справедливо неравенство

$$|H(A(1,0)+A(1,1), A(2,0)+A(2,1), \dots A(m,0)+A(m,1)) - \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Shs}_{n,k}(A(1,0), A(2,0),$$
$$\dots A(m,0), A(1,1), A(2,1), \dots A(m,1))| \le \frac{1}{k+1}\left(\sum_{r=1}^{m}|A(r,1)|\right)^{k+1}\frac{1}{(1-q)^{k+1}}. \qquad (10.1.132)$$

В частности, при $k=1$ верно неравенство

$$|H(A(1,0)+A(1,1), A(2,0)+A(2,1), \dots A(m,0)+A(m,1)) - \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Shs}_{n,1}(A(1,0), A(2,0),$$
$$\dots A(m,0), A(1,1), A(2,1), \dots A(m,1))| \le \frac{\left(\sum\limits_{r=1}^{m}|A(r,1)|\right)^2}{2(1-q)^2}. \qquad (10.1.133)$$

10.1.12 Вычисление коэффициентов $\operatorname{kap} n(2,1,1,1,\dots 1)$ и $\operatorname{kap} n(1,2,1,1,1,\dots 1)$.

Лемма 10.1.9 *При $n = 3,4,5,\dots$ справедливы равенства*

$$\operatorname{kap} n(2,1,1,1,\dots 1) = \frac{B_{n-1}}{(n-1)!}, \qquad (10.1.134)$$

$$\operatorname{kap} n(1,2,1,1,1,\dots 1) = -\frac{B_{n-1}}{(n-2)!}, \qquad (10.1.135)$$

где B_n — числа Бернулли.

Доказательство. Для набора $i = (2,1,1,1,\dots 1) \in (\overline{1,2})^n$ число подъёмов $u(i) = 0$, число застоев $\operatorname{rav}(i) = n-2$, опись $\operatorname{rer}(i) = ((n-2,1))$, веерный многочлен

$$\operatorname{wer}(((n-2,1));x) = W(x,n-1), \qquad (10.1.136)$$

где согласно (8.6.25), (8.6.29)

$$W(x,n-1)=\sum_{s=0}^{n-2}W(s,n-1)x^s=\sum_{s=0}^{n-2}U(n-1-s,n-1)x^s=\sum_{s=0}^{n-2}\frac{\Delta^{n-1-s}0^{n-1}}{(n-1)!}x^s=$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=0}^{n-2}\Delta^{n-1-s}0^{n-1}x^s. \qquad (10.1.137)$$

Согласно теореме 10.1.2

$$\text{kap}\ n(2,1,1,1,\dots 1)=\frac{1}{(n-1)!}\cot\left(\left(\sum_{s=0}^{n-2}\Delta^{n-1-s}0^{n-1}x^s\right)\ln(1+x);x;n\right). \qquad (10.1.138)$$

Отсюда

$$\text{kap}\ n(2,1,1,1,\dots 1)=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{\Delta^{n-1-s}0^{n-1}(-1)^{n-s-1}}{(n-s)}= \qquad (10.1.139)$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\Delta^k0^{n-1}}{(k+1)}(-1)^k=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Delta^k0^{n-2}}{k+1}(-1)^k.$$

Из утверждения (8.3.1) и последнего равенства вытекает равенство (10.1.134).

Для набора $i=(1,2,1,1,1,\dots 1)\in(\overline{1,2})^n$ число подъёмов $u(i)=1$, число застоев $\text{rav}\,(i)=n-3$, опись $\text{rer}\,(i)=((n-3,1))$, веерный многочлен $\text{wer}\,(((n-3,1));x)=W(x,n-2)$, Где

$$W(x,n-2)=\sum_{s=0}^{n-3}\frac{1}{(n-2)!}\Delta^{n-2-s}0^{n-2}x^s=\frac{1}{(n-2)!}\sum_{s=0}^{n-2}\Delta^{n-2-s}0^{n-2}x^s. \qquad (10.1.140)$$

Согласно теореме 10.1.2

$$\text{kap}\ n(1,2,1,1,\dots 1)=\cot\left((1+x)W(x,n-2)\ln(1+x);x;n\right). \qquad (10.1.141)$$

Преобразуем многочлен

$$(1+x)W(x,n-2)=\frac{1}{(n-2)!}\left(\sum_{s=0}^{n-2}\Delta^{n-2-s}0^{n-2}x^s+\sum_{s=0}^{n-2}\Delta^{n-2-s}0^{n-2}x^{s+1}\right)= \qquad (10.1.142)$$

$$\frac{1}{(n-2)!}\left(\sum_{s=0}^{n-2}\Delta^{n-2-s}0^{n-2}x^s+\sum_{k=1}^{n-1}\Delta^{n-1-k}0^{n-2}x^k\right)=$$

$$\frac{1}{(n-2)!}\left(\Delta^{n-2}0^{n-2}+\sum_{s=1}^{n-2}\left(\Delta^{n-2-s}0^{n-2}+\Delta^{n-1-s}0^{n-2}\right)x^s+\Delta^00^{n-2}x^{n-1}\right)=$$

$$\frac{1}{(n-2)!}\left((n-2)!+\sum_{s=1}^{n-2}\frac{\Delta^{n-1-s}0^{n-1}}{(n-1-s)}x^s\right)=\frac{1}{(n-2)!}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{\Delta^{n-1-s}0^{n-1}}{(n-1-s)}x^s.$$

Подставив (10.1.142) в (10.1.141), получаем

$$\text{kap}\ n(1,2,1,1,\dots 1)=\frac{1}{(n-2)!}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{\Delta^{n-1-s}0^{n-1}}{(n-1-s)}\cdot\frac{(-1)^{n-s-1}}{(n-s)}. \qquad (10.1.143)$$

В последнюю формулу подставим равенство

$$\frac{1}{n-1-s} \cdot \frac{1}{n-s} = \frac{1}{n-1-s} - \frac{1}{n-s}$$

и получим

$$\text{kap } n(1,2,1,1,\ldots 1) = \frac{1}{(n-2)!} \sum_{s=0}^{n-2} \left(\frac{1}{n-1-s} - \frac{1}{n-s} \right) (-1)^{n-s-1} \Delta^{n-1-s} 0^{n-1} =$$

$$\frac{1}{(n-2)!} \left(\sum_{s=0}^{n-2} \frac{\Delta^{n-1-s} 0^{n-1}}{n-1-s} (-1)^{n-1-s} - \sum_{s=0}^{n-2} \frac{\Delta^{n-1-s} 0^{n-1}}{n-s} (-1)^{n-s-1} \right) =$$

$$\frac{1}{(n-2)!} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Delta^k 0^{n-1}}{k} (-1)^k - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Delta^k 0^{n-1}}{k+1} (-1)^k \right).$$

Суммы, входящие в последнее выражение, вычислены в лемме 8.3.6, и утверждении 8.3.1. Учитывая это, получаем (10.1.135). ♢

10.1.13 Выделение линейной части по аргументу B функции Хаусдорфа $H(A,B)$.

Применим лемму 10.1.8 для выделения линейной части по аргументу B функции Хаусдорфа $H(A,B)$. Для этого полагаем $m=2$, $k=1$. Выбираем начальную точку $(A(1,0),A(2,0)) \equiv (A,0)$ и приращение $(A(1,1),A(2,1)) \equiv (0,B)$.

Отметим, что в этой ситуации при $n \geq 2$ величины $A[i,j]$ с $|j|=1$ может не обращаться в нуль, лишь при $j=(1,0,0,\ldots 0)$, $i=(2,1,1,\ldots 1)$, и при $j=(0,1,0,\ldots 0)$, $i=(1,2,1,1,\ldots 1)$. Поэтому

$$\text{Shp}_{n,1}(A(1,0),A(2,0),A(1,1),A(2,1)) = \frac{1}{n} (\text{ kap } n(2,1,1,\ldots 1)[A,[A,\ldots [A,B]\ldots]+$$

$$\text{kap } n(1,2,1,1,\ldots 1)[A,[A,\ldots [B,A]\ldots]) =$$

$$\frac{1}{n} (\text{ kap } n(2,1,1,\ldots 1) - \text{ kap } n(1,2,1,1,\ldots 1))\,[A,[A,\ldots [A,B]\ldots]. \tag{10.1.144}$$

В этой ситуации при $n \geq 2$ все величины $A[i,j]$ с $|j|=0$ обращаются в нуль, поэтому при $n \geq 2$

$$\text{Shs}_{n,1} = \text{ Shp}_{n,1} = \frac{1}{n} (\text{ kap } n(2,1,1,\ldots 1) - \text{ kap } n(1,2,1,1,\ldots 1))\,[A,[A,\ldots [A,B]\ldots]. \tag{10.1.145}$$

Подставляя в последнюю формулу выражения для коэффициентов $\text{kap } n(2,1,1,\ldots 1)$ и $\text{kap } n(1,2,1,\ldots 1)$ из леммы 10.1.9, получаем при $n \geq 3$

$$\text{Shs}_{n,1} = \frac{1}{n} \left(\frac{B_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{B_{n-1}}{(n-2)!} \right) [A,[A,\ldots [A,B]\ldots] = \frac{B_{n-1}}{(n-1)!} [A,[A,\ldots [A,B]\ldots]. \tag{10.1.146}$$

При $n=1$

$$\text{Shs}_{1,1} = \text{ Shp}_{1,0} + \text{ Shp}_{1,1} = A + B. \tag{10.1.147}$$

При $n=2$

$$\text{Shs}_{n,2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) [A,B] = -\frac{1}{2} [A,B].$$

Введём обозначение для суммы ряда

$$\mathrm{Shll}\,(A,B) \equiv A + B - \frac{1}{2}[A,B] + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{B_{n-1}}{(n-1)!}[A,[A,\dots[A,B]\dots]. \qquad (10.1.148)$$

Тогда проведенные рассуждения и применение леммы 10.1.8 дают нам следующий результат.

Лемма 10.1.10 *При* $|A|+|B|<1$ *справедливо неравенство*

$$|H(A,B) - \mathrm{Shll}\,(A,B)| \le \frac{|B|^2}{2(1-(|A|+|B|))^2}. \qquad (10.1.149)$$

Замечание 10.1.3 *Сумма ряда* $\mathrm{Shll}\,(A,B)$ *вида (10.1.148) может быть записана в форме*

$$\mathrm{Shll}\,(A,B) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1}}{(n-1)!} C_A^{n-1} B, \qquad (10.1.150)$$

где $C_A : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ *линейный оператор коммутирования, действующий на элемент* $B \in \mathbf{A}$ *по правилу* $C_A B = AB - BA$*, ибо* $\frac{B_0}{0!} = \frac{1}{1} = 1$ *и* $\frac{B_1}{1!} = -\frac{1}{2}$.

10.1.14 Выделение линейной части по аргументу A **функции Хаусдорфа** $H(A,B)$ проводится аналогичными рассуждениями.

Применяем лемму 8 в случае $m=2$, $k=1$. Начальная точка $(A(1,0),A(2,0)) \equiv (0,B)$ и приращение $(A(1,1),A(2,1)) \equiv (A,0)$.

При $n \ge 2$ и $|j|=1$ величина $A[i,j]$ может быть не равна нулю лишь при $j=(1,0,0,\dots 0)$ и $i=(1,2,2,\dots 2)$ или при $j=(0,1,0,\dots 0)$ и $i=(2,1,2,2,\dots 2)$. Поэтому при $n \ge 2$ верно

$$\mathrm{Shp}_{n,1}(A(1,0),A(2,0),A(1,1),A(2,1)) = \frac{1}{n}(\,\mathrm{kap}\; n(1,2,2,\dots 2)[B,[B,\dots[B,A]\dots]+$$

$$\mathrm{kap}\; n(2,1,2,2,\dots 2)[B,[B,\dots[B,[A,B]]\dots]) =$$

$$\frac{1}{n}(\,\mathrm{kap}\; n(1,2,2,\dots 2) - \,\mathrm{kap}\; n(2,1,2,\dots 2))[B,[B,\dots[B,A]\dots]. \qquad (10.1.151)$$

Согласно лемме (10.1.1)

$$\mathrm{kap}\; n(1,2,2,\dots 2) = (-1)^{n-1}\,\mathrm{kap}\; n(2,1,1,1,\dots 1), \qquad (10.1.152)$$

$$\mathrm{kap}\; n(2,1,2,2,\dots 2) = (-1)^{n-1}\,\mathrm{kap}\; n(1,2,1,1,\dots 1). \qquad (10.1.153)$$

Используя лемму (10.1.9), из (10.1.151-10.1.153) получаем при $n \ge 3$

$$\mathrm{Shp}_{n,1} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{B_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{B_{n-1}}{(n-2)!}\right)[B,[B,\dots[B,A]\dots] =$$

$$(-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}}{(n-1)!}[B,[B,\dots[B,A]\dots]. \qquad (10.1.154)$$

При $n \ge 2$ $\mathrm{Shp}_{n,0} = 0$ в данной ситуации.

Далее

$$\mathrm{Shp}_{2,1} = \frac{1}{2}\left(\,\mathrm{kap}\; 2(1,2) - \,\mathrm{kap}\; 2(2,1)\right)[B,A] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)[B,A] = \frac{1}{2}[B,A], \quad (10.1.155)$$

и

$$\mathrm{Shp}_{1,1} = A + B. \qquad (10.1.156)$$

Введём обозначение для суммы ряда

$$\mathrm{Shlr}\,(A,B) = A + B + \frac{1}{2}[B,A] + \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}}{(n-1)!}[B,[B,\ldots[B,A]\ldots], \qquad (10.1.157)$$

или вспоминая значения B_0 и B_1, имеем

$$\mathrm{Shlr}\,(A,B) = B + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n-1}}{(n-1)!}(-C_B)^{n-1}A. \qquad (10.1.158)$$

Проведенные рассуждения и лемма (10.1.8) дают следующий результат.

Лемма 10.1.11 *При* $|A| + |B| < 1$ *справедливо неравенство*

$$|H(A,B) - \mathrm{Shlr}\,(A,B)| \le \frac{|A|^2}{2(1-(|A|+|B|))^2}.$$

§10.2 Свойства экспоненты и сходимость ряда Хаусдорфа

10.2.1 Свойства экспоненты.

В п. 7.5.5 мы подняли экспоненту, определенную на действительной прямой $\mathbf{R}$ на любую банахову алгебру $\mathbf{A}$ над полем Λ ($\Lambda = \mathbf{R}$ или $\Lambda = \mathbf{C}$). При этом экспонента осталась целой функцией, т.е. её ряд Тейлора сходится на всей банаховой алгебре $\mathbf{A}$. Сохраним за поднятой экспонентой то же обозначение $\exp \in FA(1,\mathbf{A})$, т.е. $\exp : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$. По построению

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!} \qquad (10.2.1)$$

для любого элемента $A \in \mathbf{A}$. В примере 7.5.1 мы установили сохранение у поднятой экспоненты следующих основных свойств экспоненты:

$$\forall \lambda_1 \in \Lambda\ \forall \lambda_2 \in \Lambda\ \forall A \in \mathbf{A} \mid \exp(\lambda_1 A)\exp(\lambda_2 A) = \exp((\lambda_1+\lambda_2)A); \qquad (10.2.2)$$

$$\exp(0) = E; \qquad (10.2.3)$$

$$\forall A \in \mathbf{A} \mid \exp(A)\exp(-A) = \exp(-A)\exp(A) = E, \qquad (10.2.4)$$

где E — единичный элемент алгебры $\mathbf{A}$.

Из свойства (10.2.4) следует, что при любом $A \in \mathbf{A}$ элемент $\exp(A) \in \mathbf{A}$ есть обратимый элемент банаховой алгебры $\mathbf{A}$, т.е. экспонента принимает значения только среди обратимых элементов банаховой алгебры.

Обозначим через $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ множество обратимых элементов банаховой алгебры $\mathbf{A}$, $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A}) \subset \mathbf{A}$. Элементы множества $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ образуют группу по умножению. Согласно нашим обозначениям $\mathrm{GL}\,(M(n,\Lambda)) = \mathrm{GL}\,(n,\Lambda)$. Итак, экспоненту можно рассматривать как отображение $\exp : \mathbf{A} \to \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$.

Множество $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ с операцией умножения и наследственной топологией из $\mathbf{A}$, задаваемой сужением метрики, заданной на $\mathbf{A}$, обладает следующими известными свойствами(см. [8], с.80).

Лемма 10.2.1 *Справедливы утверждения:*

1) $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ *— подмножество в* $\mathbf{A}$*, содержащее открытый шар* $U(E,1) \subset \mathbf{A}$ *с центром в единице* $E \in \mathbf{A}$ *и радиусом 1;*

2) $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ *— топологическая группа в наследственной топологии;*

3) $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ *— полное равномерное метризуемое пространство как в левой, так и в правой равномерностях, порождённых наследственной топологией на* $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ *и структурой группы по умножению.*

В примере п. 7.5.5 мы также установили, что $\exp(\mathbf{A}) \supset U(E,1)$, т.е. любой элемент $A \in U(E,1)$ представим в виде $A = \exp(B)$, где $B = \ln(A)$ (функция ln определена на шаре $U(E,1)$) и сужение $\exp|_{U(\ln(2))}$ есть гомеоморфизм открытого круга $U(\ln(2))$ на открытую область $\exp(U(\ln(2))) \subset \mathbf{A}$.

Поскольку экспоненту мы можем также рассматривать как непрерывное отображение $\exp : \mathbf{A} \to \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$, то предыдущее утверждение распространяется и на этот случай.

Обозначим через $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A}) \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ связную компоненту единицы группы $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$. Множество $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ открыто и замкнуто в $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$, поэтому также будет полной топологической группой и в правой и в левой равномерностях. Так как банахова алгебра $\mathbf{A}$ — связное топологическое пространство и отображение $\exp : \mathbf{A} \to \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ непрерывно, то $\exp(\mathbf{A}) \subset \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$. Всегда ли справедливо равенство:

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})? \tag{10.2.5}$$

Вопрос о верности (10.2.5)сводится к тому любой ли элемент $A \in \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ представим в виде экспоненты, т.е. вопросу о справедливости формулы

$$\forall B \in \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})\ \exists \mathbf{A} \in \mathbf{A} \mid \exp(A) = B. \tag{10.2.6}$$

Равенство (10.2.5) верно, если $A = M(n,\mathbf{C})$, $n \in \mathbf{N}$, так как в этом случае $\mathrm{GL}\,(n,\mathbf{C}) = \mathrm{GL}_e(n,\mathbf{C})$ (см. [52], с.360) и

$$\exp(M(n,\mathbf{C})) = \mathrm{GL}\,(n,\mathbf{C}) \tag{10.2.7}$$

(см. [26], с.219).

В случае $\mathbf{A} = M(2,\mathbf{R})$ равенство (10.2.5) неверно, как показывает пример 10.2.1 пункта 10.2.2.

10.2.2 Суммируемость ряда Хаусдорфа.

Вернемся к ряду Хаусдорфа (10.2.11) и далее в этом параграфе Введём обозначение $\vec{A} \equiv (A(1), A(2)\ldots A(m)) \in \mathbf{A}^m$, $m \in \mathbf{N}$. Ряд Хаусдорфа (52.11) запишем в виде

$$H(\vec{A}) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(\vec{A}). \tag{10.2.8}$$

Нас интересует множество точек $\vec{A} \in \mathbf{A}^m$, для которых ряд абсолютно суммируем, суммируем или сходится в $\mathbf{A}$. Обозначим через $\mathrm{Ras}_m \subset A^m$ множество точек $\vec{A} \in \mathbf{A}^m$, для которых ряд Хаусдорфа (10.2.8) абсолютно суммируем и введём множество $\mathrm{Rah}_m(\alpha) \subset \mathbf{A}^m$, состоящее из точек $\vec{A} \in \mathbf{A}^m$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{m} |A(i)| < \alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R}_+. \tag{10.2.9}$$

Согласно теореме 10.1.1 ряд Хаусдорфа абсолютно суммируем в области $\mathrm{Rah}_m(1)$, т.е. верно включение

$$\mathrm{Rah}_m(1) \subset \mathrm{Ras}_m. \tag{10.2.10}$$

и во всех точках $\vec{A} \in \mathrm{Rah}_m(1)$ верно равенство

$$\exp(H(\vec{A})) = \exp(A(m))\exp(A(m-1)\dots\exp(A(2)\exp(A(1)). \tag{10.2.11}$$

Далее в этом пункте фиксируем номер $m \in \mathbf{N}$ и будем опускать его в обозначениях $\mathrm{Ras}_m \equiv \mathrm{Ras}$ и $\mathrm{Rah}_m(\alpha) \equiv \mathrm{Rah}(\alpha)$.

Лемма 10.2.2 *Если $\vec{A} \in \mathrm{Ras}$, то верно (10.2.11) и $\lambda\vec{A} \in \mathrm{Ras}$ при $\lambda \in \Lambda$, таком что* $|\lambda| \le 1$.

Доказательство. $H_n(\vec{A})$ — однородный полином степени n от переменных $A(1)$, $A(2)$, $\dots A(m)$, поэтому при любом $\lambda \in \Lambda$

$$H_n(\lambda\vec{A}) = \lambda^n H_n(\vec{A}). \tag{10.2.12}$$

По условию точка $\vec{A} \in \mathrm{Ras}$, т.е. сходится числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |H_n(\vec{A})| < \infty. \tag{10.2.13}$$

Отсюда следует, что на множестве $\{\lambda \in \Lambda \mid |\lambda| \le 1\} \equiv U_\Lambda[1]$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n H_n(\vec{A}) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(\lambda\vec{A}) = H(\lambda\vec{A}) \tag{10.2.14}$$

сходится абсолютно и равномерно в $\mathbf{A}$ и поэтому является непрерывной функцией $\lambda \in U_\Lambda[1]$. Если $|\lambda| \sum_{i=1}^{m} |A(i)| < 1$, то по теореме 10.1.1 верно равенство

$$\exp(H(\lambda\vec{A})) = \exp(\lambda A(m))\dots\exp(\lambda A(2)\exp(\lambda A(1)). \tag{10.2.15}$$

$\vec{A} \in \mathbf{A}$ фиксированный элемент, а $\lambda \in \Lambda$ будем рассматривать как переменную. Тогда по лемме 7.5.2 при всех $\lambda \in \Lambda$ справедливо представление произведения в правой части (10.2.15) абсолютно сходящимся в $\mathbf{A}$ рядом

$$\exp(\lambda A(m))\dots\exp(\lambda A(2)\exp(\lambda A(1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n b_n, \tag{10.2.16}$$

где $b \in SA(1, \mathbf{A})$. Согласно лемме 7.5.3 функция $\exp(H(\lambda\vec{A}))$ при всех $\lambda \in U_\Lambda[1]$ представима абсолютно суммируемым рядом

$$\exp(H(\lambda\vec{A})) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a_n. \tag{10.2.17}$$

где $a \in SA(1, \mathbf{A})$. Так как равенство (10.2.15) верно при всех $\lambda \in \Lambda$, таких что $|\lambda \sum_{i=1}^{m} |A(i)| < 1$, то по лемме 7.4.1 последовательности коэффициентов Тейлора совпадают $a = b$. Тогда при $\lambda \in U_\Lambda[1]$ будут выполнены равенства $\exp(H(\lambda\vec{A})) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n b_n = \exp(\lambda A(m))\dots\exp(\lambda A(2))\exp(\lambda A(1))$. $\diamondsuit$

Итак, абсолютная суммируемость ряда Хаусдорфа гарантирует выполнение равенства (10.2.11).

Лемма 10.2.3 *Если при данном $\vec{A} \in \mathbf{A}^m$ последовательность $\{H_n(\vec{A})\}_{n \in \mathbf{N}}$ ограничена в $\mathbf{A}$, то ряд Хаусдорфа абсолютно сходится в точках $\lambda \vec{A}$, с $\lambda \in \Lambda$, $|\lambda| < 1$.*

Доказательство. Если существует $C \in \mathbf{R}_+$, что при всех $n \in \mathbf{N}$ верно $|H_n(\vec{A})| \leq C$, то по формуле (10.2.12) верно

$$\sum_{n=1}^{\infty} |H_n(\lambda \vec{A})| = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^n |H_n(\vec{A})| \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \leq C \frac{|\lambda|}{1 - |\lambda|}.$$

$\diamondsuit$

Для получения информации о структуре множества Ras_m рассмотрим теперь следующий пример.

Пример 10.2.1

$\mathbf{A} = M(2, \Lambda)$. Пусть $\operatorname{sl}(2, \Lambda) \equiv \{A \in M(2, \Lambda) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$ линейное подпространство матриц, след которых равен нулю. Это алгебра Ли относительно операции коммутирования матриц. Пусть $\operatorname{SL}(2, \Lambda) \subset M(2, \Lambda)$ группы унимодулярных матриц. Согласно формуле (6.1.34) для любой матрицы $A \in M(2, \Lambda)$ верно $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr}(A)}$, поэтому верно включение

$$\exp(\operatorname{sl}(2, \Lambda)) \subset \operatorname{SL}(2, \Lambda). \tag{10.2.18}$$

Матрица $A \in M(2, \Lambda)$ задаётся четырьмя числами $A \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \Lambda$ и для её экспоненты справедлива следующая формула (см. [35], с.118)

$$\exp \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = e^{\frac{a+d}{2}} \left[\operatorname{ch}(\rho) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\operatorname{sh}(\rho)}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix} \right], \tag{10.2.19}$$

где $\rho = \sqrt{(\frac{a-d}{2})^2 + bc}$. Подстановкой в формулу (10.2.19) проверяем, что

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E, \tag{10.2.20}$$

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \Lambda. \tag{10.2.21}$$

В комплексном случае также верно равенство

$$\exp \begin{pmatrix} \pi i & 0 \\ 0 & -\pi i \end{pmatrix} = -E. \tag{10.2.22}$$

Любая матрица $A \in \operatorname{sl}(2, \Lambda)$ задаётся тремя числами из поля Λ в виде $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. Выясним теперь при каких значениях чисел $a, b, c, \lambda \in \Lambda$ имеет решение уравнение

$$\exp \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10.2.23}$$

В силу формулы (10.2.19), соотношение (10.2.23) эквивалентно соотношению

$$\operatorname{ch}(\rho) \cdot E + \frac{\operatorname{sh}(\rho)}{\rho} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{10.2.24}$$

где $\rho = \sqrt{a^2 + bc}$. Далее рассмотрим два подслучая: $\frac{\mathrm{sh}(\rho)}{\rho} \neq 0$ и $\frac{\mathrm{sh}(\rho)}{\rho} = 0$.

$\underline{\frac{\mathrm{sh}(\rho)}{\rho} \neq 0}$. В этом случае из выполнения (10.2.24) следует, что $c = 0$ и $\rho = \pm a$. Соотношения (10.2.24) эквивалентны тогда трем равенствам

$$\mathrm{ch}(a) + \mathrm{sh}(a) = -1, \tag{10.2.25}$$

$$\mathrm{ch}(a) - \mathrm{sh}(a) = -1, \tag{10.2.26}$$

$$\frac{\mathrm{sh}(a)}{a} b = \lambda. \tag{10.2.27}$$

Из равенств (10.2.25, 10.2.26) следует $\mathrm{ch}(a) = -1$, $\mathrm{sh}(a) = 0$ и тогда из соотношения (10.2.27) следует $\lambda = 0$. В силу исходного условия $\frac{\mathrm{sh}(\rho)}{\rho} \neq 0$, т.е. $\frac{\mathrm{sh}(a)}{a} \neq 0$. В сочетании с условием $\mathrm{sh}(a) = 0$ это означает, что $a = 0$, но тогда $\mathrm{ch}(a) = 1$ и система (10.2.25 - 10.2.27) не имеет решения.

$\underline{\frac{\mathrm{sh}(\rho)}{\rho} = 0}$. В этом случае $\rho \neq 0$. Система (10.2.24) принимает вид

$$\mathrm{ch}(\rho) \cdot E = \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и решение существует лишь при $\mathrm{ch}(\rho) = -1$, $\lambda = 0$. Уравнение $\mathrm{ch}(\rho) = -1$ эквивалентно уравнению $\cos(i\rho) = -1$ и его общее решение $\rho = i\pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Вывод 10.2.1 *Общее решение уравнениям (10.2.23) есть* $\lambda = 0$, $a^2 + bc = \pi^2(2n+1)^2$, $n \in \mathbf{Z}$. *В частности, при* $\lambda \neq 0$ *уравнение (10.2.23) не имеет решений.*

Вывод 10.2.2 *Если* $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq 0$, *то*

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \exp\left(\mathrm{sl}\ (2, \Lambda)\right), \tag{10.2.28}$$

но представима в виде произведения

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} \pi i & 0 \\ 0 & -\pi i \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.2.29}$$

Изложение примера 10.2.1 закончено. ◇

Перейдем к выводам, которые можно сделать из примера 10.2.1.

Если $\Lambda = \mathbf{R}$, то при $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$ матрица $\begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \exp\left(M(2, \mathbf{R})\right)$. В самом деле, если бы для некоторой матрицы $A \in M(2, \mathbf{R})$ было верно равенство $\exp(A) = \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, то $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A)) = 1$ и тогда $\mathrm{tr}(A) = 0$, т.е. $A \in \mathrm{sl}\,(2, \mathbf{R})$. Но согласно примеру 10.2.1 тогда равенство $\exp(A) = \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ при $\lambda \neq 0$ невозможно.

Вывод 10.2.3 *При* $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq 0$ *верно*

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_e(2, \mathbf{R}) \setminus \exp\left(M(2, \mathbf{R})\right),$$

т.е. включение $\exp\left(M(2, \mathbf{R})\right) \subset \mathrm{GL}_e\left(M(2, \mathbf{R})\right)$ *является строгим и формула (10.2.5) в общем случае неверна.*

Вернемся теперь к вопросу о сходимости ряда Хаусдорфа. Из лемм 10.2.2, 10.2.3 и примера 10.2.1 следует.

Вывод 10.2.4 *Если банахова алгебра* $\mathbf{A} \equiv M(2,\Lambda)$, *то при* $\lambda \neq 0$ *ряд Хаусдорфа функции* $H\left(\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}\right)$ *не является абсолютно сходящимся. Последовательность* $\left\{H_n\left(\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_2\pi \\ \lambda_2\pi & 0 \end{pmatrix}\right)\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ *членов ряда Хаусдорфа* $H\left(\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_2\pi \\ \lambda_2\pi & 0 \end{pmatrix}\right)$ *не ограничена в* $M(2,\Lambda)$, *если* $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ *и* $\lambda_1 \neq 0$, $|\lambda_2| > 1$.

Следствие 10.2.1 *Множество* $\mathrm{Rah}\,(\pi+\varepsilon) \subset (M(2,\Lambda))^2$ *содержит точки расходимости ряда Хаусдорфа при* $\varepsilon > 0$.

10.2.3 Основное свойство экспоненты.

Основное свойство экспоненты от действительного или комплексного аргумента выражается формулой

$$I. \quad \exp(B)\exp(A) = \exp(B+A),$$

справедливый для любых элементов $A \in \mathbf{A}$ и $B \in \mathbf{A}$, если $\mathbf{A} = \mathbf{R}$ или $\mathbf{A} = C$. Однако, уже в случае $\mathbf{A} = M(2,\mathbf{R})$ равенство I не выполняется, например, для элементов $A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тем не менее известно, что в произвольной банаховой алгебре $\mathbf{A}$ для выполнения равенства I достаточно, чтобы элементы A и B удовлетворяли условию коммутирования

$$II. \quad [B,A] = 0.$$

Т.е. справедливо утверждение (см. [57], с.289).

Утверждение 10.2.1 *Если элементы* A, B *банаховой алгебры* $\mathbf{A}$ *коммутируют, то выполнено соотношение* I.

Применяя утверждение 10.2.1 неоднократно, мы получаем по индукции следующее его обобщение.

Следствие 10.2.2 *Пусть* $A_1, A_2, \dots A_k$ *конечный набор элементов банаховой алгебры* $\mathbf{A}$, *такой, что любые два элемента коммутируют, тогда* $\exp(A_k)\ \dots\exp(A_2)$ $\exp(A_1) = \exp(A_k + \dots A_2 + A_1)$.

Итак, в общем случае условие II является достаточным для I. Является ли оно необходимым?

Лемма 10.2.4 *Для элементов* A *и* B *банаховой алгебры* $\mathbf{A}$, *удовлетворяющих условию* $|A| + |B| \leq 1/2$, *утверждения* I *и* II *эквивалентны.*

Доказательство. В силу утверждения 10.2.1 требует доказательства лишь следование $I \Rightarrow II$.

В силу условия $|A| + |B| \leq 1/2$ по теореме 10.1.1 верно равенство

$$\exp(B)\exp(A) = \exp(H(A, B)), \tag{10.2.30}$$

где элемент $H(A, B)$ в силу леммы 10.1.3 удовлетворяет неравенству

$$|H(A, B)| \leq \ln(2). \tag{10.2.31}$$

Из I и (10.2.30) следует

$$\exp(A + B) = \exp(H(A, B)). \tag{10.2.32}$$

Так как по условию $|A + B| \leq |A| + |B| \leq 1/2$ и верно (10.2.31), то из (10.2.31) и (10.2.32) следует, что

$$A + B = H(A, B), \tag{10.2.33}$$

ибо в круге $\{A \in \mathbf{A} \,\Big|\, |A| < \pi\}$ согласно [57, теорема 10.41] экспонента является инъективным отображением. Но (10.2.33) означает, что остаточный член ряда Хаусдорфа

$$R_2(A, B) = 0. \tag{10.2.34}$$

По следствию 10.1.3 тогда выполнено II. $\diamondsuit$

10.2.4 Оценка приращения степенной и экспоненциальной функций.

Введём множество $D \equiv \{0, 1\}$, состоящее из двух элементов: нуля 0 и единицы 1. Введём натуральное число n и n-ную степень D^n множества D. Элементы $i \in D^n$ множества D^n есть конечные последовательности $i = (i_1, i_2, \ldots i_n)$, где $i_r \in D$, $r = 1, 2, \ldots n$. Введём число $|i| = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$ для $i \in D^n$. Определим множества $D^n_k \equiv \{i \in D^n \Big| |i| = k\}$ при $k = 0, 1, 2, \ldots n$. При $r \neq s$ пересечение $D^n_r \bigcap D^n_s = \emptyset$ и объединение $\bigcup\limits_{r=0}^{n} D^n_r = D^n$.

Пусть $A(0)$, $A(1)$ — два произвольных элемента банаховой алгебры $\mathbf{A}$. Определим при каждом $i \in D^n$ произведение

$$A(i) \equiv A(i_n)A(i_{n-1}) \ldots A(i_1) \tag{10.2.35}$$

и коммутатор

$$A[i] \equiv [A(i_n), [A(i_{n-1}), \ldots [A(i_2), A(i_1)] \ldots], \quad \text{при} \quad n \leq 2 \tag{10.2.36}$$

и

$$A[i] \equiv A(i), \quad \text{при} \quad n = 1. \tag{10.2.37}$$

Для натурального числа n во введенных обозначениях справедливо равенство

$$(A(0) + A(1))^n = \sum_{i \in D^n} A(i) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i \in D^n_k} A(i). \tag{10.2.38}$$

Введём частные суммы

$$\mathrm{So}_{\,n,r}(A(0), A(1)) \equiv \sum_{k=0}^{r} \sum_{i \in D^n_k} A(i), r = 0, 1, 2, \ldots n \tag{10.2.39}$$

и

$$\mathrm{So}_{n,-1}(A(0), A(1)) \equiv 0. \qquad (10.2.40)$$

Оценим приращение степенной функции A^n при изменении аргумента A от $A(0)$ до $A(0) + A(1)$.

Лемма 10.2.5 *Для любого* $n \in \mathbf{N}$ *для любого* $r = -1, 0, 1, \dots n-1$ *и любых элементов* $A(0), A(1) \in \mathbf{A}$, *справедливо неравенство*

$$|(A(0) + A(1))^n - \mathrm{So}_{n,r}(A(0), A(1))| \leq C(n, r+1)|A(1)|^{r+1}(|A(0)| + |A(1)|)^{n-(r+1)}. \qquad (10.2.41)$$

Доказательство. При $r = -1$ неравенство (10.2.41) очевидно, поэтому далее рассматриваем случай, когда $r = 0, 1, 2, \dots n-1$ и применима формула (10.2.39). Тогда

$$|(A(0) + A(1))^n - \mathrm{So}_{n,r}(A(0), A(1))| \leq \left| \sum_{k=r+1}^{n} \sum_{i \in D_k^n} A(i) \right| \leq$$

$$\left| \sum_{k=r+1}^{n} \sum_{i \in D_k^n} |A(i_n)||A(i_{n-1})| \dots |A(i_1)| \right| =$$

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \sum_{i \in D_k^n} |A(i_n)||A(i_{n-1})| \dots |A(i_1)| - \sum_{k=0}^{r} \sum_{i \in D_k^n} |A(i_n)||A(i_{n-1})| \dots |A(i_1)| \right|. \qquad (10.2.42)$$

Применяя формулу Тейлора для числовой функции $(\alpha + x)^n$ с $\alpha = |A(0)|$, $x = |A(1)|$, мы получаем равенство

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i \in D_k^n} |A(i_n)||A(i_{n-1})| \dots |A(i_1)| - \sum_{k=0}^{r} \sum_{i \in D_k^n} |A(i_n)||A(i_{n-1})| \dots |A(i_1)| =$$

$$\frac{|A(1)|^{r+1}}{(r+1)!} n(n-1) \dots (n-r)(|A(0)| + \theta|A(1)|)^{n-(r+1)}, \qquad (10.2.43)$$

где $\theta \in]0, 1[$. Из (10.2.43) и (10.2.42) следует (10.2.41). $\diamondsuit$

Теперь оценим приращение экспоненциальной функции $\exp(A)$ при изменении её аргумента A от $A(0)$ до $A(0) + A(1)$. Определим частные суммы

$$\mathrm{Se}_{n,r}(A(0), A(1)) \equiv E + \sum_{k=0}^{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i \in D_k^n} A(i), \quad r = 0, 1, 2, \dots, \qquad (10.2.44)$$

и

$$\mathrm{Se}_{n,-1} \equiv 0. \qquad (10.2.45)$$

Лемма 10.2.6 *Для любого числа* $r = -1, 0, 1, 2, \dots$ *и любых элементов* $A(0), A(1)$ *банаховой алгебры* $\mathbf{A}$ *справедливо неравенство*

$$|\exp(A(0) + A(1)) - \mathrm{Se}_{n,r}| \leq \frac{|A(1)|^{r+1}}{(r+1)!} \exp(|A(0)| + |A(1)|). \qquad (10.2.46)$$

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum\limits_{i \in D^n} A(i_n)A(i_{n-1}) \ldots A(i_1)$ в силу леммы 10.2.4 абсолютно сходится при любых элементах $A(0), A(1)$, поэтому абсолютно сходятся все подряды, полученные любой перестановкой и перегруппировкой его членов (см. [81, с.134,138]). При $r = -1$ неравенство (10.2.46) очевидно, поэтому далее рассматриваем случай $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Представляя экспоненту рядом, получаем

$$\exp(A(0) + A(1)) - \mathrm{Se}_{n,r}(A(0), A(1)) = \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left((A(0) + A(1))^n - \sum_{k=r+1}^{n} \sum_{i \in D_k^n} A(i) \right) = \tag{10.2.47}$$

$$\sum_{n=r+1} \frac{1}{n!} \left((A(0) + A(1))^n - \mathrm{So}_{n,r} \right).$$

Применим лемму 10.2.4 к последнему ряду и получим

$$|\exp(A(0) + A(1)) - \mathrm{Se}_{n,r}(A(0), A(1))| \le$$

$$\left(\sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{1}{n!} C(n, r+1)(|A(0)| + |A(1)|)^{n-(r+1)} \right) |A(1)|^{r+1} =$$

$$|A(1)|^{r+1} \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{n!}{n!(r+1)!(n-(r+1))!} (|A(0)| + |A(1)|)^{n-(r+1)} =$$

$$\frac{|A(1)|^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(|A(0)| + |A(1)|)^m}{m!} = \frac{|A(1)|^{r+1}}{(r+1)!} \exp(|A(0)| + |A(1)|).$$

$\diamondsuit$

10.2.5 Дифференцирование степенной функции.

Пусть функция f определена на непустом открытом подмножестве G нормированного пространства X и принимает значения в нормированном пространстве Y.

Определение 10.2.1 *Функция f дифференцируема в точке $x_0 \in G$, если существует линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$, такой, что*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0.$$

Линейный ограниченный оператор A мы называем *производной* отображения f в точке x_0 и обозначаем $f'(x_0)$.

Обозначим через $\mathcal{L}(\mathbf{A})$ банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов, отображающих банахову алгебру $\mathbf{A}$ в себя. Определим для каждого элемента $A \in \mathbf{A}$ три линейных оператора из $\mathcal{L}(\mathbf{A})$: оператор левого умножения L_A, оператор правого умножения R_A и оператор коммутирования K_A, — действующих на произвольный элемент $V \in \mathbf{A}$ по правилам

$$L_A(V) = AV, \; R_A(V) = VA, \; K_A(V) = AV - VA.$$

Оператор $K_A = L_A - R_A$. Операторы L_A, R_A, K_A коммутируют между собой.

Для любого числа $n \in \mathbf{N}_o$ определим отображение $\mathrm{ord}_n : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ по правилу $\mathrm{ord}_n(A) = A^n$ для любого $A \in \mathbf{A}$. Из леммы 10.2.5 и определения 10.2.1 непосредственно вытекает, что степенная функция $\mathrm{ord}_n(A)$ дифференцируема в каждой точке

$A(0) \in \mathbf{A}$ и её производная $\mathrm{ord}'_n(A(0)) \in \mathcal{L}(\mathbf{A})$ есть линейный оператор, действующий на элемент $A(1) \in \mathbf{A}$ при $n \geq 2$ по правилу

$$\mathrm{ord}'_n(A(0))(A(1)) = \sum_{i \in D_1^n} A(i). \tag{10.2.48}$$

Т.е. оператор $\mathrm{ord}'_n(A) \in \mathcal{L}(\mathbf{A})$ при $n \geq 2$ равен

$$\mathrm{ord}'_n(A) = \sum_{k=1}^{n} L_A^{k-1} R_A^{n-k}. \tag{10.2.49}$$

Преобразуем сумму в правой части равенства (10.2.48).

Лемма 10.2.7 *Для любого натурального числа $n \geq 2$ и любых элементов $A(0) \in \mathbf{A}$ и $A(1) \in \mathbf{A}$ верно равенство*

$$\sum_{i \in D_1^n} A(i) = C(n,1)A(1)A(0)^{n-1} + C(n,2)[A(0),A(1)]A(0)^{n-2} + \tag{10.2.50}$$

$$C(n,3)[A(0),[A(0),A(1)]]A(0)^{n-3} + \ldots + C(n,n)\underbrace{[A(0),[A(0),\ldots[A(0)}_{n-1},A(1)]\ldots].$$

Доказательство. Введём сокращенные обозначения $L_0 \equiv L_{A(0)}$, $R_0 \equiv R_{A(0)}$, $K_0 \equiv K_{A(0)}$ для операторов левого, правого умножения и коммутирования для элемента $A(0)$. В этих обозначениях равенство (10.2.50) приобретает вид операторного равенства

$$\sum_{k=1}^{n} L_0^{k-1} R_0^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} C(n,k) K_0^{k-1} R_0^{n-k}, \tag{10.2.51}$$

взятого в точке $A(1) \in \mathbf{A}$. Используя равенство $L_0 = K_0 + R_0$ и коммутативность операторов L_0, K_0, R_0, преобразуем сумму в левой части равенства (10.2.51)

$$\sum_{k=1}^{n} L_0^{k-1} R_0^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} (K_0 + R_0)^{k-1} R_0^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{k} C(k-1,s-1) K_0^{s-1} R_0^{n-s} =$$

$$\sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{k=s}^{n} C(k-1,s-1) \right) K_0^{s-1} R_0^{n-s}. \tag{10.2.52}$$

По основному свойству биномиальных коэффициентов (лемма 8.3.1) верно равенство $C(k-1,s-1) = C(k,s) - C(k-1,s)$, поэтому

$$\sum_{k=s}^{n} C(k-1,s-1) = \sum_{k=s}^{n} (C(k,s) - C(k-1,s)) = C(n,s) - C(s-1,s) = C(n,s). \tag{10.2.53}$$

Из равенств (10.2.52, 10.2.53) следует равенство (10.2.51). $\diamondsuit$

10.2.6 Дифференцирование экспоненты.

Из определения 10.2.1 и леммы 10.2.6 непосредственно следует, что экспонента $\exp(A)$ есть функция, дифференцируемая в каждой точке $A(0) \in \mathbf{A}$ и ее производная $\exp'(A(0)) \in \mathcal{L}(\mathbf{A})$ действует на элемент $A(1) \in \mathbf{A}$ по правилу

$$\exp'(A(0))(A(1)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i \in D_1^n} A(i). \tag{10.2.54}$$

Т.е. $\exp'(A)$ в любой точке $A \in \mathbf{A}$ есть линейный оператор вида

$$\exp'(A) = E + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n-1} L_A^{k-1} R_A^{n-k}. \tag{10.2.55}$$

Теорема 10.2.1 *Экспоненциальное отображение* $\exp : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ *дифференцируемо в каждой точке* $A(0) \in \mathbf{A}$ *и его производная* $\exp'(A(0)) \in \mathcal{L}(\mathbf{A})$ *действует на произвольный элемент* $A(1) \in \mathbf{A}$ *по правилу*

$$\exp'(A(0))(A(1)) = \left(A(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} [\underbrace{A(0), [A(0), \ldots [A(0)}_{n-1}, A(1)] \ldots] \right) \exp(A(0)). \tag{10.2.56}$$

Доказательство. Ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i \in D_1^n} A(i), \tag{10.2.57}$$

$$A(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} [\underbrace{A(0), [A(0), \ldots [A(0)}_{n-1}, A(1)] \ldots], \tag{10.2.58}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(0)}{n!}, \tag{10.2.59}$$

— сходятся абсолютно при любых элементах $A(0)$ и $A(1)$ из банаховой алгебры $\mathbf{A}$ в силу оценок

$$|A(i)| \le |A(0)|^{n-1} |A(1)|, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad i \in D_1^n; \tag{10.2.60}$$

$$|[A(0), [A(0), \ldots [A(0), A(1)], \ldots]| \le 2^{n-1} |A(0)|^{n-1} |A(1)|, \quad n = 1, 2, 3, \ldots; \tag{10.2.61}$$

$$|A^n(0)| \le |A(0)|^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10.2.62}$$

Произведение абсолютно сходящихся рядов (10.2.58) и (10.2.59) есть снова абсолютно сходящийся ряд (см. [81, с.138]). Сумма абсолютно сходящегося ряда не изменяется при любой группировке его членов (см. [81, с.134]). Перемножим ряды (10.2.58) и (10.2.59) и соберем однородные полиномы одной степени по A

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A[1, \underbrace{0, 0, \ldots 0}_{k-1}] \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m(0)}{m!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k! m!} A[1, \underbrace{0, 0, \ldots 0}_{k-1}] A^{n-k}(0) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} C(n,k) A[1, 0, 0, \ldots 0] A(0)^{n-k}. \tag{10.2.63}$$

Из леммы 10.2.7 и равенства (10.2.54) вытекает теперь равенство (10.2.56). ♢

Следствие 10.2.3 *Если отображение $A : I \to A$ непустого открытого подмножества $I \subset \mathbf{R}$ дифференцируемо в точке $t \in I$ и имеет производную $\dot{A}(t) \in \mathbf{A}$, то суперпозиция отображений $\exp(A(t))$ также дифференцируемое в точке $t \in I$ отображение и его производная равна*

$$\frac{d}{dt}\exp(A(t)) = \left(\dot{A}(t) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}[A(t),[A(t),\ldots[A(t),\dot{A}(t)]\ldots]\right)\exp(A(t)). \quad (10.2.64)$$

10.2.7 Формула $\exp(A)V\exp(-A) = \exp(K_A)V$.

Нам будет полезна следующая формула.

Лемма 10.2.8 *Для любых элементов A и V банаховой алгебры $\mathbf{A}$ справедливо равенство*

$$\exp(A)V\exp(-A) = \exp(K_A)V. \quad (10.2.65)$$

Доказательство. По определению операторов левого умножения L_A, правого умножения R_A и коммутирования K_A из пункта 10.2.5 верны равенства

$$\exp(A)V\exp(-A) = \exp(L_A)\exp(-R_A)V = \exp(L_A - R_A)V = \exp(K_A)V. \quad \diamondsuit$$

Следствие 10.2.4 *Для любых элементов A и V банаховой алгебры $\mathbf{A}$ справедливо равенство*

$$\exp(A)V\exp(-A) = V + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}[A,[A,\ldots[A,V]\ldots]. \quad (10.2.66)$$

Следствие 10.2.5 *Если множество $F \subset \mathbf{A}$ — замкнутая алгебра Ли, и элементы A, V принадлежат алгебре Ли F, то и элемент $\exp(A)V\exp(-A)$ принадлежит алгебре Ли F.*

10.2.8 Оператор подобия на банаховой алгебре.

Для всякого обратимого элемента $A \in \mathrm{GL}(\mathbf{A})$ банаховой алгебры $\mathbf{A}$ определим линейное непрерывное отображение $P_A : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ по правилу: $P_A(X) = AXA^{-1}$ для любого элемента $X \in \mathbf{A}$ — и назовём отображение P_A *оператором подобия*. Поскольку для любого элемента $X \in \mathbf{A}$ верно неравенство $|AXA^{-1}| \leq |A||A^{-1}||X|$, то норма оператора P_A удовлетворяет неравенству

$$||P_A|| \leq |A||A^{-1}|. \quad (10.2.67)$$

Лемма 10.2.9 *Оператор подобия обладает следующими свойствами:*

1) если E — единичный элемент банаховой алгебры $\mathbf{A}$, то $P_E = Id$ — тождественное отображение банаховой алгебры $\mathbf{A}$ на себя;

2) $\forall A \in \mathrm{GL}(\mathbf{A})\ \forall B \in \mathrm{GL}(A) \mid P_{AB} = P_A P_B$;

3) $\forall A \in \mathrm{GL}(\mathbf{A}) \mid (P_A)^{-1} = P_{A^{-1}}$;

4) $\forall A \in \mathrm{GL}(\mathbf{A})\ \forall X \in \mathbf{A}\ \forall Y \in \mathbf{A} \mid P_A(XY) = P_A(X)P_A(Y)$;

5) $\forall A \in \mathrm{GL}(\mathbf{A})\ \forall X \in \mathrm{GL}(\mathbf{A}) \mid (P_A(X))^{-1} = P_A(X^{-1})$;

6) $\forall A \in \mathrm{GL}(\mathbf{A})\ \forall X \in \mathbf{A}\ \forall Y \in \mathbf{A} \mid P_A([X,Y]) = [P_A(X), P_A(Y)]$.

Доказательство. Свойство 1) следует непосредственно из определения. Свойство 2) следует из равенства $ABX(AB)^{-1} = ABXB^{-1}A^{-1} = A(BXB^{-1})A^{-1}$. Свойство 3) следует из свойств 1) и 2). Свойство 4) следует из равенства $AXYA^{-1} = AXA^{-1}AYA^{-1}$. Свойство 5) — из равенства $(AXA^{-1})^{-1} = AX^{-1}A^{-1}$. Свойство 6) следует из равенства

$$A[X,Y]A^{-1} = AXYA^{-1} - AYXA^{-1} = AXA^{-1}AYA^{-1} - AYA^{-1}AXA^{-1} \quad \diamondsuit$$

Из свойства 5) следует равенство

$$P_A(\,\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})) = \,\mathrm{GL}\,(\mathbf{A}) \tag{10.2.68}$$

для любого $A \in \,\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$. Из леммы 10.2.9 также следует, что оператор подобия P_A переводит группу Ли $F \subset \mathbf{A}$ снова в группу Ли $P_A(F) \subset \mathbf{A}$, а подгруппу по умножению $G \subset \,\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ снова в подгруппу по умножению $P_A(G) \subset \,\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$. Сформулируем достаточное условие при выполнении которого оператор подобия P_A отображает группу Ли F на себя.

Лемма 10.2.10 *Пусть замкнутая алгебра Ли $F \subset \mathbf{A}$ содержит элемент A и элемент $B = \exp(A)$, тогда верно равенство $P_B(F) = F$.*

Доказательство. В силу следствия 10.2.5 верно включение

$$P_B(F) \subset F. \tag{10.2.69}$$

Но элемент $(-A)$ также принадлежит алгебре Ли F поэтому верно и включение

$$P_{B^{-1}}(F) \subset F. \tag{10.2.70}$$

Отображение $P_B : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ — изоморфизм, причём $(P_B)^{-1} = P_{B^{-1}}$, поэтому включение (10.2.70) эквивалентно включению

$$F \subset P_B(F). \tag{10.2.71}$$

Включения (10.2.69), (10.2.71) доказывают лемму. $\diamondsuit$

Следствие 10.2.6 *Пусть $F \subset \mathbf{A}$ замкнутая алгебра Ли и элемент $A \in F$, тогда верно равенство*

$$\exp(A)F\exp(-A) = F. \tag{10.2.72}$$

Отображение подобия коммутирует с экспоненциальным отображением.

Лемма 10.2.11 *Для любого элемента $A \in \,\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ суперпозиции отображений $\exp \circ P_A$ и $P_A \circ \exp$ совпадают.*

Доказательство. В самом деле, для любого элемента $X \in \mathbf{A}$ верны равенства

$$\exp\left(P_A(X)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(P_A(X)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P_A(X^n) = P_A\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n\right) = P_A\left(\exp(X)\right). \quad \diamondsuit$$

§10.3 Построение группы Ли с помощью экспоненты

Определенное в п. 7.5.5 экспоненциальное отображение $\exp : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ банаховой алгебры $\mathbf{A}$ в себя используем в этом параграфе как инструмент для построения группы Ли. Проводимое здесь построение имеет то преимущество, что охватывает конечномерный и бесконечномерный случай, но охватывает лишь линейные группы Ли. Далее термин "группа Ли"всюду означает "линейная группа Ли". Напомним, что по теореме Адо ([53, с.25]) любая конечномерная алгебра Ли изоморфна некоторой матричной алгебре Ли.

Если $\mathbf{A}$ — банахова алгебра над полем $\mathbf{C}$, то она будет и банаховой алгеброй над полем $\mathbf{R}$, и всякое линейное подпространство $L \subset \mathbf{A}$ над полем $\mathbf{C}$ является и линейным подпространством над полем $\mathbf{R}$. Однако существуют подмножества $L \subset \mathbf{A}$ которые являются линейными подпространствами над полем $\mathbf{R}$, но не являются линейными подпространствами над полем $\mathbf{C}$, например, в случае $\mathbf{A} = \mathbf{C}$ множество $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. В данном параграфе термин линейное подпространство банаховой алгебры $\mathbf{A}$ над полем Λ означает линейное подпространство над полем $\mathbf{R}$ и в случае $\Lambda = \mathbf{R}$ и в случае $\Lambda = \mathbf{C}$, а под размерностью линейного подпространства имеется в виду его размерность как подпространства над полем $\mathbf{R}$.

10.3.1 Три примера одномерных групп Ли.

В этом пункте банахова алгебра $\mathbf{A} = M(2, \mathbf{C})$ алгебра комплексных матриц 2×2, $A \in M(2, \mathbf{C})$ фиксированная матрица вида $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & ai \end{pmatrix}$, $a \in \mathbf{C}$ и $L = \mathbf{R} \cdot A$ — одномерное линейное подпространство $L \subset \mathbf{A}$. Согласно свойству (53.2) множество $\exp(L) \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ подгруппа. При $t \in \mathbf{R}$ верно

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \exp(it) & 0 \\ 0 & \exp(ait) \end{pmatrix}. \tag{10.3.1}$$

В зависимости от значения числа $a \in \mathbf{C}$ рассмотрим 3 примера.

Пример 10.3.1

$a \notin \mathbf{R}$. Замыкание $\overline{\exp(L)}$ множества $\exp(L)$ в банаховой алгебре $\mathbf{A}$ содержит кроме самого множества $\exp(L)$ ещё множество вырожденных матриц вида $\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Верно соотношение

$$\overline{\exp(L)} \cap \mathrm{GL}\,(2, \mathbf{C}) = \exp(L). \tag{10.3.2}$$

Пример 10.3.2

$a \in \mathbf{R}$, a — рациональное число, $a = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$. В этом случае

$$\overline{\exp(L)} = \exp(L) = \left\{ \begin{pmatrix} \exp(in\varphi) & 0 \\ 0 & \exp(im\varphi) \end{pmatrix} \in \mathbf{A} \;\middle|\; \varphi \in [0, 2\pi] \right\} \tag{10.3.3}$$

и соотношение (10.3.2) также верно. Множество $\exp(L) \subset \mathbf{A}$ компакт.

Пример 10.3.3

$a \in \mathbf{R}$, a — иррациональное число. В этом случае

$$\overline{\exp(L)} = \exp(L) = \left\{ \begin{pmatrix} \exp(i\varphi_1) & 0 \\ 0 & \exp(i\varphi_2) \end{pmatrix} \in \mathbf{A} \;\middle|\; \varphi_1 \in [0, 2\pi],\ \varphi_2 \in [0, 2\pi] \right\}$$

(см.[1, с.144]) и

$$\overline{\exp(L)} \cap \mathrm{GL}\,(2, \mathbf{C}) \neq \exp(L).$$

Причём множество $\exp(L)$ первой категории в своем замыкании $\overline{\exp(L)}$.

В примере 10.3.2 кривая $\exp(L)$ замкнута и компактна в $M(2, \mathbf{C})$, в примерах 10.3.1 и 10.3.3 кривая $\exp(L)$ не замкнута и отображение $g_A : \mathbf{R} \to M(2, \mathbf{C})$ вида $t \mapsto \exp(tA)$ взаимно-однозначно. В примере 10.3.1 обратное отображение g_A^{-1} непрерывно, ибо если последовательность $\{\exp(t_n A)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке $\exp(t_0 A)$, то последовательность комплексных чисел $\{\exp(t_n ai)\}_{n=1}^{\infty}$ сходиться к числу $\exp(t_0 ai)$ и последовательность положительных чисел $\{|\exp(t_n ai)|\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к положительному числу $|\exp(t_0 ai)|$. Но $|\exp(t_n ai)| = \exp(-t_n Im(a))$. Поэтому в силу непрерывности логарифма на $\mathbf{R}_+$ будет $\lim\limits_{t\to\infty} t_n = t_0$. Итак, в примере 10.3.1 множество $\exp(L) = M(2, \mathbf{C})$ гомеоморфно прямой $\mathbf{R}$.

В примере 10.3.3 множество $\exp(L) \subset M(2, \mathbf{C})$ не гомеоморфно прямой $\mathbf{R}$. В самом деле допустим, что существует гомеоморфизм $f : \mathbf{R} \to \exp(L)$. Тогда отображение $f^{-1} g_A : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ взаимно-однозначное и непрерывное отображение прямой $\mathbf{R}$ на себя. Для произвольной точки $c \in \mathbf{R}$ и сегмента $[a, b]$, содержащего точку c как внутреннюю, множество $f^{-1} g_A([a, b]) \subset \mathbf{R}$ также сегмент, содержащий точку $f(c)$ как внутреннюю, поэтому обратное отображение $g_A^{-1} f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ также непрерывно и отображение $f^{-1} g_A$ гомеоморфизм. Но тогда отображение $g_A^{-1} = g_A^{-1} f f^{-1}$ также непрерывно, что неверно в примере 10.3.3, ибо существует последовательность чисел $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $t_n \in \mathbf{R}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$, но $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(t_n A) = E = \exp(0A)$.

Вывод 10.3.1 *Множества* $\exp(L)$ *в примерах 10.3.1, 10.3.2, 10.3.3 не гомеоморфны между собой.*

Вывод 10.3.2 *Одномерные алгебры Ли в примерах 10.3.1, 10.3.2, 10.3.3 изоморфны между собой, но попарно не подобны в пространстве матриц* $M(2, \mathbf{C})$.

Вывод 10.3.3 *Если* $a \in \mathbf{R}$, *то сколь угодно малым шевелением числа* a *в* $\mathbf{C}$ *мы можем получить любой из примеров 10.3.1-10.3.3.*

Примеры 10.3.1 и 10.3.2 соответствуют простейшим геометрическим представлениям о расположении кривой в пространстве, в примере же 10.3.3 кривая возвращается в любую окрестность любой своей точки бесконечное число раз, не имея при этом самопересечений. Примеры 10.3.1 и 10.3.2 отличаются от примера 10.3.3 выполнением равенства (10.3.2). Мы покажем, что равенство (10.3.2) является критерием, определяющим принципиальные свойства расположения группы Ли в банаховой алгебре $\mathbf{A}$ и в общем случае.

Замечание 10.3.1 *Примеры 10.3.1–10.3.3 с сохранением основных указанных свойств переносятся на случай действительного поля скаляров* $\Lambda = \mathbf{R}$. *Достаточно* *положить* $\mathbf{A} = M(4, \mathbf{R})$ *и в примерах 10.3.2, 10.3.3 взять* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$, *с* $a \in \mathbf{R}$ *рациональным или иррациональным, соответственно, а в примере 10.3.1 положить* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & -a \\ 0 & 0 & a & -b \end{pmatrix}$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$.

Перед тем как перейти к построению группы Ли по алгебре Ли в общем случае приведём в пунктах 10.3.2–10.3.4 некоторые свойства топологических групп и их морфизмов.

10.3.2 Топологические группы.

В этом параграфе мы рассматриваем лишь отделимые хаусдорфовы топологические группы. Топологическая Группа G — это группа определенная топологией в которой два отображения $g_G : G \times G \to G$ и $i_G : G \to G$ вида $g_G(a, b) \equiv ab$, $i_G(a) \equiv a^{-1}$ непрерывны. Любое отображение $L_a : G \to G$ и $R_a : G \to G$, $a \in G$, вида $L_a(b) \equiv ab$, $R_a(b) \equiv ba$ гомеоморфизмы топологического пространства на себя. Поэтому для задания топологии группы достаточно задать базу окрестностей единичного элемента $e \in G$.

Пусть G группа и $B \subset 2^G$ система подмножеств, содержащих единичный элемент группы. При каких условиях система B образует базис фильтра окрестностей единицы топологии, согласованной с групповой операцией?

Лемма 10.3.1 *([5, с.15]). Семейство множеств $B \subset 2^G$ образует базис фильтра окрестностей единицы топологической группы с группой G тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

1) $\forall U \in B\ \exists V \in B \mid V^2 \subset U$;

2) $\forall U \in B\ \exists V \in B \mid V^{-1} \subset U$;

3) $\forall a \in G\ \forall U \in B\ \exists V \in B \mid aVa^{-1} \subset U$.

Групповая операция на множестве G и топология τ на множестве G, согласованная с групповой операцией, порождают две равномерности на G: правую $r(\tau)$ и левую $l(\tau)$ с окрестностями диагонали вида $\{(x, y) \in G \times G \mid xy^{-1} \in V\}$ и $\{(x, y) \in G \times G \mid x^{-1}y \in V\}$, где множество $V \subset G$ пробегает окрестности единицы в топологии τ.

Морфизмы в категории групп мы в этом параграфе будем называть представлениями. Морфизмами в категории топологических групп будут непрерывные представления. Если (G_1, τ_1) и (G_2, τ_2) две топологические группы с топологиями τ_1 и τ_2 и $f : (G_1, \tau_1) \to (G_2, \tau_2)$ непрерывное представление, то f морфизм в категории равномерных пространств $f : (G_1, r(\tau_1)) \to (G_2, r(\tau_2))$ и $f : (G_1, l(\tau_1)) \to (G_2, l(\tau_2))$, то есть отображение $f : G_1 \to G_2$ равномерно непрерывно из правой равномерности в правую и из левой в левую.

Утверждение 10.3.1 *Если X равномерное пространство и $Y \subset X$ подмножество с наследственной равномерностью, то ([7, с.226]):*

1) если Y полно, то Y замкнуто в X;

2) если X полно и Y замкнуто, то Y полно;

3) если X полно, то Y полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто в X.

Перенесение свойств с некоторой окрестности единицы на всю топологическую группу мы называем глобализацией. Например, известно, что если существует полная окрестность единицы, то топологическая группа полна, а если существует счетная база окрестностей единицы, то топологическая группа метризуема.

При проведении глобализации свойств связных топологических групп мы будем использовать следующую лемму.

Лемма 10.3.2 *Пусть A,B подмножества топологической группы G и $C \equiv AB$, тогда:*

1) если A или B открыто, то C открыто;

2) если A и B связны, то C связно;

3) если A и B компактны, то C компактно;

4) если $A \subset A_1$ плотно в A_1 и $B \subset B_1$ плотно в B_1, то AB плотно в A_1B_1;

5) если A и B сепарабельны, то C сепарабельно.

Доказательство. 1) $AB = \bigcup_{b\in B} Ab = \bigcup_{a\in A} aB$, поэтому верно 1).

2) Топологическое произведение связных топологических пространств связно, поэтому $A\times B$ — связное топологическое пространство. Непрерывный образ $g_G(A\times B) = AB = C$ связного топологического пространства связен.

3) Топологическое произведение компактных топологических пространств компактно, поэтому $A \times B$ компактно и непрерывный образ $g_G(A \times B) = AB = C$ компактного пространства компактен.

4) Если A плотно в A_1 и B плотно в B_1, то топологическое произведение $A \times B$ плотно в топологическом произведении $A_1 \times B_1$. Так как отображение g_G непрерывно, то образ $g_G(A \times B) = AB$ плотен в образе $g_G(A_1 \times B_1) = A_1B_1$.

5) следует из 4). $\diamondsuit$

Следствие 10.3.1 *Из 1) следует , что отображение $g_G : G \times G \to G$ открыто.*

Для проведения глобализации свойств рассмотрим следующее построение. Пусть $U \subset G$ подмножество, содержащее единичный элемент, тогда $U \subset U^2 \subset U^3 \subset \ldots \subset U^n \subset \ldots$. Положим $U^\infty \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$, тогда по построению

$$UU^\infty = U^\infty = U^\infty U \tag{10.3.4}$$

$$U^\infty U^\infty = U^\infty. \tag{10.3.5}$$

Если $e \in V \subset U$, то $V^n \subset U^n$ и $V^\infty \subset U^\infty$, то есть операция перехода от множества U к множеству U^∞ монотонна. Если множество U симметрично, то есть $U^{-1} = U$, то

$$\forall n \in \mathbf{N} \mid (U^n)^{-1} = U^n, \tag{10.3.6}$$

$$(U^\infty)^{-1} = U^\infty, \tag{10.3.7}$$

то есть множество U^∞ является подгруппой группы G, причём это наименьшая подгруппа группы G содержащая множество U.

Лемма 10.3.3 *Пусть U — симметричная открытая окрестность единицы топологической группы G, тогда:*

1) U^∞ — открытая и замкнутая подгруппа топологической группы G;

2) если U — связна, то U^∞ — связная подгруппа топологической группы G.

Доказательство. Так как U открытое множество, то в силу соотношения (10.3.4) множество U^∞ открыто. Для замыкания $\overline{U^\infty}$ множества U^∞ в равномерном топологическом пространстве и открытой окрестности U верно соотношение (см.[7, с.206]) $\overline{U^\infty} \subset U^\infty U = U^\infty$, то есть множество U^∞ замкнуто.

Если окрестность U связна, то по лемме 10.3.2 все множества $U^n, n \in \mathbf{N}$ связны и содержат единичный элемент e, тогда ([7, с.170]) и множество U^∞ связно как их объединение. $\diamondsuit$

Следствие 10.3.2 *Если G — связная топологическая группа, то для любой окрестности единицы U верно $U^\infty = G$.*

Доказательство. Существует открытая симметричная окрестность единицы $V \subset U$. Тогда $V^\infty \subset U^\infty$. Но по лемме 10.3.3 открытое и замкнутое множество в G. По условию связности $V^\infty = G$, а следовательно и $U^\infty = G$. $\diamondsuit$

Во избежание двусмысленности отметим, что в этом параграфе для подмножеств A, B группы G через $A\times B \equiv \{(a,b) \in G\times G \mid a \in A, b \in B\}$ мы обозначаем теоретико-множественное произведение, а через $AB \equiv \{ab \in G \mid a \in A, b \in B\}$ подмножество группы G, состоящее из всех попарных произведений. Напомним также, что топологическое пространство мы называем компактным, если из каждого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Подмножество топологического пространства мы называем компактным, если оно является компактным топологическим пространством в наследственной топологии.

Проведём теперь глобализацию свойств в топологической группе.

Лемма 10.3.4 *Пусть G — связная топологическая группа, тогда если существует окрестность единицы U со свойством A, то топологическая группа обладает свойством B согласно таблице:*

A	B
1) полна	*полна*
2) метризуема	*метризуема*
3) сепарабельна	*сепарабельна*
4) компактна	*локально-компактна и σ-компактна.*

Доказательство. Свойства 1) и 2) уже известны.

3) Если U — сепарабельная окрестность единицы,то существует счётное множество $A \subset U$, такое что $\bar{A} \supset U$. Согласно лемме 10.3.2 множества A^n всюду плотны во множествах U^n, $n \in \mathbf{N}$, то есть $\overline{A^n} \supset U^n$. Поэтому $\overline{A^\infty} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A^n} \supset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \overline{A^n} \supset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} U^n = G$ и счётное множество A^∞ всюду плотно в топологической группе G.

4) Если $U \subset G$ — компактная окрестность единицы, то по лемме 10.3.2 множества U^n, $n \in \mathbf{N}$, компактны и дают в объединении всю топологическую группу G. $\diamondsuit$

Следствие 10.3.3 *Если G связная компактная топологическая группа, то для любой окрестности единицы $U \subset G$ существует натуральное число n, что $U^n = G$.*

Доказательство. В самом деле по следствию 10.3.2 для открытой окрестности единицы $V \subset U$, верно $V^\infty = G$, то есть открытые множества $\{V^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ образует открытое покрытие топологической группы G. Выделяя конечное подпокрытие в силу условия компактности, мы получаем, что при некотором $n \in \mathbf{N}$ верно $G = V^n \subset U^n$. $\diamondsuit$

10.3.3 Непрерывность обратного представления.

В данном пункте мы сформулируем обобщение на метризуемые топологические группы следующей теоремы Банаха.

Теорема 10.3.1 *(Теорема Банаха.) Если $f : X \to Y$ инъективное непрерывное линейное отображение банахова пространства X в банахово пространство Y и $f(X)$ всюду плотно в Y, то обратное отображение f^{-1} непрерывно тогда и только тогда, когда $f(X) = Y$ и разрывно тогда и только тогда, когда множество $f(X)$ первой категории в Y.*

Из утверждения 10.3.1 следует справедливость утверждения.

Утверждение 10.3.2 *Пусть $f : X \to Y$ инъективное непрерывное представление полной топологической группы X в топологическую группу Y и обратное отображение f^{-1} непрерывно, тогда множество $f(X) \subset Y$ замкнуто.*

Опорным в этом пункте является следующий факт [34, с.282].

Лемма 10.3.5 *Пусть $f : X \to Y$ инъективное непрерывное представление сепарабельной полной метризуемой топологической группы X в полную метризуемую топологическую группу Y, тогда если множество $f(X) \subset Y$ не первой категории в Y, то обратное отображение f^{-1} непрерывно.*

Обобщение теоремы Банаха мы формулируем в следующем виде.

Теорема 10.3.2 *Пусть $f : X \to X$ инъективное непрерывное представление сепарабельной полной метризуемой топологической группы X в полную метризуемую топологическую группу Y и множество значений $f(X) \subset Y$ всюду плотно в Y, тогда обратное отображение f^{-1} непрерывно тогда и только тогда, когда $f(X) = Y$ и разрывно тогда и только тогда, когда множество $f(X)$ первой категории в Y.*

Следствие 10.3.4 *Если $f : X \to Y$ инъективное непрерывное представление сепарабельной полной метризуемой топологической группы X в полную метризуемую топологическую группу Y, то обратное отображение f^{-1} непрерывно тогда и только тогда, когда множество $f(X) \subset Y$ замкнуто.*

Без требования сепарабельности X теорема 10.3.2 неверна как показывает следующий пример.

Пример 10.3.4

Возьмём действительную прямую $\mathbf{R}$ как группу по сложению с естественной топологией — получим топологическую группу Y. Рассматривая ту же группу в дискретной топологии, получим топологическую группу X. Тождественное отображение $f : X \to X$ инъективное непрерывное представление полной метризуемой топологической группы X на полную метризуемую топологическую группу Y, однако, обратное отображение f^{-1} разрывно.

В случае компактной топологической группы X в силу теоремы о непрерывности обратного отображения к непрерывному инъективному отображению компакта верно следующее утверждение.

Утверждение 10.3.3 *Если $f : X \to Y$ инъективное непрерывное отображение компактной топологической группы X в топологическую группу Y, то множество $f(X) \subset Y$ компактно и обратное отображение f^{-1} непрерывно.*

10.3.4 Локальная характеризация разрывного обратного представления.

В этом пункте $f : X \to Y$ инъективное непрерывное представление топологической группы X в топологическую группу Y. Нас интересует критерий непрерывности или разрывности обратного отображения через поведение отображения f в окрестности единичного элемента $e_x \in X$. Через $B_X \subset 2^X$ мы обозначаем множество всех окрестностей единицы в топологической группе X.

Непрерывность представления f^{-1} эквивалентна его непрерывности в точке $e_y \in Y$. Таким образом, обратное отображение f^{-1} непрерывно тогда и только тогда, когда верно

$$\forall U \in B_X \mid e_y \notin \overline{f(X \setminus U)} \tag{10.3.8}$$

и разрывно тогда и только тогда, когда верно

$$\exists U \in B_X \mid e_y \in \overline{f(X \setminus U)}, \tag{10.3.9}$$

где черта сверху означает замыкание множества $f(X \setminus U)$ в топологической группе Y.

Далее в этом пункте предполагаем, что Y — метризуемая топологическая группа, то есть топология на Y (но не левая или правая равномерность, вообще говоря) порождаются метрикой ρ. Введём расстояние от точки $y \in Y$ до множества $A \subset Y$

$$\rho(y, A) \equiv \inf_{y' \in Y} \rho(y, y').$$

По определению для пустого множества $\rho(y, \emptyset) \equiv \infty$. Условия (10.3.8) и (10.3.9) для метризуемой топологической группы Y можно записать в следующем эквивалентном виде.

Утверждение 10.3.4 *Если $f : X \to Y$ инъективное непрерывное представление топологической группы X в метризуемую топологическую группу Y, то обратное отображение f^{-1} непрерывно тогда и только тогда, когда верно*

$$\forall U \in B_X \mid \rho(e_y, f(X \setminus U)) > 0 \tag{10.3.10}$$

и разрывно тогда и только тогда, когда верно

$$\exists U \in B_X \mid \rho(e_y, f(X \setminus U)) = 0. \tag{10.3.11}$$

Определим для любых двух окрестностей $V \in B_X$, $U \in B_X$ и натурального числа $n \in \mathbf{N}$ величину

$$\mu(V, U, n) \equiv \rho(e_y, f(V^n \setminus U)). \tag{10.3.12}$$

По построению $\mu(V, U, n) \in [0, \infty]$. Величина $\mu(V, U, n)$ монотонно убывает по аргументу V, монотонно возрастает по аргументу U и монотонно убывает по аргументу n, то есть

$$(V' \supset V) \Rightarrow (\mu(V', U, n) \leq \mu(V, U, n)) \tag{10.3.13}$$

$$(U' \supset U) \Rightarrow (\mu(V, U', n) \geq \mu(V, U, n)) \tag{10.3.14}$$

$$(n \geq m) \Rightarrow (\mu(V, U, n) \leq \mu(V, U, m)) \tag{10.3.15}$$

Утверждение 10.3.5 *Если X связная топологическая группа, то для любых окрестностей единицы $V \in B_X$, $U \in B_X$ верно*

$$\rho(e_y, f(X \setminus U)) = \lim_{n\to\infty} \mu(V, U, n). \tag{10.3.16}$$

Доказательство. При любом $n \in \mathbf{N}$ верно $X^n = X$, поэтому

$$\mu(X, U, n) = \rho(e_y, f(X^n \setminus U)) = \rho(e_y, f(X \setminus U)) = \mu(X, U, 1) \tag{10.3.17}$$

Так как $V \subset X$, то в силу (10.3.13) при любом $n \in \mathbf{N}$ верно

$$\mu(X, U, 1) = \mu(X, U, n) \le \mu(V, U, n) \tag{10.3.18}$$

В случае $\mu(X, U, 1) = \infty$ равенство (10.3.16) следует из (10.3.18).

Рассмотрим случай $\mu(X, U, 1) < \infty$. В этом случае для любого числа $\varepsilon > 0$ существует точка $x \in X \setminus U$, что

$$\rho(e_y, f(X)) < \mu(X, U, 1) + \varepsilon. \tag{10.3.19}$$

Так как группа X связна, то по следствию 2 верно $V^\infty = X$ и найдется номер $n \in \mathbf{N}$, что $x \in V^n$. Тогда

$$\mu(V, U, n) \le \mu(e_y, f(x)) < \mu(X, U, 1) + \varepsilon. \tag{10.3.20}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из (10.3.20) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mu(V, U, n) \le \mu(X, U, 1). \tag{10.3.21}$$

Неравенство (10.3.18) и (10.3.21) доказывает соотношение (10.3.16). $\diamondsuit$

Из утверждений 10.3.4 и 10.3.5 вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 10.3.6 *Пусть $f : X \to Y$ инъективное непрерывное представление топологической группы X в метрическую топологическую группу Y, тогда обратное отображение f^{-1} непрерывно тогда и только тогда, когда*

$$\forall V \in B_X\ \forall U \in B_X \mid \lim_{n\to\infty} \mu(V, U, n) > 0 \tag{10.3.22}$$

и разрывно тогда и только тогда, когда

$$\exists V \in B_X\ \forall U \in B_X \mid \lim_{n\to\infty} \mu(V, U, n) = 0 \tag{10.3.23}$$

Теперь мы в состоянии доказать следующий критерий разрывности обратного представления f^{-1}.

Теорема 10.3.3 *Пусть $f : X \to Y$ инъективное непрерывное представление связной топологической группы X в метризуемую топологическую группу Y и обратное отображение f^{-1} разрывно. Тогда, если $K \in B_X$ компактная окрестность единицы e_x, то существует последовательность $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ точек $x_m \in X$, такая что выполнены соотношения:*

$$1)\forall m \in \mathbf{N} \mid \rho(e_y, f(x_{m+1})) < \tfrac{1}{2}\rho(e_y, f(x_m));$$
$$2)\forall m \in \mathbf{N} \mid K \cap x_m K = \emptyset;$$
$$3)\forall m \in \mathbf{N}\ \forall p \in \mathbf{N}, p \neq m \mid x_m K \cap x_p K = \emptyset.$$

Доказательство. Так как отображение f^{-1} разрывно, то по утверждению 10.3.6 существует открытая окрестность $U \in B_X$, что верно

$$\lim_{n\to\infty} \mu(S,U,n) = 0, \tag{10.3.24}$$

где $S \equiv K \cup K^{-1}$ — симметричная компактная окрестность единицы.

Множество $S \subset X$ компактно, поэтому при любом $n \in \mathbf{N}$ множества S^n, $S^n \setminus U$ компактны, а в силу непрерывности отображения f и множества $f(S^n \setminus U)$ компактны и не содержат точки e_y, ибо представление f взаимно-однозначно $f(e_x) = e_y$ и $e_x \notin S^n \setminus U$. Поэтому $\mu(S,U,n) > 0$ при всех $n \in \mathbf{N}$.

В силу (10.3.24) существует номер $N \in \mathbf{N}$, начиная с которого $\mu(S,U,n) \le 1$, то есть, в частности $S^n \setminus U \ne \emptyset$.

Определим подпоследовательность натуральных чисел $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ следующим образом. n_1 выберем так, чтобы

$$\mu(S,U,n_1) < \frac{1}{2}\mu(S,U,N+2). \tag{10.3.25}$$

Такой номер n_1 существует в силу (10.3.24). Если определено число n_m, то число n_{m+1} определим так, чтобы

$$\mu(S,U,n_{m+1}) < \frac{1}{2}\mu(S,U,n_m+2). \tag{10.3.26}$$

Это можно сделать в силу (10.3.24).

Так как множества $f(S^{n_m} \setminus U) \subset Y$, $m \in \mathbf{N}$, не пустые и компактные, то существуют точки $x_m \in S^{n_m} \setminus U$, такие что

$$\rho(e_y, f(x_m)) = \rho(e_y, f(S^{n_m} \setminus U)) = \mu(S,U,n_m). \tag{10.3.27}$$

Для последовательности $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ выполнены свойства 1) – 3). В самом деле, в силу (10.3.26),(10.3.27) при любом $m \in \mathbf{N}$ верно

$$\rho(e_y, f(x_{m+1})) = \mu(S,x,n_{m+1}) < \frac{1}{2}\mu(S,U,n_m+2), \tag{10.3.28}$$

но

$$\mu(S,U,n_m+2) \le \mu(S,U,n_m) = \rho(e_y, f(x_m)). \tag{10.3.29}$$

Из (10.3.28, 10.3.29) следует справедливость 1).

Для доказательства 2) предположим, что при некоторых $m \in \mathbf{N}$ выполнено

$$K \cap x_m K \ne \emptyset. \tag{10.3.30}$$

Тогда существуют элементы $a \in K, b \in K$, что $a = x_m b$. Отсюда $x_m = ab^{-1}$ и поэтому $x_m \in S^2$. Но в силу (10.3.25, 10.3.26) $x \notin U$ и кроме того

$$\rho(e_y, f(x_m)) = \mu(S,U,n_m) < \frac{1}{2}\mu(S,U,3)$$

и

$$\rho(e_y, f(x_m)) < \mu(S,U,2) \equiv \inf_{x \in S^2 \setminus U} \rho(e_y, f(x)),$$

т.е. $x_m \notin S^2$ при всех $m \in \mathbf{N}$. Получено противоречие с предположением (10.3.30).

Аналогично для доказательства 3) предполагаем, что существуют натуральные номера $m \in \mathbf{N}$ и $p \in \mathbf{N}$, $p > m$, что

$$x_m K \cap x_p K \neq \emptyset. \tag{10.3.31}$$

Тогда существуют элементы $a \in K$ и $b \in K$, что $x_m a = x_p b$ или $x_p = x_m a b^{-1}$. Отсюда

$$\left(x_p \in x_m K K^{-1}\right) \Rightarrow \left(x_p \in x_m S^2\right) \Rightarrow \left(x_p \in S^{n_m+2}\right).$$

Но в силу (10.3.26) имеем

$$\rho(e_y, f(x_p)) = \mu(S, U, n_p) < \mu(S, U, n_m + 2),$$

то есть для $x_p \notin U$ верно

$$\rho(e_y, f(x_p)) < \inf_{x \in S^{n_m+2} \setminus U} \rho(e_y, f(x)),$$

то есть $x_p \notin S^{n_m+2}$. Получено противоречие с предположением (10.3.31). $\diamondsuit$

Теорема 10.3.3 показывает, что пример 10.3.3 отражает характеристическое свойство инъективного непрерывного представления f локально-компактной связной топологической группы в метризуемую топологическую группу с разрывным обратным отображением f^{-1}.

10.3.5 Построение группы Ли по алгебре Ли.

Если $L \subset A$ линейное подпространство и мы хотим построить подгруппу в $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ с помощью экспоненты, мы встречаем следующие два препятствия.

Во-первых, если подпространство L не одномерно, то как показывает пример 10.2.1 множество $\exp(L) \subset \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ уже не является подгруппой группы $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$. Во-вторых, экспонента осуществляет гомеоморфизм открытой окрестности нуля $U(q) \subset \mathbf{A}$, $q \in]0, \frac{1}{2}[$, на открытую окрестность единицы $\exp(\mathbf{A}) \subset \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ и гомеоморфизм множества $L \cap U(q) \subset \mathbf{A}$ на множество $\exp(L \cap U(q)) \subset \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$. Таким образом, на множестве $\exp(L \cap U(q)) \subset \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ задана топология и задана групповая операция умножения, но множество $\exp(L \cap U(q))$ может не быть окрестностью единицы топологической группы.

Проведём теперь следующее построение.

По любому *симметричному* множеству Q банаховой алгебры $\mathbf{A}$, то есть такому что $-Q = Q$, наименьшую подгруппу в группе $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ по умножению, содержащую множество $\exp(Q)$, обозначим $\mathrm{Exp}\,(Q)$. Согласно п.2 верно

$$\mathrm{Exp}\,(Q) = (\exp(Q))^\infty \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} (\exp(Q))^n \tag{10.3.32}$$

Далее $U(A, a) \equiv \{B \in A \,\big|\, |A - B| < a\}$ — открытый шар с центром в точке $A \in A$ и радиуса $a \in \mathbf{R}_+$ банаховой алгебры $\mathbf{A}$ и $U(a) \equiv U(0, a)$, аналогично $U[A, a] \equiv \{B \in A \,\big|\, |A - B| \leq a\}$ — замкнутый шар с центром в точке A и радиуса $a \geq 0$ банаховой алгебры A и $U[a] \equiv U[0, a]$.

Если $L \subset \mathbf{A}$ линейное подпространство, то оказывается, что для построения группы $\mathrm{Exp}\,(L)$ достаточно иметь любую ε-окрестность нуля подпространства L.

Утверждение 10.3.7 *Если $L \subset \mathbf{A}$ линейное подпространство, то для любого числа $\alpha \in \mathbf{R}_+$ верно*

$$\mathrm{Exp}\,(L \cap U(\alpha)) = \mathrm{Exp}\,(L). \tag{10.3.33}$$

Доказательство. Так как $L \cap U(\alpha) \subset L$, то $\exp(L \cap U(\alpha) \subset \exp(L))$ и в силу п. 10.3.2 $(\exp(L \cap U(\alpha)))^\infty \subset (\exp(L))^\infty$, то есть верно включение

$$\mathrm{Exp}\,(L \cap U(\alpha)) \subset \mathrm{Exp}\,(L). \tag{10.3.34}$$

С другой стороны, если $b = \exp(a), a \in L$, то существует $n \in \mathbf{N}$, что $|\frac{a}{n}| < \alpha$, поэтому $b = (\exp(\frac{a}{n}))^n$ и $b \in (\exp(L \cap U(\alpha))^n$. Итак, верно включение

$$\mathrm{Exp}\,(L \cap U(\alpha)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\exp(L \cap U(\alpha)))^n \supset \exp(L). \tag{10.3.35}$$

Но (10.3.35) влечет согласно п. 10.3.2 включение

$$(\,\mathrm{Exp}\,(L \cap U(\alpha)))^\infty \supset (\exp(L))^\infty$$

или

$$\mathrm{Exp}\,(L \cap U(\alpha)) \supset \mathrm{Exp}\,(L). \tag{10.3.36}$$

Включения (10.3.34, 10.3.36) доказывают равенство (10.3.33). $\diamondsuit$

Далее в этом пункте $L \subset \mathbf{A}$ линейное подпространство над полем $\mathbf{R}$.

Мы построили наименьшую подгруппу $\mathrm{Exp}\,(L)$ в $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$, содержащую множество $\exp(L)$, теперь для построения топологической группы осталось задать топологию на группе $\mathrm{Exp}\,(L)$. Простейший способ — задание наследственной топологии на $\mathrm{Exp}\,(L)$ как на подмножестве топологической группы $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ или эквивалентно как на подмножестве банаховой алгебры $\mathbf{A}$ — полученную топологическую группу обозначим $\mathrm{Exph}\,(L)$.

Перейдем ко второму способу топологизации. Фиксируем число $q \in]0, \frac{1}{2}]$. Отображение exp согласно п. 7.5.5 осуществляет гомеоморфизм открытого шара $U(q)$ на открытое множество $\exp(U(q)) \supset \mathrm{GL}_e(\mathbf{A}) \subset A$. Причём это аналитический гомеоморфизм в банаховой алгебре $\mathbf{A}$, то есть прямое отображение exp и обратное отображение ln в указанной области представляются абсолютно сходящимися в алгебре $\mathbf{A}$ степенными рядами с числовыми коэффициентами. Сужение $\exp\Big|_{L \cap U(q)}$ также гомеоморфизм множества $L \cap U(q) \subset \mathbf{A}$ на множество $\exp(L \cap U(q)) \subset \mathbf{A}$. Когда мы говорим в последнем случае о гомеоморфизме мы имеем в виду наследственную топологию из банаховой алгебры $\mathbf{A}$ на множестве $\exp(L \cap U(q)) \subset \mathbf{A}$.

Итак, на множестве $\exp(L \cap U(q)) \subset \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ мы имеем топологию и групповую операцию — умножение, причём топология и групповая операция берутся из топологической группы $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$, содержащей множество $\exp(L \cap U(q))$ и, следовательно, согласованы. Однако, будет ли множество $\exp(L \cap U(q))$ окрестностью единицы топологической группы?

Замечание 10.3.2 *В случае комплексного поля скаляров $\Lambda = \mathbf{C}$ линейным подпространством $L \subset \mathbf{A}$ мы в этом параграфе называем линейное подпространство над полем скаляров $\mathbf{R}$, а алгеброй Ли в этом параграфе и во всей работе называем подмножество $L \subset \mathbf{A}$ замкнутое относительно трёх операций: 1)умножения на вещественный скаляр, 2)сложения, 3)коммутирования.*

Теорема 10.3.4 *Если $L \subset \mathbf{A}$ замкнутое линейное подпространство, то следующие утверждения эквивалентны:*

I. L — алгебра Ли.

II. Система множеств $\{\exp(L \cap U(\delta))\}_{\delta \in]0, \frac{1}{2}]}$ есть базис фильтра окрестностей единицы групповой топологии на группе $\mathrm{Exp}\,(L)$.

III. Множество $\exp(L \cap U(q)) \subset \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ с наследственными топологией и групповой операцией есть открытая окрестность единицы некоторой топологической группы.

IV. Существует $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, что

$$(\exp(L \cap U(\delta)))^2 \subset \exp\left(L \cap U\left(\frac{1}{2}\right)\right). \tag{10.3.37}$$

Для дальнейшего использования в этом параграфе Введём обозначения

$$W(L,\delta) \equiv \exp(L \cap U(\delta)), \tag{10.3.38}$$

где L – подмножество из $\mathbf{A}$, и $\delta \in \mathbf{R}_+$. Кроме того

$$W(\delta) \equiv W(\mathbf{A},\delta), \quad \delta \in \mathbf{R}_+. \tag{10.3.39}$$

Доказательство теоремы 10.3.4. $I \to II$. Проверяем выполнение требований 1)-3) леммы 10.3.1 на базис фильтра окрестностей единицы топологической группы для системы множеств $\{\exp(L \cap U(\delta))\}_{\delta \in]0, \frac{1}{2}]} \equiv \{W(L,\delta)\}_{\delta \in]0, \frac{1}{2}]}$.

Утверждение 2) леммы 10.3.1 выполнено, ибо множества $W(L,\delta)$ симметричны, то есть $W(L,\delta)^{-1} = W(L,\delta)$.

Утверждение 1) вытекает из следствия 10.1.1, согласно которому верно

$$\forall \delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \;\Big|\; \left(\exp\left(L \cap U\left(\frac{\delta}{3}\right)\right)\right)^2 \subset \exp\left(L \cap U\left(\frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\delta}{3}\right)\right) = \exp(L \cap U(\delta)). \tag{10.3.40}$$

Проверяем выполнение требования 3) леммы 10.3.1, то есть что верно утверждение

$$\forall a \in \mathrm{Exp}\,(L)\ \forall \varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right]\ \exists \delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \;\Big|\; aW(L,\delta)a^{-1} \subset W(L,\varepsilon). \tag{10.3.41}$$

Фиксируем $\varepsilon \in]0, \frac{1}{6}]$ и элемент $a \in \mathrm{Exp}\,(L)$. Согласно утверждению 10.3.7,

$$\mathrm{Exp}\,(L) = \mathrm{Exp}\,\left(L \cap U\left(\frac{1}{6}\right)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\exp\left(L \cap U\left(\frac{1}{6}\right)\right)\right)^n,$$

поэтому существует натуральное число $n \in \mathbf{N}$ и элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L \cap U(\frac{1}{6})$, что $a = \exp(x_n) \ldots \exp(x_2)\exp(x_1)$. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{2^n}$. По следствию 10.1.2 будут выполнены соотношения

$$\begin{array}{l}
\exp(x_1)\exp(L \cap U(\delta))\exp(-x_1) \subset \exp(L \cap U(2\delta)),\\
\exp(x_2)\exp(L \cap U(2\delta))\exp(-x_2) \subset \exp(L \cap U(2^2\delta)),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\exp(x_n)\exp(L \cap U(2^{n-1}\delta))\exp(-x_n) \subset \exp(L \cap U(2^n\delta)) = \exp(L \cap U(\varepsilon)).
\end{array}$$

Отсюда следует, что

$$aW(L,\delta)a^{-1} \subset W(L,\varepsilon)$$

и утверждение (10.3.41) доказано.

$II \Rightarrow III$. Если выполнено утверждение II, то подмножество $W(L, \frac{1}{2}) \subset \mathrm{Exp}\,(L)$ есть открытая окрестность единицы топологической группы на группе $\mathrm{Exp}\,(L)$ с топологией, определяемой базисом фильтра $\{W(L,\delta)\}_{\delta\in]0,\frac{1}{2}]}$. Но так как отображение $\exp|_{U\frac{1}{2}}$ гомеоморфизм открытого шара $U\left(\frac{1}{2}\right)$ на открытое множество $W\left(\frac{1}{2}\right) \supset W(L, \frac{1}{2})$, то построенная групповая топология на множестве $W(L, \frac{1}{2})$ совпадает с наследственной топологией $W(L, \frac{1}{2}) \subset \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$. Поэтому верно утверждение III.

$III \to IV$. Если выполнено утверждение III, то выполнено и утверждение 1) леммы 1, а оно влечет истинность утверждения IV.

$IV \to I$. В области $W(\frac{1}{2}) \subset \mathbf{A}$ однозначно определен логарифм. При $\delta \in]0, \frac{1}{6}]$ согласно следствию 10.1.1, логарифмируя соотношение (10.3.37), получаем

$$\ln(W(L,\delta)^2) = H(L\cap U(\delta), L\cap U(\delta)) \subset L\cap U\left(\frac{3}{2}\delta\right) \subset L. \qquad (10.3.42)$$

Пусть $A \in L$ и $B \in L$ произвольные элементы. Существует число $\varepsilon > 0$, что $tA \in U(\delta)$ и $tB \in U(\delta)$ при $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, поэтому согласно (10.3.42) имеем

$$\forall t \in [-\varepsilon,\varepsilon] \mid H(tA, tB) \in L.$$

Так как элементы tA, tB принадлежат шару $U(\frac{1}{6})$, то функция Хаусдорфа представляется абсолютно суммируемым рядом Хаусдорфа и согласно п. 10.1.6

$$H(tA,tB) = \left(t(A+B) + \frac{t^2}{2}[B,A] + t^3H_3(A,B) + ...\right) \in L, \qquad (10.3.43)$$

причём степенной ряд (10.3.43) абсолютно суммируем при $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Так как $L \subset A$ линейное подпространство, то $t(A+B) \in L$ и следовательно

$$\forall t \in [-\varepsilon,\varepsilon] \;\Big|\; \left(\frac{t^2}{2}[B,A] + \sum_{n=3}^{\infty} t^n H_n(A,B)\right) \in L$$

и поэтому для всех $t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \setminus \{0\}$ верно

$$\left(\frac{1}{2}[B,A] + \sum_{n=3}^{\infty} t^{n-2} H_n(A,B)\right) \in L. \qquad (10.3.44)$$

Но согласно утверждений 7.5.1, 7.5.2 и следствия 7.5.1 из суммируемости ряда (10.3.44) при $t = \varepsilon$ следует его абсолютная суммируемость и непрерывность по t при $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Так как L — замкнутое подпространство в $\mathbf{A}$, то переходя в формуле (10.3.44) к пределу при $t \to 0$ получим $\frac{1}{2}[B,A] \in L$. Итак, доказано что L — алгебра Ли.

Мы доказали цепочку следований $I \to II \to III \to IV \to I$. $\diamondsuit$

Групповую топологию задаваемую на группе $\mathrm{Exp}\,(L)$ базисом фильтра окрестностей единицы вида $\{W(L,\delta)\}_{\delta\in]0,\frac{1}{2}]}$ для *замкнутой алгебры* Ли $L \subset \mathbf{A}$ назовём *топологией многообразия* и обозначим полученную топологическую группу $\mathrm{Expm}\,(L)$. Согласно теореме 10.3.4 при любом $q \in]0, \frac{1}{2}]$ множество $\exp(L \cap U(q)) \subset \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ с наследственными топологией и групповой операцией есть окрестность единицы топологической группы $\mathrm{Expm}\,(L)$ и вся группа $\mathrm{Expm}\,(L)$ равна объединению

$$\mathrm{Expm}\,(L) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\exp L \cap U(q)))^n. \qquad (10.3.45)$$

Открытая окрестность единицы E в группе $\mathrm{Exph}\,(L)$ имеет вид $\mathrm{Exp}\,(L) \cap V$, где V — открытая окрестность единицы E в банаховой алгебре $\mathbf{A}$, поэтому

$$\exp(L \cap U(q)) \cap V \subset \mathrm{Exp}\,(L) \cap V.$$

Но множество $\exp(L \cap U(q)) \cap V$ — открытая окрестность единицы в группе $\mathrm{Expm}\,(L)$, ибо на подмножестве $W(L,q) \subset \mathrm{Expm}\,(L)$ наследственная топология и топология многообразия совпадают. Мы убедились что тождественное отображение $f : Expm(L) \to \mathrm{Exph}\,(L)$ непрерывно в единице, то есть является инъективным непрерывным представлением топологической группы $\mathrm{Expm}\,(L)$ на топологическую группу $\mathrm{Exph}\,(L)$. Вопрос о том, когда обратное отображение f^{-1} непрерывно, то есть f изоморфизм и топологические группы $\mathrm{Expm}\,(L)$ и $\mathrm{Exph}\,(L)$ совпадают мы рассмотрим в следующем пункте.

Применим теперь глобализацию свойств топологической группы. Для замкнутой алгебры Ли $L \subset \mathbf{A}$ и числа $q \in]0, \frac{1}{2}]$ множество $L \cap U(q)$ гомеоморфно множеству $\exp(L \cap U(q))$, являющемуся открытой окрестностью единицы топологической группы $\mathrm{Expm}\,(L)$. Формула (10.3.45) и лемма 10.3.3 влекут связность топологической группы $\mathrm{Expm}\,(L)$. Замкнутая окрестность единицы $\exp(L \cap U[q])$, $q \in]0, \frac{1}{2}]$, топологической группы $\mathrm{Expm}\,(L)$ гомеоморфна множеству $L \cap U[q] \subset \mathbf{A}$, поэтому по лемме 10.3.4 топологическая группа $\mathrm{Expm}\,(L)$ полна, метризуема, связна, локально связна и локально-односвязна. Если L — сепарабельное множество, то и $\mathrm{Expm}\,(L)$ сепарабельная топологическая группа. Если L — конечномерное множество, то топологическая группа $\mathrm{Expm}\,(L)$ локально-компактна и σ -компактна.

В §10.2 вывод 10.2.3 мы убедились, что для банаховой алгебры $\mathbf{A}$ всегда $\exp(\mathbf{A}) \subset \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$, но равенство $\exp(\mathbf{A}) = \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ для банаховой алгебры $\mathbf{A} = M(2, \mathbf{R})$ не имеет места. Однако для любой банаховой алгебры $\mathbf{A}$ верно $\mathrm{Exp}\,(\mathbf{A}) = \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$, ибо множество $\exp(U(\frac{1}{2})) \subset GK_e(\mathbf{A})$ есть открытая окрестность единицы группы связной группы $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$, поэтому $\mathrm{Exp}\,(\mathbf{A}) = (\exp(U(\frac{1}{2})))^\infty = \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$.

10.3.6 Вложение группы $\mathrm{Exp}\,(L)$ в банахову алгебру A.

Далее в этом параграфе L замкнутая алгебра Ли банаховой алгебры $\mathbf{A}$. Нас интересует тождественное вложение множества $\mathrm{Exp}\,(L)$ в банахову алгебру $\mathbf{A}$. Группа $\mathrm{Exp}\,(L) = (W(L,q))^\infty$ согласно п. 10.3.2 удовлетворяет соотношению

$$\mathrm{Exp}\,(L) = \mathrm{Exp}\,(L) W(L,q) = \bigcup_{A \in \mathrm{Exp}\,(L)} AW(L,q), \tag{10.3.46}$$

то есть является объединением кусков вида $AW(L,q)$, аналитически гомеоморфных множеству $L \cap U(q) \subset \mathbf{A}$. Нас интересует как происходит сложение этих кусков. Могут ли быть касания или самопересечения? Как много таких кусков находится в окрестности фиксированного элемента $A \in \mathrm{Exp}\,(L)$? Для ответа на эти вопросы достаточно рассмотреть окрестность единичного элемента $E \in \mathrm{Exp}\,(L)$, ибо для любого $A \in \mathrm{Exp}\,(L)$ отображение $L_A : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ вида $L_A(B) \equiv AB; B \in \mathbf{A}$ есть одновременно гомеоморфизм банаховой алгебры $\mathbf{A}$ на банахову алгебру $\mathbf{A}$ и гомеоморфное представление топологических групп $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$, $\mathrm{Exph}\,(L)$ и $\mathrm{Expm}\,(L)$ на себя.

Теорема 10.3.5 *Если $L \subset \mathbf{A}$ замкнутая алгебра Ли, число $q \in]0, \frac{1}{2}]$, элементы A_1, A_2 принадлежат группе* $\exp(L)$ *и $A_3 \in A_1 W(L,q) \cap A_2 W(L,q)$, то существует открытая окрестность V точки A_3 в банаховой алгебре $\mathbf{A}$ и число $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]$, что*

$$(A_1 W(L,q)) \cap V = (A_2 W(L,q)) \cap V = A_3 W(L,\varepsilon). \tag{10.3.47}$$

Доказательство. Так как $A_3 \in A_i W(L,q)$, $i \in \overline{1,2}$, то существуют элементы $B_i \in W(L,q)$, $i \in \overline{1,2}$, что

$$A_3 = A_1 B_1 = A_2 B_2 \tag{10.3.48}$$

Если элементы $B_i \in W(L,q) = \exp(L \cap U(q))$, то для них однозначно определены логарифмы $X_i = \ln(B_i)$, так что $X_i \in L \cap U(q)$ и $B_i = \exp(X_i)$, $i \in \overline{1,2}$. Так как X_1 и X_2 внутренние точки шара $U(q)$, то существует число $\varepsilon \in]0,q]$, что верно

$$\forall I \in \overline{1,2} \;\Big|\; H(U(\varepsilon), X_i) \subset U(q) \tag{10.3.49}$$

и функции $H(A, X_i), H(A, -X_i)$, $i \in \overline{1,2}$, взаимно однозначны и непрерывны по первому аргументу при $A \in U(\varepsilon)$ (утверждение 10.1.2) и переводит элементы алгебры Ли L в элементы алгебры Ли L (утверждение 10.1.3).

Из (10.3.49), применяя экспоненциальную функцию, получаем

$$\forall i \in \overline{1,2} \;\Big|\; A_3 W(\varepsilon) \subset A_i W(q) \tag{10.3.50}$$

и далее

$$\forall i \in \overline{1,2} \;\Big|\; A_3 W(\varepsilon) \subset A_i W(q). \tag{10.3.51}$$

Открытое множество $V \equiv A_3 W(\varepsilon)$ есть открытая окрестность точки A_3 в банаховой алгебре $\mathbf{A}$. Рассмотрим при $i \in \overline{1,2}$ пересечение

$$A_i W(L,q) \cap V = A_i W(L,q) \cap A_i B_i W(\varepsilon) = A_i \left(W(L,q) \cap B_i W(\varepsilon) \right). \tag{10.3.52}$$

В силу включения (10.3.50) для элементов множества $B_i W(\varepsilon)$ определен и взаимно однозначен логарифм, поэтому

$$W(L,q) \cap (B_i W(\varepsilon)) = \exp\left((L \cap U(q)) \cap H(U(\varepsilon), X_i) \right). \tag{10.3.53}$$

В силу (10.3.49) в последнем соотношении получаем

$$W(L,q) \cap (B_i W(\varepsilon)) = \exp(L \cap H(U(\varepsilon), X_i)). \tag{10.3.54}$$

Но отображение $H(A, X_i)$ и обратное к нему $H(A, -X_i)$ взаимно-однозначно и переводит элементы A из алгебры Ли L в элементы из алгебры Ли L, поэтому из (10.3.54) следует

$$W(L,q) \cap B_i W(\varepsilon) = \exp\left(H(L \cap U(\varepsilon), X_i) \right) = B_i W(L, \varepsilon). \tag{10.3.55}$$

Подставляя соотношение (10.3.55) в (10.3.52), получаем при $i \in \overline{1,2}$

$$A_i W(L,q) \cap V = A_i W(L, \varepsilon). \quad \diamondsuit$$

Мы видим, что если множества $A_1 W(L,q)$ и $A_2 W(L,q)$ имеют общую точку A_3, то они совпадают в некоторой окрестности $V \subset \mathbf{A}$, этой точки, то есть кусочки многообразия вида $A_i W(L,q)$ не могут иметь ни точек пересечения, ни точек касания как подмножества в банаховой алгебре $\mathbf{A}$.

На второй из поставленных в начале этого пункта вопросов отвечает следующая теорема.

Теорема 10.3.6 *Пусть* $\mathbf{A}$ *— сепарабельная банахова алгебра и* $L \subset \mathbf{A}$ *замкнутая алгебра Ли, тогда следующие утверждения эквивалентны:*

I. Топология многообразия и наследственная топология на группе $\mathrm{Exp}\,(L)$ *совпадают, то есть* $\mathrm{Expm}\,(L) = \mathrm{Exph}\,(L)$.

II. $\mathrm{Exp}\,(L) \subset \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ *замкнутая подгруппа топологической группы* $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$.

III. $\overline{\mathrm{Exp}\,(L)} \cap \mathrm{GL}_e(\mathbf{A}) = \mathrm{Exp}\,(L)$, *где черта сверху означает замыкание множества в банаховой алгебре* $\mathbf{A}$.

IV. Существует число $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]$, *что* $\exp(L \cap U(\varepsilon)) = \mathrm{Exp}\,(L) \cap \exp(U(\varepsilon))$.

Доказательство. Согласно заключительной части предыдущего пункта $\mathrm{Expm}\,(L)$ и $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ в условиях теоремы 10.3.6 есть сепарабельные полные метризуемые топологические группы. Тождественное вложение $f : \mathrm{Expm}\,(L) \to \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ есть инъективное непрерывное представление. Согласно следствию 10.3.4 утверждения I и II эквивалентны. Доказано $I \Leftrightarrow II$.

$II \Leftrightarrow II$. Так как топология на $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A}) \subset \mathbf{A}$ есть наследственная топология из $\mathbf{A}$.

$I \Leftrightarrow IV$. Множество $W(L, q)$ является открытым подмножеством топологической группы $\mathrm{Expm}\,(L)$. Если выполнено предположение I, то множество $W(L, q)$ есть также открытое подмножество топологической группы $\mathrm{Exph}\,(L)$. Но топология на топологической группе $\mathrm{Exph}\,(L) \subset \mathbf{A}$ есть наследственная топология из банаховой алгебры $\mathbf{A}$, поэтому существует открытое множество V в банаховой алгебре $\mathbf{A}$, что $W(L, q) = \mathrm{Exp}\,(L) \cap V$. Отображение $\exp : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ непрерывно и поэтому существует число $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]$, что $\exp(U(\varepsilon)) \subset V$. Тогда получаем

$$W(L, q) \cap \exp(U(\varepsilon)) = \mathrm{Exp}\,(L) \cap \exp(U(\varepsilon)). \tag{10.3.56}$$

Так как отображение $\exp|_{U(q)} : U(q) \to W(q)$ взаимно-однозначно, то

$$W(L, q) \cap \exp(U(\varepsilon)) = \exp(L \cap U(q)) \cap \exp(U(\varepsilon)) = \exp(L \cap U(\varepsilon)). \tag{10.3.57}$$

Соотношения (10.3.56, 10.3.57) доказывают следование $I \to IV$.

$IV \to I$. Если выполнено утверждение IV, то будет выполнено и утверждение

$$\forall \delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \;\Big|\; \exp(L \cap U(\delta)) = \mathrm{Exp}\,(L) \cap \exp(U(\delta)). \tag{10.3.58}$$

Но множества $\{\exp(L \cap U(\delta))\}_{\delta \in]0,\varepsilon]}$ образуют базис фильтра окрестностей единицы топологической группы $\mathrm{Expm}\,(L)$, а множества $\{\mathrm{Exp}\,(L) \cap \exp(U(\delta))\}_{\delta \in]0,\varepsilon]}$ образуют базис фильтра окрестностей единицы топологической группы $\mathrm{Exph}\,(L)$. Итак, топология многообразия и наследственная топология на группе $\mathrm{Exp}\,(L)$ совпадают.

Мы доказали следования $IV \Leftrightarrow I \Leftrightarrow II \Leftrightarrow III$, откуда вытекает справедливость теоремы. $\diamondsuit$

Группу Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$, удовлетворяющую условию $\mathrm{Expm}\,(L) = \mathrm{Exph}\,(L)$ назовём *замкнутой.*

Если топологическая группа $\mathrm{Expm}\,(L)$ компактна, то в силу непрерывности тождественного отображения $Id : Exprm(L) \to \mathrm{Exph}\,(L)$ оно будет гомеоморфизмом и $\mathrm{Expm}\,(L) = \mathrm{Exph}\,(L)$. Кроме того, топологическая группа $\mathrm{Exph}\,(L)$ будет компактна, и следовательно, замкнута в объемлющей топологической группе $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$. Итак, *компактная* группа Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$ *замкнута.*

Компактность топологической группы $\mathrm{Expm}\,(L)$ и компактность топологической группы эквивалентны для случая сепарабельной банаховой алгебры $\mathbf{A}$. В самом деле, если топологическая группа $\mathrm{Expm}\,(L)$ компактна, то и топологическая группа $\mathrm{Exph}\,(L)$ компактна, как непрерывный образ компактной группы $\mathrm{Exph}\,(L) = Id\,(\,\mathrm{Expm}\,(L))$. Наоборот, если топологическая группа $\mathrm{Exph}\,(L)$ компактна, то она замкнута в объемлющей топологической группе $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ и по теореме 10.3.6 топологические группы $\mathrm{Expm}\,(L)$ и $\mathrm{Expm}\,(L)$ совпадают.

Если топологическая группа $\mathrm{Expm}\,(L)$ компактна, то в силу следствия 10.3.3 существует натуральное число $n \in \mathbf{N}$, что $(\exp(L))^n = \mathrm{Exp}\,(L)$, т.е. любой элемент $a \in \mathrm{Expm}\,(L)$ представим в виде произведения фиксированного числа n сомножителей вида $a = \exp(x_n)\ldots\exp(x_2)\exp(x_1)$, где $x_i \in L$ при всех $i \in \overline{1,n}$.

10.3.7 Незамкнутые группы Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$.

Незамкнутые группы Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$ по определению те, для которых отображение f^{-1}, обратное к тождественному отображению $f = Id : \mathrm{Expm}\,(L) \to \mathrm{Exph}\,(L)$ разрывно. Так как $f : \mathrm{Expm}\,(L) \to \mathrm{Exph}\,(L)$ непрерывное инъективное представление топологической группы $\mathrm{Expm}\,(L)$ на метрическую топологическую группу $\mathrm{Exph}\,(L)$, то согласно утверждению 10.3.4 группа Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$ незамкнута тогда и только тогда, когда верно утверждение

$$\exists \varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \;\Big|\; \rho\,(E, \mathrm{Exp}\,(L) \setminus \exp(L \cap U(\varepsilon))) = 0, \qquad (10.3.59)$$

где метрика ρ берётся в банаховой алгебре $\mathbf{A}$.

Пусть теперь алгебра Ли $L \subset \mathbf{A}$ конечномерна, тогда топологическая группа $\mathrm{Expm}\,(L)$ локально компактна в силу п. 10.3.5 и применима теорема 10.3.3. Поэтому верно следующее утверждение.

Утверждение 10.3.8 *Если $L \subset \mathbf{A}$ конечномерная алгебра Ли и группа Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$ незамкнута, то для любого числа $p \in \mathbf{R}_+$ существует последовательность $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ элементов группы $\mathrm{Expm}\,(L)$, такая что:*

$$\begin{array}{l} 1)\ \forall m \in \mathbf{N} \mid |E - A_{m+1}| < \frac{1}{2}\,|E - A_m|\,; \\ 2)\ \forall m \in \mathbf{N} \mid K \cap A_m K = \emptyset; \\ 3)\ \forall m \in \mathbf{N}\ \forall r \in \mathbf{N}, r \neq m \mid A_m K \cap A_r K = \emptyset; \end{array}$$

где $K = \exp(L \cap U[p])$.

Таким образом, для незамкнутых групп Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$ кусочки группы Ли вида $A_m \exp(L \cap U[p]) \subset \mathrm{Expm}\,(L)$ подходят в алгебре $\mathbf{A}$ сколь угодно близко к кусочку $\exp(L \cap U[p])$ не пересекая его и друг друга. Мы показали что пример 10.3.3 демонстрирует характеристическое свойство незамкнутых конечномерных групп Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$.

10.3.8 Одно свойство подгруппы, всюду плотной в окрестности единицы. Добавим к лемме 10.3.4 о глобализации следующее утверждение.

Утверждение 10.3.9 *Пусть G — связная топологическая группа и $G' \subset G$ её алгебраическая подгруппа. Если существует окрестность единицы $U \subset G$ топологической группы G, в которой подгруппа G' всюду плотна, то подгруппа G' всюду плотна в топологической группе G.*

Доказательство. По условию существует открытая окрестность единицы $V \subset U$ в которой подгруппа G' всюду плотна. По лемме 10.3.2 множества $(V \cap G')^n \subset V^n$ плотны в открытых множествах V^n при $n \in \mathbf{N}$. По следствию 10.3.2 объединение множеств $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(V \cap G')^n \subset G'$ всюду плотно в объединении множеств $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V^n = G$. $\diamondsuit$

10.3.9 Алгебраические свойства оператора подобия.

Пусть элемент $A \in \mathrm{GL}(\mathbf{A})$ и $P_A : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ оператор подобия, определённый в пункте 10.2.8. Отметим следующие его свойства.

Утверждение 10.3.10 *Пусть $G \in \mathrm{GL}(\mathbf{A})$ подгруппа группы $\mathrm{GL}(\mathbf{A})$ по умножению. Тогда, если элемент $A \in G$, то справедливы равенства*

$$P_A(G) = G, \tag{10.3.60}$$

$$P_A(\mathrm{GL}(\mathbf{A}) \setminus G) = \mathrm{GL}(\mathbf{A}) \setminus G, \tag{10.3.61}$$

$$P_A(\mathbf{A} \setminus G) = \mathbf{A} \setminus G. \tag{10.3.62}$$

Доказательство. Если $A \in G$ и $X \in G$, то $AXA^{-1} \in G$ по определению подгруппы, т.е. верно включение $P_A(G) \subset G$. Но отображение $P_A : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ есть биекция банаховой алгебры на себя. Обратное отображение $P_{A^{-1}}$ также удовлетворяет включению $P_{A^{-1}}(G) \subset G$. Доказано равенство (10.3.60). Равенства (10.3.61) и (10.3.62) следуют из равенства (10.3.60) и равенств $P_A(\mathrm{GL}(\mathbf{A})) = \mathrm{GL}(\mathbf{A})$ и $P_A(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$. $\diamondsuit$

Утверждение 10.3.11 *Пусть $L \subset \mathbf{A}$ — замкнутая алгебра Ли и элемент $B \in \mathrm{Exp}(L)$, тогда верно равенство*

$$P_B(L) = L. \tag{10.3.63}$$

Доказательство. Согласно формуле (10.3.32) существует натуральное число n и элементы $A_1, A_2, \dots A_n$ алгебры Ли L, что верно представление $B = \exp(A_n) \dots \exp(A_2)\exp(A_1)$. В силу свойства 2) леммы 10.2.9 для оператора подобия верно представление $P_B = P_{B_n} \dots P_{B_2} P_{B_1}$, где $B_i = \exp(A_i)$, $i \in \overline{1,n}$. Тогда согласно лемме 10.2.10 верны равенства

$$P_B(L) = P_{B_n} \dots P_{B_2} P_{B_1}(L) = P_{B_n} \dots P_{B_2}(L) = \dots = L.$$

$\diamondsuit$

§10.4 Свойства подгрупп группы Ли

В обозначениях и терминологии предыдущего параграфа рассмотрим теперь свойства подгрупп группы Ли $\mathrm{Expm}(L)$. Подгруппа G' топологической группы G обозначает у нас "алгебраическая подгруппы G' алгебраической группы G".

10.4.1 Линейчатые и решётчатые подмножества векторного пространства. В этом пункте V — линейное пространство над полем скаляров $\mathbf{R}$.

Определение 10.4.1 *Подмножество $Q \subset V$ линейчатое (решётчатое), если $\mathbf{R}Q = Q$ ($\mathbf{Z}Q = Q$).*

Всякое линейное подпространство — линейчатое множество и каждое линейчатое множество является решётчатым как следует из определения 10.4.1. Далее в этом пункте обозначим через S множество $\mathbf{R}$ или множество $\mathbf{Z}$. Тогда равенство

$$SQ = Q \tag{10.4.1}$$

при $S = \mathbf{R}$ определение линейчатого множества Q, а при $S = \mathbf{Z}$ — решётчатого множества Q. Так как $1 \in S$, то для любого множества $Q \subset V$ верно $Q \subset SQ$ и условие (10.4.1) эквивалентно условию

$$SQ \subset Q \tag{10.4.2}$$

Линейчатые и решётчатые множества обладают следующими свойствами.

Утверждение 10.4.1 *Объединение и пересечение любого семейства линейчатых (решётчатых) множеств линейчатое (решётчатые) множества.*

Доказательство. Пусть при каждом индексе $\alpha \in I$ верно $SQ_\alpha = Q_\alpha$. Если $a \in \bigcup_{\alpha\in I} Q_\alpha$, то существует индекс $\beta \in I$, что $a \in Q_\beta$. Тогда $Sa \subset SQ_\beta = Q_\beta$ и $Sa \subset \bigcup_{\alpha\in I} Q_\alpha, \alpha \in I$. Поэтому $S(\bigcup_{\alpha\in I} Q_\alpha) \subset \bigcup_{\alpha\in I} Q_\alpha,\ \alpha \in I$. Если $a \in \bigcap_{\alpha\in I} Q_\alpha,\ \alpha \in I$, то $a \in Q_\alpha$ при каждом $\alpha \in I$ и $Sa \subset SQ_\alpha$ при каждом $\alpha \in I$. Поэтому $Sa \subset \bigcap_{\alpha\in I} Q_\alpha,\ \alpha \in I$ и следовательно $S(\cap Q_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha\in I} Q_\alpha$. $\diamondsuit$

Утверждение 10.4.2 *Если A и B линейчатые (решётчатые) множества, то $A+B$ линейчатое (решётчатое) множество.*

Доказательство. Если $a \in A$ и $b \in B$, то $S(a+b) \subset Sa + Sb \subset A + B$. Откуда $S(A+B) \subset A+B$. $\diamondsuit$

Утверждение 10.4.3 *Если множество Q линейчатое, то его линейная оболочка равна*

$$\operatorname{lin}(Q) = Q_\infty \tag{10.4.3}$$

где $Q_1 \equiv Q$, $Q_{n+1} \equiv Q_n + Q_1$, $n \in \mathbf{N}$, $Q_\infty \equiv \bigcup_{n=1}^\infty Q_n$.

Доказательство. По построению $Q_1 = Q \subset \operatorname{lin}(Q)$, $Q_n = Q_1 + Q_1 + \ldots Q_1 \subset \operatorname{lin}(Q) + \operatorname{lin}(Q) + \ldots \operatorname{lin}(Q) = \operatorname{lin}(Q)$ и $Q_\infty \subset \operatorname{lin}(Q)$. Наоборот, если $a \in \operatorname{lin}(Q)$, то существует конечное множество элементов $a_1, a_2, \ldots a_n \in Q$ и чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbf{R}$, что $a = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i a_i$. Но $\lambda_i a_i \in Q$, поэтому $a \in Q_n$ и $a \in Q_\infty$. Итак, $\operatorname{lin}(Q) \subset Q_\infty$. $\diamondsuit$

Далее в этом пункте $V \equiv \mathbf{A}$ банахова алгебра над полем Λ ($\Lambda = \mathbf{R}$ или $\Lambda = \mathbf{C}$).

Утверждение 10.4.4 *Если одно из множеств A или B линейчатое (решётчатое), то множество $[A, B]$ линейчатое (решётчатое).*

Доказательство. Если $SA = A$, то $S[A, B] = [Sa, B] = [A, B]$. Аналогично если $SB = B$. $\diamondsuit$

Экспонента $\exp : A \to \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ есть непрерывное отображение. Через $\exp^{-1}(a)$ обозначаем полный прообраз точки $a \in \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$.

Утверждение 10.4.5 *Если множество $Q \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ — подгруппа, то множество $\exp^{-1}(Q) \subset \mathbf{A}$ решётчатое.*

Доказательство. Если $x \in \exp^{-1}(Q)$, то $\exp(x) \in G$. Тогда при $n \in \mathbf{Z}$ верно $\exp(nx) = (\exp(x))^n \in G$. Итак, $\mathbf{Z}\exp^{-1}(Q) \subset \exp^{-1}(Q)$. $\diamondsuit$

10.4.2 Алгебра Ли, порождённая множеством.

Если каждое из множеств семейства $\{Q_\alpha\}_{\alpha \in I}$: 1) замкнуто, 2) является линейным подпространством, 3) является алгеброй Ли, 4) является замкнутой алгеброй Ли, то и их пересечение обладает соответствующим свойством. Поэтому для любого подмножества $Q \subset \mathbf{A}$ существует наименьшее множество, его содержащее, обладающее свойствами 1) – 4) и обозначается нами соответственно: 1) $\bar{Q}$ — замыкание множества Q; 2) $\mathrm{lin}\,(Q)$ — вещественная линейная оболочка множества Q или линейное пространство, порождённое Q; 3) $\mathrm{ali}\,(Q)$ — алгебра Ли, порождённое Q; 4) $\overline{\mathrm{ali}}\,(Q)$ — замкнутая алгебра Ли, порождённое Q. Итак, в банаховой алгебре $\mathbf{A}$ мы определили 4 операции, применяемые к каждому подмножеству $Q \subset \mathbf{A}$. Все эти операции монотонны, т.е. если $Q_1 \subset Q_2$, то: 1) $\overline{Q_1} \subset \overline{Q_2}$; 2) $\mathrm{lin}\,(Q_1) \subset \mathrm{lin}\,(Q_2)$; 3) $\mathrm{ali}\,(Q_1) \subset \mathrm{ali}\,(Q_2)$; 4) $\overline{\mathrm{ali}}\,(Q_1) \subset \overline{\mathrm{ali}}\,(Q_2)$. Введённые операции обладают следующими двумя свойствами.

Утверждение 10.4.6 *Замыкание любой алгебры Ли есть алгебра Ли.*

Доказательство. Пусть $L \subset \mathbf{A}$ непустая алгебра Ли и $\bar{L} \subset \mathbf{A}$ её замыкание. Так как замыкание вещественного линейного подпространства есть вещественное линейное подпространство, то остается лишь проверить, что для любых двух элементов $a, b \in \bar{L}$ их коммутатор $[a, b] \in \bar{L}$. Существуют последовательности элементов $a_n \in L$ и $b_n \in L$, что $\lim\limits_{n\to\infty} |a - a_n| = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |b - b_n| = 0$. Тогда $[a_n, b_n] \in L$ по условию при каждом $n \in \mathbf{N}$. В силу непрерывной зависимости коммутатора $[a, b]$ в банаховой алгебре A от элементов $a, b \in \mathbf{A}$ будет $\lim\limits_{n\to\infty}[a_n, b_n] = [a, b]$. Итак $[a, b] \in \bar{L}$. $\diamondsuit$

Утверждение 10.4.7 *Для любого множества $Q \subset \mathbf{A}$ верно*

$$\overline{\mathrm{ali}\,(Q)} = \overline{\mathrm{ali}}\,(Q) = \overline{\mathrm{ali}}\,(\bar{Q}). \tag{10.4.4}$$

Доказательство. Используем монотонность следующих операций над множеством $Q \subset \mathbf{A}$: взятия замыкания $\bar{Q}$, взятия линейной оболочки $\mathrm{lin}\,(Q)$, взятия наименьшей алгебры Ли $\mathrm{ali}\,(Q)$, содержащей множество Q, взятия наименьшей замкнутой алгебры Ли $\overline{\mathrm{ali}}\,(Q)$, содержащей множество Q, Из включения

$$Q \subset \overline{\mathrm{ali}\,(Q)}$$

следует

$$\overline{\mathrm{ali}}\,(Q) \subset \overline{\mathrm{ali}}\left(\overline{\mathrm{ali}\,(Q)}\right).$$

Но по утверждению 10.4.6 $\overline{\mathrm{ali}\,(Q)}$ — замкнутая алгебра Ли и поэтому $\overline{\mathrm{ali}}\left(\overline{\mathrm{ali}\,(Q)}\right) = \overline{\mathrm{ali}\,(Q)}$. Получаем включение

$$\overline{\mathrm{ali}}\,(Q) \subset \overline{\mathrm{ali}\,(Q)}. \tag{10.4.5}$$

Из включения $Q \subset \overline{\text{ali}}\,(Q)$ следует

$$\overline{\text{ali}\,(Q)} \subset \overline{\text{ali}\,\left(\overline{\text{ali}\,(Q)}\right)} = \overline{\overline{\text{ali}}\,(Q)} = \overline{\text{ali}}\,(Q). \qquad (10.4.6)$$

Из (10.4.5 − −10.4.6) следует $\overline{\text{ali}\,(Q)} = \overline{\text{ali}}\,(Q)$.

Так как $Q \subset \bar{Q}$, то $\overline{\text{ali}}\,(Q) \subset \overline{\text{ali}}\,(\bar{Q})$. Но $Q \subset \overline{\text{ali}}\,(Q)$ поэтому $Q \subset \overline{\overline{\text{ali}}\,(Q)} = \overline{\text{ali}}\,(Q)$ и $\overline{\text{ali}}\,(\bar{Q}) \subset \overline{\text{ali}}\,(\overline{\text{ali}}\,(Q)) = \overline{\text{ali}}\,(\bar{Q})$. Поэтому $\overline{\text{ali}}\,(Q) = \overline{\text{ali}}\,(Q)$. $\diamondsuit$

10.4.3 Свойства логарифма подгруппы.

В этом пункте $L \subset \mathbf{A}$ замкнутая алгебра Ли, $G \subset \text{GL}\,(\mathbf{A})$ подгруппа и

$$L_G \equiv L \cap \exp^{-1}(G). \qquad (10.4.7)$$

Согласно утверждению 10.4.5 и утверждению 10.4.1 множество $L_G \subset \mathbf{A}$ решётчатое. Через $\overline{L_G} \subset \mathbf{A}$ обозначаем его замыкание в банаховой алгебре $\mathbf{A}$. В силу замкнутости множества L верно включение $\overline{L_G} \subset L$.

Лемма 10.4.1 *Если $\overline{L_G} \subset A \cup B$ и множества $A \subset \mathbf{A}$ и $B \subset \mathbf{A}$ линейчатые, то*

$$\overline{L_G} \supset A + B, \overline{L_G} \supset [A, B].$$

Доказательство. Пусть $a \in A$, $b \in B$ и $a \neq 0$, $b \neq 0$. Существует натуральное число N, такое что при $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ выполнены неравенства

$$\left|\frac{a}{n}\right| < \frac{1}{12}, \quad \left|\frac{b}{n}\right| < \frac{1}{12}. \qquad (10.4.8)$$

Так как множество A и B линейчатые, то $\frac{a}{b} \in A$ и $\frac{b}{n} \in B$. Так как замыкание множества L_G содержит множество $A \cup B$, то при каждом $n \in \mathbf{N}$ найдутся точки $a'_n \in L_G$ и $b'_n \in L_G$, что

$$\left|a'_n - \frac{a}{n}\right| < \frac{|a|}{n^3}, \left|b'_n - \frac{b}{n}\right| < \frac{|b|}{n^3}. \qquad (10.4.9)$$

В силу (10.4.9) при $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ верны неравенства

$$\begin{array}{c} |a'_n| \leq |a| \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right) \leq \frac{2|a|}{n} < \frac{1}{6}, \\ |b'_n| \leq |b| \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right) \leq \frac{2|b|}{n} < \frac{1}{6}. \end{array} \qquad (10.4.10)$$

В силу (10.4.9) верны соотношения

$$\lim_{n\to\infty} na'_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} nb'_n = b. \qquad (10.4.11)$$

Докажем теперь, что $(a + b) \in \overline{L_G}$. Согласно неравенствам (10.4.10) и теореме 10.1.1 существует при $n \geq N$ величина $H(a'_n, b'_n) \in L$, ибо L замкнутая алгебра Ли, и верно

$$\exp(H(a'_n, b'_n)) = \exp(b'_n) \exp(a'_n). \qquad (10.4.12)$$

Так как $a'_n \in L_G$ и $b'_n \in L_G$, то $\exp(a'_n) \in G$ и $\exp(b'_n) \in G$, но множество $G \subset \text{GL}\,(\mathbf{A})$ подгруппа, поэтому и произведение $\exp(b'_n) \exp(a'_n)) \in G$. Последнее в силу (10.4.12) означает, что

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq N \;\Big|\; H(a'_n, b'_n) \in L_G. \qquad (10.4.13)$$

Множество L_G решётчатое в силу утверждений 10.4.5 и 10.4.1, поэтому

$$\forall n \in \mathbf{N}, b \geq N \;\Big|\; nH(a'_n, b'_n) \in L_G. \tag{10.4.14}$$

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} nH(a'_n, b'_n). \tag{10.4.15}$$

Для этого применим оценку леммы 10.1.3 при $k \in \mathbf{N}$

$$|H_k(a'_n, b'_n)| \leq \frac{1}{k}(|a'_n| + |b'_n|)^k \leq \frac{1}{k}\left(\frac{2(|a|+|b|)}{n}\right)^k. \tag{10.4.16}$$

В силу (10.4.16)

$$\left|\sum_{k=2}^{\infty} H_k(a'_n, b'_n)\right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{2(|a|+|b|)}{n}\right)^k \leq \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{2(|a|+|b|)}{n}\right)^2}{\left(1-\frac{2(|a|+|b|)}{n}\right)}. \tag{10.4.17}$$

Поэтому в силу (10.4.17)

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=2}^{\infty} H_k(a'_n, b'_n)\right) = 0.$$

и

$$\lim_{n\to\infty} nH(a'_n, b'_n) = \lim_{n\to\infty} n\left(H_1(a'_n, b'_n) + \sum_{k=2}^{\infty} H_k(a'_n, b'_n)\right) =$$

$$\lim_{\infty} nH_1(a'_n, b'_n) = \lim_{n\to\infty} n(a'_n + b'_n) = a + b.$$

Так как $nH(a'_n, b'_n) \in L_G$ при всех $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$, то $(a+b) \in \overline{L_G}$.

Покажем теперь, что и $[a, b] \in \overline{L_G}$.

По теореме 10.1.1 и в силу неравенств (10.4.10) при $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ определена функция Хаусдорфа $H(-b'_n, -a'_n, b'_n, a'_n)$ и верно

$$\exp(H(-b'_n, -a'_n, b'_n, a'_n)) = \exp(a'_n)\exp(b'_n)\exp(-a'_n)\exp(-b'_n). \tag{10.4.18}$$

Так как точки $a'_n, b'_n \in L_G$,то $a'_n, b'_n \in L$. Но L — замкнутая алгебра Ли и в силу теоремы 10.1.1 тогда и $H(-b'_n, -a'_n, b'_n, a'_n) \in L$. Точки $a'_n, b'_n \in \exp^{-1}(G)$, поэтому правая часть (10.4.18) принадлежит группе G. Итак, $H(-b'_n, -a'_n, b'_n, a'_n) \in L_G$. А так как L_G — решётчатое множество, то

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq N \;\Big|\; n^2 H(-b'_n, -a'_n, b'_n, a'_n) \in L_G. \tag{10.4.19}$$

Согласно лемме 10.1.3 верно при $k \in \mathbf{N}$

$$|H_k(-b'_n, -a'_n, b'_n, a'_n)| \leq \frac{1}{k}(2|a'_n| + 2|b'_n|)^k \leq \frac{1}{k}\left(\frac{4(|a|+|b|)}{n}\right)^k. \tag{10.4.20}$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sum_{k=3}^{\infty} H_k(-b'_n, -a'_n, b'_n a'_n)\right) = 0. \tag{10.4.21}$$

По формулам (10.1.32) и (10.1.34)

$$n^2 H_1(-b'_n, -a'_n, b'_n, a'_n) = n^2(a'_n + b'_n - a'_n - b'_n) = 0 \tag{10.4.22}$$

и

$$n^2 H_2(-b'_n, -a'_n, b'_n, a'_n) = n^2[a'_n, b'_n] = [na'_n, nb'_n]. \qquad (10.4.23)$$

В силу (10.4.21-10.4.23) и (10.4.11) верно

$$\lim_{n\to\infty} n^2 H(-b'_n, -a'_n, b'_n, a'_n) = \lim_{n\to\infty} [na'_n, nb'_n] = [a, b].$$

Так как $n^2 H(-b'_n, -a'_n, b'_n, a'_n) \in L_G$ при $n \geq N$, то предел $[a, b] \in \overline{L_G}$.

Из доказанного вытекает следующая лемма.

Лемма 10.4.2 *Если $L \subset \mathbf{A}$ замкнутая алгебра Ли, $G \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ подгруппа, $F \subset \mathbf{A}$ линейчатое множество и $\overline{L \cap \exp^{-1}(G)} \supset F$, то $\overline{L \cap \exp^{-1}(G)} \supset \overline{\mathrm{ali}}\,(F)$.*

Доказательство. Обозначим $L_G \equiv L \cap \exp^{-1}(G)$. Введём множество $Q \subset \overline{L_G}$, как объединение всех линейчатых подмножеств $Q_\alpha \subset \overline{L_G}$. Согласно утверждению 10.4.1 множество Q линейчатое. В случае пустого множества F лемма 10.4.1 тривиально верна, поэтому рассматриваем далее случай $F \neq \emptyset$, тогда линейчатое множество F содержит нуль и $Q \supset F \ni 0$.

Множество $Q + Q \supset Q$, ибо $0 \in Q$ и является линейчатым по утверждению 10.4.2. По лемме 10.4.1 из $\overline{L_G} \supset Q$ следует $\overline{L_G} \supset Q + Q$. Но множество Q — наибольшее линейчатое подмножество, содержащееся в $\overline{L_G}$, поэтому $Q + Q = Q$. Поэтому Q — вещественное линейное подпространство по утверждению 10.4.3. Согласно лемме 10.4.1 имеем $[Q, Q] \subset \overline{L_G}$ и множество $[Q, Q]$ линейчатое, поэтому $[Q, Q] \subset Q$. Итак, множество Q — алгебра Ли. Из включения $\overline{L_G} \supset Q$ следует, что $\overline{L_G} \supset \bar{Q}$, но замыкание алгебры Ли алгебра Ли и, в частности, линейчатое множество. Итак, $\bar{Q} \subset Q$, то есть множество Q замкнуто и является замкнутой алгеброй Ли.

Мы убедились, что для замкнутой алгебры Ли Q справедливы включения $\overline{L_G} \supset Q \supset F$, откуда следует, что $\overline{L_G} \supset Q \supset \overline{\mathrm{ali}}\,(F)$. $\diamondsuit$

Дадим теперь критерий плотности подгруппы в группе Ли.

Лемма 10.4.3 *Пусть $L \subset \mathbf{A}$ замкнутая алгебра Ли, $G \subset \mathrm{Expm}\,(L)$ подгруппа, тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) подгруппа G всюду плотна в топологической группе $\mathrm{Expm}\,(L)$;

2) множество $L \cap \exp^{-1}(G)$ всюду плотно в L;

3) существует окрестность нуля вида $L \cap U(\delta)$, $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$ в L, в которой множество $L \cap \exp^{-1}(G)$ всюду плотно;

4) существует окрестность единицы в топологической группе $\mathrm{Expm}\,(L)$ вида $\exp(L \cap U(\delta))$, $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, в которой группа G всюду плотна.

Доказательство. Согласно утверждению 10.3.1 утверждения 1) и 4) эквивалентны.

2) $\Rightarrow$ 3). Очевидно.

3) $\Rightarrow$ 4). Так как на множестве $L \cap U(\delta)$ отображение exp гомеоморфизм, то $\exp((L \cap U(\delta)) \cap (L \cap \exp^{-1}(G))) \subset \exp(L \cap U(\delta)) \cap G$ и переводит всюду плотное подмножество в $L \cap U(\delta)$ во всюду плотное подмножество в $\exp(L \cap U(\delta))$. Наоборот, прообраз всюду плотного в $\exp(L \cap U(\delta))$ подмножества $\exp(L \cap U(\delta)) \cap G$ есть всюду плотное в $L \cap U(\delta)$ подмножество

$$\exp^{-1}(\exp(L \cap U(\delta)) \cap G) = (L \cap U(\delta)) \cap \exp^{-1}(G) = (L \cap U(\delta)) \cap (L \cap \exp^{-1}(G)).$$

3) $\Rightarrow$ 2). Множество $L_G \equiv L \cap \exp^{-1}(G)$ решётчатое по утверждениям 10.4.5 и 10.4.1. Если множество $L_G \cap (L \cap U(\delta))$ всюду плотно в $(L \cap U(\delta))$, то при любом $n \in \mathbf{N}$ множество $n(L_G \cap (L \cap U(\delta))) = L_G \cap (L \cap U(n\delta))$ всюду плотно в $n(L \cap U(\delta)) = L \cap U(n\delta)$. Поэтому L_G всюду плотно в L. $\diamondsuit$

10.4.4 Наименьшая группа, содержащая объединение групп Ли.

Пусть задано некоторое семейство замкнутых алгебр Ли $L_\alpha \subset \mathbf{A}$, $\alpha \in I$ и соответствующее семейство групп Ли $\{\operatorname{Expm}(L_\alpha)\}_{\alpha \in I}$. Рассмотрим группу $\operatorname{gr}\left(\bigcup\limits_{\alpha \in I} \operatorname{Exp}(L_\alpha)\right) \subset \operatorname{GL}_e(\mathbf{A})$, порожденную подмножеством элементов $\bigcup\limits_{\alpha \in I} \operatorname{Exp}(L_\alpha) \subset \operatorname{GL}_e(\mathbf{A})$. Введём замкнутую алгебру Ли $\overline{\operatorname{ali}}(\bigcup\limits_{\alpha \in I} L_\alpha) \equiv L$ и соответствующую группу Ли $\operatorname{Expm}(L)$. По построению $\operatorname{Exp}(L) \supset \operatorname{Exp}(L_\alpha)$ при каждом $\alpha \in I$, поэтому

$$\operatorname{Exp}(L) \supset \operatorname{gr}\left(\bigcup_{\alpha \in I} \operatorname{Exp}(L_\alpha)\right). \tag{10.4.24}$$

Лемма 10.4.4 *Для любого семейства замкнутых алгебр Ли* $\{L_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *группа* $\operatorname{gr}\left(\bigcup\limits_{\alpha \in I} \operatorname{Exp}(L_\alpha)\right)$ *всюду плотна в топологической группе* $\operatorname{Expm}\left(\overline{\operatorname{ali}}\left(\bigcup\limits_{\alpha \in I} L_\alpha\right)\right)$.

Доказательство. Обозначим $L \equiv \overline{\operatorname{ali}}(\bigcup\limits_{\alpha \in I} L_\alpha)$, $G \equiv \operatorname{gr}(\bigcup\limits_{\alpha \in I} \operatorname{Exp}(L_\alpha))$, $F \equiv \bigcup\limits_{\alpha \in I} L_\alpha$. Каждое из множеств L_α линейчатое, поэтому по утверждению 10.4.1 множество F линейчатое. По построению при каждом $\alpha \in I$ верно включение $G \supset \exp(L_\alpha)$. поэтому множество $L_G \equiv L \cap \exp^{-1}(G) \supset F$. Согласно лемме 10.4.3 группа G всюду плотна в топологической группе $\operatorname{Expm}(L)$. $\diamondsuit$

Следствие 10.4.1 *В топологической группе* $\operatorname{GL}_e(\mathbf{A})$ *замыкания подгрупп* $\operatorname{gr}(\bigcup\limits_{\alpha \in I} \operatorname{Exp}(L_\alpha))$ *и* $\operatorname{Exp}(\overline{\operatorname{ali}}(\bigcup\limits_{\alpha \in I} L_\alpha))$ *совпадают для любого семейства* $\{L_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *замкнутых алгебр Ли* $L_\alpha \subset \mathbf{A}$.

10.4.5 Непрерывность отображения $\exp|_L : L \to \operatorname{Expm}(L)$.

Экспоненциальное отображение $\exp : \mathbf{A} \to \operatorname{GL}_e(\mathbf{A})$ непрерывно, поэтому для любой замкнутой алгебры Ли $L \subset \mathbf{A}$ сужение $\exp|_L : L \to \operatorname{Exph}(L)$ непрерывное отображение. Останется ли оно непрерывным при замене наследственной топологии на группе $\operatorname{Exp}(L)$ на более сильную топологию многообразия на $\operatorname{Exp}(L)$?

Лемма 10.4.5 *Для замкнутой алгебры Ли* L *отображение* $\exp|_L : L \to \operatorname{Expm}(L)$ *непрерывно.*

Доказательство. Пусть $p \equiv \exp|_L : L \to \operatorname{Expm}(L)$. Сужение $p|_{L \cap U(\frac{1}{2})}$ гомеоморфизм по определению топологии многообразия. Отображение $q_n : L \to L$ вида $q_n(x) = \frac{1}{n}x$ есть гомеоморфизм при каждом $n \in \mathbf{N}$. Справедливо равенство $(pq_n)^n = p$ при $n \in \mathbf{N}$, ибо

$$(pq_n)^n(x) = (p(q_n(x)))^n = \left(p\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = \left(\exp\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = \exp(x) = p(x).$$

Сужение $pq_n|_{U(\frac{n}{2})}$ есть гомеоморфизм как композиция гомеоморфизмов. Отображение $p|_{U(\frac{n}{2})} = (pq_n)^n|_{U(\frac{n}{2})}$ есть непрерывное отображение множества $U(\frac{n}{2})$ в топологическую группу $\operatorname{Expm}(L)$ как произведение n непрерывных отображений. Итак, отображение p непрерывно всюду на L. $\diamondsuit$

10.4.6 Замкнутая связная подгруппа группы Ли.

Размерностью алгебры Ли $L \subset \mathbf{A}$ назовём её размерность как вещественного линейного пространства. Размерностью группы Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$ назовём размерность её алгебры Ли L.

Теорема 10.4.1 *Если* $L \subset \mathbf{A}$ *конечномерная алгебра Ли, и* G *замкнутая связная подгруппа топологической группы* $\mathrm{Expm}\,(L)$*, то существует алгебра Ли* $L' \subset L$*, что* $G = \mathrm{Expm}\,(L')$.

Доказательство. Так как отображение $\exp|_L : L \to \mathrm{Expm}\,(L)$ непрерывно по лемме 10.4.5, подмножество $G \subset \mathrm{Expm}\,(L)$ замкнуто, то множество $(\exp|_L)^{-1}(G) \subset L$ замкнуто. Но $(\exp|_L)^{-1}(G) = L \cap \exp^{-1}(G) \equiv L_G$. Итак, множество L_G замкнуто в замкнутой алгебре Ли L, поэтому замкнуто и в алгебре $\mathbf{A}$ и $\overline{L_G} = L_G$.

Введём множество $L' \subset L_G$ как объединение всех линейчатых подмножеств множества L_G. Множество $L' \ni 0$ и линейчатое по утверждению 10.4.1. Итак, $L' \subset L_G$ наибольшее линейчатое подмножество множества L_G. Согласно лемме 10.4.2 верно $\overline{L_G} \supset \overline{\mathrm{ali}}\,(L')$, но $\overline{L_G} = L_G$, то есть

$$L_G \supset \overline{\mathrm{ali}}\,(L') \supset L'.$$

Множество $\overline{\mathrm{ali}}\,(L')$ алгебра Ли и, в частности, линейчатое, поэтому $\overline{\mathrm{ali}}\,(L') \subset L'$ и L' — замкнутая алгебра Ли.

Так как по условию теоремы линейное пространство L конечномерно и $L' \subset L$ линейное подпространство, то существует линейное подпространство $V \subset L$, что $V \cap L' = \{0\}$ и все линейное пространство $L = V \oplus L$ есть прямая сумма линейных подпространств V и L'. Для любого элементы $x \in L$, существуют единственные элементы $a \in V$ и $b \in L$, что $x = a + b$, причём

$$|a| \le C|x|,\ \ |b| \le C|x|,$$

где $C \in \mathbf{R}_+$ константа, не зависящая от элемента $x \in L$.

Рассмотрим теперь два подслучая: 1) $0 \in \overline{(L_G \setminus L')}$; 2) $0 \notin \overline{(L_G \setminus L')}$. Покажем, что первый подслучай невозможен.

Если $0 \in \overline{(L_G \setminus L')}$, то существует для каждого $n \in \mathbf{N}$ точка $x_n \in L_G \setminus L'$, что $x_n = a_n + b_n$, где $a_n \in V$, $b_n \in L'$ и

$$|x_n| < \frac{1}{12n},\ \ \ |a_n| < \frac{1}{12n},\ \ \ |b_n| < \frac{1}{12n}. \tag{10.4.25}$$

При этом $a_n \ne 0$ ибо $x_n \in L_G \setminus L'$. Так как $a_n \ne 0$, то существует число $m_n \in \mathbf{N}$, что

$$\frac{1}{12} \le \frac{1}{6} - \frac{1}{12n} \le |m_n a_n| \le \frac{1}{6}.$$

Множество $T \equiv \{x \in L \bigm| \frac{1}{12} \le |x| \le \frac{1}{6}\}$ — компакт в конечномерном банаховом пространстве L, поэтому существует подпоследовательность $\{n_k\}_{k \in \mathbf{N}}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} m_{nk} a_{nk} = a$, где $a \in T$, то есть $\frac{1}{12} \le |a| \le \frac{1}{6}$.

Пусть $\alpha \in \mathbf{R}$ произвольное число. Обозначим $p_k \equiv m_{n_k}$, $x_k \equiv x_{n_k}$, $a_k \equiv a_{n_k}$, $b_k \equiv b_{n_k}$. Существует последовательность чисел $q_k \in \mathbf{Z}$, что $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{q_k}{p_k} = \alpha$. Покажем, что $a \in L'$, то есть $\mathbf{R}a \subset L_G$, то есть

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \bigm| \alpha a \in L_G.$$

По построению при каждом $k \in \mathbf{N}$ имеем $b_k \in L' \subset L_G$. В силу (10.4.25) имеем $|x_k| < \frac{1}{12}$, $b_k < \frac{1}{12}$ и по теореме 10.1.1 существует функция Хаусдорфа $H(x_k, -b_k)$ и верно

$$\exp(H(x_k, -b_k)) = \exp(-b_k)\exp(x_k). \qquad (10.4.26)$$

Причём $x_k \in L$, $-b_k \in L$ и поэтому $H(x_k, -b_k) \in L$, а из формулы (10.4.26) принадлежности $-b_k \in L_G$ и $x_k \in L_G$ влекут $\exp(-b_k) \in G$, $\exp(x_k) \in G$ и $\exp(H(x_k, -b_k)) \in G$, ибо G подгруппа. Итак

$$\forall k \in \mathbf{N} \;\Big|\; H(x_k, -b_k) \in L_G. \qquad (10.4.27)$$

Множество L_G — решётчатое по утверждениям 10.4.5 и 10.4.1, поэтому из (10.4.27) следует

$$\forall k \in \mathbf{N} \;\Big|\; q_k H(x_k, -b_k) \in L_G. \qquad (10.4.28)$$

Покажем теперь, что

$$\lim_{k\to\infty} q_k H(x_k, -b_k) = \alpha a. \qquad (10.4.29)$$

В самом деле

$$\lim_{k\to\infty} q_k H_1(x_k, -b_k) = \lim_{k\to\infty} q_k(x_k - b_k) = \lim_{k\to\infty}\left(\left(\frac{q_k}{p_k}\right)(p_k a_k)\right) =$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{q_k}{p_k}\right)\lim_{k\to\infty}(p_k a_k) = \alpha \lim_{k\to\infty}(m_{n_k} a_{n_k}) = \alpha a. \qquad (10.4.30)$$

Согласно формуле (10.1.9) при $n \in \mathbf{N}$,

$$H_n(A(1), A(2)) = \frac{1}{n}\sum_{i\in(\overline{1,2})^n} \operatorname{kap} n(i) A[i],$$

где $|\operatorname{kap} n(i)| \le \frac{1}{n}$, поэтому

$$|H_n(A(1), A(2))| \le \frac{1}{n^2}\sum_{i\in(\vec{1},2)^n} |A[i]|, \qquad (10.4.31)$$

где при $n \le 2$

$$A[i] = [A(i_n), \ldots [A(i_2), A(i_1)\underbrace{] \ldots]}_{n-1}. \qquad (10.4.32)$$

Так как $i_1, i_2, \ldots i_n \in \overline{1,2}$, то в случае $i_1 = i_2$ имеем $|[A(i_2), A(i_1)]| = 0$, а в случае $i_1 \ne i_2$

$$|[A(i_2), A(i_1)]| = |[A(2), A(1)]|,$$

поэтому при каждом $i \in (\overline{1,2})$ верно

$$|A[i]| \le 2^{n-2}\left(\max\{|A(1)|, |A(2)|\}\right)^{n-2}|[A(2), A(1)]|. \qquad (10.4.33)$$

Из (10.4.31, 10.4.33) получаем

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \ge 2 \;\Big|\; |H_n(A(1), A(2))| \le \frac{1}{n^2}2^{n-2}|[A(2), A(1)]| \times \left(\max\{|A(1)|, |A(2)|\}\right)^{n-2}. \qquad (10.4.34)$$

Полагая $A(1)=x_k$, $A(2)=-b_k$, получим

$$[A(2),A(1)]=[-b_k,x_k]=[-b_k,a_k+b_k]=[a_k,b_k].$$

и поэтому

$$|[A(2),A(1)]|\le 2|a_k||b_k| \tag{10.4.35}$$

По построению $|b_k|\le\frac{1}{12p_k}$ и $|x_k|<\frac{1}{12p_k}$ и из неравенств (10.4.34, 10.4.35) получаем

$$\forall n\in\mathbf{N}, n\ge 2 \;\Big|\; |H_n(x_k,-b_k)|\le\frac{1}{n^2}2^{n-1}|a_k|\left(\frac{1}{12p_k}\right)^{n-1}. \tag{10.4.36}$$

В таком случае

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty}H_n(x_k,-b_k)\right|\le\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}2^{n-1}|a_k|\left(\frac{1}{12p_k}\right)^{n-1}\le\frac{1}{4}|a_k|\frac{\left(\frac{1}{6p_k}\right)}{1-\frac{1}{6p_k}} \tag{10.4.37}$$

и поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left(q_k\left(\sum_{n=2}^{\infty}H_n(x_k,-b_k)\right)\right)=0 \tag{10.4.38}$$

в силу оценки

$$\left|q_k\left(\sum_{n=2}^{\infty}H_n(x_k,-b_k)\right)\right|\le\frac{1}{4}|q_k||a_k|\frac{1}{6p_k-1}$$

и существования предела

$$\lim_{k\to\infty}|q_k||a_k|=\lim_{k\to\infty}|q_ka_k|=|\alpha a|.$$

Из (10.4.30) и (10.4.38) получаем

$$\lim_{k\to\infty}q_kH(x_k,-b_k)=\lim_{k\to\infty}(q_kH_1(x_k,-b_k)+\lim_{k\to\infty}q_k\left(\sum_{n=2}^{\infty}H_n(x_k,-y_k)\right)=\alpha a,$$

что доказывает (10.4.29).

Из (10.4.28) и (10.4.29) следует, что $\alpha a\in\overline{L_G}=L_G$, поэтому $a\in L'$. По построению $\lim\limits_{k\to\infty}q_ka_k=a$, где $q_ka_k\in V$, поэтому $a\in V$. Итак, $a\in V\cap L', a\neq 0$ — получено противоречие с предположением $0\in\overline{(L_G\setminus L')}$.

Итак, $0\neq\overline{(L_G\setminus L')}$, то есть существует число $\delta\in]0,\frac{1}{12}]$, что $U(\delta)\cap(L_G\setminus L')=\emptyset$ или

$$L'\cap U(\delta)=L_G\cap U(\delta). \tag{10.4.39}$$

откуда

$$\exp(L'\cap U(\delta))=\exp(L_G\cap U(\delta)). \tag{10.4.40}$$

Множество $Q\equiv\exp(L'\cap U(\delta))$ есть открытая окрестность единицы топологической группы $\operatorname{Expm}(L')$. С другой стороны

$$Q=G\cap\exp(L\cap U(\delta)). \tag{10.4.41}$$

В самом деле

$$Q=\exp(L_G\cap U(\delta))=\exp(L\cap\exp^{-1}(G)\cap U(\delta))\subset G\cap\exp(L\cap U(\delta)).$$

И кроме того, если
$$A \in G \cap \exp(L \cap U(\delta),$$
то $\ln(A) \in (L \cap U(\delta)) \cap \exp^{-1}(G) = L_G \cap U(\delta)$, то есть $A \in \exp(L_G \cap U(\delta))$. (Логарифм однозначно определен для $A \in \exp(U(\delta)),\ \delta \le \frac{1}{2}$). Формула (10.4.41) означает, что множество Q — открытая окрестность единицы топологической группы $G \subset \mathrm{Expm}\,(L)$ с наследственной топологией из $\mathrm{Expm}\,(L)$. Так как топологические группы $\mathrm{Expm}\,(L')$ и G связны, то по следствию 10.3.2 алгебраические группы $\mathrm{Exp}\,(L')$ и G совпадают с группой Q^∞ и следовательно совпадают. Но так как множество Q — общая открытая окрестность единицы у совпадающих алгебраических групп $\mathrm{Exp}\,(L')$ и G, то совпадают и топологические группы $\mathrm{Expm}\,(L')$ и $G \subset \mathrm{Expm}\,(L)$. $\diamondsuit$

§10.5 Ортогональная и симплектическая группы в бесконечномерном случае и их обобщения

Результаты параграфа § 10.3 позволяют единообразным способом построить ортогональную, унитарную и симплектическую группы Ли в бесконечномерном случае. В этом параграфе мы перенесем на бесконечномерный случай ряд конструкций параграфов 2.4, 4.2, 4.3. Мы воспроизводим, с переходом от конечномерной алгебры матриц $M(n, \Lambda)$ к банаховой алгебре операторов $\mathbf{A}$, основные утверждения параграфов 2.4, 4.2, 4.3 с отличиями, свойственными бесконечномерному случаю. Полного распространения теории параграфов 2.4, 4.2, 4.3 мы здесь не делаем.

В этом параграфе X — гильбертово пространство, т.е. полное евклидово пространство — поле скаляров $\Lambda = \mathbf{R}$ или полное унитарное пространство — поле скаляров $\Lambda = \mathbf{C}$. Сепарабельность пространства X не предполагается. $\mathbf{A}$ — банахова алгебра линейных непрерывных операторов на гильбертовом пространстве X. $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A}) \subset \mathbf{A}$ группа обратимых операторов, т.е. группа изоморфизмов банахова пространства X. Если гильбертово пространство X конечномерно и банахова алгебра $\mathbf{A}$ отождествляется с банаховой алгеброй матриц $M(n, \Lambda)$, то следующие утверждения эквивалентны: 1) $A \in \mathrm{GL}\,(\mathbf{A}) \equiv \mathrm{GL}\,(n, \Lambda)$, 2) A — инъективное отображение, 3) A — сюръективное отображение, 4)$A^{-1}|_{A(X)}$ — непрерывное отображение, 5) $\det(A) \neq 0$. В случае бесконечномерного гильбертова пространства X утверждение 5) отсутствует, а утверждение 1) влечет утверждения 2)-4), хотя ни какое из утверждений 2)-4) по отдельности не влечет утверждения 1).

В этом и следующем параграфах мы сохраняем соглашение замечания 10.3.2 о том, что в случае комплексного поля скаляров $\Lambda = \mathbf{C}$ мы называем линейным подпространством в $\mathbf{A}$ линейное подпространство над вещественным полем скаляров $\mathbf{R}$ в отличие от комплексного линейного подпространства и алгеброй Ли называем алгебру Ли над вещественным полем скаляров $\mathbf{R}$ в отличие от комплексной алгебры Ли.

На банаховой алгебре $\mathbf{A}$ есть операция сопряжения — переход от оператора $A \in \mathbf{A}$ к сопряженному оператору $A^* \in \mathbf{A}$, т.е. такому, что
$$\forall x \in X\ \forall y \in X\ \Big|\ \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle. \qquad (10.5.1)$$
Операция сопряжения вещественно-линейна, т.е. $(A + B)^* = A^* + B^*$ и
$$\forall \lambda \in \mathbf{R}\ \Big|\ (\lambda A)^* = \lambda A^*. \qquad (10.5.2)$$

но в комплексном случае нелинейна, ибо $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$ при $\lambda \in \mathbf{C}$. Операция сопряжения есть изометрия $|A^*| = |A|$. Для любого $A \in \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ верно $A^* \in \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ и

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}. \tag{10.5.3}$$

Элемент $A \in \mathbf{A}$ называется *симметричным*, если $A^* = A$. Множество всех симметричных элементов обозначим $\mathbf{A}s \subset \mathbf{A}$. Это замкнутое линейное подпространство в $\mathbf{A}$. Элемент $A \in \mathbf{A}$ называется *кососимметричным*, если $A^* = -A$. Множество всех кососимметричных элементов обозначим $\mathbf{A}a \subset \mathbf{A}$. Это также замкнутое линейное подпространство. Пересечение $\mathbf{A}s \cap \mathbf{A}a = \{0\}$ состоит лишь из нуля. Каждый элемент $A \in \mathbf{A}$ единственным образом представим в виде

$$A = C + D \tag{10.5.4}$$

где $C \in \mathbf{A}s$, $D \in \mathbf{A}a$ и $C = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $D = \frac{1}{2}(A - A^*)$. Согласно (10.5.3) если $A \in \mathbf{A}s \cap \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$, то $A^{-1} \in \mathbf{A}s \cap \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ и $A^* \in \mathbf{A}s \cap \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$, аналогично, если $A \in \mathbf{A}a \cap \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$, то $A^{-1} \in \mathbf{A}a \cap \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ и $A^* \in \mathbf{A}a \cap \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$.

Так как $\mathbf{A}$ — алгебра линейных непрерывных операторов на гильбертовом пространстве, то в случае комплексного поля скаляров $\Lambda = \mathbf{C}$ верно

$$(\exp(\mathbf{A}))^2 = \mathrm{GL}\,(\mathbf{A}), \tag{10.5.5}$$

а в случае, когда гильбертово пространство X ещё конечномерно, верно

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathrm{GL}\,(\mathbf{A}). \tag{10.5.6}$$

В общем бесконечномерном случае равенство (10.5.6) неверно [57, с. 356].

10.5.1 Алгебра Ли $H(B)$.

В этом пункте мы перенесем часть построений параграфа 4.3 с конечномерного на бесконечномерный случай, следя дополнительно за замкнутостью алгебр Ли.

Пусть $B \in \mathbf{A}$ произвольный элемент. Определим множество $H(B) \subset \mathbf{A}$ всех решений относительно элемента $A \in \mathbf{A}$ уравнения

$$AB + BA^* = 0 \tag{10.5.7}$$

или эквивалентного уравнения

$$BA^* = -AB. \tag{10.5.8}$$

Утверждение 10.5.1 *Для любого элемента $B \in \mathbf{A}$ множество $H(B) \subset \mathbf{A}$ — замкнутая алгебра Ли.*

Доказательство. Отображение $f_B : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ вида $f_B(A) = AB + BA^*$ непрерывно к вещественно-линейно, поэтому множество решений уравнения $f_B(A) = 0$ замкнутое и вещественно-линейное подпространство в алгебре $\mathbf{A}$. Если теперь $A_1 \in H(B)$ и $A_2 \in H(B)$, то для элемента $[A_2, A_1] = A_2A_1 - A_1A_2$ имеем

$$B[A_2, A_1]^* = B(A^*{}_1A^*{}_2 - A^*{}_2A^*{}_1) = -(A_1BA_2^* - A_2BA_1^*) =$$

$$A_1A_2B - A_2A_1B = -[A_2, A_1]B.$$

Поэтому $[A_2, A_1] \in H(B)$. $\diamondsuit$

В случае единичного элемента E из соотношения (10.5.8) видно, что $H(E) = \mathbf{A}a$. В общем случае верно следующее утверждение.

Утверждение 10.5.2 *Пусть $B \in \mathbf{A}s$, тогда $H(B) \supset B\mathbf{A}a$, если кроме того $B \in \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$, то $H(B) = B\mathbf{A}a$. Пусть $B \in \mathbf{A}a$, тогда $H(B) \supset B\mathbf{A}s$, если кроме того $B \in \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$, то $H(B) = B\mathbf{A}s$.*

Доказательство. Если $B \in \mathbf{A}s$ и $A \in \mathbf{A}a$, то

$$B(BA)^* = BA^*B^* = -BAB = -(BA)B,$$

т.е. $BA \in H(B)$. Аналогично, если $B \in \mathbf{A}a$ и $A \in \mathbf{A}s$, то

$$B(BA)^* = BA^*B^* = -BAB = -(BA)B,$$

т.е. $BA \in H(B)$.

Пусть $B \in \mathbf{A}s \cap \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$, тогда $B^{-1} \in \mathbf{A}s \cap \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$. Если $A \in H(B)$, то из (10.5.8) следует $A = -BA^*B^{-1} = B(-A^*B^{-1})$. Покажем, что элемент $A^*B^{-1} \in \mathbf{A}a$. В самом деле $(A^*B^{-1})^* = (B^{-1})^*A = -B^{-1}BA^*B^{-1} = -(A^*B^{-1})$.

Пусть $B \in \mathbf{A}a \cap \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$, тогда и $B^{-1} \in \mathbf{A}a \cap \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$. Если $A \in H(B)$, то из (10.5.8) следует $A = -BA^*B^{-1} = B(-A^*B^{-1})$ и элемент $A^*B^{-1} \in \mathbf{A}s$, ибо

$$(A^*B^{-1})^* = (B^{-1})^*A = B^{-1}BA^*B^{-1} = A^*B^{-1}. \quad \diamondsuit$$

Всякий элемент $B \in \mathbf{A}$ однозначно представим в виде $B = C + D$, где $C \in \mathbf{A}s$, $D \in \mathbf{A}a$. При этом для множества $H(B)$ справедливо представление.

Утверждение 10.5.3 *Верна формула*

$$\forall C \in \mathbf{A}s \ \forall D \in \mathbf{A}a \ \Big| \ H(C + D) = H(C) \cap H(D).$$

Доказательство. Элемент $A \in H(C + D)$ тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$A(C + D) + (C + D)A^* = 0 \tag{10.5.9}$$

Элемент $A \in H(C) \cap H(D)$ тогда и только тогда, когда выполнены одновременно оба соотношения

$$AC + CA^* = 0, \tag{10.5.10}$$

$$AD + DA^* = 0. \tag{10.5.11}$$

Если выполнены равенства (10.5.10) и (10.5.11), то складывая их, получим равенство (10.5.9), т.е. $H(C) \cap H(D) \subset H(C + D)$.

Если выполнено соотношение (10.5.9), то

$$AC + CA^* = -(AD + DA^*). \tag{10.5.12}$$

Но элемент $AC + CA^* \in \mathbf{A}s$, ибо

$$(AC + CA^*)^* = CA^* + AC = AC + CA^*.$$

А элемент $(AD + DA^*) \in \mathbf{A}a$, ибо

$$(AD + DA^*)^* = -(DA^* + AD) = -(AD + DA^*).$$

Так как $\mathbf{A}s \cap \mathbf{A}a = \{0\}$, то из (10.5.12) следует, что верны равенства (10.5.10) и (10.5.11), т.е. $A \in H(C + D)$. $\diamondsuit$

Для каждого элемента $B \in \mathbf{A}$ мы определили замкнутую алгебру Ли $H(B)$. Теперь наша задача описать группу Ли $\mathrm{Expm}\,(H(B))$ и Её свойства. Для этого требуются предварительные построения следующего пункта.

10.5.2 Группа $\Gamma(B)$.

Для произвольного элемента $B \in \mathbf{A}$ рассмотрим два уравнения относительно элемента $A \in \mathbf{A}$

$$ABA^* = B, \tag{10.5.13}$$

$$A^*BA = B. \tag{10.5.14}$$

Множество всех решений уравнения (10.5.13) в банаховой алгебре $\mathbf{A}$ обозначим через $\Omega(B) \subset \mathbf{A}$, а множество всех решений уравнения (10.5.14) через $I(B) \subset \mathbf{A}$. Множества $\Omega(B)$ и $I(B)$, как видно из соотношений (10.5.13, 10.5.14), содержат единичный элемент и являются моноидами по умножению. В самом деле, если $A_1 \in \Omega(B)$, $A_2 \in \Omega(B)$, то для произведения A_1A_2 имеем

$$A_1A_2B(A_1A_2)^* = A_1(A_2BA_2^*)A_1^* = A_1BA_1^* = B.$$

Аналогично , если $A_1 \in I(B)$, $A_2 \in I(B)$, то для произведения A_1A_2 имеем

$$(A_1A_2)^*B(A_1A_2) = A_2^*(A_1^*BA_1)A_2 = A_2^*BA_2 = B.$$

Множества $\Omega(B)$ и $I(B)$ — замкнутые подмножества в банаховой алгебре $\mathbf{A}$, ибо отображения $r_B : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ и $l_B : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ вида $r_B(A) \equiv ABA^*$ и $l_B(A) \equiv A^*BA$ непрерывны.

Введём множества:

$$\Gamma(B) \equiv \Omega(B) \cap \mathrm{GL}\,(\mathbf{A}), \tag{10.5.15}$$

$$\Delta(B) \equiv I(B) \cap \mathrm{GL}\,(\mathbf{A}) \tag{10.5.16}$$

обратимых элементов. Согласно предыдущему $\Gamma(B) \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ и $\Delta(B) \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ замкнутые подмоноиды группы $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$. Более того, множества $\Gamma(B)$ и $\Delta(B)$ подгруппы группы $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$, ибо верны следования:

$$(A \in \Gamma(B)) \Rightarrow (ABA^* = B) \Rightarrow (B = A^{-1}B(A^*)^{-1}) \Rightarrow (A^{-1} \in \Gamma(B)),$$

$$(A \in \Delta(B)) \Rightarrow (A^*BA = B) \Rightarrow (B = (A^*)^{-1}BA^{-1} \Rightarrow (A^{-1} \in \Delta(B)).$$

В случае $A = M(n, \Lambda)$ при $B \in \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ верны равенства

$$\Omega(B) = \Gamma(B), \quad I(B) = \Delta(B). \tag{10.5.17}$$

В бесконечномерном случае это не так.

Пример 10.5.1

$X = l_2$, $B = E$. Итак, гильбертово пространство X есть пространство суммируемых с квадратом последовательностей $x \equiv (x_1, x_2, x_3, ...)$. Определим линейные операторы $A_1 \in \mathbf{A}$ и $A_2 \in \mathbf{A}$ следующим образом на произвольном элементе $x \in X$:

$$A_1(x) \equiv (x_2, x_3, x_4, ...), \quad A_2(x) \equiv (0, x_1, x_2, x_3, ...). \tag{10.5.18}$$

Проверим, что $A_1^* = A_2$. Для этого достаточно убедиться, что для любых элементов $x \in X$, $Y \in X$ верно равенство

$$\langle A_1x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1}\bar{y}_n = \langle x, A_2y\rangle. \tag{10.5.19}$$

Аналогичным образом проверяем, что $A_2^* A_2 = E$, ибо

$$\langle x, A_2^* A_2 y\rangle = \langle A_2 x, A_2 y\rangle = \langle x, y\rangle = \langle x, Ey\rangle.$$

Из соотношений $A_1^* = A_2$ и $A_2^* A_2 = E$ следует соотношение $A_1 A_1^* = E$. Элементы $A_1 \in \Omega(B)$ и $A_2 \in I(B)$ необратимы, ибо оператор A_1 не инъективен, а оператор A_2 не сюръективен. Итак, верны принадлежности

$$A_1 \in \Omega(B) \setminus \Gamma(B), \tag{10.5.20}$$

$$A_2 \in I(B) \setminus \Delta(B). \tag{10.5.21}$$

Обозначим связные компоненты единицы групп $\Gamma(B)$ и $\Delta(B)$ через $\Gamma_e(B)$ и $\Delta_e(B)$. Это замкнутые связные подгруппы группы $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$.

Рассмотрим вопрос о преобразовании элемента $B \in \mathbf{A}$ и соответствующем преобразовании множеств $\Omega(B)$ и $I(B)$.

Утверждение 10.5.4 *Верна формула*

$$\forall \lambda \in \Lambda, \lambda \neq 0 \;\Big|\; (\Omega(\lambda B) = \Omega(B)) \wedge (I(\lambda B) = I(B)).$$

Доказательство. При $\lambda \neq 0$ уравнения (10.5.13) и (10.5.14) эквивалентны соответственно уравнениям $A(\lambda B)A^* = \lambda B$ и $A^*(\lambda B)A = \lambda B$. $\diamondsuit$

Утверждение 10.5.5 *Верна формула*

$$\forall B \in A\ \forall Q \in \mathrm{GL}\,(\mathbf{A}) \;\Big|\; (\Omega(QBQ^*) = Q\Omega(B)Q^{-1}) \wedge (I(Q^*BQ) = Q^{-1}I(B)Q).$$

Доказательство. Справедлива цепочка эквивалентностей

$$(A \in \Omega(QBQ^*)) \Leftrightarrow (AQBQ^*A^* = QBQ^*) \Leftrightarrow ((Q^{-1}AQ)B(Q^{-1}AQ)^* = B) \Leftrightarrow$$

$$(Q^{-1}AQ \in \Omega(B)) \Leftrightarrow (A \in Q\Omega(B)Q^{-1}).$$

и цепочка эквивалентностей

$$(A \in I(Q^*BQ)) \Leftrightarrow (A^*Q^*BQA = Q^*BQ) \Leftrightarrow ((QAQ^{-1})^*B(QAQ^{-1}) = B)$$

$$\Leftrightarrow (QAQ^{-1} \in I(B)) \Leftrightarrow (A \in Q^{-1}I(B)Q). \quad \diamondsuit$$

Рассмотрим связь множеств $\Omega(B)$ и $I(B)$.

Утверждение 10.5.6 *Для любого* $B \in \mathbf{A}$ *верно* $\Omega(B) = I^*(B)$.

Доказательство. Справедливы эквивалентности

$$(A \in \Omega(B)) \Leftrightarrow (ABA^* = B) \Leftrightarrow ((A^*)^*BA^* = B) \Leftrightarrow (A^* \in I(B)) \Leftrightarrow (A \in I^*(B)). \ \diamondsuit$$

Следствие 10.5.1 *Для любого* $B \in \mathbf{A}$ *верно* $\Gamma(B) = \Delta^*(B)$.

Утверждение 10.5.7 *Верна формула*

$$\forall B \in \mathrm{GL}\,(\mathbf{A}) \;\Big|\; \Gamma(B) = \Delta(B^{-1}).$$

Доказательство. Справедливы эквивалентности при $A \in \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$

$$(A \in \Gamma(B)) \Leftrightarrow (ABA^* = B) \Leftrightarrow ((A^{-1})^* B^{-1} A^{-1} = B^{-1})$$

$$\Leftrightarrow (A^{-1} \in \Delta(B^{-1}) \Leftrightarrow (A \in \Delta(B^{-1})). \quad \diamondsuit$$

Элемент $B \in \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ мы называем *псевдоинволютивным*, если существует $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq 0$, что $A^{-1} = \lambda A$.

Утверждение 10.5.8 *Если элемент* $B \in \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ *псевдоинволютивный, то* $\Gamma(B) = \Gamma^*(B)$

Доказательство. Согласно утверждению 10.5.7 верно $\Gamma(B^{-1}) = \Delta(B)$. Согласно утверждению 10.5.4 верно $\Gamma(b^{-1}) = \Gamma(\lambda B) = \Gamma(B)$. Согласно следствию 10.5.1 верно $\Gamma^*(B) = \Delta(B)$. $\diamondsuit$

Для единичного элемента $B = E$ получаем $\Gamma(E) = \Gamma^*(E) = \Delta(E)$. Принадлежность $A \in \Delta(E)$ означает, что оператор A сохраняет скалярные произведения и, в частности, является линейной изометрией, $|A| = 1$.

Перейдем к связи группы $\Gamma_e(B)$ и алгебры Ли $H(B)$.

10.5.3 Группа Ли $\Gamma_e(B)$.

Начнем с рассмотрения структуры множества $\Omega(B) \subset \mathbf{A}$ в окрестности единичного элемента E.

Лемма 10.5.1 *Если* $B \in \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ *и* $q = \frac{1}{2|B||B^{-1}|}$, *то*

$$\Omega(B) \cap \exp(U(q)) = \exp(H(B) \cap U(q)). \tag{10.5.22}$$

Доказательство. Из равенства $E = BB^{-1}$ следует, что $1 \leq |B||B^{-1}|$, поэтому $q \in]0, \frac{1}{2}]$.

Заметим, во-первых, включения

$$\Omega(B) \cap \exp(U(q)) \subset \exp(U(q)),$$

$$\exp(H(B) \cap U(q)) \subset \exp(U(q)).$$

Фиксируем элемент $A \in \exp(U(q))$, т.е. $A = \exp(Q)$, $Q \in U(q) \subset U(\frac{1}{2})$. Тогда $Q^* \in U(q)$ и $|BQ^*B^{-1}| \leq |B| \cdot q \cdot |B^{-1}| \leq \frac{1}{2}$, т.е. $BQ^*B^{-1} \in U(\frac{1}{2})$. Для указанного элемента $A = \exp(Q)$ справедливы эквивалентности

$$(A \in \Omega(B) \cap \exp(U(q))) \Leftrightarrow (A \in \Omega(B)) \Leftrightarrow (ABA^* = B) \Leftrightarrow (A(BA^*B^{-1}) = E). \tag{10.5.23}$$

Экспонента представима абсолютно сходящимся степенным рядом, поэтому

$$\exp(BQ^*B^{-1}) = B(\exp(Q^*))B^{-1} = B(\exp(Q))^*B^{-1}. \tag{10.5.24}$$

С учётом (10.5.24) продолжаем цепочку эквивалентностей

$$(A(BA^*B^{-1}) = E) \Leftrightarrow (\exp(Q)\exp(BQ^*B^{-1}) = E). \tag{10.5.25}$$

Но $Q \in U(\frac{1}{2})$ и $BQ^*B^{-1} \in U(\frac{1}{2})$, поэтому по утверждению (10.1.4) верно

$$(\exp(Q)\exp(BQ^*B^{-1}) = E) \Leftrightarrow (Q + BQ^*B^{-1} = 0) \Leftrightarrow (QB + BQ^* = 0) \Leftrightarrow (Q \in H(B)). \tag{10.5.26}$$

Эквивалентности (10.5.23, 10.5.25, 10.5.26) доказывают лемму. $\diamondsuit$

Мы видим, что в указанной открытой окрестности $W(q) \equiv \exp(U(q))$ точки $E \in \mathbf{A}$ в банаховой алгебре $\mathbf{A}$ множества $\Omega(B)$ и $\exp(H(B) \cap U(q))$ совпадают.

Утверждение 10.5.9 *Справедливо включение*

$$\forall B \in \mathrm{GL}\,(\mathbf{A}) \;\Big|\; \exp(H(B)) \subset \Gamma_e(B).$$

Доказательство. В условиях утверждения 10.5.9 верны лемма 10.5.1 и равенство (10.5.22). Так как $\exp(H(q)) \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$, то

$$\exp(H(B) \cap U(q)) = \Omega(B) \cap \exp(U(q)) = \Gamma(B) \cap \exp(U(q)) \subset \Gamma(B). \qquad (10.5.27)$$

Согласно п. 10.3.2 из включения (10.5.27) следует

$$(\exp(H(B) \cap U(q)))^\infty \subset (\Gamma(B))^\infty = \Gamma(B).$$

Из утверждения 10.3.7 следует, что

$$\mathrm{Exp}\,(H(B)) = (\exp(H(B) \cap U(q)))^\infty \subset \Gamma(B). \qquad (10.5.28)$$

Вводя на подмножествах $\mathrm{Exp}\,(H(B)) \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ и $\Gamma(B) \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ наследственную топологию, мы получим включение топологических групп.

$$\mathrm{Exph}\,(H(B)) \subset \Gamma(B). \qquad (10.5.29)$$

Итак, $\mathrm{Exph}\,(h(B))$ есть связная подгруппа топологической группы $\Gamma(B)$, содержащая единицу, поэтому $\mathrm{Exph}\,(H(B)) \subset \Gamma_e(B)$. $\diamondsuit$

Теперь мы покажем, что группы $\mathrm{Exph}\,(H(B))$ и $\Gamma_e(B)$ совпадают.

Теорема 10.5.1 *Справедлива формула*

$$\forall B \in \mathrm{GL}\,(\mathbf{A}) \;\Big|\; \mathrm{Expm}\,(H(B)) = \mathrm{Exph}\,(H(B)) = \Gamma_e(B). \qquad (10.5.30)$$

Доказательство. Наряду с включением (10.5.29) имеем, применяя лемму 10.5.1,

$$\Gamma_e(B) \cap \exp(U(q)) \subset \Omega(B) \cap \exp(U(q)) = \exp(H(B) \cap U(q)).$$

Поэтому

$$(\Gamma_e(B) \cap \exp(U(q)))^\infty \subset (\exp(H(B) \cap U(q)))^\infty. \qquad (10.5.31)$$

Но множество $\Gamma_e(B) \cap \exp(U(q))$ есть открытая окрестность единицы связной топологической группы $\Gamma_e(B)$, поэтому по следствию 10.3.2 верно

$$(\Gamma_e(B) \cap \exp(U(q)))^\infty = \Gamma_e(B). \qquad (10.5.32)$$

А так как $H(B) \subset \mathbf{A}$ линейное подпространство, то по утверждению 10.3.7 верно

$$(\exp(H(B) \cap U(q)))^\infty = \mathrm{Exp}\,(H(B)). \qquad (10.5.33)$$

Из (10.5.31–10.5.33) получаем включение

$$\Gamma_e(B) \subset \mathrm{Exph}\,(H(B)). \qquad (10.5.34)$$

Из (10.5.29) и (10.5.34) следует равенство топологических групп

$$\Gamma_e(B) = \mathrm{Exph}\,(H(B)). \qquad (10.5.35)$$

Используя равенство (10.5.35), из равенства (10.5.22) получаем

$$\Gamma_e(B) \cap \Omega(B) \cap \exp(U(q)) = \exp(H(B) \cap U(q)) \cap \operatorname{Exp}(H(B)),$$

откуда

$$\Gamma_e(B) \cap \exp(U(q)) = \exp(H(B) \cap U(q))$$

и

$$\operatorname{Exp}(H(B)) \cap \exp(U(q)) = \exp(H(B) \cap U(q)). \tag{10.5.36}$$

Соотношение (10.5.36) означает, что у топологических групп $\operatorname{Exph}(H(B))$ и $\operatorname{Expm}(H(B))$ имеются совпадающие открытые окрестности единицы, поэтому $\operatorname{Exph}(H(B)) = \operatorname{Expm}(H(B))$. $\diamondsuit$

Глава 11

Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, его группа Ли и законы сохранения

Рассматривается вопрос о существовании законов сохранения для линейного дифференциального уравнения вида

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t), \quad t \in I. \tag{11.0.1}$$

Здесь $I \subset \mathbf{R}$ — непустой связный интервал прямой, X — банахово пространство, $L(X,X)$ — банахова алгебра линейных непрерывных отображений $A : X \to X$, $x = x(t)$ — отображение $x : I \to X$ и $A = A(t)$ — отображение $A : I \to L(X,X)$. Законом сохранения для дифференциального уравнения (11.0.1) я называю функцию f, действующую из банахова пространства X в банахово пространство Y и постоянную на траектории дифференциального уравнения (11.0.1). В случае $Y = \mathbf{R}$ закон сохранения называется инвариантом.

Вводится понятие алгебры Ли $\overline{ali}(A)$ и группы Ли $\operatorname{Expm}(\overline{ali}(A))$ дифференциального уравнения (11.0.1). В случае, когда функция $A(t)$ непрерывна на интервале I, алгебра Ли $\overline{ali}(A)$ дифференциального уравнения (11.0.1) есть наименьшая замкнутая алгебра Ли $L \subset L(X,X)$, содержащая множество значений $A(I)$. При естественных ограничениях доказывается совпадение законов сохранения дифференциального уравнения (11.0.1) и его группы Ли. Таким образом, вопрос об отыскании инвариантов линейного дифференциального уравнения (11.0.1) в банаховом пространстве сводится к вопросу об отыскании инвариантов соответствующей группы Ли линейных непрерывных преобразований, действующих на банаховом пространстве X. В случае $X = \mathbf{R}^n$ эта задача решена в главе 4 — лемма 4.6.8. В частности, если $W \subset \mathbf{R}^n$ непустое открытое множество, группа симметрий которого содержит группу Ли $\operatorname{Expm}(\overline{ali}(A))$, то отображение $\varphi : W \to \mathbf{R}$ класса $C^{(1)}(W)$ будет инвариантом экспоненциальной группы $\operatorname{Expm}(L)$, иф в каждой точке $x \in W$ выполнено утверждение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)Lx = 0. \qquad (11.0.2)$$

(Здесь градиент $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)$ понимается как строка, а элемент $x \in \mathbf{R}^n$ как столбец.)

В § 11.2 локализуется понятие инварианта и вводится понятие локанта в точке. В § 11.3 изучается связь между инвариантами и локантами. Поскольку локанты должны быть локальными решениями системы линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной неизвестной функцией вида (11.0.2), а инварианты — глобальными на всём множестве W решениями той же системы, то в § 11.4 изучается структура локальных и глобальных решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной неизвестной функцией. В частности, в пункте 11.4.5 приведен пример одного линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с одной неизвестной функцией от 4 аргументов вида (11.0.2), для которого локальное и глобальное решения различны.

§11.1 Алгебра Ли и группа Ли линейного обыкновенного дифференциального уравнения

Рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве вида:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in I, \qquad (11.1.1)$$

где $I \subset \mathbf{R}$ — связное подмножество прямой, $x(t) \in X$ элемент банахова пространства X, $A(t) \in L(X,X)$ — элемент банаховой алгебры линейных непрерывных операторов, отображающих банахово пространство X в себя, $\dot{x}(t) \equiv \frac{d}{dt}x(t)$. Уравнение (11.1.1) мы связываем с группами Ли путем рассмотрения уравнения для операторов $W(t,t_1)$ п. 9.1.1 вида:

$$\frac{d}{dt}W(t,t_1) = A(t)W(t,t_1), \quad t \in I. \qquad (11.1.2)$$

Далее в этом параграфе *лоду* мы называем линейное дифференциальное уравнение в банаховой алгебре $\mathbf{A}$ вида:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \quad t \in I, \qquad (11.1.3)$$

где $X(t)$, $A(t)$ принадлежат банаховой алгебре $\mathbf{A}$. Всюду далее в этом параграфе $A \in L_{loc}(I)$ и применяются результаты § 9.1.

11.1.1 Алгебра Ли, мажорирующая функцию.

Определение 11.1.1 *Алгебра Ли $L \subset \mathbf{A}$ мажорирует функцию $A \in L_{loc}(I)$, если алгебра Ли L замкнута и почти всюду на I верно $A(t) \in L$.*

Рассмотрим вопрос о существовании наименьшей мажорирующей алгебры Ли для данной функции $A \in L_{loc}(I)$. Если функция $A \in L_{loc}(I)$, то согласно п. 9.1.3 для почти всех $t \in I$ интеграл $\int\limits_{t_1}^{t} A(\tau)\,d\tau$ является дифференцируемой функцией верхнего предела и

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{t_1}^{t} A(\tau)\,d\tau = A(t). \tag{11.1.4}$$

Такие точки $t \in I$, в которых выполнено (11.1.4), будем называть *точками интегральной гладкости*. Множество I_A всех точек интегральной гладкости функции $A \in L_{loc}(I)$ есть множество полной меры в I.

Лемма 11.1.1 *Если алгебра Ли $L \subset A$ мажорирует функцию $A \in L_{loc}(I)$, то $A(I_A) \subset L$.*

Доказательство. Пусть $t_0 \in I_A$. Если $A(t) \in L$ почти всюду и L — замкнутое линейное пространство в $\mathbf{A}$, то $\int\limits_{t_0}^{t_0+h} A(\tau)\,d\tau \in L$, если $t_0 \in I$ и $t_0 + h \in I$. При всех достаточно малых $h > 0$ или $h < 0$ точки t_0 и $t_0 + h$ принадлежат I, поэтому $A(t_0) = \lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int\limits_{t_0}^{t_0+h} A(\tau)d(\tau)\right) \in L$, так как L замкнутое множество. $\Diamond$

Из леммы 11.1.1 и определения 11.1.1 вытекает.

Лемма 11.1.2 *Для любой функции $A \in L_{loc}(I)$ существует наименьшая алгебра Ли L, её мажорирующая, и равна $L = \overline{\mathrm{ali}}\,(A(I_A))$.*

Алгебру Ли $L = \overline{\mathrm{ali}}\,(A(I_A))$ мы будем называть алгеброй Ли, *порождённой функцией* $A \in L_{loc}(I)$, и обозначать $\overline{\mathrm{ali}}\,(A) \equiv \overline{\mathrm{ali}}\,(A(I_A))$.

Следствие 11.1.1 *Для любого подмножества полной меры $I' \subset I_A$ верно $\overline{\mathrm{ali}}\,(A) = \overline{\mathrm{ali}}\,(A(I'))$.*

Следствие 11.1.2 *Если функция $A \in L_{loc}(I)$ непрерывна почти всюду, то $\overline{\mathrm{ali}}\,(A) = \overline{\mathrm{ali}}\,(A(I_{CA}))$, где $I_{CA} \subset I$ — множество точек непрерывности функции A.*

Это вытекает из следствия 11.1.1 и того, что всякая точка непрерывности функции A есть точка её интегральной гладкости.

Для непрерывной на I функции A верно

$$\overline{\mathrm{ali}}\,(A) = \overline{\mathrm{ali}}\,(A(I)). \tag{11.1.5}$$

11.1.2 Алгебра Ли лоду

Вернемся к рассмотрению лоду (11.1.3). Если $A \in L_{loc}(I)$, то согласно § 9.1 для любой пары $(t_2, t_1) \in I \times I$ существует единственная непрерывная функция $W(t, t_2)$, являющаяся решением интегрального уравнения (9.1.4). Причём если $A_1(t) = A_2(t)$ почти всюду на I и $A_1 \in L_{loc}(I)$, $A_2 \in L_{loc}(I)$, то $W_1(t_2, t_1) = W_2(t_2, t_1)$ при всех $(t_2, t_1) \in I \times I$.

Определение 11.1.2 *Алгебра Ли L мажорирует лоду (11.1.3), если она мажорирует функцию A.*

Определение 11.1.3 *Алгеброй Ли лоду (11.1.3) назовём алгебру Ли* $\overline{\mathrm{ali}}\,(A)$*, а группой Ли лоду (11.1.3) назовём группу Ли* $\mathrm{Expm}\,(\overline{\mathrm{ali}}\,(A))$.

Теорема 11.1.1 *Если алгебра Ли L мажорирует лоду (11.1.3), то функция* $W(t_2, t_1)$ *есть непрерывное отображение* $W : I \times I \to \mathrm{Expm}\,(L)$.

Доказательство. Требуется доказать два утверждения: 1) что при любой паре $(t_2, t_1) \in I \times I$ величина $W(t_2, t_1) \in \mathrm{Expm}\,(L)$, 2) что отображение $W : I \times I \to \mathrm{Expm}\,(L)$ непрерывно.

Интеграл $\int\limits_{t_1}^{t_2} |A(\tau)|\, d\tau$ непрерывная функция своих пределов, поэтому множество $F \equiv \left\{ (b, a) \in I \times I \;\middle|\; \int\limits_{Ic(b,a)} |A(\tau)|\, d\tau < 1 - e^{-\frac{1}{2}} \right\}$ открыто в произведении $I \times I$. Если $(b, a) \in F$, то по теореме 11.1.2 функция $W(b, a)$ допускает представление

$$W(b, a) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} J_n \right), \tag{11.1.6}$$

где величины J_n имеют вид (9.5.17) или (9.5.18) и

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} J_n \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| < -\ln\left(1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

Если $A(t) \in L$ почти всюду по $t \in I$ и L — замкнутая алгебра Ли, то

$$\forall n \in \mathbf{N} \;\Big|\; J_n \in L$$

и поэтому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} J_n \in L$. Итак, $W(b, a) = \exp(B)$, где $B \in L \cap U\left(\frac{1}{2}\right)$. Мы убедились, что

$$\forall (b, a) \in F \;\Big|\; W(b, a) \in \exp\left(L \cap U\left(\frac{1}{2}\right) \right). \tag{11.1.7}$$

На подмножестве $\exp\left(L \cap U\left(\frac{1}{2}\right)\right) \subset A$ наследственная топология совпадает с топологией многообразия $\mathrm{Expm}\,(L)$. По лемме 9.1.3 отображение $W : F \to \mathrm{Expm}\,(L)$ непрерывно.

Если $(b, a) \in I \times I$, то в силу абсолютной непрерывности интеграла $\int\limits_{Ic(a,b)} |A(\tau)|\, d\tau$ существует последовательность точек $a_1 = a, a_2, a_3, \cdots a_n = b$, что

$$\forall i \in \overline{1, n-1} \;\Big|\; \int\limits_{Ic(a_i, a_{i+1})} |A(\tau)|\, d\tau < 1 - e^{-\frac{1}{2}},$$

т.е. каждая пара $(a_i, a_{i+1}) \in F$. В таком случае согласно п. 9.1.1 имеем:

$$W(b,a) = W(a_n, a_{n-1})W(a_{n-1}, a_{n-2}) \cdots W(a_2, a_1),$$

где все элементы $W(a_{i+1}, a_i)$ принадлежат группе $\mathrm{Exp}\,(L)$, а следовательно и $W(b,a) \in \mathrm{Exp}\,(L)$. Мы доказали, что

$$\forall (b,a) \in I \times I \;\Big|\; W(b,a) \in \mathrm{Exp}\,(L). \tag{11.1.8}$$

Зафиксируем точку $(b,a) \in I \times I$. В силу абсолютной непрерывности интеграла на компакте существует число $\varepsilon > 0$, что выполнены неравенства

$$\int\limits_{Ic(t_2,b)} |A(\tau)|\,d\tau < 1 - e^{-\frac{1}{2}}, \qquad \int\limits_{Ic(a,t_1)} |A(\tau)|\,d\tau < 1 - e^{-\frac{1}{2}}, \tag{11.1.9}$$

если $|t_2 - b| < \varepsilon$ и $|t_1 - a| < \varepsilon$. Если $(t_2, t_1) \in I \times I$ и $|t_2 - b| < \varepsilon$ и $|t_1 - a| < \varepsilon$, то $(t_2, b) \in F$ и $(a, t_1) \in F$ и по доказанному отображения $W(t_2, b)$ в $\mathrm{Expm}\,(L)$ и $W(a, t_1)$ в $\mathrm{Expm}\,(L)$ непрерывны по своим аргументам. Тогда и произведение

$$W(t_2, t_1) = W(t_2, b)W(b,a)W(a, t_1)$$

непрерывно в точке $(b,a) \in I \times I$ как отображение в топологическую группу $\mathrm{Expm}\,(L)$. $\diamondsuit$

Опираясь на § 10.5, рассмотрим следующие два примера, в которых $\mathbf{A}$ — алгебра линейных непрерывных операторов на некотором гильбертовом пространстве.

Пример 11.1.1

Пусть при каждом $t \in I$ верно $A(t) = BQ(t)$, где $B \in \mathbf{A}s \cap \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ — фиксированный симметрический оператор изоморфизма, а $Q(t) \in \mathbf{A}a$. Тогда $L = B\mathbf{A}a$ алгебра Ли, мажорирующая лоду, поэтому функция $W(t_2, t_1)$ будет непрерывным отображением $W : I \times I \to \mathrm{Expm}\,(L) = \Gamma e(B)$. В частности,

$$\forall (t_2, t_1) \in I \times I \;\Big|\; W(t_2, t_1)BW^*(t_2, t_1) = B. \tag{11.1.10}$$

Пример 11.1.2

Пусть при каждом $t \in I$ верно $A(t) = BQ(t)$, где $B \in \mathbf{A}a \cap \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ — фиксированный кососимметричный оператор изоморфизма, а $Q(t) \in \mathbf{A}s$. Тогда $L = B\mathbf{A}s$ алгебра Ли, мажорирующая лоду, поэтому функция $W(t_2, t_1)$ будет непрерывным отображением $W : I \times I \to \mathrm{Expm}\,(L) = \Gamma e(B)$. В частности, верно соотношение (11.1.10).

11.1.3 Группа Ли лоду.

Группу $\mathrm{Expm}\,(\overline{\mathrm{ali}}\,(A))$ мы назвали группой Ли лоду (11.1.3). Согласно теореме 11.1.1 множество значений функции $W(I,I) \subset \mathrm{Expm}\,(\overline{\mathrm{ali}}\,(A))$, а следовательно и алгебраическая подгруппа $\mathrm{gr}\,(W(I,I))$, порождённое множеством $W(I,I)$ лежит в группе $\mathrm{Expm}\,(\overline{\mathrm{ali}}\,(A))$. Множество $W(I,I)$ содержит единичный элемент и симметрично $W^{-1}(I,I) = W(I,I)$ ибо $W(t_2,t_1) = W^{-1}(t_1,t_2)$, поэтому согласно п. 10.3.2 имеем $\mathrm{gr}\,(W(I,I)) = (W(I,I))^{\infty}$. Насколько велико подмножество $\mathrm{gr}\,(W(I,I)) \subset \mathrm{Expm}\,(\overline{\mathrm{ali}}\,(A))$?

Теорема 11.1.2 *Если $A \in L_{loc}(I)$, то группа* $\mathrm{gr}\,(W(I,I))$ *всюду плотна в топологической группе* $\mathrm{Expm}\,(\overline{\mathrm{ali}}\,(A))$.

Доказательство. Введём обозначения $L = \overline{\mathrm{ali}}\,(A)$, $G \equiv \mathrm{gr}\,(W(I,I))$, $L_G \equiv L \cap \exp^{-1}(G)$.

Согласно п. 9.1.3 существует множество $P \subset I$ меры нуль, содержащие концы интервала I, что в точках $t \in I \backslash P \equiv I'$ функции $\int\limits_{t_1}^{t} A(\tau)\,d\tau$, $\int\limits_{t_1}^{t} |A(\tau)|\,d\tau$ дифференцируемы по верхнему пределу и

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{t_1}^{t} A(\tau)\,d\tau = A(t), \quad \frac{d}{dt}\int\limits_{t_1}^{t} |A(\tau)|\,d\tau = |A(t)|. \tag{11.1.11}$$

Покажем, что

$$\overline{L_G} \supset \mathbf{R}A(I'), \tag{11.1.12}$$

т.е., что

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}\ \forall t \in I' \ \Big|\ \alpha A(t) \in \overline{L_G}. \tag{11.1.13}$$

Далее фиксируем $\alpha \in \mathbf{R}$ и $t \in I'$.

В силу абсолютной непрерывности интеграла для фиксированных $\alpha \in \mathbf{R}$ и $t \in I'$ найдется натуральное число N, что при $n \ge N$ имеем $\left(t + \frac{\alpha}{n}\right) \in I'$ и $\int\limits_{Ic\left(t,t+\frac{\alpha}{n}\right)} |A(\tau)|\,d\tau < 1$. По теореме 9.5.2 тогда $W\left(t + \frac{\alpha}{n}, t\right) \in G$ и

$$W\left(t + \frac{\alpha}{n}, t\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} J_k\right),$$

где J_k задаётся формулами (9.5.17, 9.5.18). Так как $A(t) \in L$ для почти всех $t \in I$ и L — замкнутая алгебра Ли, каждое $J_k \in L$ и $\sum_{k=1}^{\infty} J_k \in L$. А так как $\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} J_k\right) \in G$, то $\sum_{k=1}^{\infty} J_k \in L_G$. Множество L_G решётчатое согласно утверждениям 10.4.5 и 10.4.1, поэтому и $\sum_{k=1}^{\infty} J_k \in L_G$ также.

Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{\infty} J_k\right) = \alpha A(t), \tag{11.1.14}$$

откуда будет следовать, что $\alpha A(t) \in \overline{L_G}$, и истинность утверждений (11.1.12), (11.1.13). Согласно формулам (9.5.17, 9.5.18) и (11.1.11)

$$\lim_{n\to\infty} nJ_1 = \lim_{n\to\infty} n\int\limits_{t}^{t+\frac{\alpha}{n}} A(\tau)\,d\tau = \alpha \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\int\limits_{t}^{t+\frac{\alpha}{n}} A(\tau)\,d\tau}{\frac{\alpha}{n}}\right) = \alpha A(t). \tag{11.1.15}$$

Согласно неравенству (9.5.24)

$$\left|\sum_{k=2}^{\infty} J_k\right| \le \sum_{k=2}^{\infty} |J_k| \le \frac{1}{2}\frac{\left(\int\limits_{Ic\left(t,t+\frac{\alpha}{n}\right)} |A(\tau)|\,d\tau\right)^2}{1 - \int\limits_{Ic\left(t,t+\frac{\alpha}{n}\right)} |A(\tau)|\,d\tau}. \tag{11.1.16}$$

Откуда в силу (11.1.11)

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=2}^{\infty} J_k\right) = 0, \tag{11.1.17}$$

ибо

$$\left| n\sum_{k=2}^{\infty} J_k\right| \le \frac{1}{2}\, n \left|\int\limits_t^{t+\frac{\alpha}{n}} |A(\tau)|\, d\tau\right| \frac{\left|\int\limits_t^{t+\frac{\alpha}{n}} |A(\tau)|\, d\tau\right|}{1-\left|\int\limits_t^{t+\frac{\alpha}{n}} |A(\tau)|\, d\tau\right|}, \tag{11.1.18}$$

но согласно (11.1.11)

$$\lim_{n\to\infty} n \left|\int\limits_t^{t+\frac{\alpha}{n}} |A(\tau)|\, d\tau\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \frac{\int\limits_t^{t+\frac{\alpha}{n}} |A(\tau)|\, d\tau}{\frac{1}{n}}\right| = |\alpha A(t)|,$$

а согласно абсолютной непрерывности интеграла

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\int\limits_t^{t+\frac{\alpha}{n}} |A(\tau)| d\tau\right|}{1-\left|\int\limits_t^{t+\frac{\alpha}{n}} |A(\tau)|\, d\tau\right|} = 0.$$

Из (11.1.15) и (11.1.17) следует (11.1.14).

Из включения (11.1.12), так как множество $\mathbf{R}A(I')$ линейчатое, следует по лемме 10.4.2, что $\overline{L_G} \supset \overline{\mathrm{ali}}\,(\mathbf{R}A(I')) \supset \overline{\mathrm{ali}}\,(A(I'))$. Но согласно следствию 11.1.1 верно $\overline{\mathrm{ali}}\,(A(I')) = \overline{\mathrm{ali}}\,(A) = L$. Итак, $L = \overline{L} \supset \overline{L_G} \supset L$, т.е. $L = \overline{L_G}$ и по лемме 10.4.3 группа G всюду плотна в топологической группе $\mathrm{Expm}\,(L)$. $\diamondsuit$

11.1.4 Обращение теоремы 11.1.1.

В теореме 11.1.1 мы доказали, что если алгебра Ли L мажорирует лоду (11.1.3), то функция $W(t_2, t_1)$ задаёт непрерывное отображение $W : I \times I \to \mathrm{Expm}\,(L)$. Верно и обратное утверждение. Прямое и обратное утверждение мы объединили в теорему.

Теорема 11.1.3 *Следующие утверждения эквивалентны:*
I. Алгебра Ли L мажорирует лоду (11.1.3);
II. Функция $W(t_2, t_1)$ задаёт непрерывное отображение $W : I \times I \to \mathrm{Expm}\,(L)$.

Доказательство. Следование $I \Rightarrow II$ доказано теоремой 11.1.1.

$II \Rightarrow I$. Согласно доказательству теоремы 9.1.2 существует множество полной меры $I' \subset I$, не содержащее концевых точек интервала I, такое, что все точки $t \in I'$ есть точки интегральной гладкости функции $A(\tau)$ и $|A(\tau)|$ и при $t \in I'$ верно

$$\frac{d}{dt} W(t, t_1) = A(t) W(t, t_1)$$

при всех $t_1 \in I$.

Фиксируем точку $t_2 \in I'$. В силу абсолютной непрерывности интеграла и по теореме 9.5.2 существует число $\varepsilon > 0$, что $[t_2-\varepsilon, t_1+\varepsilon] \subset I$ и при $t_2 \in [t_1-\varepsilon, t_2+\varepsilon]$ верно представление

$$W(t_2,t_1) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} J_n\right), \tag{11.1.19}$$

где J_n, $n \in \mathbf{N}$ задаётся формулами (51.17, 51.18) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| < \frac{1}{2}. \tag{11.1.20}$$

Если выполнено утверждение II, то существует окрестность в топологическом произведении $I \times I$ точки (t_1,t_2) в которой $W(t_2,t_1) \in \exp\left(L \cap U\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, поэтому существует число $\varepsilon_1 \in]0,\varepsilon]$, что

$$\forall t_2 \in [t_1-\varepsilon_1, t_2+\varepsilon_1] \;\Big|\; \sum_{n=2}^{\infty} J_n \in L \cap U\left(\frac{1}{2}\right) \subset L.$$

Согласно формулам (9.5.17, 9.5.18) в данном случае $J_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} A(\tau)\,d\tau$ поэтому при $\Delta t \equiv t_2 - t_1 \neq 0$ получаем из условия $t_1 \in I'$, что

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} J_1 = A(t_1). \tag{11.1.21}$$

В силу неравенства (9.5.24) имеем

$$\sum_{n=2}^{\infty} |J_n| \leq \frac{1}{2} \frac{\left(\int\limits_{Ic(t_1,t_2)} |A(\tau)|\,d\tau\right)^2}{1 - \int\limits_{Ic(t_1,t_2)} |A(\tau)|\,d\tau} \tag{11.1.22}$$

Так как $t_1 \in I'$ и поэтому — точка интегральной гладкости функции $|A(t)|$, то

$$\lim_{\Delta t\to 0} \left| \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{Ic(t_1,t_2)} |A(\tau)|\,d\tau \right| = \lim_{\Delta t\to 0} \left| \frac{\int\limits_{t_1}^{t_2)} |A(\tau)|\,d\tau}{\Delta t} \right| = |A(t_1)|. \tag{11.1.23}$$

Из (11.1.22, 11.1.23) следует, что

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=2}^{\infty} J_n = 0, \tag{11.1.24}$$

А из (11.1.24) и (11.1.21) следует, что

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} J_n\right) = A(t_1). \tag{11.1.25}$$

Так как L — алгебра Ли и $\sum_{n=1}^{\infty} J_n \in L$, то и $\frac{1}{\Delta t}\sum_{n=1}^{\infty} J_n \in L$, а так как алгебра Ли L замкнута, то из (11.1.25) следует $A(t_1) \in L$. Утверждение I доказано. $\diamondsuit$

Утверждение II теоремы 11.1.3 состоит из двух требований: 1) включения $W(I,I) \subset \mathrm{Exp}\,(L)$, 2) непрерывности отображения $W : I \times I \to \mathrm{Expm}\,(L)$. Рассмотрим ситуацию, когда второе из этих требований следует из первого.

Теорема 11.1.4 *Если* $\mathrm{Expm}\,(L)$ *— замкнутая группа Ли, то следующие утверждения эквивалентны:*

I. Для почти всех $t \in I$ *верно* $A(t) \in L$*;*

II. $W(I, I) \subset \mathrm{Exp}\,(L)$*.*

Доказательство. Утверждение I теоремы 11.1.4 совпадает с утверждением I теоремы 11.1.3, а утверждение II теоремы 11.1.4 следует из утверждения II теоремы 11.1.3. Чтобы свести теорему 11.1.4 к теореме 11.1.3 достаточно доказать, что из выполнения утверждения II теоремы 11.1.4 и замкнутости группы Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$ следует выполнение утверждения II теоремы 11.1.3.

Пусть верно утверждение II теоремы 11.1.4. Отображение $W : I \times I \to \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ непрерывно по теореме 9.1.2. Тогда в силу включения $W(I, I) \subset \mathrm{Exp}\,(L)$ и определения наследственной топологии на группе $\mathrm{Exp}\,(L)$ отображение $W : I \times I \to \mathrm{Exph}\,(L)$ непрерывно также. Но по определению замкнутости группы Ли верно $\mathrm{Expm}\,(L) = \mathrm{Exph}\,(L)$ и отображение $W : I \times I \to \mathrm{Expm}\,(L)$ непрерывно. ♢

11.1.5 Лоду с коммутативной алгеброй Ли.

Чтобы показать полезность введенного понятия алгебры Ли лоду, рассмотрим случай лоду с алгеброй Ли простейшей структуры — коммутативной. Возникает вопрос: Какие свойства лоду отражает коммутативность его алгебры Ли?

Начнем с критерия коммутативности алгебры Ли лоду через свойства функции $A(t)$.

Лемма 11.1.3 *Алгебра Ли* $\overline{\mathrm{ali}}\,(A)$ *лоду коммутативна иф*

$$\forall t_1 \in I_A \; \forall t_2 \in I_A \;\; \Big| \;\; [A(t_2), A(t_1)] = 0. \tag{11.1.26}$$

Коммутативная алгебра Ли $\overline{\mathrm{ali}}\,(A)$ *является наименьшим замкнутым линейным подпространством над полем* $\mathbf{R}$ *в алгебре* $\mathbf{A}$*, содержащим множество* $A(I_A)$*.*

Доказательство. Необходимость условия (11.1.26) следует из включения $A(I_A) \subset \overline{\mathrm{ali}}\,(A)$.

Пусть выполнено (11.1.26), тогда для любых двух элементов A, B из линейной оболочки $\mathrm{lin}\,(A(I_A))$ множества $A(I_A)$ над полем $\mathbf{R}$ в алгебре A верно

$$[B, A] = 0 \tag{11.1.27}$$

в силу билинейности соотношения (11.1.26). Тогда соотношение (11.1.27) выполняется и для всех элементов A, B из замыкания $\overline{\mathrm{lin}}\,(A(I_A))$ линейной оболочки, в силу непрерывности коммутатора $[B, A]$ как функции своих аргументов.

Итак, из (11.1.26) следует, что $\overline{\mathrm{lin}}\,(A(I_A))$ есть алгебра Ли, содержащая $A(I_A)$, тогда $\overline{\mathrm{lin}}\,(A(I_A)) = \overline{\mathrm{ali}}\,(A)$, причём алгебра Ли $\overline{\mathrm{ali}}\,(A)$ коммутативна. ♢

Если алгебра Ли лоду коммутативна, то по доказанной лемме выполнено (11.1.26), все интегралы с коммутаторами в формуле для логарифма решения лоду теоремы 9.5.2 обращаются в нуль и решение $W(t_2, t_1)$ представляются в простом и кратком виде.

Теорема 11.1.5 *Следующие утверждения эквивалентны:*

I. Алгебра Ли $\overline{\mathrm{ali}}\,(A)$ *лоду коммутативна;*

II. $\forall t_1 \in I_A \; \forall t_2 \in I_A \;\; \Big| \;\; [A(t_2), A(t_1)] = 0$*;*

III. $\forall t_1 \in I \; \forall t_2 \in I \;\; \Big| \;\; W(t_2, t_1) = \exp\left(\int\limits_{t_1}^{t_2} A(\tau)\, d\tau\right)$*.*

Доказательство. В силу леммы 11.1.3 для доказательства справедливости теоремы 11.1.5 осталось лишь показать эквивалентность $II \Leftrightarrow III$.

Сначала докажем следование $II \Rightarrow III$. Фиксируем произвольные $t_1, t_2 \in I$. Пусть $t_1 < t_2$. Так как функция $A(t)$ локально суммируема на I, то $\int\limits_{t_1}^{t_2} |A(\tau)|\, d\tau < \infty$. В силу абсолютной непрерывности интеграла существует конечный набор чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{k+1}$ таких, что $t_1 = \xi_1 < \xi_2 \cdots < \xi_k < \xi_{k+1} = t_2$, что

$$\forall i \in \overline{1,k} \quad \Big| \quad \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} |A(\tau)|\, d\tau < \frac{1}{2}. \tag{11.1.28}$$

По лемме 9.1.1 верно

$$W(t_2, t_1) = W(\xi_{k+1}, \xi_k) W(\xi_k, \xi_{k-1}) \cdots W(\xi_2, \xi_1). \tag{11.1.29}$$

Обозначим через $\Delta_i \equiv [\xi_i, \xi_{i+1}], i \in \overline{1,k}$. В силу условия II верно

$$\forall i \in \overline{1,k}\ \forall j \in \overline{1,k} \quad \Big| \quad \left[\int\limits_{\Delta_i} A(\tau)\, d\tau, \int\limits_{\Delta_j} A(\tau)\, d\tau \right] = 0. \tag{11.1.30}$$

По теореме 9.5.2 для величин $W(\xi_{i+1}, \xi_i),\ \ i \in \overline{i,k}$ в силу условия II и условия (11.1.28) верно представление

$$W(\xi_{i+1}, \xi_i) = \exp\left(\int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} A(\tau)\, d\tau \right). \tag{11.1.31}$$

Из (11.1.29) и (11.1.31) по следствию 10.2.2 получаем

$$W(t_2, t_1) = \exp\left(\int\limits_{t_1}^{t_2} A(\tau)\, d\tau \right).$$

Следование $II \Rightarrow III$ доказано.

Доказательство следования $III \Rightarrow II$ разобьём на три этапа.

Этап 1. Сначала докажем следование $III \Rightarrow II$ при дополнительных условиях, что $I = [a, b]$ и

$$\int\limits_a^b |A(\tau)|\, d\tau \le \frac{1}{4}. \tag{11.1.32}$$

Тогда для всякого $t_1 \in [a, b]$ и всякого $t_2 \in [a, b]$

$$W(t_2, t_1) = \exp\left(\int\limits_{t_1}^{t_2} A(\tau)\, d\tau \right) = \exp\left(\int\limits_a^{t_2} A(\tau)\, d\tau - \int\limits_a^{t_1} A(\tau)\, d\tau \right) \tag{11.1.33}$$

в силу выполнения утверждения III. По лемме 9.1.1 верны представления

$$W(t_2, a) = \exp\left(\int\limits_a^{t_2} A(\tau)\, d\tau \right), \tag{11.1.34}$$

$$W(a,t_1) = \exp\left(-\int_a^{t_1} A(\tau)\,d\tau\right). \tag{11.1.35}$$

Из (11.1.33–11.1.35) получаем

$$\exp\left(\int_a^{t_2} A(\tau)\,d\tau\right)\exp\left(-\int_a^{t_1} A(\tau)\,d\tau\right) = \exp\left(\int_a^{t_2} A(\tau)\,d\tau - \int_a^{t_1} A(\tau)\,d\tau\right). \tag{11.1.36}$$

В силу (11.1.32) применима лемма 10.2.3 и из равенства (11.1.36) следует

$$\left[\int_a^{t_2} A(\tau)\,d\tau, \int_a^{t_1} A(\tau)\,d\tau\right] = 0. \tag{11.1.37}$$

Равенство (11.1.37) выполнено при всех $t_1 \in [a,b]$ и всех $t_2 \in [a,b]$, поэтому дифференцируя его по переменной t_1 в точке $t_1 \in I_A$ и по переменной t_2 в точке $t_2 \in I_A$ получаем утверждение II. Доказательство этапа 1 закончено.

Этап 2. Предполагаем дополнительно, что $I = [a,b]$ и покажем, что если следование $III \Rightarrow II$ верно при дополнительном условии, что

$$\int_a^b |A(\tau)|\,d\tau \le C, \quad C \ge \frac{1}{4}, \tag{11.1.38}$$

то оно будет верно и при дополнительном условии

$$\int_a^b |A(\tau)|\,d\tau \le C + \frac{1}{8}. \tag{11.1.39}$$

Пусть выполнено (11.1.39), но не выполнено (11.1.38), тогда существуют точки a_1, b_1, что $a < a_1 < b_1 < b$ и

$$\int_a^{a_1} |A(\tau)|\,d\tau \le \frac{1}{8}, \quad \int_{a_1}^{b_1} |A(\tau)|\,d\tau \le C - \frac{1}{8}, \quad \int_{b_1}^{b} |A(\tau)|\,d\tau \le \frac{1}{8}. \tag{11.1.40}$$

Пусть также выполнено утверждение III.

Обозначим через $G([c,d])$ — множество точек интегральной гладкости функции $A(t)$ на $[c,d]$. Тогда по доказанному в этапе 1 соотношение

$$[A(t_2), A(t_1)] = 0 \tag{11.1.41}$$

выполнено для всех пар $(t_1,t_2) \in (G([a,a_1]))^2$ и всех пар $(t_1,t_2) \in (G([b_1,b]))^2$. Согласно предположению соотношение (11.1.41) также выполняется для всех пар $(t_1,t_2) \in (G([a,b_1]))^2$ и всех пар $(t_1,t_2) \in (G([a_1,b]))^2$. Но тогда интегралы $\int_{t_1}^{a_1} A(\tau)\,d\tau$ и $\int_{a_1}^{b_1} A(\tau)\,d\tau$ и интегралы $\int_{a_1}^{b_1} A(\tau)\,d\tau$ и $\int_{b_1}^{t_2} A(\tau)\,d\tau$ коммутируют между собой при любых $t_1 \in [a,a_1]$, $t_2 \in [b_1,b]$.

Согласно лемме 9.1.1 справедливо представление $W(t_2,b_1)W(b_1,a_1)W(a_1,t_1) = W(t_2,t_1)$. Предполагая выполненным утверждение III, отсюда получаем

$$\exp\left(\int_{b_1}^{t_2} A(\tau)\,d\tau\right)\exp\left(\int_{a_1}^{b_1} A(\tau)\,d\tau\right)\exp\left(\int_{t_1}^{a_1} A(\tau)\,d\tau\right) = \exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(\tau)\,d\tau\right). \tag{11.1.42}$$

Так как интеграл $\int\limits_{b_1}^{t_2} A(\tau)\,d\tau$ коммутирует с интегралом $\int\limits_{t_1}^{a_1} A(\tau)\,d\tau$ и с интегралом $\int\limits_{b_1}^{t_2} A(\tau)\,d\tau$, то он коммутирует и с суммой $\int\limits_{t_1}^{a_1} A(\tau)\,d\tau + \int\limits_{b_1}^{t_2} A(\tau)\,d\tau$ и по утверждению 10.2.1 верно

$$\exp\left(\int\limits_{t_1}^{t_2} A(\tau)\,d\tau\right) = \exp\left(\int\limits_{a_1}^{b_1} A(\tau)\,d\tau\right)\exp\left(\int\limits_{t_1}^{a_1} A(\tau)\,d\tau + \int\limits_{b_1}^{t_2} A(\tau)\,d\tau\right). \tag{11.1.43}$$

Так как коммутируют интегралы $\int\limits_{b_1}^{t_2} A(\tau)\,d\tau$ и $\int\limits_{a_1}^{b_1} A(\tau)\,d\tau$, то коммутируют и соответствующие экспоненты, т.е.

$$\exp\left(\int\limits_{b_1}^{t_2} A(\tau)\,d\tau\right)\exp\left(\int\limits_{a_1}^{b_1} A(\tau)\,d\tau\right) = \exp\left(\int\limits_{a_1}^{b_1} A(\tau)\,d\tau\right)\exp\left(\int\limits_{b_1}^{t_2} A(\tau)\,d\tau\right). \tag{11.1.44}$$

Из (11.1.42–11.1.44) следует равенство

$$\exp\left(\int\limits_{b_1}^{t_2} A(\tau)\,d\tau\right)\exp\left(\int\limits_{t_1}^{a_1} A(\tau)\,d\tau\right) = \exp\left(\int\limits_{b_1}^{t_2} A(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t_1}^{a_1} A(\tau)\,d\tau\right). \tag{11.1.45}$$

В силу условий (11.1.40) из соотношения (11.1.45) по лемме 10.2.3 вытекает утверждение

$$\forall t_1 \in [a, a_1]\ \forall t_2 \in [b_1, b] \ \Big|\ \left[\int\limits_{b_1}^{t_2} A(\tau)\,d\tau, \int\limits_{t_1}^{a_1} A(\tau)\,d\tau\right] = 0. \tag{11.1.46}$$

Дифференцируя последнее равенство по t_1 и t_2, получаем равенство (11.1.41), выполненное для всех пар $(t_1, t_2) \in G([a, a_1]) \times G([b_1, b])$.

Заметим также, что если $a_1 \in G([a, b])$, то из (11.1.46) следует, что равенство (11.1.41) выполнено и для всех пар $(t_1, t_2) \in (\{a_1\} \cup G([a, a_1])) \times G([b_1, b])$. Аналогично, если $b_1 \in G([a, b])$, то (11.1.41) верно и при всех $(t_1, t_2) \in G([a, a_1]) \times (\{b_1\} \cup G([b_1, b]))$. А если $a_1 \in G([a, b])$ и $b_1 \in G([a, b])$, то (11.1.41) верно и для всех пар $(t_1, t_2) \in (\{a_1\} \cup G([a, a_1])) \times (\{b_1\} \cup G([b_1, b]))$.

Мы убедились, что равенство (11.1.41) верно при всех $(t_1, t_2) \in (G([a, b]))^2$. Этап 2 завершен.

Этап 3. Согласно результатам этапов 1 и 2 при дополнительном условии $I = [a, b]$ следование $III \Rightarrow II$ выполняется при втором дополнительном условии (11.1.38) с $C = \frac{1}{4}$. Но согласно этапу 2 справедливость следования $III \Rightarrow II$ будет иметь место и при дополнительном условии (11.1.38) с константой $C = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Применяя утверждение этапа 2 по индукции, мы убеждаемся, что следование $III \Rightarrow II$ справедливо при дополнительном условии, что $I = [a, b]$ и дополнительном условии

$$\int\limits_a^b |A(\tau)|\,d\tau < \infty.$$

Но любое связное непустое подмножество прямой представимо как счётное объединение последовательности вложенных друг в друга сегментов $I = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$. На каждом сегменте S_m верно следование $III \Rightarrow II$ по доказанному выше. Поэтому и на всем множестве I верно следование $III \Rightarrow II$.

Доказательство теоремы 11.1.5 завершено. $\diamondsuit$

Замечание 11.1.1 *Если функция $A(t)$ кусочно-непрерывна на I и в каждой точке разрыва непрерывна справа или слева, то утверждение II эквивалентно утверждению*

II'. $\forall t_1 \in I\ \forall t_2 \in I \ \Big|\ [A(t_2), A(t_1)] = 0$.

Замечание 11.1.2 *Следование $II' \Rightarrow III$ впервые установлено И.А. Лаппо-Данилевским (см. [43]).*

§11.2 Законы сохранения, инварианты, локанты

Настоящий параграф посвящен уточнению и развитию понятий п. 4.6.7 о законах сохранения и локальных законах сохранения.

11.2.1 Законы сохранения.

В этом параграфе X, Y — банаховы пространства над полем скаляров $\Lambda (\Lambda = \mathbf{R}$ или $\Lambda = \mathbf{C})$, $\mathbf{A} \subset L(X, X)$ некоторая банахова алгебра линейных ограниченных операторов, отображающих банахово пространство X в себя. Рассматривается представление группы $\mathrm{GL}(\mathbf{A})$ на банаховом пространстве X вида, если $a \in \mathrm{GL}(\mathbf{A})$, то $T_a(x) \equiv ax$ при всех $x \in X$. Для подмножества $S \subset \mathrm{GL}(\mathbf{A})$ через $\mathrm{gr}(S) \subset \mathrm{GL}(\mathbf{A})$ обозначается группа порождённое множеством S, т.е. наименьшая подгруппа $\mathrm{GL}(\mathbf{A})$, содержащая множество S. Для подмножества $Q \subset X$ через $Z(Q) \subset \mathrm{GL}(\mathbf{A})$ обозначается его группа симметрий (см. п. 4.1.2), т.е. множество таких элементов $a \in \mathrm{GL}(\mathbf{A})$, что $aQ = Q$. Через f обозначается функция, действующая из банахова пространства X в банахово пространство Y, с областью определения $D(f) \subset X$.

Определение 11.2.1 *Функция f — закон сохранения для множества $S \subset \mathrm{GL}(\mathbf{A})$, если для всякого элемента $x \in D(f)$ и всякого элемента $a \in S$ выполнены требования:*

1) $ax \in D(f)$,

2) $f(ax) = f(x)$.

В случае $Y = \mathbf{R}$ закон сохранения называется *инвариантом.*

Утверждение 11.2.1 *Если множество $S \subset \mathrm{GL}(\mathbf{A})$ симметрично, т.е. $S^{-1} = S$, то для любого множества $Q \subset X$ следующие условия эквивалентны:*

1) $\forall x \in Q\ \forall a \in S \ \Big|\ ax \in Q$,

2) $Z(Q) \supset S$.

Доказательство. Условие 1) эквивалентно условию

3) $\forall a \in S \ \Big|\ aQ \subset Q$,

а условие 2) эквивалентно условию

4) $\forall a \in S \ \Big|\ aQ = Q$.

4) $\Rightarrow$ 3). Очевидно.

3) $\Rightarrow$ 4). Так как $S \subset \mathrm{GL}(\mathbf{A})$ симметрично, то если $a \in S$ и верно 3), то $aQ \subset Q$ и $a^{-1}Q \subset Q$. Но последнее эквивалентно $Q \subset aQ$. Итак $aQ = Q$ и верно 4).

Утверждения 3) и 4) эквивалентны, следовательно и утверждения 1) и 2) эквивалентны. $\diamondsuit$

Отметим для дальнейшего симметричность подмножества $\mathrm{Exp}\,(L)$ и $W(I,I)$ группы $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$.

Множество $Z(Q) \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ всегда группа (см. п. 4.1.2), поэтому условия $Z(Q) \supset S$ и $Z(Q) \supset \mathrm{gr}\,(S)$ эквивалентны.

Лемма 11.2.1 *Если множество $S \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ симметрично, то функция f — закон сохранения для S тогда и только тогда, когда она — закон сохранения для $\mathrm{gr}\,(S)$.*

Доказательство. В силу симметрии множества S и утверждения 11.2.1 первое требование определения 11.2.1 эквивалентно условию $Z(D(f)) \supset S$, что эквивалентно условию $Z(D(f)) \supset \mathrm{gr}\,(S)$.

Осталось показать, что из выполнения второго требования определения 11.2.1 следует, что

$$\forall x \in D(f)\ \forall a \in \mathrm{gr}\,(S) \,\Big|\, f(ax) = f(x). \tag{11.2.1}$$

В самом деле если функция f — закон сохранения для множества S, то она и закон сохранения для множества $S_1 \equiv \{E\} \cup S$ и $\mathrm{gr}\,(S) = \mathrm{gr}\,(S_1)$. Согласно п. 10.3.2 $\mathrm{gr}\,(S_1) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(S_1)^n$, поэтому если $a \in \mathrm{gr}\,(S_1)$, то существует конечный набор элементов $a_1, a_2, \cdots a_n \in S_1$, что $a = a_1 a_2 \cdots a_n$. Для любого $x \in D(f)$, тогда $f(ax) = f(a_1 a_2 \cdots a_n x) = f(a_1 a_2 \cdots a_{n-1} x) = f(a_1 x) = f(x)$. $\diamondsuit$

Если для произвольного множества $Q \subset X$ множество $Z(Q) \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ является подгруппой, то для замкнутого множества Q множество $Z(Q) \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ — замкнутая подгруппа топологической группы $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$.

Лемма 11.2.2 *Если подмножество $Q \subset X$ открыто или замкнуто, то $Z(Q) \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ замкнутая подгруппа топологической группы $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$.*

Доказательство. Пусть множество $Q \subset X$ замкнуто и последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ элементов $a_n \in Z(Q)$ сходится в топологической группе $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ к элементу $a \in \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$. Тогда, так как топология в $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ наследуется из банаховой алгебры $\mathbf{A}$, и $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$. Отсюда для любого элемента $x \in Q$ верно $\lim_{n\to\infty} a_n x = ax$. Но $a_n Q = Q$, если $a_n \in Z(Q)$, поэтому $a_n x \in Q$ и $\lim_{n\to\infty} a_n x = ax \in Q$, ибо множество Q замкнуто. Итак $\overline{Z(Q)} \subset Z(Q)$, т.е. множество $Z(Q)$ замкнуто в $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$.

По лемме 4.1.4 $Z(Q) = Z(X \setminus Q)$, что доказывает лемму 11.2.2 для случая открытого множества Q. $\diamondsuit$

Для подмножества $S \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ через $\overline{\mathrm{gr}}\,(S) \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ будем обозначать наименьшую замкнутую подгруппу топологической группы $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$, содержащую множество S. Подгруппа $\overline{\mathrm{gr}}\,(S)$ равна замыканию подгруппы $\mathrm{gr}\,(S)$ в топологической группе $\mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$, т.е. $\overline{\mathrm{gr}}\,(S) = \overline{\mathrm{gr}\,(S)}$.

В лемме 11.2.1 мы убедились, что если множество $S \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ симметрично, то у множеств S и $\mathrm{gr}\,(S)$ одни и те же законы сохранения. Покажем, что кроме того у множеств S и $\overline{\mathrm{gr}}\,(S)$ одни и те же непрерывные законы сохранения.

Лемма 11.2.3 *Если f непрерывная функция из X в Y с замкнутой или открытой областью определения $D(f) \subset X$, и $S \subset \mathrm{GL}\,(\mathbf{A})$ симметричное множество, то функция f — закон сохранения для S тогда и только тогда, когда она — закон сохранения для $\overline{\mathrm{gr}}\,(S)$.*

Доказательство. Если функция f — закон сохранения для симметричного множества $S \subset \mathrm{GL}(\mathbf{A})$, то по лемме 11.2.1 она и закон сохранения для множества $\mathrm{gr}(S) \subset \mathrm{GL}(\mathbf{A})$. Если функция f закон сохранения для множества $\mathrm{gr}(S)$ то по утверждению 11.2.1 $Z(D(f)) \supset \mathrm{gr}(S)$, а так как по лемме 11.2.2 группа $Z(D(f)) \subset \mathrm{GL}(\mathbf{A})$ замкнута, то $Z(D(f)) \supset \overline{\mathrm{gr}}(S)$.

Если f — закон сохранения для $\mathrm{gr}(S)$ и $a \in \overline{\mathrm{gr}}(S)$, то существует последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $a_n \in \mathrm{gr}(S)$ сходящаяся к a в топологической группе $\mathrm{GL}(\mathbf{A})$, тогда $\lim_{n\to\infty}|a_n - a| = 0$. Для произвольного $x \in D(f)$, так как $a_n \in Z(D(f))$, $n \in \mathbf{N}$ и $a \in Z(D(f))$, то $a_n x \in D(f)$ при $n \in \mathbf{N}$ и $ax \in D(f)$. Далее $\lim_{n\to\infty} a_n x = ax$ и по условию непрерывности функции f верно $\lim_{n\to\infty} f(a_n x) = f(ax)$. Но если $a_n \in \mathrm{gr}(S)$, то $f(a_n x) = f(x)$, поэтому $f(x) = f(ax)$.

Итак, для множества $\overline{\mathrm{gr}}(S) \subset \mathrm{GL}(\mathbf{A})$ выполнены оба требования определения 11.2.1. ♢

Для сокращения дальнейших рассуждений введём следующий термин.

Определение 11.2.2 *Функция f действующая из банахова пространства X в банахово пространство Y называется сиплой, если она непрерывна и её область определения открыта или замкнута.*

11.2.2 Законы сохранения для лоду.

Рассмотрим лоду

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in I, \tag{11.2.2}$$

где $A \in L_{loc}(I)$, $x(t) \in X$.

Определение 11.2.3 *Функция f — закон сохранения для лоду (11.2.2), если она закон сохранения для множества $W(I,I) \subset \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$.*

Между непрерывными законами сохранения лоду и его группы Ли существует следующая связь.

Теорема 11.2.1 *Сиплая функция f — закон сохранения для лоду тогда и только тогда, когда она закон сохранения для группы Ли лоду.*

Доказательство. Согласно лемме 11.2.3 функция f — закон сохранения для лоду, тогда и только тогда, когда она — закон сохранения для группы $\overline{\mathrm{gr}}(W(I,I)) \subset \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$. По теоремам 11.1.1, 11.1.2 подгруппа $\mathrm{gr}(W(I,I)) \subset \mathrm{Expm}(\overline{\mathrm{ali}}(A))$ и всюду плотна в топологической группе $\mathrm{Expm}(\overline{\mathrm{ali}}(A))$, а следовательно и в топологической группе $\mathrm{Exph}(\overline{\mathrm{ali}}(A))$. В силу последнего, замыкания в топологической группе $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ подгрупп $\mathrm{gr}(W(I,I))$ и $\mathrm{Exp}(\overline{\mathrm{ali}}(A))$ совпадают, поэтому в силу леммы 11.2.3 верна теорема 11.2.1. ♢

Следствие 11.2.1 *Из леммы 11.2.3 также следует, что сиплая функция f — закон сохранения для группы Ли $\mathrm{Exp}(L)$ тогда и только тогда, когда она — закон сохранения для замыкания $\overline{\mathrm{Exp}(L)} \subset \mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ группы Ли в топологической группе $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$.*

Рассмотрим соотношение законов сохранения и инвариантов. Пусть $q : Y \to \mathbf{R}$ непрерывный вещественно-линейный функционал, тогда если f — закон сохранения для множества $S \subset \mathrm{GL}(\mathbf{A})$, то суперпозиция $q \circ f$ — инвариант для множества $S \subset \mathrm{GL}(\mathbf{A})$. Наоборот, пусть Q — тотальное множество непрерывных вещественно-линейных функционалов $q : Y \to \mathbf{R}$.

Утверждение 11.2.2 *Если Q тотальное множество непрерывных вещественно-линейных функционалов $q : Y \to \mathbf{R}$, то функция f — закон сохранения для множества $S \subset \mathrm{GL}(\mathbf{A})$ тогда и только тогда, когда каждая функция $q \circ f$, $q \in Q$ — инвариант для множества S.*

Доказательство. Если при каждом $q \in Q$ функция $q \circ f$ — инвариант для S, то

$$\forall q \in Q \;\; \forall x \in D(f) \;\; \forall a \in S \;\Big|\; (ax \in D(f)) \wedge (q \circ f(ax) = q \circ f(x)).$$

Тогда

$$\forall q \in Q \;\Big|\; q(f(ax) - f(x)) = 0$$

и в силу тотальности множества Q верно $f(ax) = f(x)$. Выполнены условия определения 11.2.1. $\diamondsuit$

В n-мерном банаховом пространстве Y, $n \in \mathbf{N}$ набор n координат есть тотальный набор линейных функционалов ($\Lambda = \mathbf{R}$) поэтому проверка, что функция f — закон сохранения сводится к проверке того, что каждая из n координатных функций от функции f есть инвариант.

11.2.3 Законы сохранения для класса.

Пусть $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ некоторое семейство подмножеств $S_\alpha \subset \mathrm{GL}(\mathbf{A})$.

Определение 11.2.4 *Функция f — закон сохранения для семейства $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, если она закон сохранения для каждого множества $S_\alpha \subset \mathrm{GL}(\mathbf{A})$, $\alpha \in \mathcal{A}$.*

Итак, функция f — закон сохранения для каждого множества $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда она закон сохранения для множества $S = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} S_\alpha$.

Рассмотрим сначала законы сохранения для семейств групп Ли.

Лемма 11.2.4 *Сиплая функция f — закон сохранения семейства групп Ли $\{\mathrm{Expm}(L_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда она — закон сохранения для группы Ли $\mathrm{Expm}(\overline{\mathrm{ali}}(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} L_\alpha))$.*

Доказательство. Пусть $L \equiv \overline{\mathrm{ali}}(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} L_\alpha)$. При каждом $\alpha \in \mathcal{A}$ верно $L \supset L_\alpha$, поэтому $\mathrm{Exp}(L) \supset \mathrm{Exp}(L_\alpha)$. Итак, $\mathrm{Exp}(L) \supset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathrm{Exp}(L_\alpha)$ и $\mathrm{Exp}(L) \supset \mathrm{gr}(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathrm{Exp}(L_\alpha))$. Согласно лемме 10.4.4 подгруппа $\mathrm{gr}(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathrm{Exp}(L_\alpha))$ всюду плотна в топологической группе $\mathrm{Expm}(L)$, а следовательно и в топологической группе $\mathrm{Exph}(L)$. Итак, замыкания в топологической группе $\mathrm{GL}(\mathbf{A})$ подгрупп $\mathrm{Exp}(L)$ и $\mathrm{gr}(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathrm{Exp}(L_\alpha))$ совпадают. Из леммы 11.2.3 вытекает справедливость леммы 11.2.4. $\diamondsuit$

Перейдем к лоду.

Определение 11.2.5 *Функция f — закон сохранения для класса лоду Φ, если она — закон сохранения для каждого лоду из этого класса.*

Класс лоду Φ вида (11.2.2) задаётся множеством функций $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, $A_\alpha \in L_{loc}(I_\alpha)$. *Суммирующей алгеброй Ли класса лоду* Φ назовём алгебру Ли $L \equiv \overline{\mathrm{ali}}(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \overline{\mathrm{ali}}(A_\alpha))$, а *суммирующей группой Ли класса лоду* Φ группу Ли $\mathrm{Expm}(L)$.

Аналогично для семейства замкнутых групп Ли $\{L_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ замкнутую алгебру Ли $L \equiv \overline{\mathrm{ali}}(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} L_\alpha)$ назовём *суммирующей алгеброй Ли семейства алгебр Ли* $\{L_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, а группу Ли $\mathrm{Expm}(L)$ — *суммирующей группой Ли семейства групп Ли* $\{\mathrm{Expm}(L_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$.

Теорема 11.2.2 *Сиплая функция f — закон сохранения для класса лоду Φ тогда и только тогда, когда она закон сохранения для суммирующей группы Ли этого класса.*

Доказательство. Функция f — закон сохранения для класса лоду Φ тогда и только тогда, когда она закон сохранения для каждого лоду этого класса с функцией $A_\alpha \in L_{loc}(I_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$. По теореме 11.2.1 функция f — закон сохранения для каждого лоду с функцией A_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ тогда и только тогда когда она — закон сохранения для каждой группы Ли $\mathrm{Expm}\,(\overline{\mathrm{ali}}\,(A_\alpha))$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Согласно лемме 4 функция f — закон сохранения для семейства групп Ли $\{\mathrm{Expm}\,(\overline{\mathrm{ali}}\,(A_\alpha))\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда она — закон сохранения для суммирующей группы Ли $\mathrm{Expm}\,(\overline{\mathrm{ali}}\,(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \overline{\mathrm{ali}}\,(A_\alpha)))$. $\diamondsuit$

Рассмотрим вопрос о построении алгебры Ли L класса лоду Φ

$$L \equiv \overline{\mathrm{ali}}\,(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \overline{\mathrm{ali}}\,(A_\alpha)). \tag{11.2.3}$$

По следствию 11.1.1 для любого индекса $\alpha \in \mathcal{A}$ и любого подмножества $I'_\alpha \subset I_{A_\alpha}$ полной меры верно

$$\overline{\mathrm{ali}}\,(A_\alpha) = \overline{\mathrm{ali}}\,(A_\alpha(I'_\alpha)). \tag{11.2.4}$$

Утверждение 11.2.3 *Если при каждом $\alpha \in \mathcal{A}$ множество $I'_\alpha \subset I_{A_\alpha}$ полной меры, то*

$$\overline{\mathrm{ali}}\,(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \overline{\mathrm{ali}}\,(A_\alpha)) = \overline{\mathrm{ali}}\,(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha(I'_\alpha)). \tag{11.2.5}$$

Доказательство. Так как для каждого индекса $\alpha \in \mathcal{A}$ верно включение $\overline{\mathrm{ali}}\,(A_\alpha) \supset A_\alpha(I_{A_\alpha}) \supset A_\alpha(I'_\alpha)$ по лемме 11.1.1, то верно включение $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \overline{\mathrm{ali}}\,(A_\alpha) \supset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha(I'_\alpha)$, а следовательно и включение

$$\overline{\mathrm{ali}}\,(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \overline{\mathrm{ali}}\,(A_\alpha)) \supset \overline{\mathrm{ali}}\,(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha(I'_\alpha)). \tag{11.2.6}$$

С другой стороны, по определению множества $\overline{\mathrm{ali}}\,(A_\alpha)$ верно включение $\overline{\mathrm{ali}}\,(A_\alpha) \subset \overline{\mathrm{ali}}\,(A_\alpha(I'_\alpha))$ при каждом $\alpha \in \mathcal{A}$, поэтому верно и включение

$$\overline{\mathrm{ali}}\,(A_\alpha) \subset \overline{\mathrm{ali}}\,(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha(I'_\alpha)),$$

откуда

$$\overline{\mathrm{ali}}\,(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathrm{ali}\,(A_\alpha)) \subset \overline{\mathrm{ali}}\,(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha(I'_\alpha)). \tag{11.2.7}$$

Включения (11.2.6, 11.2.7) доказывают (11.2.5). $\diamondsuit$

Итак, построение сиплого закона сохранения для класса лоду сводится к построению сиплого закона сохранения для одной группы Ли — суммирующей группы Ли этого класса лоду.

11.2.4 Локальные законы сохранения.

При определении законов сохранения для группы Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$ или лоду (11.2.2) мы использовали только то, что множества $\mathrm{Exp}\,(L)$ и $W(I,I)$ есть подмножества группы $\mathrm{GL}_e(\mathbf{A})$ и не использовали какой-либо топологической структуры на $\mathrm{Exp}\,(L)$ или $W(I,I)$. Поэтому закон сохранения для группы Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$ или для групп $\mathrm{Exp}\,(L)$ или $\mathrm{Exph}\,(L)$ — это один и тот же объект. При определении локальных законов сохранения для группы Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$ и лоду (11.2.2) мы уже будем использовать топологию группы $\mathrm{Expm}\,(L)$ и топологию на множестве $W(I,I)$.

Определение 11.2.6 *Функция f, действующая из X в Y, — локальный закон сохранения для группы Ли* $\mathrm{Expm}\,(L)$ *в точке $x_0 \in X$, если существуют окрестность U точки x_0 в пространстве X и окрестность S единицы в топологической группе* $\mathrm{Expm}\,(L)$, *что*

$$\forall x \in U \ \ \forall a \in S \ \Big| \ (ax \in D(f)) \wedge (f(ax) = f(x)). \qquad (11.2.8)$$

Определение 11.2.7 *Функция f, действующая из X в Y, — локальный закон сохранения для лоду (2) в точке $x_0 \in X$, если существует окрестность U точки x_0 в пространстве X и окрестность диагонали F в произведении $J \times J$, что*

$$\forall x \in U \ \ \forall (t_1, t_2) \in F \ \Big| \ (W(t_2, t_1)x \in D(f)) \wedge (f(W(t_2, t_1)x) = f(x)). \qquad (11.2.9)$$

В случае $Y = \mathbf{R}$ локальный закон сохранения в точке x_0 мы называем локантом в точке x_0. *Локальным законом сохранения f на множестве $Q \subset X$* мы называем локальный закон сохранения f в каждой точке этого множества.

Из определений 11.2.6, 11.2.7 и теоремы 11.1.1 вытекает.

Утверждение 11.2.4 *Если функция f — локальный закон сохранения в точке $x_0 \in X$ для группы Ли лоду, то она и локальный закон сохранения в точке $x_0 \in X$ и для самого лоду.*

Доказательство. Пусть функция — локальный закон сохранения в точке $x_0 \in X$ для группы Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$ лоду (11.2.2). Тогда выполнено определение 11.2.6 и соотношение (11.2.8). По теореме 11.1.1 отображение $W : J \times J \to \mathrm{Expm}\,(L)$ непрерывно, поэтому существует окрестность диагонали $F \subset J \times J$, что $W(F) \subset S$. Тогда из соотношения (11.2.8) вытекает соотношение (11.2.9). $\diamondsuit$

Обратный вопрос: когда локальный закон сохранения в точке для лоду является локальным законом сохранения в точке для группы Ли лоду? — мы обсудим в следующем параграфе.

Всякий закон сохранения f является, как это следует из определений локальным законом сохранения на открытом ядре множества $D(f)$. Основной вопрос следующего параграфа: когда локальный закон сохранения f, определенный на открытом множестве $D(f)$ является законом сохранения? Чтобы подчеркнуть отличие от локального закона сохранения на множестве мы будем также называть закон сохранения — *глобальным законом сохранения.* На основании рассуждений п.11.2.2 о связи законов сохранения и инвариантов мы далее ограничимся изучением инвариантов и локальных инвариантов. Причём инварианты мы будем называть также *глобальными инвариантами*, а локальные инварианты — *локантами.* Если для изучения законов сохранения удобным класс непрерывных функций f с открытой или замкнутой областью определения (сиплых функций), то для изучения локальных законов сохранения более удобным оказывается класс дифференцируемых функций f, определенных на открытом подмножестве $D(f) \subset X$, которые мы назовём *гладкими.*

Аналогично предыдущему пункту вводятся понятия локального закона сохранения для класса лоду и локального закона сохранения для класса группы Ли.

Определение 11.2.8 *Функция f — локальный закон сохранения для класса лоду Φ (групп Ли Ψ) в точке $x_0 \in D(f)$, если она — локальный закон сохранения в точке x_0 для каждого лоду (группы Ли) из этого класса.*

Соответственно функцию f мы называем локальным законом сохранения для класса Φ на множестве $Q \subset D(f)$, если она локальный закон сохранения для класса Φ в каждой точке $x_0 \in Q$.

§11.3 Построение инвариантов из локантов

Продолжим рассмотрения предыдущего параграфа, полагая в этом параграфе $X \equiv M(n \times m, \mathbf{R})$, $\mathbf{A} \equiv M(n, \mathbf{R})$, $Y \equiv \mathbf{R}$, f — функция, действующая из $M(n \times m, \mathbf{R})$ в $\mathbf{R}$.

Определение 11.3.1 *Функцию f, действующую из банахова пространства $X = M(n \times m, \mathbf{R})$ в $\mathbf{R}$ мы называем гладкой, если её область определения $D(f) \subset X$ — открытое множество и функция f непрерывно дифференцируема на $D(f)$.*

Далее в этом параграфе поле скаляров $\Lambda = \mathbf{R}$ и мы опускаем символ $\mathbf{R}$ в обозначениях пространства матриц $M(n \times m, \mathbf{R}) \equiv M(n \times m), M(s, \mathbf{R}) \equiv M(s)$.

11.3.1 Подалгебра Ли $\mathrm{Vo}_{n,m}(G)$ линейных векторных полей

Пусть $G \subset \mathbf{R}^s$ открытое подмножество, $s \in \mathbf{N}$, $C_s^{(\infty)}(G)$ — алгебра Ли векторных полей из § 5.3 и $\mathrm{Vo}(G) \subset C_s^{(\infty)}(G)$ подалгебра Ли линейных векторных полей вида $u(x) = Cx$, где $C \in M(s)$ — постоянная матрица, $x \in G$. В случае $s = nm$, $n \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$ занумеруем координаты x_α вектора $x \in \mathbf{R}^s$ парами индексов $\alpha = (i, j)$, $i \in \overline{1, n}$, $j \in \overline{1, m}$ и получим матрицу $n \times m$, которую в этом пункте вместо символа x будем обозначать символом $A \in M(n \times m)$.

Пусть $E \in M(m)$ единичная матрица, а $B \in M(n)$ произвольная матрица, тензорное произведение матриц $B \otimes E$ есть квадратная матрица из $M(s)$. Все тензорные произведения $B \otimes E$, т.е. множество $M(n) \otimes E \subset M(s)$ образуют подалгебру алгебры $M(s)$ изоморфную алгебре $M(n)$ ([9], с.349). Итак, мы получаем подалгебру Ли линейных векторных полей $\mathrm{Vo}_{n,m}(G) \subset \mathrm{Vo}(G)$, изоморфную алгебре Ли матрицу $M(n)$. Если $C = B \otimes E$, где $B \in M(n)$, то при $\alpha = (p, q)$, $\beta = (i, j)$, где $p, i \in \overline{1, n}$, а $q, j \in \overline{1, m}$, верно

$$c_{\alpha\beta} = b_{pi}\delta_{qj}, \tag{11.3.1}$$

здесь δ_{qj} — символ Кронекера. Тогда действие матрицы $C = B \otimes E$ на вектор $x \in \mathbf{R}^s$, который записывается в матричном виде как матрица $A \in M(n \times m)$, есть

$$(Cx)_\alpha = c_{\alpha\beta}x_\beta = c_{(p,q)(i,j)}a_{ij} = b_{pi}\delta_{qj}a_{ij} = b_{pi}a_{iq} = (BA)_{pq}. \tag{11.3.2}$$

Если мы вектора из $\mathbf{R}^s$ записываем как матрицы, то и векторное поле на $G \subset M(n \times m)$ записываем как матричное поле $U(A)$, т.е. $U(A)$ — функция, определенная на G, со значениями в $M(n \times m)$. Соответствующий векторному полю $U(A)$ линейный дифференциальный оператор $D_U : C_s^{(\infty)}(G) \to C_s^{(\infty)}(G)$ согласно § 6.1 будет для $f \in C^{(\infty)}(G)$:

$$D_U(f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_{ij}\frac{\partial f(A)}{\partial a_{ij}}. \tag{11.3.3}$$

Используем обозначения § 6.1 для производной скалярной функции от матрицы и для скалярного произведения матриц, согласно которым

$$\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)_{ji}(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)^{\top}_{ij}(A) \tag{11.3.4}$$

и производная $\frac{\partial f}{\partial A}$ есть матрица из $M(m \times n)$. Линейный дифференциальный оператор (11.3.3) записывается в этих обозначениях в виде

$$D_U(f) = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)^{\top}(A), U(A) \right\rangle. \tag{11.3.5}$$

Если $U \in \mathrm{Vo}_{n,m}(G)$, имеем $U(A) = (B \otimes E)A = BA$ и

$$D_U(f) = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)^{\top}(A), BA \right\rangle. \tag{11.3.6}$$

В случае $s = n$, $m = 1$ из (11.3.6) получаем выражение

$$D_U(f) = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)^{\top}(A), BA \right\rangle = \left\langle E_1, \frac{\partial f}{\partial A}(A)BA \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x)Bx, \tag{11.3.7}$$

ибо $C = B$, $x = A \in M(n\times 1)$, (см. § 6.1 — свойства скалярного произведения матриц).

Замечание 11.3.1 *Наши обозначения для производной от скалярной функции векторного аргумента по векторному аргументу в этом параграфе согласованы с обозначениями § 5.4, § 6.1 и отличны от обозначений п. 4.6.7. В §4.6 п. 4.6.7 мы записываем производную числовой функции $f(x)$ по векторному аргументу $x \in \mathbf{R}$ как столбец* $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_s}(x) \end{pmatrix}$, *а в § 5.4, § 6.1 и настоящем — как строку* $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots \frac{\partial f}{\partial x_s}(x)\right)$.

11.3.2 Локанты и инварианты группы Ли и лоду.

В этом пункте мы опираемся на критерии локанта и инварианта группы Ли из § 4.6 — леммы 4.6.7 и 4.6.8. Рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (11.2.2) с $A \in L_{loc}(I)$, $X = M(n\times m)$, $x \in M(n\times m)$, $\mathbf{A} = M(n)$, $L = \overline{\mathrm{ali}}\,(A)$. При этом $\overline{\mathrm{ali}}\,(A) = \mathrm{ali}\,(A)$, ибо алгебра Ли $\mathbf{A}$ конечномерна.

Лемма 11.3.1 *Пусть f гладкая функция и $x \in D(f)$, следующие утверждения эквивалентны:*

1) f локант в точке x_0 для лоду;

2) f локант в точке x_0 для группы Ли лоду;

3) существует открытая окрестность U точки x_0, что верно

$$\forall x \in U\ \forall t \in I_A \ \Big|\ \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\top}(x), A(t)x \right\rangle = 0; \tag{11.3.8}$$

4) существует открытая окрестность U точки x_0, что верно

$$\forall x \in U\ \forall B \in \overline{\mathrm{ali}}\,(A) \ \Big|\ \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\top}(x), Bx \right\rangle = 0. \tag{11.3.9}$$

Доказательство. Существует согласно теореме 11.1.2 множество полной меры $I' \subset I_A$, не содержащее концевых точек интервала I, что при $t \in I'$ функция $W(t, t_2)$ дифференцируема по t и верно

$$\frac{d}{dt}W(t, t_2) = A(t)W(t, t_2). \tag{11.3.10}$$

Введём следующее утверждение:

5) существует окрестность U точки x_0, что верно

$$\forall x \in U \ \forall t \in I' \ \Big| \ \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\top}(x), A(t)x \right\rangle = 0. \qquad (11.3.11)$$

Между утверждениями 1) - 5) имеют место следования.

3) $\Rightarrow$ 5). Ибо $I' \subset I_A$.

5) $\Rightarrow$ 4). Ибо $\overline{\mathrm{ali}}\,(A(I')) = \overline{\mathrm{ali}}\,(A)$ по следствию 11.1.1 и по теореме 5.4.2 из равенств $\left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\top}(x), A(I')x \right\rangle = 0$ на множестве U следует, что и $\left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\top}(x), \mathrm{ali}\,(A(I'))x \right\rangle = 0$ на множестве U. Но $\mathrm{ali}\,(A(I')) = \overline{\mathrm{ali}}\,(A(I'))$, так как алгебра Ли $M(n)$ конечномерна.

4) $\Rightarrow$ 3). Ибо $\overline{\mathrm{ali}}\,(A) \supset A(I_A)$ по лемме 11.1.1.

4) $\Rightarrow$ 2). По лемме 4.6.7.

2) $\Rightarrow$ 1). По утверждению 11.2.4.

1) $\Rightarrow$ 5). Если выполнено утверждение 1), то существует открытая окрестность U точки x_0 и окрестность диагонали $F \subset I \times I$, что верно

$$\forall x \in U \ \forall (t_2, t_1) \in F \ \Big| \ (W(t_2,t_1)x \in D(f)) \bigwedge (f(W(t_2,t_1)x) = f(x)). \qquad (11.3.12)$$

Для $x \in U$ и $t \in I'$ дифференцируем равенство $f(W(t_2,t)x) = f(x)$ в точке $t_2 = t$ по аргументу t_2, получаем

$$\left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\top}(W(t,t)x), \frac{d}{dt_2}W(t_2,t)x\Big|_{t_2=t} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\top}(x), A(t)x \right\rangle = 0, \qquad (11.3.13)$$

ибо $W(t,t) = E$ и $\frac{d}{dt_2}W(t_2,t)\Big|_{t_2=t} = A(t)W(t,t) = A(t)$ в силу принадлежности $t \in I'$. Утверждение 5) выполнено.

Мы доказали следования 3) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 5) и 4) $\Rightarrow$ 3), поэтому утверждения 1) - 5) эквивалентны. $\diamondsuit$

Итак, построение локанта для лоду сводится к построению локанта для группы Ли этого лоду.

Далее нам удобно использовать следующий факт, вытекающий из леммы 11.3.1.

Лемма 11.3.2 *Пусть f гладкая функция и $Q \subset D(f)$ открытое множество, следующие утверждения эквивалентны:*

1) f локант на множестве Q для лоду;

2) f локант на множестве Q для группы Ли лоду;

3) $\forall x \in Q \ \forall t \in I_A \ \Big| \ \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\top}(x), A(t)x \right\rangle = 0;$

4) $\forall x \in Q \ \forall B \in \overline{\mathrm{ali}}\,(A) \ \Big| \ \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\top}(x), Bx \right\rangle = 0.$

Всякий инвариант f на открытом множестве $Q \subset D(f)$ является локантом как следует из определений. Всякий инвариант f группы Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$, определенный на открытом множестве $D(f)$: 1) является локантом для своей области определения $D(f)$; 2) группа симметрий множества $D(f)$ содержит группу Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$. Для гладкой функции f условий 1), 2) и достаточно в силу леммы 4.6.8, чтобы функция f была инвариантом. Переформулируем здесь лемму 4.6.8 в форме следующей теоремы.

Теорема 11.3.1 *Для гладкой функции f следующие утверждения эквивалентны:*

1) f инвариант для группы Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$*;*

2) f локант для группы Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$ *на множестве $D(f)$ и $Z(D(f)) \supset \mathrm{Expm}\,(L)$;*

3) $\left(\forall x \in D(f) \;\middle|\; \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\top}(x), Lx \right\rangle = 0\right) \bigwedge (Z(D(f)) \supset \mathrm{Expm}\,(L)).$

Здесь $Z(Q)$ — группа симметрий множества Q в обозначениях п. 4.1.2.

Следствие 11.3.1 *Если f — гладкая функция и $D(f) = M(n \times m)$ или $D(f) = \mathrm{GL}\,(n \times m)$ или $D(f) = M(n \times m) \setminus \{0\}$, то следующие утверждения эквивалентны:*

1) f инвариант для группы Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$*;*

2) f локант группы Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$ *на множестве $D(f)$;*

3) $\forall x \in D(f) \;\middle|\; \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\top}(x), Lx \right\rangle = 0;$

ибо $Z(M(n \times m)) = Z(M(n \times m) \setminus \{0\}) = Z(\mathrm{GL}\,(M(n \times m))) = \mathrm{GL}\,(n) = \mathrm{GL}\,(\mathbf{A}).$

По лемме 11.3.1 гладкие локанты для лоду и его группы Ли совпадают. Согласно теореме 11.2.1 сиплые, а следовательно и гладкие инварианты для лоду и его группы Ли совпадают. Итак, в классе гладких функций вопрос о построении локантов и инвариантов для лоду сводится к вопросу о построении локантов и инвариантов для группы Ли этого лоду.

11.3.3 Локанты для семейств лоду и групп Ли.

Перейдем от одной группы Ли к семейству групп Ли.

Лемма 11.3.3 *Пусть f — гладкая функция, $Q \subset D(f)$ — открытое подмножество,* $\mathrm{Expm}\,(L)$ *— суммирующая группа Ли семейства групп Ли* $\{\mathrm{Expm}\,(L_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) f — локант для семейства $\{\mathrm{Expm}\,(L_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ *групп Ли на множестве Q;*

2) f — локант для группы Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$*, на множестве Q;*

3) $\forall x \in Q \;\middle|\; \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\top}(x), Lx \right\rangle = 0.$

Доказательство. Введём утверждение 4) $\forall \alpha \in \mathcal{A}\, \forall x \in Q \;\middle|\; \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\top}(x), L_\alpha x \right\rangle = 0.$ Справедливы следования.

2) $\Leftrightarrow$ 3). По лемме 4.6.7.

1) $\Leftrightarrow$ 4). По лемме 4.6.7.

3) $\Rightarrow$ 4). Ибо при каждом $\alpha \in \mathcal{A}$ верно $L \supset L_\alpha$.

4) $\Rightarrow$ 3). По лемме 5.4.2, ибо $\mathrm{ali}\,(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} L_\alpha) = \overline{\mathrm{ali}}\,(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} L_\alpha) = L$ в силу конечномерности алгебры $\mathbf{A}$.

Итак, верны эквивалентности 2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4) $\Leftrightarrow$ 1). $\diamondsuit$

Из лемм 11.3.2 и 11.3.3 вытекает.

Теорема 11.3.2 *Гладкая функция f — локант для класса лоду на открытом множестве $Q \subset D(f)$ тогда и только тогда, когда она локант на множестве Q для суммирующей группы Ли этого класса лоду.*

Итак, как для одного лоду, так и для класса лоду задача о построении гладких локантов и инвариантов сводится к задаче о построении локантов и инвариантов для суммирующей группы Ли. Вопрос же о построении локантов и инвариантов для группы Ли решается леммами 4.6.7 и 4.6.8.

11.3.4 Линеаризация гамильтоновых систем и инварианты Пуанкаре.

Пусть $p \in \mathbf{R}^n$, $q \in \mathbf{R}^n$ и $H(p,q,t)$ — функция $2n+1$ переменных класса $C^{(2)}(Q)$, где $Q \subset \mathbf{R}^{2n+1}$ открытое подмножество, функции $H(p,q,t)$ сопоставляется система $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dq_i}{dt} & = & \frac{\partial H(p,q,t)}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} & = & -\frac{\partial H(p,q,t)}{\partial q_i} \end{array} \right. , \quad i \in \overline{1,n} \tag{11.3.14}$$

называемая системой уравнений Гамильтона. Введём вектор $\binom{q}{p} \equiv \xi \in \mathbf{R}^{2n}$ и блочную матрицу $\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \equiv J \in M(2n)$ и запишем уравнения (11.3.14) в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = J \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right)^{\top} (\xi, t). \tag{11.3.15}$$

Линеаризируя систему (11.3.15) на решении $\xi = \xi(t)$ даёт линейную систему

$$\dot{x} = JB(\xi(t))x, \quad t \in I, \tag{11.3.16}$$

где $x \in \mathbf{R}^{2n}$, $B(t) \in M(2n)$ и $(B(t))_{ij} \equiv \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi,t)\Big|_{\xi=\xi(t)}$, $i \in \overline{1,2n}$, $j \in \overline{1,2n}$. Матрица $B(t) \in Ms(2n)$ как матрица вторых частных производных по теореме Юнга.

Все лоду вида (11.3.16), полученные когда $H(p,q,t)$ пробегает все функции класса $C^{(2)}(Q)$ при всех $Q \subset \mathbf{R}^{2n}$, при всех решениях $\xi(t)$ уравнения (11.3.15) и всех интервалах $I \subset \mathbf{R}$ образуют класс линеаризаций гамильтоновых систем который мы обозначим Hamlin. Суммирующая алгебра Ли класса Hamlin есть JMs, где $Ms \equiv Ms(2n) \subset M(2n)$ множество симметричных матриц $2n \times 2n$.

Функция $H(p,q)$ или гамильтониан называется квадратичной, если $H(p,q,t) = H(\xi) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{i=1}^{2n} b_{ij}\xi_i\xi_j$, где $B \in Ms(2n)$ — постоянная матрица. Класс линеаризаций квадратичных гамильтоновых систем обозначим $\mathrm{Hamsqlin}$. Суммирующая алгебра Ли класса $\mathrm{Hamsqlin}$ также равна JMs.

Согласно § 11.2, § 11.3 гладкие локанты и инварианты для семейства линеаризаций гамильтоновых систем совпадают с локантами и инвариантами для группы Ли $\mathrm{Expm}\,(JMs)$. Согласно теореме 10.5.1 группа Ли $\mathrm{Expm}\,(JMs)$ есть замкнутая группа Ли и совпадает с группой $\Gamma e(J)$ — симплектической группой. Для симплектической группы $\Gamma e(J)$ в силу антиинволютивности матрицы J по утверждению 10.5.8 и следствию 10.5.1 верно $\Gamma e(J) = \Gamma e^{\top}(J) = \Delta e(J)$.

Согласно теореме 6.3.2 каждый гладкий локант f для группы $\Delta e(J)$ в некоторой окрестности любой точки $A \in \mathrm{GL}\,(2n \times m)$ представим в виде

$$f = \varphi(A^{\top}JA), \tag{11.3.17}$$

где $\varphi \in C^{(1)}(M(m))$, т.е. как непрерывно дифференцируемая функция m^2 координат матрицы $A^{\top}JA$. Итак, m^2 координат матрицы $A^{\top}JA$ образуют базис локантов на пространстве $M(2n \times m)$ для симплектической группы $\Delta e(J)$. Функция $A^{\top}JA$ отображает банахово пространство $X \equiv M(2n \times m)$ в банахово пространство $Y \equiv M(m)$ и является законом сохранения группы $\Delta(J)$, определенным на всем пространстве $X = M(2n \times m)$. Таким образом, любая функция вида (11.3.17) есть инвариант группы $\Delta(J)$ определенный на всем пространстве.

Если рассматривать матрицу $A \in M(2n \times m)$ как набор m столбцов $a_1, a_2, \cdots a_m \in \mathbf{R}^{2n}$, то любой гладкий локант симплектической группы локально на множестве невырожденных матриц $\mathrm{GL}\,(2n \times m)$ должен быть функцией лишь всех симплектических скалярных произведений

$$\langle a_i, a_j \rangle_J \equiv \langle a_i, Ja_j \rangle; \quad i, j \in \overline{1, m}. \tag{11.3.18}$$

Наблюдая за изменениями матрицы $A(t)$ во времени согласно уравнению

$$\dot{A}(t) = JB(t)A, \quad t \in I, \tag{11.3.19}$$

мы наблюдаем за одновременным переносом вдоль траектории гамильтоновой системы m векторов в касательном многообразии. Мы описали, таким образом, сохранение симплектической структуры в касательном многообразии. Более того, мы показали, что единственные законы сохранения, общие для всех линеаризаций гамильтоновых систем есть закон сохранения симплектической структуры и его следствия.

Инварианты линеаризаций гамильтоновых систем соответствует интегральным инвариантам Пуанкаре гамильтоновых систем и более общё инварианты линеаризаций системы обыкновенных дифференциальных уравнений соответствуют интегральным инвариантам исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [54], с.20). Поэтому построенная в этой главе схема описания локантов и инвариантов лоду позволяет изучать существование и находить интегральные инварианты систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида (не только гамильтоновых) путём построения суммирующей группы Ли класса их линеаризаций.

11.3.5 Уравнение $\dot{\vec{x}} = [\vec{\omega}(t), \vec{x}(t)]$ в $\mathbf{R}^3$.

Рассмотрим уравнение для вектора $\vec{x}(t)$ в $\mathbf{R}^3$ вида

$$\dot{\vec{x}}(t) = [\vec{\omega}(t), \vec{x}(t)], \quad t \in I, \tag{11.3.20}$$

где $\vec{\omega}(t) \in \mathbf{R}^3$ заданная вектор-функция времени, локально суммируемая. Перейдем от векторных обозначений к матричным, т.е. запишем вектор $\vec{x}$ как столбец координат $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$. Введём матрицу

$$A(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.3.21}$$

Она кососимметрична $A \in Ma(3)$. Уравнению (11.3.20) теперь соответствует уравнение

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in I. \tag{11.3.22}$$

Алгебра Ли $Ma(3)$ мажорирует лоду (11.3.22), причём $Ma(3) = \overline{\mathrm{ali}}\,(A)$, если функция $A(t)$ непрерывна и $\dim(A(I)) = 3$.

Будем теперь рассматривать лоду (11.3.22) с $X = M(3 \times m)$ и $x(t) \in X$. Если функции $\vec{\omega}(t)$ пробегает весь класс локально суммируемых вектор-функций на всевозможных интервалах I, то уравнения (11.3.22) с $X = M(3 \times m)$ пробегают класс лоду Φ, для которого суммирующая алгебра Ли есть $Ma(3)$. Суммирующая группа Ли класса Φ

тогда есть $\mathrm{Expm}\,(Ma(3))$. Согласно теореме 10.5.1 группа Ли $\mathrm{Expm}\,(Ma(3))$ замкнута к $\mathrm{Expm}\,(Ma(3)) = \Gamma e(E)$. Причём согласно п. 10.5.2 верно $\Gamma e(E) = \Gamma e^{\top}(E) = \Delta e(E)$.

Согласно теореме 6.3.2 любой гладкий локант f для семейства лоду Φ в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathrm{GL}\,(3 \times m) \cap D(f)$ представим в виде

$$f(x) = \psi(x^{\top}x), \tag{11.3.23}$$

где $\psi \in C^{(1)}(M(m))$. Наоборот, любая функция f вида (11.3.23) на пространстве $M(3 \times m)$ есть инвариант для класса лоду Φ.

Функция $W(t, t_1)$, соответствующая лоду (11.3.22) согласно теореме 11.1.1 задаёт непрерывное отображение $W : I \times I \to \Gamma e(E)$. Т.е. матрица $W(t, t_1)$ совершает непрерывное движение по ортогональной группе $\Gamma e(E)$ при изменении t и t_1. Так как $x(t) = W(t, t_1)x(t_1)$, то уравнение (11.3.20) описывает ортогональное вращение системы m векторов как твердого тела с мгновенной угловой скоростью $\vec{\omega}(t)$ и ортогональная матрица $W(t_2, t_1)$ есть ортогональный поворот из положения в момент времени $t = t_1$ в положение в момент времени $t = t_2$.

Введём линейное отображение $\mathrm{Sw} : \mathbf{R}^3 \to Ma(3)$, сопоставляющее каждому вектору $x \in \mathbf{R}^3$ кососимметрическую матрицу $\mathrm{Sw}\,(x) \equiv \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$. Линейное отображение Sw есть изоморфизм линейных пространств $\mathbf{R}^3$ и $Ma(3)$. Так как матрица поворота $W(t, t_1)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}W(t, t_1) = A(t)W(t, t_1), \tag{11.3.24}$$

то следующее выражение является определением мгновенной угловой скорости вращения твердого тела

$$\omega(t) = \mathrm{Sw}^{-1}\left(\left(\frac{d}{dt}W(t, t_1)\right) W^{-1}(t, t_2)\right), \tag{11.3.25}$$

где $\omega(t) \equiv \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix}$.

Непосредственно проверяется, что для любых $x \in \mathbf{R}^3$ и $y \in \mathbf{R}^3$ верно

$$\mathrm{Sw}\,([x, y]) = [\,\mathrm{Sw}\,(x), \mathrm{Sw}\,(y)], \tag{11.3.26}$$

т.е. что отображение $\mathrm{Sw} : \mathbf{R}^3 \to Ma(3)$ изоморфизм алгебры Ли векторов $\mathbf{R}^3$ с операцией коммутирования как векторным произведением векторов и алгебры Ли кососимметричных матриц $Ma(3)$ с обычной операцией коммутирования матриц. Кроме того, для любых $x \in \mathbf{R}^3$, $y \in \mathbf{R}^3$ верно

$$\mathrm{Sw}\,(x)y = [x, y]. \tag{11.3.27}$$

§11.4 Локальные и глобальные решения линейного однородного уравнения в частных производных

В этом параграфе поле чисел вещественно, $\Lambda = \mathbf{R}$.

11.4.1 Общее описание локальных решений.

В § 5.3 мы ввели алгебру Ли $ALC_n^{(\infty)}(W)$ векторных полей $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ класса $C_n^{(\infty)}(W)$ на открытом множестве $W \subset \mathbf{R}^n$. Алгебра Ли $ALC_n^{(\infty)}(W)$ изоморфна алгебре Ли $D(C_n^{(\infty)}(W))$ линейных дифференциальных операторов на пространстве $C^{(\infty)}(W)$ вида

$$D_f(u) \equiv \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \equiv \frac{\partial u}{\partial x}(x)f(x), \quad u(x) \in C^{\infty}(W).$$

Заметим, что в отличие от обозначений предыдущего параграфа здесь $u(x)$ — скалярная функция, а $f(x)$ — вектор-функция.

В § 5.4 мы рассмотрели систему уравнений для одной функции $u(x) \in C^{(1)}(W)$ вида

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x)F(x) = 0, \tag{11.4.1}$$

где $F \subset ALC_n^{(\infty)}(W)$ некоторое подмножество, и установили, что функция $u(x)$ — решение системы (11.4.1) на множестве W тогда и только тогда, когда она — решение системы

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{ali}\,(F)(x) = 0, \tag{11.4.2}$$

на множестве W.

Для краткости далее в этом тексте введём термин "иф"≡ "тогда и только тогда, когда". С помощью этого термина предыдущее утверждение прозвучит следующим образом. Функция $u(x) \in C^{(2)}(W)$ — решение системы (11.4.1) на множестве W иф функция $u(x)$ — решение системы (11.4.2) на множестве W.

В случае двух функций отсюда следует, что если выполнены уравнения $\frac{\partial u}{\partial x}f^1(x) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x)f^2(x) = 0$ на множестве W и f^1, $f^2 \in ALC_n^{(\infty)}(W)$, то выполнено и уравнение $\frac{\partial u}{\partial x}(x)f^3(x) = 0$, где $f^3 = [f^1, f^2]$.

Определение 11.4.1 *Функцию $u(x)$ назовём локальным решением системы (11.4.1) в точке $x^0 \in W$, если существует открытая окрестность $W_1 \subset W$ точки x^0 в которой функция $u(x)$ определена, непрерывно дифференцируема и удовлетворяет системе (11.4.1). Функцию $u \in C^{(1)}(W)$, удовлетворяющую системе (11.4.1) всюду в W назовём глобальным решением.*

На основании результатов § 5.4 множество локальных решений системы (11.4.1) определяется алгеброй Ли $\mathrm{ali}\,(F)$ и описывается следующим образом. Если $x^0 \in W$ — точка непрерывности функции $\mathrm{rank}\,(\,\mathrm{ali}\,(F)(x))$, и $k \equiv n - \mathrm{rank}\,(\,\mathrm{ali}\,(F)(x^0))$, то существует k локальных решений $u_1(x), u_2(x), \dots u_k(x)$ уравнения (11.4.1) в точке x^0, являющихся бесконечно дифференцируемыми функциями, причём $\mathrm{dep}\,(u_1(x^0), u_2(x^0),$

$\dots u_k(x^0)) = k$. Если $u(x)$ — произвольное локальное решение системы (11.4.1) в точке x^0, то в некоторой окрестности точки x^0 оно представимо в виде

$$u(x) = \varphi(u_1(x), u_2(x), \dots u_k(x)), \tag{11.4.3}$$

где $\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^k)$. При этом, если множество $F \subset AZC_n^{(\omega)}(W)$, т.е. состоит из аналитических вектор-функций, то функции $u_1(x), u_2(x), \dots u_k(x))$ также можно выбрать аналитическими.

В случае одного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) f(x) = 0, \tag{11.4.4}$$

т.е. когда $F(x) = \{f(x)\}$ мы получаем, что $\operatorname{ali}(F) = \mathbf{R}f$ и если $f(x^0) \neq 0$, то существует $(n-1)$ локальное решение уравнения (11.4.3) $u_1(x), u_2(x), \dots u_{n-1}(x)$ бесконечно дифференцируемое и $\operatorname{dep}(u_1(x^0), u_2(x^0), \dots u_{n-1}(x^0)) = n-1$ и всякое локальное решение $u(x)$ в точке x^0 в некоторой окрестности точки x^0 представимо в виде

$$u(x) = \varphi(u_1(x), u_2(x), \dots u_{n-1}(x)), \tag{11.4.5}$$

где $\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^{n-1})$. Отметим, что, наоборот, при любой функции $\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^{n-1})$ выражение (11.4.5) даёт локальное решение уравнения (11.4.4) в точке x^0. Аналогично, при любой функции $\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^k)$ выражение (11.4.3) даёт локальное решение системы (11.4.1) в точке x^0.

Итак, множество локальных решений системы (11.4.1) в точке x^0 описывается с помощью произвольной функции $\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^k)$, а множество локальных решений системы (11.4.4) в точке x^0 описывается с помощью произвольной функции $\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^{n-1})$. Возникает вопрос об описании множества глобальных решений системы (11.4.1) и уравнения (11.4.4) во всей области W. Мы покажем в пунктах 11.4.3, 11.4.4, 11.4.5, что описания множества локальных и глобальных решений могут отличаться.

В случае одного уравнения (11.4.4) $\operatorname{ali}(F) = \mathbf{R}f$ и теорема 5.4.2 не приводит к дополнительным уравнениям для функции $u(x)$, как это может быть в случае системы (11.4.1) из двух и более уравнений. Но оказывается условие глобальности решения $u(x)$ уравнения (11.4.4) может порождать дополнительные уравнения на решение $u(x)$, не входящие в алгебру Ли $\mathbf{R}f$ (см. пункты 11.4.5, 11.4.4).

Согласно следствию 5.4.1 множество решений системы (11.4.1) определяется Её алгеброй Ли $\operatorname{ali}(F)$. Далее в этом параграфе мы рассмотрим случаи когда множество $F \subset ALC_n^{(\infty)}(W)$ принадлежит одной из двух простейших подалгебр Ли алгебры $ALC_n^{(\infty)}(W)$ — подалгебре Ли постоянных векторных полей $\operatorname{Vc}(W) \subset ALC_n^{(\infty)}(W)$ из примера 5.3.1 или подалгебре Ли линейных векторных полей $\operatorname{Vo}(W) \subset ALC_n^{(\infty)}(W)$ из примера 5.3.2. Заметим, что $\operatorname{Vc}(W) \subset ALC_n^{(\omega)}(W)$ и $\operatorname{Vo}(W) \subset ALC_n^{(\omega)}(W)$, т.е. вектор-функции $f(x)$ в этом случае вещественно-аналитичны.

11.4.2 Замена переменных в уравнении (11.4.4).

Пусть $W \subset \mathbf{R}^n$ — связное открытое подмножество, т.е. область и $\xi = \xi(x)$ диффеоморфизм класса $C^{(1)}$ области $W \subset \mathbf{R}^n$ на область $G \subset \mathbf{R}^n$. Пусть $v(\xi) \in C^{(1)}(G)$ и $u(x) \equiv v(\xi(x))$, тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) = \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi(x)) \frac{\partial \xi}{\partial x}(x) \tag{11.4.6}$$

и поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) f(x) = \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi(x)) \frac{\partial \xi}{\partial x}(x) f(x). \tag{11.4.7}$$

Таким образом, уравнение (11.4.4) в области W переходит в уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi)\tilde{f}(\xi) = 0 \tag{11.4.8}$$

в области G, где

$$\tilde{f}(\xi) = \frac{\partial \xi}{\partial x}(x(\xi))f(x(\xi)). \tag{11.4.9}$$

В частном случае линейной замены переменных, когда $\xi(x) = Bx$, $B \in \mathrm{GL}\,(n)$ получаем уравнение (11.4.8) в следующем виде

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi)Bf(B^{-1}\xi) = 0. \tag{11.4.10}$$

11.4.3 Уравнения с постоянными коэффициентами.

В этом пункте $W = \mathbf{R}^n$.

Алгебра Ли $\mathrm{Vc}\,(\mathbf{R}^n)$ — векторное пространство изоморфное $\mathbf{R}^n$ и коммутативная алгебра Ли размерности n. Коммутативность алгебры Ли $\mathrm{Vc}\,(\mathbf{R}^n)$ — её важное качество, из которого вытекает ряд свойств решений. Если $f \in \mathrm{Vc}\,(\mathbf{R}^n)$, то $f = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$. Введём стандартное скалярное произведение и будем рассматривать $\mathbf{R}^n$ как евклидово пространство. Если $F \subset \mathrm{Vc}\,(\mathbf{R}^n)$, то $\mathrm{ali}\,(F) = \mathrm{lin}\,(F)$ в силу коммутативности алгебры Ли $\mathrm{Vc}\,(\mathbf{R}^n)$.

Рассмотрим систему (11.4.1) для случая $F \subset \mathrm{Vc}\,(\mathbf{R}^n)$. Выберем в $\mathrm{ali}\,(F) = \mathrm{lin}\,(F)$ ортонормированный базис из m векторов $a^1, a^2, \ldots a^m \in \mathbf{R}^n$ и достроим его векторами $A^{(m+1)}, \ldots a^n$ до ортонормированного базиса в $\mathbf{R}^n$. Положим $A \equiv (a^1, a^2, \ldots a^m)$ — матрица из $M(n \times m)$, $Q \equiv (a^1, a^2, \ldots a^n)$ — матрица из $M(n)$.

Система

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x)F = 0 \tag{11.4.11}$$

эквивалентна системе

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x)A = 0 \tag{11.4.12}$$

в $\mathbf{R}^n$. Проведём замену переменных $\xi = Q^\top x$ и согласно формуле (11.4.10) придем к системе

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi)Q^\top A = 0. \tag{11.4.13}$$

Но по построению $Q^\top A = \binom{E_m}{0} \in M(n \times m)$ и система (11.4.13) есть система m уравнений вида

$$\forall i \in \overline{1,m} \;\Big|\; \frac{\partial v(\xi)}{\partial \xi_i} = 0 \tag{11.4.14}$$

в $\mathbf{R}^n$.

Система (11.4.14) означает, что функция $v(\xi) \in C^{(2)}(\mathbf{R}^n)$ не зависит от переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$, а является лишь функцией переменных $\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \ldots \xi_m$. Общее решение системы (11.4.14) локально есть

$$v(\xi) = \varphi(\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \ldots \xi_n), \tag{11.4.15}$$

где $\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^k), k \equiv n-m$. Общий вид глобального решения системы (11.4.14) также даётся формулой (11.4.15). Итак, в случае $F \subset \mathrm{Vc}(\mathbf{R}^n)$ общее локальное решение и общее глобальное решение системы (11.4.1) описывается одинаково и задаются произвольные функции $\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^k)$.

В терминах функции $u(x)$ общее решение имеет вид

$$u(x) = \varphi(\langle e_1, x\rangle, \langle e_2, x\rangle, \dots \langle e_k, x\rangle), \tag{11.4.16}$$

где $\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^k)$ — произвольная функция, а $e_1, e_2, \dots e_k \in \mathbf{R}^n$ вектора, образующие ортонормированный базис в линейном подпространстве $F^\perp \subset \mathbf{R}^n$.

11.4.4 Уравнения с коэффициентами из $\mathrm{Vo}(W)$.

В этом и следующем пунктах $W = \mathbf{R}^n$ или $W = \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ и $F(x) \subset \mathrm{Vo}(W)$.

Подалгебра Ли $\mathrm{Vo}(W)$ алгебры $ALC_n^{(\infty)}(W)$ изоморфна алгебре Ли матриц $M(n)$ — пример 5.3.2. Если $f(x) \in \mathrm{Vo}(W)$, то $f(x) = Ax$, где $A \in M(n)$. Мы выделили случай $W = \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, ибо точка $x = 0$ — особая точка каждого векторного поля $f \in \mathrm{Vo}(\mathbf{R}^n)$ и мы проводим параллельное рассмотрение с исключением этой особой точки из области определения всех функций.

Если $F(x) \subset \mathrm{Vo}(W)$, то система (11.4.1) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x)Qx = 0, \tag{11.4.17}$$

где $Q \subset M(n)$ — некоторое подмножество матриц. Система (11.4.17) в силу изоморфизма алгебр Ли $\mathrm{Vo}(W)$ и $M(n)$ и по теореме 5.4.2 эквивалентны системе

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x)\,\mathrm{ali}\,(Q)x = 0. \tag{11.4.18}$$

Обозначим алгебру Ли $\mathrm{ali}\,(Q) \equiv L$. Согласно п. 4.6.1 определим для линейного подпространства $L \subset M(n)$ индекс $r_*(L) \equiv m$ и L-основное множество $\mathrm{Bs}\,(L) \subset \mathbf{R}^n$. Множество $\mathrm{Bs}\,(L)$ открыто и всюду плотно в $\mathbf{R}^n$.

По теореме Фробениуса 5.4.1, если точка $x^0 \in \mathrm{Bs}\,(L)$, то существует $k = n - m$ аналитических функций $u_1(x), u_2(x), \dots u_k(x)$, определенных в некоторой окрестности точки x^0 и являющихся в этой окрестности решениями системы (11.4.18), причём $\mathrm{dep}\,(u_1(x^0), u_2(x^0), \dots u_k(x^0)) = k$. Для любых функций $\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^k)$ функция (11.4.3) будет локальным решением системы (11.4.18) в точке x^0 и наоборот, любое локальное решение $u(x)$ системы (11.4.18) в точке x_0 допускает в некоторой окрестности точки x^0 представление (11.4.3). Итак, формула (11.4.3) даёт общий вид локального решения в точке $x^0 \in \mathrm{Bs}\,(L)$. В случае одного уравнения $Q = \{A\}$, где $A \in M(n)$ и при $A \neq 0$ имеем $m = 1, k = n - 1$.

Рассмотрим теперь решение во всей области W, т.е. глобальное решение $u(x)$ системы (11.4.17). По теореме 5.4.2 функция $u(x)$ глобальное решение системы (11.4.17) иф она — глобальное решение системы (11.4.18). По следствию 11.3.1 функция $u(x)$ — глобальное решение системы (11.4.18) иф она гладкий инвариант группы Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$. По лемме 11.2.3 функция $u(x)$ — гладкий инвариант группы Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$ иф она — гладкий инвариант для группы $\overline{\mathrm{Exph}\,(L)}$ — замыкания подгруппы $\mathrm{Exph}\,(L)$ в группе $\mathrm{GL}_e(n)$. По теореме 10.4.1 замкнутая группа $\mathrm{Exph}\,(L)$ есть замкнутая группа Ли $\overline{\mathrm{Exph}\,(L)} = \mathrm{Expm}\,(L_1)$, где $L_1 \subset M(n)$ — алгебра Ли и $L_1 \subset L$. По следствию 11.3.1 функция $u(x)$ — гладкий инвариант для группы Ли $\mathrm{Expm}\,(L_1)$ иф она удовлетворяет в области W системе

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x)L_1x = 0. \tag{11.4.19}$$

Если группа Ли $\mathrm{Expm}\,(L)$ была незамкнута, то $L_1 \supset L$ и $L_1 \neq L$, т.е. система (11.4.19) будет содержать уравнения, не входившие в систему (11.4.18). Итак, если группа Ли $\mathrm{Expm}\,(\,\mathrm{ali}\,(Q))$ незамкнута, то всякое решение системы (11.4.1) в области W удовлетворяет также некоторому дополнительному линейному уравнению, не входящему в систему (11.4.18). Тогда глобальные решения системы (11.4.18) будут составлять более узкое множество, чем локальные решения этой системы. Продемонстрируем это на следующем примере, исходя из замечания 10.3.1.

11.4.5 Пример линейного однородного уравнения первого порядка в частных производных, для которого множества локальных и глобальных решений различны.

Пусть $n = 4$. Рассматривается одно уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x)Ax = 0, \tag{11.4.20}$$

где матрица $A \in M(4)$ и $A = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & pJ \end{pmatrix}$, где p — иррациональное число, $J \in M(2)$ матрица вида $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. В этом случае $\mathrm{ali}\,(Q) = \mathbf{R}A \equiv L$ — одномерная алгебра Ли. Введём матрицы $S \in M(4), T \in M(4)$ вида

$$S \equiv \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}. \tag{11.4.21}$$

Матрицы S и T коммутируют, ибо $ST = TS = 0$. Линейная оболочка $L_1 \equiv \,\mathrm{lin}\,(\{S, T\})$ есть двумерная коммутативная алгебра Ли.

Лемма 11.4.1 *Если p — иррациональное число, то замыкание группы $\mathrm{Exp}\,(L)$ в топологической группе $\mathrm{GL}_{\,e}(n)$ есть замкнутая компактная группа Ли $\mathrm{Expm}\,(L_1)$.*

Доказательство. Если $\alpha \in \mathbf{R}$, то

$$\exp(\alpha S) = \begin{pmatrix} \exp(\alpha J) & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad \exp(\alpha T) = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & \exp(\alpha J) \end{pmatrix}, \tag{11.4.22}$$

где $E_2 \in M(2)$ — единичная матрица. По формуле (10.2.19) имеем

$$\exp(\alpha J) = (\cos\alpha)E_2 + (\sin\alpha)J. \tag{11.4.23}$$

В частности, при $n \in Z$, $\alpha \in \mathbf{R}$ верно

$$\exp((\alpha + 2\pi n)J) = \exp(\alpha J). \tag{11.4.24}$$

Поэтому, если $I \equiv [0, 2\pi]$, то

$$\exp(\mathbf{R}J) = \exp(IJ). \tag{11.4.25}$$

В силу коммутативности алгебры Ли L_1 для любых чисел $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ верно

$$\exp(\alpha S + \beta T)\exp(\alpha' S + \beta' T) = \exp((\alpha + \alpha')S + (\beta + \beta')T),$$

т.е. множество $\exp(L_1)$ есть подгруппа группы $\mathrm{GL}_{\,e}(4)$ и

$$\mathrm{Exp}\,(L_1) = \exp(L_1).$$

Более того, в силу (11.4.22, 11.4.25) верно

$$\operatorname{Exp}(L_1) = \exp(L_1) = \exp(\mathbf{R}S)\exp(\mathbf{R}T) = \exp(JS)\exp(JT). \tag{11.4.26}$$

Отсюда

$$\exp(L_1) = \exp(JS + JT). \tag{11.4.27}$$

Подмножество $JS + JT \subset L_1$ есть компакт и отображение $\exp|_{L_1} \to \operatorname{Expm}(L_1)$ непрерывно по лемме 10.4.5. Тогда отображение $\exp|_{L_1}$ непрерывно и сюръективно отображает компакт $JS + JT \subset L_1$ на топологическую группу $\operatorname{Expm}(L_1)$. Поэтому топологическая группа $\operatorname{Expm}(L_1)$ компактна и согласно п. 10.3.6 замкнута, т.е. $\operatorname{Expm}(L_1) = \operatorname{Exph}(L_1)$ и топологическая группа $\operatorname{Exph}(L_1)$ замкнута в топологической группе $\mathrm{GL}_e(4)$.

Так как $\operatorname{Exp}(L) = \exp(L) = \exp(\mathbf{R}A) \subset \exp(\mathbf{R}S)\exp(\mathbf{R}T) = \operatorname{Exp}(L_1)$ и так как подгруппа $\operatorname{Exph}(L_1)$ замкнута в топологической группе $\mathrm{GL}_e(4)$, то для замыкания в топологической группе $\mathrm{GL}_e(4)$ имеем

$$\overline{\operatorname{Exp}(L)} \subset \operatorname{Exp}(L_1) = \exp(JS)\exp(\mathbf{R}T). \tag{11.4.28}$$

Покажем, что справедливо и обратное включение.

При любом натуральном n верно $\operatorname{Exp}(L) \ni \exp(2\pi nA)$. Но $\exp(2\pi nA) = \exp(2\pi nS + 2\pi npT) = \exp(2\pi npT)$. Пусть $\{np\} \in [0,1]$ — дробная часть числа np, т.е. $np = m + \{np\}$, где $m \in Z$. Так как число p иррационально, то когда n пробегает все натуральные числа дробная часть $\{np\}$ пробегает всюду плотное подмножество сегмента $[0,1]$. В силу (11.4.24) также $\exp(2\pi npT) = \exp(2\pi\{np\}T)$. Поэтому

$$\overline{\operatorname{Exp}(L)} \supset \overline{\exp 2\pi\mathbf{N}T)} \supset \exp(2\pi\{\mathbf{N}p\}T) \supset \exp(JT) = \exp(\mathbf{R}T). \tag{11.4.29}$$

Множество $\overline{\operatorname{Exp}(L)}$ подгруппа группы $\mathrm{GL}_e(4)$ и при любом $\alpha \in \mathbf{R}$ верно $\exp(\alpha A) = \exp(\alpha S)\exp(\alpha pT) \in \overline{\operatorname{Exp}(L)}$. Но согласно (11.4.29) верно $\exp(-\alpha pT) \in \overline{\operatorname{Exp}(L)}$, тогда и элемент $\exp(\alpha S) = (\exp(\alpha S)\exp(\alpha pT))\exp(-\alpha pT) \in \overline{\operatorname{Exp}(L)}$. Итак, верно включение

$$\exp(\mathbf{R}S) \subset \overline{\operatorname{Exp}(L)}. \tag{11.4.30}$$

Из включений (11.4.29, 11.4.30) следует

$$\overline{\operatorname{Exp}(L)} \supset \exp(JS)\exp(JT). \tag{11.4.31}$$

Из (11.4.28, 11.4.31) получаем $\overline{\operatorname{Exp}(L)} = \exp(JS)\exp(JT) = \operatorname{Exp}(L_1)$. $\diamondsuit$

Согласно п. 11.4.4, если теперь функция $u(x)$ — глобальное решение уравнения (11.4.20), то функция $u(x)$ будет и глобальным решением системы

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x)Sx &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x)Tx &= 0. \end{cases} \tag{11.4.32}$$

Итак, функция $u(x) \in C^{(1)}(W)$ удовлетворяет в области W уравнению (11.4.20) иф она удовлетворяет в области W системе (11.4.32).

Функции

$$\begin{cases} u_1(x) &\equiv x_1^2 + x_2^2, \\ u_2(x) &\equiv x_3^2 + x_4^2 \end{cases} \tag{11.4.33}$$

удовлетворяют системе (11.4.32) при всех $x \in \mathbf{R}^4$. Индекс зависимости $\operatorname{dep}_*(u_1, u_2) = 2$ и основное множество $\operatorname{Bd}(u_1, u_2) = \{x \in \mathbf{R}^4 | (x_1^2 + x_2^2)(x_3^2 + x_4^2) > 0\}$ в терминологии § 5.2. В самом деле

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 & 2x_4 \end{pmatrix}$$

и

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x}(x) \end{pmatrix} = 2$$

иф $x_1^2 + x_2^2 > 0$ и $x_3^2 + x_4^2 > 0$.

Для линейного подпространства $L_1 \subset M(4)$ в терминологии § 4.6 индекс $r_*(L_1) = 2$ и L_1-основное множество $\operatorname{Bs}(L_1) = \operatorname{Bd}(u_1, u_2)$, ибо

$$\operatorname{rank}(Sx, Tx) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_4 & -x_3 \end{pmatrix} = 2$$

иф $x_1^2 + x_2^2 > 0$ и $x_3^2 + x_4^2 > 0$.

Для линейного подпространства $L \subset M(4)$ аналогично индекс $r_*(L) = 1$ и L-основное множество $\operatorname{Bs}(L) = \mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$.

Перейдем к описанию локальных решений уравнения (11.4.20). Если $x^0 \in \operatorname{Bd}(u_1, u_2)$ то существует аналитическая функция $u_3(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0 и являющаяся в этой окрестности решением уравнения (11.4.20), причём индекс зависимости в точке x^0 равен $\operatorname{dep}(u_1, u_2, u_3; x^0) = 3$. Для любой функции $\varphi \in C^{(3)}(\mathbf{R}^3)$ функция

$$u(x) = \varphi(u_1(x), u_2(x), u_3(x)) \tag{11.4.34}$$

есть локальное решение в точке x^0 уравнения (11.4.20). Наоборот, если функция $u(x)$ — локальное решение уравнения (11.4.20) в точке x^0, то существует функция $\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^3)$ и окрестность точки x^0 в которой верно представление (11.4.34).

Перейдем к описанию множества глобальных решений уравнения (11.4.20). Для любой функции $\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^2)$ функция

$$u(x) = \varphi(u_1(x), u_2(x)) \tag{11.4.35}$$

есть глобальное решение уравнения (11.4.20) в области $\mathbf{R}^4$. Если $x^0 \in \operatorname{Bd}(u_1, u_2)$, и функция $u(x)$ — глобальное решение уравнения (11.4.20) в области $\mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$, то существует функция $\varphi \in C^{(1)}(\mathbf{R}^2)$ и окрестность точки x_0, в которой справедливо представление (11.4.35).

Итак, общее описание глобальных решений даётся формулой (11.4.35), а общее описание локальных решений — формулой (11.4.34).

11.4.6 Выводы.

В случае $F(x) \subset \operatorname{Vc}(\mathbf{R}^n)$ описания множеств локальных и глобальных решений аналогичны. В случае же $F(x) \subset \operatorname{Vo}(W)$ множества локальных и глобальных решений могут иметь различное описание. Различие обусловлено характером поведения траекторий системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \tag{11.4.36}$$

сопоставляемой уравнению (11.4.4). В случае $f(x) \in \mathrm{Vc}\,(\mathbf{R}^n)$ имеем $f(x) = Const = v \in \mathbf{R}^n$ и траектории системы (11.4.36) — параллельные прямые. В этом случае локальное и глобальное поведение траектории аналогично. В случае примера 1 $f(x) = Ax$ траектории линейной системы

$$\dot{x} = Ax \tag{11.4.37}$$

локально в ненулевой точке x^0 похожи на траектории системы $\dot{x} = Ax^0$ с постоянной правой частью, но глобальное поведение траекторий существенно отлично. А именно, замыкание одной одномерной траектории может давать многообразие большей размерности — размерности 2.

Заметим в заключение, что если некоторая траектория системы (11.4.36) всюду плотна во всей области W, то уравнение (11.4.4) может иметь в области W лишь глобальные решения, являющиеся тождественной постоянной.

Часть III

Динамика агвидов

Глава 12. Функционал взаимодействия. Формализм динамики точечных частиц.
Глава 13. Структура и взаимодействие агвидов
Глава 14. Законы сохранения

Глава 12

Функционал взаимодействия. Формализм динамики точечных частиц.

При проведении процедуры конденсации в § 3.1 мы перешли от точной плотности лагранжиана к квадратичной плотности лагранжиана, которая в свою очередь заменой переменных Максвелла сведена к плотности лагранжиана Лоренца. Для вычисления интеграла по пространству от плотности лагранжиана Лоренца для суммы функций достаточно уметь вычислять билинейный функционал $\operatorname{ni}(p_1, p_2, u, v)$ вида (12.1.15) по функциям $u, v \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)$, зависящий от двух элементов $p_1, p_2 \in P$ группы Пуанкаре. Этот функционал мы называем функционалом взаимодействия и его свойства изучаются в § 12.1.

В случае, когда ток второй частицы $j = Av$ функционал, близкий к δ-функции, простейший способ вычисления функционала взаимодействия — сведение его к функционалу $\operatorname{nt}(p_1, p_2, n, j)$ вида (5.1.16), вычисления которого основано на свойствах интегралов по пространству с ядром близким к ядру δ-функции. Условия равенства функционалов $\operatorname{ni}(p_1, p_2, u, v) = \operatorname{nt}(p_1, p_2, u, Av)$ изучаются в п. 5.1.3.

В случае когда аргументы функционала взаимодействия $p_1 = p_2$, $u = v$ подход, основанный на переходе к функционалу $\operatorname{nt}(p_1, p_2, u, Av)$, в принципе не применим, ибо ядро функционала Av будет в существенном локализовано в той же пространственной области, где функция $u = v$ сильно меняется. Но в этом случае функционал $\operatorname{ni}(p, p, v, v)$ может быть вычислен с помощью преобразования Радона по свойству III функционала $\operatorname{ni}(p_1, p_2, u, v)$ из § 12.1. В случае $p_1 = p_2$, $u = v$ мы вычисляем функционал взаимодействия частицы с собственным полем, то что иногда называется энергией "самодействия". Величина $\frac{1}{2}\,\mathrm{ni}\,(p,p,v,v)$ является массой частицы и её свойства изучаются в § 12.2.

После проведения процедуры конденсации для системы k частиц во внешнем поле мы приходим к нульмерной плотности лагранжиана, т.е. к функции Лагранжа n, зависящей от векторов положения центра частицы $\vec{b}^i$, параметров временного сдвига a_0^i, матриц $G(p^i)$ и времени x_0. Матрица $G(p^i) \in \Omega_e$ как элемент узкой группы Лоренца в свою очередь задаётся 6 числовыми параметрами q^i — координатами на группе Лоренца. Варьирование функции Лагранжа n проводится при наличии для каждой частицы кинематической связи вида $\dot{\vec{b}}^i = f^i(q^i)$, задающей скорость центра, как функцию параметров q^i. В § 12.3, § 12.4 построен формализм для такой вариационной задачи, суть которого в сведении к некоторой функции Гамильтона $\mathrm{hc}\,(\vec{b}^1,\vec{p}^1;\vec{b}^2,\vec{p}^2;\ldots;\vec{b}^k,\vec{p}^k;x_0)$, зависящий лишь от координат центров $\vec{b}^i$ и импульсов $\vec{p}^i$ частиц. Для описания поведения $\vec{b}^i(x_0)$ и $\vec{p}^i(x_0)$ координат и импульсов частиц решается обычная система уравнений Гамильтона для функции hc без связей. Таким образом, переход к функции Гамильтона hc есть переход к обычной динамике точечных частиц. "Неточечность"частиц при этом влияет на вид функции hc.

§12.1 Функционал взаимодействия

Для изучения взаимодействия частицы с полем и с другой частицей нам нужно установить некоторое свойство плотности лагранжиана от суммы функций вида $T_p v + w$ и $T_{p_1}v + T_{p_2}u$.

12.1.1 Физическая и формальная плотности энергии и пассивные функции. Введём билинейное выражение от двух функций

$$\mathcal{N}_0(u,v) \equiv \mathcal{N}_1\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}\right) \equiv z_{ij}^{kl}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_j}, \tag{12.1.1}$$

где

$$z_{ij}^{kl} = (-\theta^{kl}\theta_{ij} + \theta_j^k\theta_i^l). \tag{12.1.2}$$

Так как $z_{ij}^{kl} = z_{ji}^{lk}$, то билинейное выражение (12.1.1) симметрично $\mathcal{N}_0(u,v) = \mathcal{N}_0(v,u)$.

Для плотности лагранжиана Лоренца $\mathcal{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{N}_1\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}\right)$ построим формальную плотность энергии (см. [2], с. 214)

$$\mathcal{H}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\mathcal{N} + \frac{\partial\mathcal{N}}{\partial\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_0}\right)}\frac{\partial v_i}{\partial x_0} = \frac{1}{2}\left(\theta^{kl}\theta_{ij} - \theta_j^k\theta_i^l\right)\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_j} - \tag{12.1.3}$$

$$\theta^{kl}\frac{\partial v_k}{\partial x_0}\frac{\partial v_l}{\partial x_0} + \frac{1}{2}\left(\theta_j^k\frac{\partial v_0}{\partial x_j}\frac{\partial v_k}{\partial x_0} + \theta_i^l\frac{\partial v_0}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_0}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(-\theta^{kl}\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_j} + \frac{\partial v_0}{\partial x_0}\frac{\partial v_0}{\partial x_0} - \delta_\beta^\alpha\delta_\varphi^\gamma\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\varphi}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\beta}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(-\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_0}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v_0}{\partial x_\beta} + \delta^{\alpha\beta}\delta_{ij}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_j} - \delta_\gamma^\alpha\delta_\varphi^\beta\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\varphi}\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\gamma}\right).$$

Рассмотрим теперь плотность $\mathcal{M}s\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\right)$ укороченного лагранжиана Максвелла от 3-вектор-функции $\vec{u}(x)$ переменной $x \in \mathbf{R}^4$. В §2.2 мы установили, что при замене Максвелла $\vec{u} = Bv$ имеет место равенство плотностей

$$\mathcal{N}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \mathcal{M}s\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\right). \tag{12.1.4}$$

Для укороченного лагранжиана Максвелла соответствующая плотность энергии будет

$$\mathcal{H}_f\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_0}\right)^2 + (\,rot\,\vec{u})^2\right).$$

Выражение

$$\mathcal{H}_f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \equiv \mathcal{H}s\left(\frac{\partial Bv}{\partial x}\right) \equiv \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial Bv}{\partial x_0}\right)^2 + (\,rot\,Bv)^2\right) = \tag{12.1.5}$$

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_0} - grad\,v_0\right)^2 + (\,rot\,\vec{v})^2\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_0}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v_0}{\partial x_\beta} + \delta^{\alpha\beta}\delta_{ij}\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial v_\beta}{\partial x_j} - \delta^\alpha_\gamma\delta^\beta_\varphi\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\varphi}\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\gamma} - 2\delta^\alpha_\beta\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_0}\frac{\partial v_0}{\partial x_\beta}\right)$$

мы назовём физической плотностью энергии. Получаем следующее выражение для разности формальной и физической плотности энергии

$$\mathcal{H}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \mathcal{H}_f\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \delta^\alpha_\beta\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_0}\frac{\partial v_0}{\partial x_\beta} - \delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_0}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v_0}{\partial x_\beta} = \frac{\partial v_0}{\partial x_\alpha}\delta_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial x_0} - \frac{\partial v_0}{\partial x_\beta}\right). \tag{12.1.6}$$

Определение 12.1.1 *Назовём функцию $v(x) \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)$ пассивной, если*

$$\forall u(x) \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)\ \forall x \in \mathbf{R}^4\ \Big|\ \mathcal{N}_0(u,v)(x) = 0. \tag{12.1.7}$$

Множество пассивных функций образует некоторое линейное пространство Z. Нетрудно видеть, что линейное пространство Z состоит из функций, обращающих в нуль физическую плотность лагранжиана.

$$Z = \{v(x) \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)\ \Big|\ \mathcal{H}_f\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0\}. \tag{12.1.8}$$

В самом деле, условие $\mathcal{H}_f\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$ эквивалентно двум условиям

$$\begin{cases} \frac{\partial\vec{v}_0}{\partial x_0} - grad\,v_0 &= 0, \\ \quad rot\,\vec{v} &= 0. \end{cases} \tag{12.1.9}$$

Из равенства (12.1.4) следует, что

$$\mathcal{N}_0(u,v) = \left\langle\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_0} - grad\,u_0\right), \left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_0} - grad\,v_0\right)\right\rangle - \langle\,rot\,\vec{u},\,rot\,\vec{v}\rangle. \tag{12.1.10}$$

Последнее представление доказывает эквивалентность соотношений (12.1.7) и (12.1.9). Соотношения (12.1.9) есть условия потенциальности векторного поля $v(x)$, т.е. линейное пространство Z пассивных функций совпадает с линейным пространством потенциальных векторных полей вида

$$v(x) = grad_4 f(x). \tag{12.1.11}$$

Пассивные функции не дают вклада в плотность лагранжиана и не влияют на взаимодействие, как отмечалось в п. 2.2.7. В самом деле, для произвольной функции $u(x) \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)$ и пассивной функции $v(x) \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)$ справедливо равенство

$$\mathcal{N}\left(\frac{\partial}{\partial x}(u+v)\right) = \frac{1}{2}\mathcal{N}_0(u+v, u+v) = \frac{1}{2}\mathcal{N}_0(u,u) + \mathcal{N}_0(u,v) + \frac{1}{2}\mathcal{N}_0(v,v) = \tag{12.1.12}$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{N}_0(u,u) = \mathcal{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Из формулы (2.5.54) следует соотношение

$$\mathcal{N}_0(T_p(u), T_p(v))(x) = \mathcal{N}_0(u,v)(p(x)). \tag{12.1.13}$$

Соотношение (12.1.13) позволяет убедиться в инвариантности линейного пространства Z под действием операторов T_p, т.е. если функция v пассивная, то и любая функция $T_p(v)$ пассивная. В самом деле, если для функции $v(x)$ выполнено (12.1.7), то используя (12.1.13), получаем

$$\forall u \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)\ \forall x \in \mathbf{R}^4 \ \Big|\ \mathcal{N}_0(T_p(u), T_p(v))(x) = 0. \tag{12.1.14}$$

Но когда элемент u пробегает все пространство $C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)$, то элемент $T_p(u)$ также пробегает все пространство $C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)$, поэтому из (12.1.14) получаем

$$\forall u \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)\ \forall x \in \mathbf{R}^4 \ \Big|\ \mathcal{N}_0(u, T_p(v))(x) = 0.$$

Итак, функция $T_p(v)$ пассивная.

12.1.2 Функционалы ni **и** nt **их свойства.** При проведении процедуры конденсации, т.е. перехода от плотности лагранжиана к функции Лагранжа важную роль играет следующий функционал

$$\mathrm{ni}\,(x_0, p_1, p_2, u, v) \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{N}_0(T_{p_1}(u), T_{p_2}(v))(x)\, dx_1, dx_2, dx_3. \tag{12.1.15}$$

При фиксированных функциях $u(x), v(x)$ функционал ni будет функцией времени x_0 — числового параметра и двух элементов p_1, p_2 группы Пуанкаре. Одной из наших основных задач будет изучение связи функционала (12.1.15) с функционалом

$$\mathrm{nt}\,(x_0, p_1, p_2, u, v) \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left\langle T_{p_1}(u), \tilde{T}_{p_2}(v)\right\rangle (x)\, dx_1, dx_2, dx_3. \tag{12.1.16}$$

Функционал (12.1.16) при фиксированных элементах u, v также функция числового аргумента x_0 и двух элементов p_1, p_2 группы Пуанкаре P.

Из определяющей формулы (12.1.15) вытекают следующие свойства функционала $\mathrm{ni}\,(x_0, p_1, p_2, u, v)$:

I. $\mathrm{ni}\,(x_0, p_1, p_2, u, v) = \mathrm{ni}\,(x_0, p_2, p_1, v, u)$.

II. $\mathrm{ni}\,(x_0, p_1p_3, p_2p_4, u, v) = \mathrm{ni}\,(x_0, p_3, p_4, T_{p_1}(u), T_{p_2}(v))$.

III. $\mathrm{ni}\,(x_0, p, p, u, v) = V(\mathcal{N}_0(u, v))(p, x_0) = \widehat{\mathcal{N}_0(u, v)}(\xi(p), x_0 - a_0(p))$, где $V(\mathcal{N}_0(u, v))(p, x_0)$ и $\widehat{\mathcal{N}_0(x, v)}(\xi, x_0)$ обозначают соответственно трансформации Пуанкаре и Радона функции $\mathcal{N}_0(u, v)(x)$.

IV. Если преобразование $p \in P_s$, т.е. является пространственной изометрией, то

$$\mathrm{ni}\,(x_0, p, p, u, v) = \mathrm{ni}\,(x_0, e, e, u, v).$$

Доказательство свойств $I - IV$. Свойство I вытекает из определяющей формулы (12.1.16) и симметрии формы $\mathcal{N}_0$, ибо $\mathcal{N}_0(T_{p_2}(u), T_{p_2}(v)) = \mathcal{N}_0(T_{p_2}(v), T_{p_2}(u))$.

Свойство II вытекает из равенства

$$\mathcal{N}_0(T_{p_1p_3}(u), T_{p_2p_4}(v)) = \mathcal{N}_0(T_{p_3}(T_{p_1}(u)), T_{p_4}(T_{p_2}(v))).$$

Согласно формуле (12.1.14)

$$\mathrm{ni}\,(x_0, p, p, u, v) = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{N}_0(T_p(u), T_p(v))(x)\, dx_1dx_2dx_3 = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{N}_0(u, v)(p(x))\, dx_1dx_2dx_3.$$

Согласно § 3.3 последний интеграл является трансформацией Пуанкаре $V(\mathcal{N}_0(u, v))(p, x_0)$ и выражается через трансформацию Радона по формуле (3.3.21).

Свойство IV следует из свойства III в силу свойства (3.3.8) трансформации Пуанкаре.

Мы убедились в справедливости свойств $I - IV$ функционала ni. $\diamondsuit$

Пусть теперь одна из функций, например, функция $u(x)$ имеет группу симметрий $S \subset P$. Какое свойство функционала ni это влечет? Равенство

$$\forall p \in S \;\Big|\; T_p(u) = u$$

приводит к равенству

$$\forall p \in S \;\Big|\; \mathrm{ni}\,(x_0, pp_1, p_2, u, v) = \mathrm{ni}\,(x_0, p_1, p_2, T_p(u), v) = \mathrm{ni}\,(x_0, p_1, p_2, u, v). \qquad (12.1.17)$$

Функционал $\mathrm{nt}\,(x_0, p_1, p_2, u, v)$ вида (12.1.16) обладает свойствами, аналогичными свойствам $II - IV$ функционала ni, но не обладает свойством симметрии. Свойства функционала $\mathrm{nt}\,(x_0, p_1, p_2, u, v)$:

II. $\mathrm{nt}\,(x_0, p_1p_3, p_2p_4, u, v) = \mathrm{nt}\,(x_0, p_3, p_4, T_{p_1}(u), \tilde{T}_{p_2}(v))$.

III. $\mathrm{nt}\,(x_0, p, p, u, v) = V(\langle u, v\rangle)(p, x_0) = \widehat{\langle u, v\rangle}(\xi(p), x_0 - a_0(t))$, где $V(\langle u, v\rangle)(p, x_0)$ и $\widehat{\langle u, v\rangle}(\xi, x_0)$ означают соответственно трансформации Пуанкаре и Радона функции $\langle u, v\rangle(x)$.

IV. $\mathrm{nt}\,(x_0, p, p, u, v) = \mathrm{nt}\,(x_0, e, e, u, v)$, если $p \in P_s$.

Доказательство свойств $II - IV$ функционала nt.

Свойство II вытекает из равенства

$$\langle T_{p_1p_3}(u), \tilde{T}_{p_2p_4}(v)\rangle = \langle T_{p_3}(T_{p_1}(u)), T_{p_4}(T_{p_2}(v))\rangle.$$

Свойство III обосновывается следующими равенствами:

$$\mathrm{nt}\,(x_0,p,p,u,v) = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \langle T_p(u), \tilde{T}_p(v)\rangle(x)\,dx_1dx_2dx_3 =$$

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \langle G^\top u(p(x)), G^{-1}v(p(x))\rangle\,dx_1dx_2dx_3 = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \langle u,v\rangle(p(x))\,dx_1dx_2dx_3 = V(\langle u,v\rangle)(p,x_0).$$

Свойство IV вытекает из соответствующего свойства (3.3.8) трансформации Пуанкаре. $\diamondsuit$

Симметрии функций u,v следующим образом отражаются на функционале nt. Если $S\subset P$ группы симметрий функции u при представлении T_p, то

$$\forall p\in S \;\Big|\; \mathrm{nt}\,(x_0,pp_1,p_2,u,v) = \mathrm{nt}\,(x_0,p_1,p_2,u,v). \tag{12.1.18}$$

Аналогично, если $S\subset P$ группа симметрий функции v при представлении $\tilde{T}_p$, то

$$\forall p\in S \;\Big|\; \mathrm{nt}\,(x_0,p_2,pp_2,u,v) = \mathrm{nt}\,(x_0,p_1,p_2,u,v). \tag{12.1.19}$$

12.1.3 Условия равенства функционалов ni и nt .

Теперь наша задача выяснить условия, при которых справедливо равенство

$$\mathrm{ni}\,(x_0,p_1,p_2,u,v) = \mathrm{nt}\,(x_0,p_1,p_2,u,Av), \tag{12.1.20}$$

где A — базовый оператор системы.

При выполнении равенства (12.1.20) будем говорить, что взаимодействие частицы со стандартным состоянием v с полем второй частицы носит *локальный характер* или локализовано. Если кроме того, выполнено равенство

$$\mathrm{ni}\,(x_0,p_1,p_2,u,v) = \mathrm{nt}\,(x_0,p_2,p_1,v,Au),$$

то будем говорить, что взаимодействие частиц *локализовано* или локально.

Нам понадобится следующее элементарное алгебраическое свойство билинейной формы $\mathcal{N}_1\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial x}\right)$. Подставим тождество

$$\frac{\partial v_r}{\partial x_i}\frac{\partial w_l}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(w_l\frac{\partial v_l}{\partial x_i}\right) - w_l\frac{\partial^2 v_r}{\partial x_j,\partial x_i}$$

в билинейную форму $\mathcal{N}_1$, получим

$$z^{rl}_{ij}\frac{\partial v_r}{\partial x_i}\frac{\partial w_l}{\partial x_j} = -z^{rl}_{ij}w_l\frac{\partial^2 v_r}{\partial x_j\partial x_i} + z^{rl}_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(w_l\frac{\partial v_r}{\partial x_i}\right).$$

Выражение $-z^{rl}_{ij}\frac{\partial^2 v_r}{\partial x_j\partial x_i} \equiv (Av)_l$, где A — основной оператор системы. Итак, получено равенство

$$\mathcal{N}_1\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \langle w, Av\rangle + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(z^{rl}_{ij}w_l\frac{\partial v_r}{\partial x_i}\right). \tag{12.1.21}$$

Следующая задача — вычисление интеграла взаимодействия $\mathrm{ni}\,(x_0,p_1,p_2,v,w)$ для фиксированных v и w как функции аргументов x_0,p_1,p_2. Для получения аналитических выражений функции $\mathrm{ni}\,(x_0,p_1,p_2,v,w)$ мы используем равенство (12.1.21) и будем сводить вычисление интеграла

$$I_1 \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{N}_1\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial x}\right)\,dx_1dx_2dx_3 \tag{12.1.22}$$

к вычислению интеграла

$$I_2 \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \langle Av, w\rangle \, dx_1 dx_2 dx_3. \qquad (12.1.23)$$

Напомним, что для частицы $j = Av$ является функционалом типа δ-функции (соответственно, функция $j(x) = (Av)(x)$, стоящая под интегралом (12.1.23), есть ядро регулярного функционала, близкого к δ-функции), что позволяет просто вычислять интеграл (12.1.23) с достаточной точностью. Таким образом, остается вопрос об условиях, при которых интегралы (12.1.22) и (12.1.23) совпадают. Т.е. согласно формуле (12.1.21) требует изучения остаточный член

$$R \equiv I_1 - I_2 = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(z_{ij}^{rl} w_e \frac{\partial v_r}{\partial x_i}\right) dx_1 dx_2 dx_3. \qquad (12.1.24)$$

Для преобразования интеграла (12.1.24) введём следующий класс функций.

Определение 12.1.2 *Функцию $v(x) \in C_4^{(2)}(\mathbf{R}^4)$ будем называть кулонообразной, если для любых индексов $r, i, j = 0, 1, 2, 3$ при $|\vec{x}| \to \infty$*

$$v_r(x) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right), \quad \frac{\partial v_r}{\partial x_i} = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^2}\right), \quad \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_j \partial x_i} = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right). \qquad (12.1.25)$$

Далее в этом пункте предполагается, что функции v, w — кулонообразные.

В интеграле (12.1.24) разделим подинтегральное выражение на две части — одну, содержащую производные $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ по пространству $\alpha = 1, 2, 3$ и вторую — содержащую дифференцирование по времени $\frac{\partial}{\partial x_0}$:

$$R = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(z_{i\alpha}^{rl} w_l \frac{\partial v_r}{\partial x_i}\right) dx_1 dx_2 dx_3 + \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_0}\left(z_{i0}^{rl} w_l \frac{\partial v_r}{\partial x_i}\right) dx_1 dx_2 dx_3. \qquad (12.1.26)$$

Первый интеграл преобразуем, используя формулу Остроградского производя предельный переход по шарам Q_μ с центром в нуле и используя кулонообразность функций v, w:

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(z_{i\alpha}^{rl} w_l \frac{\partial v_r}{\partial x_i}\right) dx_1 dx_2 dx_3 = \lim_{\mu\to\infty} \iiint\limits_{Q_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(z_{i\alpha}^{rl} w_l \frac{\partial v_r}{\partial x_i}\right) dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$\lim_{\mu\to\infty} \iint\limits_{S_\mu} n_\alpha z_{i\alpha}^{rl} w_l \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \, d\sigma = \lim_{\mu\to\infty} \int\int\limits_{S_\mu} O(1) O\left(\frac{1}{\mu}\right) O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) d\sigma =$$

$$\lim_{\mu\to\infty} O\left(\frac{1}{\mu^3}\right) 4\pi\mu^2 = 0. \qquad (12.1.27)$$

Используем конкретный вид величины z_{ij}^{rl}

$$z_{i0}^{rl} w_l \frac{\partial v_r}{\partial x_i} = \left(-\theta^{rl} w_l \frac{\partial v_r}{\partial x_0} + \theta_i^l w_l \frac{\partial v_0}{\partial x_i}\right) = \qquad (12.1.28)$$

$$\left(\delta^{\alpha\psi} w_\alpha \frac{\partial v_\psi}{\partial x_0} - \delta^\alpha_\psi w_\alpha \frac{\partial v_0}{\partial x_\psi}\right) = \left(\delta^\alpha_\psi w_\alpha \left(\frac{\partial v_\psi}{\partial x_0} - \frac{\partial v_0}{\partial x_\psi}\right)\right).$$

Объединяя (12.1.26-12.1.28), получим следующее выражение для остаточного члена

$$R = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_0}\left(w_\alpha \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_0} - \frac{\partial v_0}{\partial x_\alpha}\right)\right) dx_1 dx_2 dx_3. \qquad (12.1.29)$$

Нас интересует в первую очередь случаи, когда величина R равна нулю. Первое, что очевидно из выражения (12.1.29) — независимость R от w_0, поэтому если у 4-функции $w(x)$ пространственные компоненты $w_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$ обращаются в нуль, то $R = 0$.

12.1.4 Получение конденсированной функции Лагранжа. Рассмотрим взаимодействие частицы со стандартным состоянием $v(x) \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)$ с внешним полем $w(x) \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)$. При этом мы считаем, что под действием поля $w(x)$ частица меняет свое состояние, т.е. переходит в некоторое состояние $T_p(v)$, где параметр $p \in P_e$ — элемент группы Пуанкаре зависит от времени. Согласно § 3.1 проинтегрируем функцию $\mathcal{N}\left(\frac{\partial}{\partial x}(T_p(v) + w)\right)$ по пространству и получим функцию Лагранжа

$$n(x_0, p) = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{N}\left(\frac{\partial}{\partial x}(T_p(v) + w)\right) dx_1 dx_2 dx_3. \qquad (12.1.30)$$

Используя свойства квадратичной формы $\mathcal{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$:

$$\mathcal{N}\left(\frac{\partial}{\partial x}(T_p(v) + w)\right) = \frac{1}{2}\mathcal{N}_0(T_p(v) + w, T_p(v) + w) =$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{N}_0(T_p(v), T_p(v)) + \mathcal{N}_0(T_p(v), w) + \frac{1}{2}\mathcal{N}_0(w, w),$$

функцию Лагранжа (12.1.30) можно переписать в виде:

$$n(x_0, p) = \frac{1}{2}\ \mathrm{ni}\,(x_0, p, p, v, v) + \ \mathrm{ni}\,(x_0, p, e, v, w) + \frac{1}{2}\ \mathrm{ni}\,(x_0, e, e, v, w). \qquad (12.1.31)$$

Вводя на группе Ли P_e некоторые координаты $q \in \mathbf{R}^{10}$, мы подставим в (12.1.31) $p = p(q(x_0))$ и получим функцию Лагранжа в данных координатах. Варьируя функцию Лагранжа (12.1.31), далее мы получим уравнение Эйлера для координат $q(x_0)$. В случае, если внешнее поле само меняет свое состояние в результате взаимодействия и может рассматриваться само как частица, мы рассматриваем функции $T_{p_1}(v), T_{p_2}(u)$ и функция Лагранжа будет иметь вид:

$$n(x_0, p_1, p_2) = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{N}\left(\frac{\partial}{\partial x}(T_{p_1}(v) + T_{p_2}(u))\right) dx_1 dx_2 dx_3 = \qquad (12.1.32)$$

$$\frac{1}{2}\ \mathrm{ni}\,(x_0, p_1, p_1, v, v) + \ \mathrm{ni}\,(x_0, p_1, p_2, v, u) + \frac{1}{2}\ \mathrm{ni}\,(x_0, p_2, p_2, u, u).$$

В общем случае k частиц $v_1(x), v_2(p), \dots v_k(x)$ и внешнего поля $w(x)$ функция Лагранжа $n(x_0, p_1, p_2, \dots p_k)$ приводится к виду:

$$n(x_0, p_1, p_2, \dots p_k) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \mathrm{ni}\,(x_0, p_i, p_i, v_i, v_i) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathrm{ni}\,(x_0, p_i, p_j, v_i, v_j) +$$

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{ni}\,(x_0, p_i, e, v_i, w) + \frac{1}{2}\,\mathrm{ni}\,(x_0, e, e, w, w). \tag{12.1.33}$$

Здесь вторая сумма соответствует попарному взаимодействию частиц между собой, а третья — взаимодействию частиц с внешним полем.

В случае k взаимодействующих частиц при отсутствии внешнего поля функция Лагранжа согласно формуле (12.1.33) приобретает вид:

$$n(x_0, p_1, p_2, \dots p_k) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} \mathrm{ni}\,(x_0, p_i, p_j, v_i, v_j). \tag{12.1.34}$$

Согласно свойству IV функционала ni мы имеем 6-параметрическую группу преобразований, оставляющую функцию Лагранжа (12.1.34) инвариантной. А именно, если $p \in P_{se}$, то

$$n(x_0, p_1p, p_2p, \dots p_kp) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} \mathrm{ni}\,(x_0, p_ip, p_jp, v_i, v_j) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} \mathrm{ni}\,(x_0, p, p, T_{pi}(v_i), T_{pj}(v_j)) \tag{12.1.35}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} \mathrm{ni}\,(x_0, e, e, T_{pi}(v_i), T_{pj}(v_j)) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} \mathrm{ni}\,(x_0, p_i, p_j, v_i, v_j) = n(x_0, p_1, p_2, \dots p_k).$$

Инвариантность (12.1.35) функции Лагранжа соответственно влечет законы сохранения импульса и момента количества движения системы.

Замечание 12.1.1 *Если преобразование $p(x)$ выбираем в виде*

$$p(x) = G(p)(x - a(p)), \tag{12.1.36}$$

то для взаимодействия двух частиц со стандартными состояниями $v_1(x), v_2(x)$ функционал взаимодействия $\mathrm{ni}\,(x_0, p_1, p_2, v_1, v_2)$ зависит от пространственных векторов сдвига $\vec{a}^1, \vec{a}^2$, только через их разности $\vec{a}^1 - \vec{a}^2$ в силу свойства IV функционала ni.

Из формулы (12.1.36) следует, что функция состояния $T_p(v)$ не изменится если к параметру $a_0(p)$ и ко времени x_0 добавить одну и ту же произвольную константу α. Но в таком случае для k взаимодействующих частиц без внешнего поля величина $n(x_0, p_1, p_2, \dots p_k)$ не изменится если ко всем величинам a_0^i и времени x_0 добавить одну и ту же произвольную числовую константу α. Последнее свойство влечет закон сохранения энергии.

12.1.5 Условие Лоренца на функцию состояния. Понятие пассивной функции и пассивной частицы позволяет нам в теории с квадратичным лагранжианом ввести условие Лоренца на все рассматриваемые частицы при проведении процедуры конденсации и изучении взаимодействия частиц, так как для любой частицы можно добиться выполнения функцией состояния условия Лоренца добавлением пассивной частицы. В самом деле, пусть $u(x) \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)$ произвольная функция состояния. Построим по ней скалярную функцию

$$\varphi(x) = Ku = \theta_{ij} \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j}. \tag{12.1.37}$$

Далее построим решение $f(x)$ волнового уравнения

$$\Box f \equiv \theta_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \varphi(x), \tag{12.1.38}$$

имеющее достаточное убывание в пространственной бесконечности. Тогда функция состояния

$$v(x) \equiv u(x) - \, grad_{\,4} f(x) \tag{12.1.39}$$

будет удовлетворять условию Лоренца

$$Kv = Ku - K \, grad_{\,4} f = \varphi(x) - \varphi(x) = 0 \tag{12.1.40}$$

и отличаться от функции $u(x)$ добавлением пассивной составляющей.

Далее во многих случаях мы будем предполагать выполнение условия Лоренца функцией состояния частицы, т.е. предполагать, что существует решение уравнений (12.1.37, 12.1.38) $f(x)$ с достаточным характером убывания на бесконечности.

§12.2 Масса

Понятие массы частицы имеет фундаментальное значение в физике. Займемся его определением в нашей теории.

12.2.1 Определение массы частицы. В предыдущем параграфе мы показали, что функция Лагранжа, описывающая взаимодействие частицы со стандартным состоянием $v(x)$ со внешним полем, состоит из трёх слагаемых (формула 12.1.31), первое из которых зависит лишь от состояния частицы, но не зависит от внешнего поля и имеет вид

$$\frac{1}{2} \, \mathrm{ni} \, (x_0, p, p, v, v). \tag{12.2.1}$$

Величина (12.2.1) соответствует функции состояния $T_p(v)$ частицы и зависит лишь от неё в силу равенства $\mathrm{ni}\,(x_0, p, p, v, v) = \mathrm{ni}\,(x_0, e, e, T_p(v), T_p(v))$, вытекающего из свойства II функционала ni (§3.7). Величину (12.2.1) как слагаемое функции Лагранжа мы назовём *массовым членом.*

В п. 12.2.3 — формула (12.2.18), мы вычислим величину (12.2.1) для случая, когда v — состояние покоя агвидной частицы. В таком случае она имеет вид

$$m = m_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \tag{12.2.2}$$

где $m_0 \in \mathbf{R}$ — некоторая константа. Выражение (12.2.2) обладает следующей замечательной особенностью. Если мы разложим (12.2.2) как функцию β^2 по теореме Тейлора в окрестности точки $\beta^2 = 0$, то получим сумму

$$m_0\sqrt{1-\beta^2} = m_0 - m_0\frac{\beta^2}{2} + \ldots \equiv C_0 - C_2\frac{\beta^2}{2} + \ldots, \tag{12.2.3}$$

в которой коэффициент при $-\frac{\beta^2}{2}$ совпадает со значением самой функции при $\beta = 0$. Если мы отбросим члены порядка β^4 и выше, то для оставшегося квадратичного выражения константа C_0 при варьировании исчезает и не влияет на уравнения движения, т.е. на уравнения движения будет влиять лишь константа C_2, которая, следовательно, имеет смысл инертной массы. Итак, в механике малых скоростей $\beta \ll 1$ массу покоя можно определить двумя эквивалентными способами — как значение величины (12.2.2) при $\beta = 0$ или как коэффициент C_2 при $\frac{\beta^2}{2}$. В общем случае мы определяем массу следующим образом.

Определение 12.2.1 *Массой частицы называется величина*

$$m(p, x_0) \equiv \frac{1}{2}\,\mathrm{ni}\,(x_0, p, p, v, v), \quad p \in P_e,\ x_0 \in \mathbf{R}. \tag{12.2.4}$$

Таким образом, масса частицы есть числовая функция состояния $p \in P_e$ и времени x_0.

Замечание 12.2.1 *Формула (12.2.4) определяет функцию $m(p, x_0)$ и на элементах $p \in P$, не принадлежащих компоненте связности единицы группы Пуанкаре, чем мы будем пользоваться без дополнительных оговорок.*

Согласно свойству III функционала ni из § 12.1 величина (12.2.4) является трансформацией Пуанкаре от плотности лагранжиана Лоренца на стандартном состоянии $v(x)$, т.е.

$$m(p, x_0) = V\left(\mathcal{N}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)(p, x_0). \tag{12.2.5}$$

Если элемент $p \in P$ записать в виде $p = p_t p_s, p_t \in P_t, p_s \in P_s$, то по свойству трансформации Пуанкаре (3.3.10) имеем

$$m(p, x_0) = V\left(\mathcal{N}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)(p, x_0) = V\left(\mathcal{N}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)(p_t, x_0), \tag{12.2.6}$$

т.е. величина массы $m(p, x_0)$ не зависит от пространственного сдвига и поворота, а зависит лишь от сдвига времени и параметров чистого преобразования Лоренца.

Последний вывод непосредственно следует и из выражения трансформации Пуанкаре через трансформацию Радона (3.3.21) в силу которой

$$m(p, x_0) = \overbrace{\mathcal{N}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}(\xi(p), x_0 - a_0(\beta)). \tag{12.2.7}$$

Таким образом, масса — числовая функция от четырех числовых аргументов, а именно от вектора $\vec{\beta}$ и сдвинутого времени $x_0 - a_0$

$$m = m(\vec{\beta}, x_0 - a_0), \tag{12.2.8}$$

поскольку $\xi \in R^4$ однозначно выражается через $\beta \in \mathbf{R}^3$.

Рассмотрим вопрос о *перенормировке* массы. Т.е. выясним как изменяется масса при изменении стандартного состояния. Пусть $v \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4), p' \in P, v' \equiv T_{p'}(v)$, сравним

$$m(p, x_0) = \frac{1}{2}\ \mathrm{ni}\,(x_0, p, p, v, v)$$

и

$$m'(p, x_0) = \frac{1}{2}\ \mathrm{ni}\,(x_0, p, p, v', v'). \tag{12.2.9}$$

В силу свойства II из п. 12.1.2 функционала ni имеем:

$$m'(p, x_0) = \frac{1}{2}\ \mathrm{ni}\,(x_0, p, p, T_{p'}(v), T_{p'}(v)) = \frac{1}{2}\ \mathrm{ni}\,(x_0, p'p, p'p, v, v) = m(p'p, x_0). \tag{12.2.10}$$

Таким образом, перенормировка сводится к умножению аргумента p в выражении массы слева на p'.

Выразим массы $m(p, x_0)$ и $m'(p, x_0)$ через трансформации Радона функции $\mathcal{N}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x)$. Для $m(p, x_0)$ имеем формулу (12.2.7), а для $m'(p, x_0)$ согласно формуле (12.2.5) и формуле (3.3.26) для трансформации Пуанкаре получаем

$$m'(p, x_0) = m(p'p, x_0) = V\left(\mathcal{N}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)(p'p, x_0) = \tag{12.2.11}$$

$$\overbrace{\mathcal{N}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}(G^{-1\top}(p')\xi(p), x_0 - (a(p) + G^{-1}(p)a(p'))_0); \quad p', p \in P.$$

Формулы (12.2.7, 12.2.11) задают правила перенормировки массы.

Возвращаясь к вопросу о существовании квартетов частиц (см. п. 3.4.7), соответствующих четырем компонентам связности группы Пуанкаре, рассмотрим как связаны их массы. Пусть $v^i(x) \equiv T_{p_i}(v)$, где p_i имеют вид (12.29) и пусть $m^i(p, x_0)$ — масса соответствующей частицы $i = ++, +-, -+, --$, $p \in P_e$. По формуле (12.2.11) получаем

$$m^i(p, x_0) = \overbrace{\mathcal{N}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}(G_i\xi(p), x_0 - a_0(p)). \tag{12.2.12}$$

правило связи четырех масс $m^i(p, x_0)$.

12.2.2 Соотношение массы и энергии. Согласно определению 12.2.1 для любой системы с 4-функцией состояния $v(x) \in C_4^{(1)}(I \times \mathbf{R}^3)$ масса данного состояния m равна функции Лагранжа n и равна интегралу от плотности лагранжиана Лоренца по пространству

$$m = n = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{N}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\, dx_1 dx_2 dx_3. \tag{12.2.13}$$

Через 3-функции $\vec{u}(x) = (Bv)(x)$, где B — оператор замены Максвелла из § 2.2, и плотность укороченного лагранжиана Максвелла масса данного состояния равна

$$m = n = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathcal{M}s\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_0}\right)\, dx_1 dx_2 dx_3. \tag{12.2.14}$$

Мы получаем, что масса равна разности

$$m = \mathcal{E}c - \mathcal{E}d, \tag{12.2.15}$$

где величина

$$\mathcal{E}c \equiv \frac{1}{2} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_0}\right)^2 dx_1 dx_2 dx_3 \geq 0 \tag{12.2.16}$$

— пропорциональна кинетической энергии системы, а

$$\mathcal{E}d \equiv \frac{1}{2} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} (\, rot\, \vec{u})^2 \, dx_1 dx_2 dx_3 \geq 0. \tag{12.2.17}$$

Для кулонообразной в смысле определения 12.1.1 функции $v(x)$ согласно лемме 1.3.3 величины $\mathcal{E}c$ и $\mathcal{E}d$ равны $\mathcal{E}c = \frac{1}{\mu}\mathcal{E}c'$, $\mathcal{E}d = \frac{1}{\mu}\mathcal{E}d'$, где через $\mathcal{E}c'$ и $\mathcal{E}d'$ здесь обозначены соответственно кинетическая энергия и энергия деформации среды Максвелла (п. 1.3.9).

Из формулы (12.2.15) следует, что масса частицы пропорциональна её энергии лишь когда масса частицы равна её кинетической энергии $m = \mathcal{E}c$, т.е. иф энергия деформации $\mathcal{E}d = 0$. Таким образом, для скалярной частицы в состоянии покоя верно равенство $m = \mathcal{E}c$, а в случае движущейся скалярной частицы это уже не так (см. § 13.3). Формула (12.2.15) также показывает, что знак массы может быть любым. Масса может быть положительна, отрицательна и равна нулю. Знак массы показывает превалирующий тип энергии частицы.

12.2.3 Масса агвидной частицы

Для агвидной частицы функция стандартного состояния является агвидной 4-функцией, тогда плотность лагранжиана $\mathcal{N}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x)$ — скалярная агвидная функция с теми же векторами скорости $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ и центра $\vec{b}(x_0) \in \mathbf{R}^3$. Применяя формулу (12.2.7) для массы и формулу (3.3.30) для преобразования Радона скалярной агвидной функции, получаем для всех $p \in P$:

$$m = \frac{m_0}{|\langle \xi(p), l \rangle|}, \tag{12.2.18}$$

где $m_0 \in \mathbf{R}$ — масса стандартного состояния, $l \in \mathbf{R}^4$ — 4-вектор скорости стандартного состояния, $\xi(p) \in \mathbf{R}^4$ — параметры преобразования Пуанкаре в левом представлении (см. § 3.2). Т.е. $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta} \end{pmatrix} \xi_0$, где $\vec{\beta} \in \mathbf{R}^3, |\vec{\beta}| < 1$ и $\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{1-(\vec{\beta})^2}}$.

Из формулы (12.2.18) следует, что масса агвидной частицы не зависит от времени, а зависит лишь от состояния. Знак массы агвидной частицы одинаков во всех состояниях.

В случае когда стандартное состояние есть состояние покоя, т.е. $\vec{l} = 0$ и $p \in P_e$ из формулы (12.2.18) получаем формулу (12.2.2) с $\beta = |\vec{\beta}|$.

§12.3 Варьирование действия с функцией Лагранжа

Проводя конденсацию, мы получаем функцию Лагранжа для системы частиц. Следующая естественная задача — получение уравнений движения и законов сохранения из функции Лагранжа. Получение уравнений Эйлера из функции Лагранжа имеет ту особенность, что варьирование интегрального функционала проводится при наличии неголономных связей.

12.3.1 Получение уравнений для экстремалей. Состояние частицы мы зафиксировали элементом $p \in P_e$ группы Пуанкаре. Элемент $p \in P_e$ может быть задан вектором сдвига $a(p) \in \mathbf{R}^4$ и матрицей $G(p) \in \Omega_e(\Theta)$. Знание вектора $a \in \mathbf{R}^4$ и матрицы $G \in \Omega_e(\Theta)$ эквивалентно знанию вектора положения центра $\vec{b} \in \mathbf{R}^3$, параметра временного сдвига $a_0 \in \mathbf{R}$ и матрицы $G \in \Omega_e(\Theta)$. Матрица $G \in \Omega_e(\Theta)$ задаётся 6 числовыми параметрами $q \in \mathbf{R}^6$ — координатами на группе Лоренца. Итак, в данном пункте мы будем задавать состояние i-той частицы набором величин $(\vec{b}^i, G^i, a_0^i)$. Тогда функция Лагранжа k частиц во внешнем поле будет функцией вида

$$n(\vec{b}^1, G^1, a_0^1; \vec{b}^2, G^2, a_0^2; \dots; \vec{b}^k, G^k, a_0^k; x_0) \qquad (12.3.1)$$

При проведении варьирования функции Лагранжа (12.3.1) нужно, однако, учитывать, что скорость $\dot{\vec{b}}^i = \frac{d}{dx_0}\vec{b}^i$ центра частицы является функцией величины G^i,

$$\dot{\vec{b}}^i = \vec{f}^i(G^i), \qquad (12.3.2)$$

т.е. варьирование лагранжиана следует проводить при условии связи (12.3.2).

Для последующего получения закона сохранения энергии нам удобно перейти к действию в параметрической форме. Т.е. мы вводим параметр $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ и считаем, что $x_0 = x_{0(\tau)}$ и $\vec{b}^i = \vec{b}^i(\tau), G^i = G^i(\tau), i = 1, \dots k$. Тогда действие N на конечном отрезке времени принимает вид

$$N = \int_{\tau_1}^{\tau_2} n(\vec{b}^1, G^1, a_0^1; \dots; \vec{b}^k, G^k, a_0^k; x_0(\tau)) x_0'(\tau)\, d\tau. \qquad (12.3.3)$$

(Далее штрих обозначает дифференцирование по τ).

Соответственно условие связи (12.3.2) принимает вид

$$\vec{b}^{i\prime} = x_0' \cdot \vec{f}^i(G^i), \quad i = 1, 2, \dots k. \qquad (12.3.4)$$

Обозначим подинтегральное выражение в (12.3.3) через

$$\mathrm{na} = \mathrm{na}\,(\vec{b}^1, G^1, a_0^1; \dots \vec{b}^k, G^k, a_0^k; x_0, x_0') \equiv n(\vec{b}^1, G^1, a_0^1; \dots; \vec{b}^k, G^k, a_0^k; x_0(\tau)) x_0'(\tau). \qquad (12.3.5)$$

Чтобы получить общую формулу первой вариации для функционала (12.3.3) со связями (12.3.4), предположим, что все функции G^i главно зависят от числового параметра $\alpha : \vec{b}^i = \vec{b}^i(\tau, \alpha), G^i = G^i(\tau, \alpha), a_0^i = a_0^i(\tau, \alpha), x_0 = x_0(\tau, \alpha), \tau_1 = \tau_1(\alpha), \tau_2 = \tau_2(\alpha)$. Тогда функционал N становится функцией параметра α и

$$\frac{dN(\alpha)}{d\alpha} = \int_{\tau_1(\alpha)}^{\tau_2(\alpha)} \left(\sum_{i-1}^{k} \left(\frac{\partial\ \mathrm{na}}{\partial \vec{b}^i} \vec{b}^i_\alpha + \frac{\partial\ \mathrm{na}}{\partial G^i} G^i_\alpha + \frac{\partial\ \mathrm{na}}{\partial a_0^i} a^i_{0\alpha} \right) + \frac{\partial\ \mathrm{na}}{\partial x_0} x_{o\alpha} + \frac{\partial\ \mathrm{na}}{\partial x_0^i} x'_{0\alpha} \right) d\tau +$$

$$\mathrm{na}\,\Big|_{\tau=\tau_{2(\alpha)}} \frac{d\tau_2}{d\alpha} - \mathrm{na}\,\Big|_{\tau=\tau_1(\alpha)} \frac{d\tau_1}{d\alpha}. \qquad (12.3.6)$$

(Здесь индекс α внизу означает дифференцирование по α, например, $b^i_\alpha \equiv \frac{d}{d\alpha}\vec{b}^i_\alpha(\tau, \alpha)$).

Фиксируем некоторое значение параметра c и проинтегрируем по частям выражение

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} \vec{b}^i_\alpha \, d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\left(\int_c^\tau \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} d\xi\right) \vec{b}^i_\alpha(\tau) =$$

$$\int_c^{\tau_2} \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} \, d\xi \vec{b}^i_\alpha(\tau_2) - \int_c^{\tau_1} \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} \, d\xi \vec{b}^i_\alpha(\tau_1) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\int_c^\tau \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} \, d\xi\right) \vec{b}^{i'}_\alpha \, d\tau$$

и используем соотношение связи (12.3.4), получим

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} \vec{b}^i_\alpha \, d\tau = \int\limits_c^{\tau_2} \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} \, d\xi \cdot \vec{b}^i_\alpha(\tau_2) - \int\limits_c^{\tau_2} \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} \, d\xi \cdot \vec{b}^i_\alpha(\tau_1) -$$

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\int\limits_c^\tau \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} d\xi\right) \left(x'_{0\alpha} \vec{f}^i(G^i) + x'_0 \frac{\partial \vec{f}^i}{\partial G^i} G^i_\alpha\right) \, d\tau. \tag{12.3.7}$$

Подставим (12.3.7) в (12.3.6) и получим следующую форму первой вариации

$$\frac{d}{d\alpha} N(\alpha) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial \text{ na}}{\partial G^i} - x'_0 \left(\int\limits_c^\tau \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} d\xi\right) \frac{\partial \vec{f}^i}{\partial G^i}\right) G^i_\alpha + \right. \tag{12.3.8}$$

$$\left. \sum_{i=1}^k \frac{\partial \text{ na}}{d a^i_0} a^i_{0\alpha} + \frac{\partial \text{ na}}{\partial x_0} x_{0\alpha} + x'_{0\alpha} \left(\frac{\partial \text{ na}}{\partial x'_0} - \sum_{i=1}^k \int\limits_c^\tau \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} \, d\xi \cdot f^i(G^i)\right)\right] \, d\tau$$

$$+na\Big|_{\tau=\tau_2} \frac{d\tau_2}{d\alpha} + \sum_{i=1}^k \int\limits_c^{\tau_2} \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} \, d\xi \cdot \vec{b}^i_\alpha(\tau_2) - \left(nd\Big|_{\tau=\tau_1} \frac{d\tau_1}{d\alpha} + \sum_{i=1}^k \int\limits_c^{\tau_1} \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} \, d\xi \cdot \vec{b}^i_\alpha(\tau_1)\right).$$

Преобразуем интеграл

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} x'_{0\alpha} \left(\frac{\partial \text{ na}}{\partial x'_0} - \sum_{i=1}^k \int\limits_c^\tau \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} d\xi f^i(G^i)\right) \, d\tau = \tag{12.3.9}$$

$$x_{0\alpha}(\tau_2) \left(\frac{\partial \text{ na}}{\partial x'_0} - \sum_{i=1}^k \int\limits_c^\tau \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} d\xi \vec{f}^i(G^i)\right) \Big|_{\tau=\tau_2}$$

$$-x_{0\alpha}(\tau_1) \left(\frac{\partial \text{ na}}{\partial x'_0} - \sum_{i=1}^k \int\limits_c^\tau \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} d\xi f^i(G^i)\right) \Big|_{\tau=\tau_1}$$

$$-\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} x_{0\alpha} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \text{ na}}{\partial x'_0} - \sum_{i=1}^k \int\limits_c \tau \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} d\xi f^i(G^i)\right) \, d\tau.$$

Используя (12.3.9), запишем (12.3.8) в виде

$$\frac{d}{d\alpha} N(\alpha) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial \text{ na}}{\partial G^i} - x'_0 \left(\int\limits_c^\tau \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} \, d\xi\right) \frac{\partial \vec{f}^i}{\partial G^i}\right) G^i_\alpha + \right. \tag{12.3.10}$$

$$\left. \sum_{i=1}^k \frac{\partial \text{ na}}{\partial a^i_0} a^i_0 + x_{0\alpha} \left(\frac{\partial \text{ na}}{\partial x_0} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \text{ na}}{\partial x'_0} - \sum_{i=1}^k \left(\int\limits_c^\tau \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} d\xi\right) \vec{f}^i(G^i)\right)\right)\right] \, d\tau$$

$$+\left(\mathrm{na}\,\Big|_{\tau=\tau_2}\frac{d\tau_2}{d\alpha}+\left(\frac{\partial\,\mathrm{na}}{\partial x_0'}-\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{c}^{\tau}\frac{\partial\,\mathrm{na}}{\partial\vec{b}^i}\,d\xi\vec{f}^i(G^i)\right)\Big|_{\tau=\tau_2}x_{0\alpha}(\tau_2)\right)$$

$$-\left(\mathrm{na}\,\Big|_{\tau=\tau_1}\frac{d\tau_1}{d\alpha}+\left(\frac{\partial\,\mathrm{na}}{\partial x_0'}-\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{c}^{\tau}\frac{\partial\,\mathrm{na}}{\partial\vec{b}^i}\,d\xi\vec{f}^i(G^i)\right)\Big|_{\tau=\tau_1}x_{0\alpha}(\tau_1)\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{c}^{\tau_2}\frac{\partial\,\mathrm{na}}{\partial\vec{b}^i}\,d\xi\cdot\vec{b}^i_\alpha(\tau_2)-\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{c}^{\tau_1}\frac{\partial\,\mathrm{na}}{\partial\vec{b}^i}\,d\xi\cdot\vec{b}^i(\tau_1).$$

Рассмотрим теперь задачу с закрепленными концами для функционала (12.3.3) с условиями связи (12.3.4). В таком случае условия связи в интегральном виде дают

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}x_0'\vec{f}^i(G^i)d\tau=Const=\triangle\vec{b}^i=\vec{b}^i(\tau_2)-\vec{b}^i(\tau_1),\quad i=1,2,\dots k, \tag{12.3.11}$$

и

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau^2}x_0'\,d\tau=Const=x_0(\tau_2)-x_0(\tau_1). \tag{12.3.12}$$

Применяем метод множителей Лагранжа, т.е. переходим от функционала (12.3.3) к функционалу

$$N_\lambda(\alpha)=N(\alpha)+\sum_{i=1}^{k}\left\langle\vec{\lambda}^i,\int_{\tau_1}^{\tau_2}x_0'\vec{f}^i(G^i)d\tau\right\rangle+\lambda_0\int_{\tau_1}^{\tau_2}x_0'\,d\tau\,,$$

который запишем в виде

$$N_\lambda(\alpha)=\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\mathrm{na}_\lambda(\vec{b}^1,G^1,a_0^1;\vec{b}^2,G^2,a_0^2;\dots;\vec{b}^k,G^k,a_0^k;x_0)\,d\tau, \tag{12.3.13}$$

где

$$\mathrm{na}_\lambda\equiv\ \mathrm{na}+x_0'\left(\sum_{i-1}^{k}\left\langle\vec{\lambda}^i,\vec{f}^i(G^i)\right\rangle+\lambda_0\right). \tag{12.3.14}$$

Для функционала (12.3.13) с учётом фиксированных концов согласно формуле (12.3.10) будет:

$$\frac{d}{d\alpha}N_\lambda(\alpha)=\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\,\mathrm{na}}{\partial G^i}+x_0'\left\langle\vec{\lambda}^i,\frac{\partial\vec{f}^i}{\partial G^i}\right\rangle-x_0^i\int\limits_{c}^{\tau}\frac{\partial\,\mathrm{na}}{\partial\vec{b}^i}\,d\xi\frac{d\vec{f}^i}{dG^i}\right)G^i_\alpha\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\,\mathrm{na}}{\partial a_0^i}a_{0\alpha}^i+x_{0\alpha}\left(\frac{\partial\,\mathrm{na}}{\partial x_0}-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\,\mathrm{na}}{\partial x_0'}+\sum_{i=1}^{k}\left\langle\vec{\lambda}^i,\vec{f}^i(G^i)\right\rangle\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\lambda_0-\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{c}^{\tau}\frac{\partial\,\mathrm{na}}{\partial\vec{b}^i}d\xi\vec{f}^i(G^i)\right)\right)\right]\,d\tau. \tag{12.3.15}$$

Далее введём координаты $q\in\mathbf{R}^6$ на группе $\Omega_e(\Theta)$ и запишем

$$G^i=G(q^i(\tau)), \tag{12.3.16}$$

где функции $q_1^i, q_2^i, \ldots q_6^i$ — свободные переменные. Для переменных $q^1, q^2, \ldots q^k$; $a_0^1, a_0^2, \ldots a_0^k$; x_0 уравнения Эйлера для функционала (12.3.15) будут

$$\left(\frac{\partial \text{ na}}{\partial G_i} + x_0' \left(-\int\limits_c^\tau \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} d\xi + \vec{\lambda}^{i\top}\right) \frac{\partial f^i}{\partial G^i}\right) \frac{\partial G^i(q^i)}{\partial q^i} = 0, \ i = 1, 2, \ldots k; \tag{12.3.17}$$

$$\frac{\partial \text{ na}}{\partial a_0^i} = 0, \ i = 1, 2, \ldots k; \tag{12.3.18}$$

$$\frac{\partial \text{ na}}{\partial x_0} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \text{ na}}{\partial x_0'} + \lambda_0 + \sum_{i=1}^k \left(-\int\limits_c^\tau \frac{\partial \text{ na}}{\partial \vec{b}^i} d\xi + \vec{\lambda}^{i\top}\right) \vec{f^i}(G^i)\right) = 0. \tag{12.3.19}$$

В уравнениях (12.3.17-12.3.19) перейдем к независимой переменной x_0, учитывая, что $\text{na} = n \cdot x_0'$:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial G^i} + \left(-\int\limits_{x_{0c}}^{x_0} \frac{\partial n}{\partial \vec{b}^i} dx_0 + \vec{\lambda}^{i\top}\right) \frac{\partial \vec{f^i}}{\partial G^i}\right) \frac{\partial G^i(q^i)}{\partial q^i} = 0, \ i = 1, 2, \ldots k; \tag{12.3.20}$$

$$\frac{\partial n}{\partial a_0^i} = 0, \ \ i = 1, 2, \ldots k; \tag{12.3.21}$$

$$\frac{\partial n}{\partial x_0} - \frac{d}{dx_0}(n + \lambda_0 + \sum_{i=1}^k \left(-\int\limits_{x_{0c}}^{x_0} \frac{\partial n}{\partial \vec{b} i} dx_0 + \vec{\lambda}^{i\top}\right) \vec{f^i}(G^i)) = 0. \tag{12.3.22}$$

Решения системы (12.3.17-12.3.19) или системы (12.3.20-12.3.22) назовём экстремалями.

12.3.2 Вывод законов сохранения энергии, импульса и момента. Действие Лоренца обладает тем свойством, что сохраняет свое значение при преобразованиях сдвига времени $T_p,\ p \in P_{nt}$, сдвига пространственных аргументов $T_p,\ p \in P_{ns}$ и ортогонального поворота в пространстве $T_p,\ p \in P_{gse}$, что влечет соответственно законы сохранения энергии, импульса и момента. При процедуре конденсации эти свойства сохраняются. А именно, для замкнутой системы k частиц без внешнего поля функция Лагранжа n обладает следующими свойствами

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \ \Big| \ n(\vec{b}^1, \vec{\beta}^1, Q^1, a_0^1 + \alpha; \vec{b}^2, \vec{\beta}^2, Q^2, a_0^2 + \alpha; \ldots; \vec{b}^k, \vec{\beta}^k, Q^k, a_0^k + \alpha; x_0 + \alpha) = \tag{12.3.23}$$

$$n(\vec{b}^1, \vec{\beta}^1, Q^1, a_0^1; \vec{b}^2, \vec{\beta}^2, Q^2, a_0^2; \ldots; \vec{b}^k, \vec{\beta}^k, Q^k, a_0^k; x_0),$$

$$\forall \vec{r} \in \mathbf{R}^3 \ \Big| \ n(\vec{b}^1 + \vec{r}, \vec{\beta}^1, Q^1, a_0^1; \vec{b}^2 + \vec{r}, \vec{\beta}^3, Q^2, a_0^2; \ldots; \vec{b}^k + \vec{r}, \vec{\beta}^k, Q^k, a_0^k; x_0) = \tag{12.3.24}$$

$$n(\vec{b}^1, \vec{\beta}^1 . Q^1, a_0^1; \vec{b}^2, \vec{\beta}^2, Q^2, a_0^2; \ldots; \vec{b}^k, \vec{\beta}^k, Q^k, a_0^k; x_0),$$

$$\forall Q \in SO(3) \ \Big| \ n(Q^\top \vec{b}^1, \vec{\beta}^1, Q^1 Q, a_0^1; Q^\top \vec{b}^2, \vec{\beta}^2, Q^2 Q, a_0^2; \ldots; Q^\top \vec{b}^k, \vec{\beta}^k, Q^k Q, a_0^k; x_0) = \tag{12.3.25}$$

$$n(\vec{b}^1, \vec{\beta}^1, Q^1, a_0^1; \vec{b}^2, \vec{\beta}^2, Q^2, a_0^2; \ldots; \vec{b}^k, \vec{\beta}^k, Q^k, a_0^k; x_0).$$

Свойства (12.3.23,12.3.24,12.3.25) влекут законы сохранения энергии, импульса и момента для замкнутой системы k частиц.

Перейдем к выводу законов сохранения в более общей ситуации k частиц во внешнем поле.

Для вывода закона сохранения энергии предполагаем, что функция Лагранжа обладает свойством (12.3.23). Дифференцируя равенство (12.3.23) по α при $\alpha = 0$ получим

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial n}{\partial a_0^i} + \frac{\partial n}{\partial x_0} = 0. \qquad (12.3.26)$$

Рассматривая соотношение (12.3.26) на экстремалях, т.е. в условиях выполнения уравнений (12.3.20-12.3.22) мы получаем, что на экстремали в силу (12.3.21) и (12.3.26) $\frac{\partial n}{\partial x_0} = 0$ и уравнение (12.3.22) даёт

$$\mathcal{H}_\lambda \equiv +n + \sum_{i=1}^{k} \left(-\int\limits_{x_{0c}}^{x_0} \frac{\partial n}{\partial \vec{b}^i} dx_0 + \vec{\lambda}^{i\top} \right) \vec{f}^i(G^i) + \lambda_0 = Const. \qquad (12.3.27)$$

Для получения закона сохранения импульса предположим вместо условия (12.3.24) выполнение более слабого условия: функция n не изменяется при добавлении к каждому вектору $\vec{b}^i$ вектора $\alpha\vec{s}$, где $\alpha \in \mathbf{R}$ произвольное число, а $\vec{s} \in \mathbf{R}^3$ — фиксированный единичный вектор. Из этого условия вытекает

$$\left\langle \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial n}{\partial \vec{b}^i} \right)^\top, \vec{s} \right\rangle = 0. \qquad (12.3.28)$$

При определенном выборе функций f^i условие (12.3.28) влечет сохранение проекции импульса на направление $\vec{s}$.

Для получения закона сохранения момента предположим вместо условия (12.3.25) более слабое условие выполнения соответствующего равенства (12.3.25) не для всех $Q \in SO(3)$, а лишь для $Q(\varphi)$, являющихся поворотом на угол φ вокруг оси с единичным вектором $\vec{k}$. Из этого условия при дифференцировании по φ получаем

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial n}{\partial \vec{b}^i} \Gamma^\top \vec{b}^i + \frac{\partial n}{\partial Q^i} Q^i \Gamma \right) = 0,$$

или учитывая, что $\Gamma\vec{r} = [\vec{k}, \vec{r}]$, получаем

$$\left\langle \sum_{i=1}^{k} \left[\left(\frac{\partial n}{\partial \vec{b}^i} \right)^\top, \vec{b}^i \right], \vec{k} \right\rangle + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial n}{\partial Q^i} Q^i \Gamma = 0. \qquad (12.3.29)$$

При определенном выборе функций $f^i(G^i)$ соотношение (12.3.29) влечет закон сохранения проекции момента на направление $\vec{k}$.

12.3.3 Уравнения движения в координатах. Матрицу $G^i \in \Omega_e$ мы будем задавать или 6 параметрами $q^i \in \mathbf{R}^6$ (координатное представление) или 3 параметрами $\vec{\beta} \in \mathbf{R}^3$ и матрицей $Q \in SO(3)$ в правом представлении (полукоординатное представление). Хотя на последнем шаге для получения уравнений движения матрицу $Q \in SO(3)$ мы должны будем задать тремя числовыми параметрами, т.е. в этом случае $(q_1^i, q_2^i, q_3^i) = \vec{\beta}^i$, а параметры q_4^i, q_5^i, q_6^i задают матрицу Q ,т.е. q_4^i, q_5^i, q_6^i — координаты на $SO(3)$. Выражая матрицу $G^i = G(q^i)$ через параметры, мы можем сразу рассматривать функцию n как функцию от числовых переменных

$$n = n(\vec{b}^1, q^1, a_0^1; \vec{b}^2, q^2, a_0^2; \ldots; \vec{b}^k, q_k, a_0^k; x_0) \qquad (12.3.30)$$

и функцию $\vec{f}^i(G^i)$ как функцию числовых переменных

$$\dot{\vec{b}} = f^i(q^i). \tag{12.3.31}$$

Соответственно перепишется и общая форма первой вариации (12.3.10) ,а уравнения движения (12.3.20-12.3.22) перепишутся в виде

$$\frac{\partial n}{\partial q^i_j} + \left(-\int\limits_{x_{0c}}^{x_0} \frac{\partial n}{\partial \vec{b}^i} dx_0 + \vec{\lambda}^{i\top} \right) \frac{\partial \vec{f}^i}{\partial q^i_j} = 0 \;\; i = 1, \ldots k; \;\; j = 1, \ldots 6; \tag{12.3.32}$$

$$\frac{\partial n}{\partial a^i_0} = 0 \;\; i = 1, \ldots k; \tag{12.3.33}$$

$$\frac{\partial n}{\partial x_0} - \frac{d}{dx_0}(n + \lambda_0 + \sum_{i=1}^{k} \left(-\int\limits_{x_{0c}}^{x_0} \frac{\partial n}{\partial \vec{b}^i} dx_0 + \vec{\lambda}^{i\top} \right) \vec{f}^i(q^i)) = 0. \tag{12.3.34}$$

12.3.4 Рассмотрим движение во внешнем поле k спокойных частиц, у каждой из которых стандартное состояние — состояние покоя. Тогда вектора скоростей будут иметь следующее выражение

$$\vec{f}^i(\vec{\beta}^i, Q^i) = \vec{\beta}^i. \tag{12.3.35}$$

В этом случае при каждом $i = 1, 2, \ldots k$ система 6 уравнений (12.3.20) распадается на две системы по 3 уравнения

$$\frac{\partial n}{\partial \vec{\beta}^i} + \left(-\int\limits_{x_{0c}}^{x_0} \frac{\partial n}{\partial \vec{b}^i} dx_0 + \vec{\lambda}^{i\top} \right) = 0, \quad i = 1, 2 \ldots k; \tag{12.3.36}$$

$$\frac{\partial n}{\partial Q^i} \frac{\partial Q^i}{\partial q^i_j} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots k; \;\; j = 4, 5, 6. \tag{12.3.37}$$

Уравнение (12.3.36) после дифференцирования по времени приобретает вид обычных уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dx_0} \frac{\partial n}{\partial \vec{\beta}^i} - \frac{\partial n}{\partial \vec{b}^i} = 0, \tag{12.3.38}$$

а второе уравнение есть необходимое условие экстремума функции n по независимой переменной $Q^i \in SO(3)$.

Уравнение (12.3.38) позволяет записать законы сохранения импульса и энергии в общепринятой форме. А именно, соотношение (12.3.28) при учёте (12.3.38) даёт

$$\frac{d}{dx_0} \left\langle \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial n}{\partial \vec{\beta}^i} \right)^\top, \vec{s} \right\rangle = 0. \tag{12.3.39}$$

Таким образом, для вектора импульса

$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial n}{\partial \vec{\beta}^i} \right)^\top \tag{12.3.40}$$

сохраняется его проекция на направление $\vec{s}$

$$\left\langle \vec{P}, \vec{s} \right\rangle = Const. \tag{12.3.41}$$

Закон сохранения энергии (12.3.27) при учёте выражения (12.3.35) для функции $\vec{f}^i$ и уравнения Эйлера (12.3.36), принимает общепринятый вид

$$\mathcal{H} \equiv -\frac{\partial n}{\partial \vec{\beta}^i}\vec{\beta}^i + n + \lambda_0 = Const. \tag{12.3.42}$$

Перейдем к закону сохранения момента. Нам дано соотношение (12.3.29) и уравнения движения (12.3.36,12.3.37). На экстремали выполняются уравнения (12.3.37). Введём координаты $\vec{q} \equiv (q_4, q_5, q_6)$ на группе $SO(3)$. Тогда $Q^i \equiv Q(\vec{q}^i)$ и $Q^iQ(\varphi) = Q(\vec{q}^i(\varphi))$, где $Q(\varphi)$ матрица поворота на угол φ вокруг оси с единичным вектором $\vec{k}$. Для производной по φ при $\varphi = 0$ получаем

$$\frac{d}{d\varphi}Q^iQ(\varphi) = Q^i\Gamma = \frac{\partial Q}{\partial \vec{q}^i}\frac{d\vec{q}^i}{d\varphi}. \tag{12.3.43}$$

В силу условия (12.3.37)

$$\frac{\partial n}{\partial Q^i}Q^i\Gamma = 0 \tag{12.3.44}$$

и соотношение (12.3.29) приводится к виду

$$\left\langle \sum_{i=1}^{k}\left[\left(\frac{\partial n}{\partial \vec{b}^i}\right)^{\top}, \vec{b}^i\right] + \left[\left(\frac{\partial n}{\partial \vec{\beta}^i}\right)^{\top}, \vec{\beta}^i\right], \vec{k}\right\rangle = 0. \tag{12.3.45}$$

Используя соотношения (12.3.38) и равенство $\dot{\vec{b}}^i = \vec{\beta}^i$, из соотношения (12.3.45) получаем для вектора момента

$$\vec{M} \equiv \sum_{i=1}^{k}\left[\left(\frac{\partial n}{\partial \vec{\beta}^i}\right)^{\top}, \vec{b}^i\right] \tag{12.3.46}$$

соотношение

$$\left\langle \vec{M}, \vec{k}\right\rangle = Const,$$

т.е. закон сохранения проекции момента на направление вектора $\vec{k}$.

Для случая взаимодействия простейших скалярных частиц — скайлов в отсутствии внешнего поля функция Лагранжа n будет согласно п. 4.4.3 функцией лишь координат центров частиц $\vec{b}^i$ и векторов $\vec{\beta}^i$, имеющих в данном случае смысл скоростей центров частиц. В этом случае уравнения Эйлера сводятся к классическим уравнениям (12.3.38) и выполняются законы сохранения энергии (12.3.42) и векторов импульса (12.3.40) и момента (12.3.46) в классической форме. Итак, в случае скайлов мы получаем классическую механику взаимодействия точечных частиц.

12.3.5 Варьирование функции Лагранжа n в задаче со связями сводится к варьированию функции Лагранжа ns в задаче без связей. Рассмотрим теперь систему k спокойных частиц во внешнем поле, не предполагая, что их стандартные состояния являются состояниями покоя. Стандартное состояние i-той частицы относительно состояния покоя отметим элементом $p_{0i} \in P_e$. Таким образом, если $v^i(x)$ — функция состояния частицы в состоянии покоя, то $T_{p_{0i}}(v^i)$ — функция стандартного состояния, а состояние, соответствующее элементу $p \in P_e$ будет $T_pT_{p_{0i}}(v^i) = T_{p_{0i}p}(v^i)$. Согласно п. 3.2.6 формула (3.2.52) функция $\vec{f}(\vec{\beta}, Q)$ в таком случае имеет вид

$$\vec{f}(\vec{\beta}, Q) = \frac{\vec{\beta} + \sqrt{1 - (\vec{\beta})^2}B(\vec{\beta})Q^{\top}\vec{\beta}_0}{1 + \left\langle Q^{\top}\vec{\beta}_0, \vec{\beta}\right\rangle} \tag{12.3.47}$$

для каждой частицы. Введём на группе $SO(3)$ координаты $\vec{q} = (q_4, q_5, q_6)$ и запишем уравнения Эйлера (12.3.32) в виде

$$\frac{\partial n}{\partial \vec{\beta}^i} + \left(-\int\limits_{x_{0c}}^{x_0} \frac{\partial n}{\partial \vec{b}^i} dx_0 + \vec{\lambda}^{i\top} \right) \frac{\partial \vec{f}^i}{\partial \vec{\beta}^i} = 0, \tag{12.3.48}$$

$$\frac{\partial n}{\partial \vec{q}^i} + \left(-\int\limits_{x_{0c}}^{x_0} \frac{\partial n}{\partial \vec{b}^i} dx_0 + \vec{\lambda}^{i\top} \right) \frac{\partial \vec{f}^i}{\partial \vec{q}^i} = 0. \tag{12.3.49}$$

Так как в данном случае $|\vec{\beta}_0| < 1$, то матрица $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\beta}}$ невырождена и соотношение (12.3.48) можно, умножая на обратную матрицу, привести к эквивалентному виду

$$\frac{\partial n}{\partial \vec{\beta}} \left(\frac{\partial \vec{f}^i}{\partial \vec{\beta}^i} \right)^{-1} = \int\limits_{x_{0c}}^{x_0} \frac{\partial n}{\partial \vec{b}^i}\, dx_0 - \vec{\lambda}^{i\top}. \tag{12.3.50}$$

Дифференцируя (12.3.50) по времени, получаем уравнения

$$\frac{d}{dx_0} \left(\frac{\partial n}{\partial \vec{\beta}^i} \left(\frac{\partial \vec{f}^i}{\partial \vec{\beta}^i} \right)^{-1} \right) - \frac{\partial n}{\partial \vec{b}^i} = 0. \tag{12.3.51}$$

Подставив (12.3.50) в (12.3.49), получим следующие соотношения

$$\frac{\partial n}{\partial \vec{q}^i} - \frac{\partial n}{\partial \vec{\beta}^i} \left(\frac{\partial \vec{f}^i}{\partial \vec{\beta}^i} \right)^{-1} \frac{\partial \vec{f}^i}{\partial \vec{q}^i} = 0. \tag{12.3.52}$$

Таким образом, если матрица $\frac{\partial \vec{f}^i}{\partial \vec{\beta}^i}$ невырождена, система уравнений Эйлера (12.3.48, 12.3.49) сводится к эквивалентной системе уравнений (12.3.51, 12.3.52). При каждом $i = 1, 2, \ldots k$ мы получаем 3 дифференциальных уравнения (12.3.51), 3 алгебраических уравнения (12.3.52), 3 алгебраических уравнения

$$\dot{\vec{b}}^i = \vec{f}^i(\vec{\beta}^i, \vec{q}^i) \tag{12.3.53}$$

и одно алгебраическое уравнение Эйлера

$$\frac{\partial n}{\partial a_0^i} = 0. \tag{12.3.54}$$

В случае невырожденной матрицы $\frac{\partial \vec{f}^i}{\partial \vec{\beta}^i}$ система уравнений (12.3.51–12.3.54) допускает следующее эквивалентное преобразование. Из соотношения (12.3.53) выразим величины $\vec{\beta}^i$ как функции переменных $\dot{\vec{b}}^i$ и $\vec{q}^i$

$$\vec{\beta}^i = g(\dot{\vec{b}}^i, \vec{q}^i) \tag{12.3.55}$$

и подставим в функцию Лагранжа

$$n = n(\vec{b}^1, \vec{\beta}^1(\dot{\vec{b}}^1, \vec{q}^1), \vec{q}^1, a_0^1; \ldots; \vec{b}^k, \vec{\beta}^k(\dot{\vec{b}}^k, \vec{q}^k), \vec{q}^k, a_0^k; x_0),$$

получим функцию Лагранжа ns как функцию переменных $\vec{b}^i, \dot{\vec{b}}^i, \vec{q}^i, a_0^i,\ i = 1, 2, \ldots k$ и времени x_0. Варьируем действие

$$\int\limits_{x_{01}}^{x_{02}} \mathrm{ns}\; dx_0$$

в задаче с закрепленными концами, но без ограничений. Мы получим следующие уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dx_0}\left(\frac{\partial\ \mathrm{ns}}{\partial \dot{\vec{b}}^i}\right) - \frac{\partial\ \mathrm{ns}}{\partial \vec{b}^i} = 0, \tag{12.3.56}$$

$$\frac{\partial\ \mathrm{ns}}{\partial \vec{q}i} = 0, \tag{12.3.57}$$

$$\frac{\partial\ \mathrm{ns}}{\partial a_0^i} = 0. \tag{12.3.58}$$

Соотношение (12.3.56) эквивалентно (12.3.51), соотношение (12.3.57) — (12.3.52), соотношение (12.3.58) — (12.3.54), если учесть, что

$$\mathrm{ns}\,(\vec{b}^1, \dot{\vec{b}}^1, \vec{q}^1, a_0^1; \ldots; \vec{b}^k, \dot{\vec{b}}^k, \vec{q}^k, a_0^k; x_0) = \tag{12.3.59}$$

$$n(\vec{b}^1, \vec{\beta}^1(\dot{\vec{b}}^1, \vec{q}^1), \vec{q}^1, a_0^1; \ldots; \vec{b}^k, \vec{\beta}^k(\dot{\vec{b}}^k, \vec{q}^k), \vec{q}^k, a_0^k; x_0).$$

Таким образом, в случае невырожденности якобианов $\frac{\partial \vec{f}^i}{\partial \vec{\beta}^i}$ варьирование функции Лагранжа n в задаче со связями (12.3.53) сводится к варьированию функции Лагранжа ns в задаче без связей.

Рассмотрим координаты $q \in \mathbf{R}^6$ на группе Ω_e и функцию Лагранжа n как функцию величин $\vec{b}^i, q^i, a_0^i$ и времени x_0. Условия связи запишем в координатах q в виде

$$\dot{\vec{b}} = \vec{f}(q). \tag{12.3.60}$$

Задание координат q на Ω_e в виде $(\vec{\beta}, \vec{q})$ имело в только что приведенных рассуждениях непринципиальный характер — принципиальной была возможность разрешить соотношение (12.3.60) относительно трёх из величин $q_1, q_2, \ldots q_6$, и записать их как функции $\dot{b}_1, \dot{b}_2, \dot{b}_3$, и оставшихся трёх величин q_j. Связи (12.3.60), для которых это возможно, будем называть *невырожденными.* В случае невырожденных связей, как было показано, можно избавиться от связей и проводить варьирование в задаче без связей для функции Лагранжа ns. Таким образом, в случае невырожденных связей нет необходимости в развитом в этом параграфе формализме варьирования в задаче со связями. Для спокойных частиц функция $f^i(\vec{\beta}, G)$ имеет вид (12.3.47) и является невырожденной. Поэтому изложенная процедура варьирования представляет ценность именно для беспокойных частиц, в частности, для световых.

§12.4 Уравнения Гамильтона

В предыдущем параграфе мы показали, что в случае невырожденных связей можно свести исходную вариационную задачу со связями к вариационной задаче без связей. При этом необходимые условия экстремума при каждом $i = 1, 2 \ldots, k$ будут состоять из трёх дифференциальных уравнений Лагранжа (12.3.56) и 4 алгебраических уравнений (12.3.57, 12.3.58). Однако, в случае вырожденных связей $\dot{\vec{b}}^i = \vec{f}^i(q)$ такая процедура сведения к системе (12.3.56–12.3.58) становится невозможной. Вырожденные связи описывают движение частиц, движущихся со скоростью света, и поэтому представляют физически важный случай. Нашей задачей в предыдущем и данном параграфе является построение формализма, позволяющего рассматривать единым образом динамику частиц с вырожденными и невырожденными связями.

12.4.1 Уравнения Эйлера для параметров частицы. В предыдущем параграфе для описания динамики k частиц во внешнем поле мы i-той частице сопоставили вектор координат центра $\vec{b}^i$, сдвиг по времени a_0^i и матрицу $G^i = G(p_i) \in \Omega_e$ из группы Лоренца. Выбрав некоторые (возможно локальные) координаты на группе Ω_e, мы задали матрицу G^i шестью параметрами $q^i \in \mathbf{R}^6$. Далее была задана функция Лагранжа

$$n = n\left(\vec{b}^1, q^2, a_0^1; \vec{b}^2, q^2, a_0^2; \ \ldots; \vec{b}^k, q^k, a_0^k; x_0\right) \tag{12.4.1}$$

и k условий связи

$$\dot{\vec{b}}^i = \vec{f}^i(q_i), \tag{12.4.2}$$

задающих скорость i-той частицы как функцию параметров $q^i \in \mathbf{R}^6$.

Рассматривалась одномерная вариационная задача с действием

$$N = \int\limits_{x_{01}}^{x_{02}} n\, dx_0 \tag{12.4.3}$$

и закрепленными концами, т. е. с фиксированными значениями величин

$$\vec{b}^i(x_{01}), \quad \vec{b}^i(x_{02}). \tag{12.4.4}$$

В результате варьирования действия при каждом индексе i было получено 6 уравнений вида

$$\frac{\partial n}{\partial q^i} + \left(-\int\limits_{x_{01}}^{x_0} \frac{\partial n}{\partial \vec{b}^i}\, dx_0 + \vec{\lambda}^{i\top}\right) \frac{\partial \vec{f}^i}{\partial q^i} = 0, \tag{12.4.5}$$

где $\vec{\lambda}^i \in \mathbf{R}^3$ неопредёленный постоянный вектор (мы положили $x_{0i} = x_{01}$), и уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial a_0^i} = 0. \tag{12.4.6}$$

12.4.2 Вопрос об однозначном определении траектории по начальным данным. Предполагая, что траектории рассматриваемой физической системы — экстремали действия (12.4.3), рассмотрим вопрос об однозначном определении траектории по начальным данным.

В начальный момент времени мы имеем при $x_0 = x_{01}$ 3 числа — $\vec{b}^i(x_{01})$, 6 чисел — $q^i(x_{01})$, 1 число — a_0^i и 3 числа $\vec{\lambda}^i$ — всего 13 чисел, связанных 7 алгебраическими соотношениями (12.4.5, 12.4.6). В общем случае для однозначного определения всех величин в начальный момент следует задавать 13 -7 = 6 величин, например, $\vec{b}^i(x_{01})$ и $\vec{\lambda}^i$. В случае невырожденной связи $\vec{f}^i$ можно вместо 6 величин $\vec{b}^i, \vec{\lambda}^i$ в начальный момент задать 6 величин $\vec{b}^i$, $\dot{\vec{b}}^i$. Таким образом, в невырожденном случае траектория определяется заданием начального положения центра частицы и его скорости, как это принято в классической механике точечных частиц. В случае вырожденной связи $\vec{f}^i(q^i)$ вектор $\vec{\lambda}^i$ нельзя однозначно определить из соотношения (12.4.5) при $x_0 = x_{01}$, поэтому естественно, как уже говорилось, задавать само значение $\vec{\lambda}^i$ в начальный момент. В этом случае естественно свести соотношения (12.4.5, 12.4.6) к системе дифференциальных и алгебраических уравнений, в которую величины $\vec{\lambda}^i$ входили бы как равноправные переменные. Для такого сведения вспоминаем, что величины $\vec{\lambda}^i$ имели смысл множителей Лагранжа в задаче на условный экстремум и вводим функцию Гамильтона.

12.4.3 Переход к уравнениям Гамильтона. Чтобы свести систему интегро-дифференциальных уравнений (12.4.5, 12.4.6) к системе дифференциальных и алгебраических уравнений, введём при каждом $i = 1, 2, \ldots, k$ три новые функции

$$\vec{p}^{i\top} \equiv -\int\limits_{x_{01}}^{x_0} \frac{\partial n}{\partial \vec{b}^i}\, dx_0 + \vec{\lambda}^{i\top}. \tag{12.4.7}$$

В силу определения $\vec{p}^i$

$$\frac{d\vec{p}^i}{dx_0} = -\left(\frac{\partial n}{\partial \vec{b}^i}\right)^\top. \tag{12.4.8}$$

Если мы теперь введём функцию Гамильтона h от переменных $\vec{b}^i, \vec{p}^i, q^i, a_0^i,\ i = 1, 2, \ldots, k$ и x_0:

$$h \equiv n + \sum_{i=1}^{k} \vec{p}^{i\top} \vec{f}^i, \tag{12.4.9}$$

то условие связи (12.4.2) записывается в виде уравнения

$$\frac{d}{dx_0}\vec{b}^i = \left(\frac{\partial h}{\partial \vec{p}^i}\right)^\top, \tag{12.4.10}$$

а уравнение (12.4.8) записывается через функцию h с учётом независимости функций $\vec{f}^i(q)$ от $\vec{b}^i$, в форме

$$\frac{d}{dx_0}p^i = -\left(\frac{\partial h}{\partial \vec{b}^i}\right)^\top. \tag{12.4.11}$$

Система (12.4.10, 12.4.11) есть система уравнений Гамильтона для функции h, к которой следует добавить уравнения (12.4.5, 12.4.6), приобретающие вид алгебраических соотношений

$$\frac{\partial h}{\partial q^i} = 0, \tag{12.4.12}$$

$$\frac{\partial h}{\partial a_0^i} = 0. \tag{12.4.13}$$

Таким образом, с помощью перехода к функции h, вводя при каждом $i = 1, 2, \ldots, k$ три новые независимые переменные $\vec{p}^i$, которые мы назовём импульсами, мы пришли при каждом $i = 1, 2, \ldots, k$ к 6 уравнениям Гамильтона (12.4.10, 12.4.11) с 7 голономными связями (12.4.12, 12.4.13).

Мы выбрали вид функции Гамильтона, непосредственно обозначая в расширенной функции Лагранжа при наличии ограничений множители Лагранжа за новые переменные — импульсы, что отличается от традиционного построения функции Гамильтона в механике, но отличия заключаются лишь в выборе знака импульсов и функции Гамильтона. Подробнее роль этих отличий мы рассмотрим в п. 12.4.6 этого параграфа.

Для описания движения системы k взаимодействующих частиц с функцией Лагранжа n и заданными функциями $\vec{f}^i(q^i)$ мы пришли к следующей процедуре:

1) При каждом $i = 1, 2, \ldots, k$ задаются начальные значения векторов положения и импульса $\vec{b}^i(x_{01})$, $\vec{p}^i(x_{01})$.

2) Из системы 7 алгебраических уравнений (12.4.12, 12.4.13) определяются 7 параметров q^i, a_0^i.

3) Решается система дифференциальных уравнений Гамильтона (12.4.10, 12.4.11) совместно с системой алгебраических уравнений (12.4.12, 12.4.13).

При реализации предложенного плана действий принципиальная трудность может встретиться на этапе 2) — при определении переменных q^i, a_0^i через переменные $\vec{b}^i$, $\vec{p}^i$. Прежде чем рассмотреть эту трудность рассмотрим простейшую ситуацию.

12.4.4 Переход к функции Гамильтона hc **с системой уравнений Гамильтона без связей.** Фиксируем некоторые значения аргументов функции h и предположим, что в некоторой окрестности фиксированного значения уравнения (12.4.12, 12.4.13) разрешимы относительно величин q^i, a_0^i как функций $\vec{b}^i$, $\vec{p}^i$. Подставим в функцию h аргументы q^i, a_0^i как функции $\vec{b}^i$, $\vec{p}^i$ и обозначим получившуюся функцию лишь переменных $\vec{b}^i$, $\vec{p}^i$, x_0 через hm. Убедимся, что на экстремали

$$\frac{\partial\,\mathrm{hm}}{\partial \vec{p}^i} = \frac{\partial h}{\partial \vec{p}^i}, \tag{12.4.14}$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{hm}}{\partial \vec{b}^i} = \frac{\partial h}{\partial \vec{b}^i}. \tag{12.4.15}$$

В самом деле

$$\frac{\partial\,\mathrm{hm}\left(\vec{b}^1, \vec{p}^1; \vec{b}^2, \vec{p}^2; \ldots, \vec{b}^k, \vec{p}^k; x_0\right)}{\partial p^i_j} = \frac{\partial h\left(\vec{b}^1, \vec{p}^1, q^1, a_0^1; \ldots; \vec{b}^k, \vec{p}^k, q^k, a_0^k; x_0\right)}{\partial p^i_j} =$$

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{p}^i_j} + \sum_{t=1}^{6}\sum_{l=1}^{k} \frac{\partial h}{\partial q^l_t}\frac{\partial q^l_t}{\partial p^i_j} + \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial h}{\partial a^l_0}\frac{\partial a^l_0}{\partial p^i_j}.$$

В силу соотношений (12.4.12, 12.4.13) на экстремали последние суммы обращаются в нуль, и мы получаем (12.4.14). Аналогично проверяется (12.4.15). Соотношения (12.4.14, 12.4.15) позволяют систему соотношений (12.4.10-12.4.13) свести к системе уравнений Гамильтона для функции $\mathrm{hm}\left(\vec{b}^1, \vec{p}^1; \ldots; \vec{b}^k, \vec{p}^k; x_0\right)$, зависящей от координат и импульсов частиц и времени.

$$\frac{d}{dx_0}\vec{b}^i = \left(\frac{\partial\,\mathrm{hm}}{\partial \vec{p}^i}\right)^{\top}, \tag{12.4.16}$$

$$\frac{d}{dx_0}\vec{p}^i = -\left(\frac{\partial\,\mathrm{hm}}{\partial \vec{b}^i}\right)^{\top}, \tag{12.4.17}$$

без связей.

То, что соотношения связи (12.4.12, 12.4.13) имеют специальный вид, а именно это есть требование, чтобы экстремаль была критической точкой функции h по переменным q_i, a_0^i. Определение критической точки не зависит от выбора локальных координат, т. е. свойство точки быть критической сохраняется при невырожденной замене переменных. Проведём теперь переход от функции h переменных $\vec{b}^i, \vec{p}^i, \vec{q}^i, a_0^i$ и x_0 к функции hc переменных $\vec{b}^i, \vec{p}^i$ и x_0 следующим образом. Фиксируем произвольные значения величин $\vec{b}^i, \vec{p}^i$ и x_0 и вычисляем значения функции h в критических точках по переменным q^i, a_0^i. Получим некоторое множество значений функции h. Занумеруем получившиеся различные значения функции h некоторым индексом $\gamma \in \Gamma$ и получим набор ветвей функции hc. Соответствующие ветви обозначим hc_γ. Если мы будем перебирать не все критические точки, а лишь точки локального экстремум, то соответствующую функцию обозначим he, а её ветви he_γ, $\gamma \in \Gamma$. Для функций hc, he справедливы соотношения типа (12.4.14, 12.4.15)

$$\frac{\partial h}{\partial p_j^i} = \frac{\partial\, \mathrm{hc}_\gamma}{\partial p_j^i} = \frac{\partial\, \mathrm{he}_\gamma}{\partial p_j^i}, \tag{12.4.18}$$

$$\frac{\partial h}{\partial b_\alpha^i} = \frac{\partial\, \mathrm{hc}_\gamma}{\partial b_\alpha^i} = \frac{\partial\, \mathrm{he}_\gamma}{\partial b_\alpha^i}, \tag{12.4.19}$$

для любых индексов i, j, α, γ.

Обратим внимание на то, что траектории системы (12.4.10 – 12.4.13) глобально теряют, вообще говоря, свойство однозначной зависимости от начальных данных, характерной для решения динамики точки. Решения алгебраических уравнений (12.4.12, 12.4.13) могут иметь точки ветвления. При переходе к функции Лагранжа hc это приводит ко множественности ветвей функции hc, причём в некоторых точках траектория может проходить переход с одной ветви функции Гамильтона на другую. Это может происходить в точках совпадения двух разных ветвей $\mathrm{hc}_{\gamma_1} = \mathrm{hc}_{\gamma_2}$, т. е. в точках ветвления функции hc.

Построением функции Гамильтона hc мы сделали переход к задаче классической динамики точки без связей и ограничений. Для определения величин $\vec{b}^i(x_0)$ и $\vec{p}^i(x_0)$ как функций времени мы теперь должны решать классическую систему уравнений Гамильтона для функции $\mathrm{hc}\left(\vec{b}^1, \vec{p}^1; \vec{b}^2, \vec{p}^2; \ldots; \vec{b}^k, \vec{p}^k; x_0\right)$, зависящей лишь от координат частиц $\vec{b}^i$, их импульсов — $\vec{p}^i$ и времени — x_0,

$$\frac{d\vec{b}^i}{dx_0} = \left(\frac{\partial\, \mathrm{hc}}{\partial \vec{p}^i}\right)^{\top}, \tag{12.4.20}$$

$$\frac{d\vec{p}^i}{dx_0} = -\left(\frac{\partial\, \mathrm{hc}}{\partial \vec{b}^i}\right)^{\top}. \tag{12.4.21}$$

12.4.5 О возможности обратного восстановления параметров состояния по координатам и импульсам. Переходом к функции hc мы отвлекаемся от подробностей состояния частицы, определяя лишь её координаты и импульсы, т.е. мы пришли к механике точечных частиц.

При построении функции hc по функции h использование конкретного координатного представления группы Лоренца не является необходимым. Можно рассматривать функцию Гамильтона h как функцию переменных $\vec{b}^i, \vec{p}^i, \vec{G}^i, \vec{a}_0^i$. Т. е. при каждом $i = 1, 2, \ldots, k$ функция h задана на произведении $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \Omega_e \times \mathbf{R}$ и при фиксированных аргументах $\vec{b}^i, \vec{p}^i$, где $i = 1, 2, \ldots, k$ и времени мы определяем критические значения функции h на топологическом произведении $(\Omega_e \times \mathbf{R})^k$.

После определения функций $\vec{b}^i(x_0)$ и $\vec{p}^i(x_0)$ возникает обратная задача о восстановлении значений величин G^i, a_0^i. В случае изолированных критических точек эта задача допускает единственное решение, но при наличии вырожденных особых точек процедура восстановления величин G^i, a_0^i становится неоднозначной. Введём на группе G^i некоторые локальные координаты $q^i \in \mathbf{R}^6$. Тогда простейший случай вырождения независимость функции h от некоторой координаты q_j^i, которую мы назовём *вырожденной*. В этом случае определяются все координаты, кроме вырожденной, которая физически не оказывает влияния на динамику системы. Аналогично, в случае более высокого порядка вырождения r, т. е. размерности множества уровня $h = Const$ при фиксированных $\vec{b}^i, \vec{p}^i$, x_0, естественно проводить выбор локальных координат так, чтобы функция h не зависела от r локальных координат q_j^i. Как известно в дифференциальной топологии, вырождение может исчезать при сколь угодно малом шевелении функции h, т. е. при сколь угодно малых физических возмущениях.

Мы видим, что система при прохождении через точки ветвления функции hc и через вырожденные критические точки может перестраивать свою структуру.

12.4.6 Случай классической функции Лагранжа. Применим теперь проведенные построения к случаю классической функции Лагранжа

$$n = \frac{1}{2} m_0 \beta^2 - u(\vec{b}) \tag{12.4.22}$$

для частицы со стандартным состоянием — состоянием покоя и со связью

$$\dot{\vec{b}} = \vec{\beta}. \tag{12.4.23}$$

Согласно формуле (12.4.9) в этом случае

$$h = \frac{1}{2} m_0 \beta^2 - u(\vec{b}) + \langle \vec{p}, \vec{\beta} \rangle. \tag{12.4.24}$$

Определяем критическую точку по параметрам $\vec{\beta}$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \vec{\beta}} \right)^{\top} = m_0 \vec{\beta} + \vec{p} = 0 \,,$$

откуда

$$\vec{\beta} = -\frac{1}{m_0} \vec{p} \tag{12.4.25}$$

и функция hc имеет вид

$$\mathrm{hc} = \frac{p^2}{2m_0} - u(\vec{b}) - \frac{p^2}{m_0} = -\left(\frac{p^2}{2m_0} + u(\vec{b}) \right). \tag{12.4.26}$$

Таким образом, в этом примере импульс и энергия получаются со знаком, противоположным принятому в [42].

12.4.7 Движение быстрой частицы в потенциальном поле. А теперь применим ту же схему к случаю функции Лагранжа

$$n = m_0 \sqrt{1 - \beta^2} + u(\vec{b}) \tag{12.4.27}$$

для спокойной частицы с той же связью (12.4.23). В этом случае

$$h = m_0\sqrt{1-\beta^2} + u(\vec{b}) + \langle \vec{p}, \vec{\beta} \rangle. \tag{12.4.28}$$

Критическая точка по параметрам $\vec{\beta}$ определяется из условия

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \vec{\beta}}\right)^{\top} = m_0 \frac{-\vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \vec{p} = 0$$

откуда

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{\beta}}{\sqrt{1-\vec{\beta}}} \tag{12.4.29}$$

и

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{m_0^2 + (\vec{p})^2}}. \tag{12.4.30}$$

Функция hc равна

$$\mathrm{hc} = \frac{m_0^2}{\sqrt{m_0^2+(\vec{p})^2}} + u(\vec{b}) + \frac{p^2}{\sqrt{m_0^2+(\vec{p})^2}} = \sqrt{m_0^2+(\vec{p})^2} + u(\vec{b}). \tag{12.4.31}$$

В этом примере импульс с точностью до величин второго порядка по импульсу включительно получается из импульса п. 12.4.6 изменением знака, а функция Гамильтона п. 12.4.6 получается из функции Гамильтона п. 12.4.7 отбрасыванием величин выше второго порядка по импульсу и константы и умножением на (-1).

Сравнение примеров пунктов 12.4.6 и 12.4.7 показывает естественность проведенного нами выбора знаков у импульса и функции Гамильтона для скоростей движения, сравнимых со скоростью света.

12.4.8 Вывод законов сохранения энергии, импульса и момента с помощью функции Гамильтона hc.

Перейдем к выводу законов сохранения энергии, импульса и момента для системы с помощью функции Гамильтона hc. Для получения закона сохранения энергии рассмотрим случай, когда функция Лагранжа n не изменяется при сдвиге величин a_0^i и времени x_0 на любую величину α, т. е. выполнена формула (12.3.23). Тогда тем же свойством будет обладать и функция Гамильтона h вида (12.4.9). Введём однопараметрическое свойство функций

$$h(\alpha) \equiv h\left(\vec{b}^1, \vec{p}^1, Q^1, a_0^1+\alpha; \vec{b}^2, \vec{p}^2, Q^2, a_0^2+\alpha; \ldots; \vec{b}^k, \vec{p}^k, Q^k, a_0^k+\alpha; x_0+\alpha\right), \tag{12.4.32}$$

совпадающих по условию с функцией $h(0)$. Следовательно, совпадают и все функции с функцией $\mathrm{hc}\,(\alpha)$. Зафиксируем значения величин $\vec{b}^i, \vec{p}^i$ и x_0 и выберем критические значения оставшихся переменных Q^i, a_0^i для функции $h(0)$. Итак,

$$\mathrm{hc}\,(0) = h\left(\vec{b}^1, \vec{p}^1, Q^1, a_0^1; \ldots; \vec{b}^k, \vec{p}^k, Q^k, a_0^k; x_0\right).$$

В силу соотношения (4.3.23) тогда значения параметров $Q^i, a_0^i+\alpha$ будут критическими при значении переменных $\vec{b}^i, \vec{p}^i$ и $x_0+\alpha$, т.е.

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \;\Big|\; \mathrm{hc}\left(\vec{b}^1, \vec{p}^1; \vec{b}^2, \vec{p}^2; \ldots; \vec{b}^k, \vec{p}^k; x_0+\alpha\right) = \mathrm{hc}\left(\vec{b}^1, \vec{p}^1; \ldots; \vec{b}^k, \vec{p}^k; x_0\right). \tag{12.4.33}$$

Последнее соотношение означает независимость функции Гамильтона hc от времени x_0, а следовательно, влечет закон сохранения энергии — функции hc.

Пусть теперь $\vec{s}$ фиксированный единичный вектор и функция n не изменяется при прибавлении к каждому вектору $\vec{b}^i$ вектора $\alpha\vec{s}$ с произвольным $\alpha \in \mathbf{R}$. Тогда этим свойством будет обладать функция h, а следовательно и функция hc, т. е.

$$\forall\alpha \in \mathbf{R} \;\Big|\; \mathrm{hc}\left(\vec{b}^1 + \alpha\vec{s}, \vec{p}^{\,1}; \vec{b}^2 + \alpha\vec{s}, \vec{p}^{\,2}; \ldots; \vec{b}^k + \alpha\vec{s}, \vec{p}^{\,k}; x_0\right) = \tag{12.4.34}$$

$$\mathrm{hc}\left(\vec{b}^1, \vec{p}^{\,1}; \vec{b}^2, \vec{p}^{\,2}; \ldots; \vec{b}^k, \vec{p}^{\,k}; x_0\right).$$

Соотношение (12.4.34) влечет сохранение величины $\langle \vec{P}, \vec{s}\rangle$, где

$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{k} \vec{p}^{\,i} \tag{12.4.35}$$

импульс системы. В самом деле

$$\frac{d}{dx_0}\vec{P} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \vec{p}^{\,i}}{dx_0} = -\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial\, \mathrm{hc}}{\partial \vec{b}^i}\right)^{\top},$$

поэтому

$$\frac{d}{dx_0}\langle \vec{P}, \vec{s}\rangle = -\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\, \mathrm{hc}}{\partial \vec{b}^i}\vec{s} = 0$$

в силу (12.4.34).

Переходя к закону сохранения момента, зафиксируем единичный вектор $\vec{e} \in \mathbf{R}^3$ и однопараметрическую группу $Q(\varphi) \in SO(3)$ матриц поворота вокруг оси $\vec{e}$. Выбираем левое представление матриц $G \in \Omega_e$ и потребуем, чтобы для любой матрицы вращения Q вокруг оси $\vec{e}$ выполнялись равенства

$$n\left(\vec{b}^1, \vec{\beta}^1, Q^1, a_0^1; \ldots; \vec{b}^k, \vec{\beta}^k, Q^k, a_0^k; x_0\right) = n\left(Q^{\top}\vec{b}^1, \vec{\beta}^1, Q^1 Q, a_0^1; \ldots; Q^{\top}\vec{b}^k, \vec{\beta}^k, Q^k Q, a_0^k; x_0\right) \tag{12.4.36}$$

и

$$\vec{f}^i\left(\vec{\beta}^i, Q^i Q\right) = Q^{\top}\vec{f}\left(\vec{\beta}^i, Q^i\right). \tag{12.4.37}$$

Тогда функция h для любой матрицы $Q = Q(\varphi)$ удовлетворяет условию

$$h\left(\vec{b}^1, \vec{p}^{\,1}, \vec{\beta}^1, Q^1, a_0^1; \ldots; \vec{b}^k, \vec{p}^{\,k}, \vec{\beta}^k, Q^k, a_0^k; x_0\right) =$$

$$h\left(Q^{\top}\vec{b}^1, Q^{\top}\vec{p}^{\,1}, \vec{\beta}^1, Q^1 Q, a_0^1; \ldots; Q^{\top}\vec{b}^k, Q^{\top}\vec{p}^{\,k}, \vec{\beta}^k, Q^k Q, a_0^k; x_0\right),$$

т. е. функция h не зависит от матрицы $Q = Q(\varphi)$, а следовательно, и функция hc не зависит от матрицы $Q = Q(\varphi)$. Мы получили для любой матрицы $Q = Q(\varphi)$ соотношение

$$\mathrm{hc}\left(Q^{\top}\vec{b}^1, Q^{\top}\vec{p}^{\,1}; Q^{\top}\vec{b}^2, Q^{\top}\vec{p}^{\,2}; \ldots; Q^{\top}\vec{b}^k, Q^{\top}\vec{p}^{\,k}; x_0\right) = \mathrm{hc}\left(\vec{b}^1, \vec{p}^{\,1}; \vec{b}^2, \vec{p}^{\,2}; \ldots; \vec{b}^k, \vec{p}^{\,k}; x_0\right). \tag{12.4.38}$$

Дифференцируя соотношение (12.4.38) по φ при $\varphi = 0$ получим дифференциальное соотношение

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\, \mathrm{hc}}{\partial \vec{b}^i}\Gamma\vec{b}^i + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\, \mathrm{hc}}{\partial \vec{p}^{\,i}}\Gamma\vec{p}^{\,i} = 0, \tag{12.4.39}$$

где
$$\Gamma\vec{b} = [\vec{e}, \vec{b}], \tag{12.4.40}$$
что позволяет переписать соотношение (12.4.39) в виде
$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial \text{ hc}}{\partial\vec{b}^i}[\vec{e},\vec{b}^i] + \frac{\partial \text{ hc}}{\partial\vec{p}^i}[\vec{e},\vec{p}^i]\right) = \left\langle \sum_{i=1}^{k}\left(\left[\vec{b}^i, \left(\frac{\partial \text{ hc}}{\partial\vec{b}^i}\right)^{\top}\right] - \left[\left(\frac{\partial \text{ hc}}{\partial\vec{p}^i}\right)^{\top}, \vec{p}^i\right]\right), \vec{e}\right\rangle = 0. \tag{12.4.41}$$
Подставляя в последнее соотношение уравнения Гамильтона
$$\frac{\partial\vec{b}^i}{dx_0} = \left(\frac{\partial \text{ hc}}{\partial\vec{p}^i}\right)^{\top} \tag{12.4.42}$$
$$\frac{d\vec{p}^i}{dx_0} = -\left(\frac{\partial \text{ hc}}{\partial\vec{b}^i}\right)^{\top} \tag{12.4.43}$$
получаем
$$\left\langle \vec{e}, -\sum_{i=1}^{k}\left([\vec{b}^i, \dot{\vec{p}}^j] + [\dot{\vec{b}}^j, \vec{p}^i]\right)\right\rangle = 0$$
или
$$\frac{d}{dx_0}\left\langle \vec{e}, \sum_{i=1}^{k}[\vec{b}^i, \vec{p}^i]\right\rangle = 0.$$
Итак, сохраняется проекция вектора момента силы
$$\vec{M} \equiv \sum_{i=1}^{k} = [\vec{b}^i, \vec{p}^i] \tag{12.4.44}$$
на направление $\vec{e}$.

Если соотношения (12.4.36, 12.4.37) будут выполнены для любой матрицы $Q \in SO(3)$, то и соотношение (12.4.38) будет выполнено для любой матрицы $Q \in SO(3)$. В таком случае будет сохраняться вектор момента силы (12.4.44).

Глава 13

Структура и взаимодействие агвидов

В этой главе мы рассматриваем общие свойства агвидов.

При переходе от 3-функции состояния $v(x)$ к 4-функции состояния $u(x)$ и плотности лагранжиана Лоренца в главе 1 мы вместо трёх функций смещений $v_1(x_0,\vec{x})$,

$v_2(x_0, \vec{x})$, $v_3(x_0, \vec{x})$ точек из исходного опорного положения ввели 4 функции $u_0(x_0, \vec{x})$, $u_1(x_0, \vec{x})$, $u_2(x_0, \vec{x})$, $u_3(x_0, \vec{x})$, образующие 4-функцию состояния $u(x)$, и ввели 4-функцию тока $j(x) = (Au)(x)$, где A — базовый оператор системы. 3-функция состояния $v(x)$ выражается линейно через 4-функцию состояния $u(x)$, а именно, $v(x) = (Bu)(x)$, где B — линейный оператор замены Максвелла. Возникает вопрос: в каком классе 4-функций соответствия $u \to Bu = v$ и $u \to Au = j$ становятся взаимно-однозначными? В § 13.1 мы установили взаимно-однозначность этих соответствий в классе натуральных частиц, т.е. если функция состояния агвида удовлетворяет условию Лоренца $\theta_{kl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}(x) = 0$ и $uf = \bar{C}^{(1)}_{4,0} \cap W^{(1)}_{2,4}(\mathbf{R}^3)$.

Итак, основным классом агвидов, соответствующим состояниям реальных частиц, является класс натуральных частиц. Возникает вопрос: при каких требованиях на функцию тока $jf(x)$ лоренцев агвид является натуральной частицей и что можно сказать о поведении функции состояния $uf(\vec{x})$ в пространственной бесконечности? Этот вопрос рассматривается в параграфах § 13.9, § 13.10. В § 13.9 мы рассматриваем поля трёх элементарных влавинов: влаcкайла, владипа и влаквазикипера, — представляющих соответственно заряд, дипольный момент и спин, и убеждаемся, что их функции состояния ∞-кулоновские, т.е. для любого $\alpha \in {\mathbf{N}_o}^3$ верно

$$uf^{(\alpha)}(\vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^{1+|\alpha|}}\right) \tag{13.0.1}$$

при $|\vec{x}| \to \infty$. После изучения свойств кулоновского потенциала и свёртки в теореме 13.10.1 мы устанавливаем, что если функция тока $jf(\vec{x})$ ограничена и удовлетворяет условию убывания в бесконечности $jf(\vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^{\gamma}}\right)$, то частица натуральная и кроме того кулоновская, т.е. удовлетворяет условиям (13.0.1) при $|\alpha| \leq 1$.

В § 3.6 мы ввели функции псевдотока js и квазитока jt, полученные линейными преобразованиями из функции тока агвида. В § 13.2 мы вводим соответствующие функции псевдосостояния us и квазисостояния ut и устанавливаем их связь с соответствующими функциями тока, а также правила преобразования их при изменении состояния как в оригиналах, так и в образах Фурье.

В § 13.3 мы устанавливаем в классе натуральных частиц структуру поля скалярной и квазикиперной частиц. А именно, вводим спиновую и коспиновую функции

$$\vec{s}(x) \equiv -\left(\vec{H}(x) - [\vec{l}, \vec{E}(x)]\right), \;\; \vec{t}(x) \equiv -\left(\vec{E}(x) + [\vec{l}, \vec{H}(x)]\right) \tag{13.0.2}$$

и показываем, что скалярность эквивалентна условию $\vec{s} = 0$, а квазикиперность — условию $\vec{t} = 0$. Всякая несветовая частица однозначно разложима на сумму скалярной и квазикиперной. В световом случае частица является скалярной и квазикиперной иф она является скалярной. Итак, ортогональность векторов напряжённости электрического поля $\vec{E}(x)$, напряжённости магнитного поля $\vec{H}(x)$ и вектора скорости частицы $\vec{l}$ характеризует световую скалярную частицу.

В § 13.4 мы выражаем функционал взаимодействия двух натуральных частиц $\mathrm{ni}\,(e, e, u', u'')$ через трансформации Фурье их функций тока. Если $\mathrm{nit}\,(\vec{b}) \equiv \mathrm{ni}\,(e, e, u', u'')$ есть функционал взаимодействия двух натуральных частиц, рассматриваемый как функция от $\vec{b} = \vec{b}'' - \vec{b}'$, где $\vec{b}', \vec{b}''$ — центры частиц, то $\mathrm{nit}\,(\vec{b}) \equiv \mathrm{nit1}\,(\vec{b}) + \mathrm{nit2}\,(\vec{b})$, где для образов Фурье $\widehat{\mathrm{nit1}}\,(\vec{b})$ и $\widehat{\mathrm{nit2}}\,(\vec{b})$ получены формулы (13.4.19) и (13.4.22). Для вычисления оригиналов функций $\mathrm{nit1}\,(\vec{b})$ и $\mathrm{nit2}\,(\vec{b})$ при различных функциях тока мы вводим три вспомогательные функции

$\mathrm{vin1}\,(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{b})$, $\mathrm{vin2}\,(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{b})$, $\mathrm{vin3}\,(\vec{l}, \vec{b})$, определённые своими образами Фурье, — формулы (13.4.28–13.4.30) и посвящаем параграфы 13.6–13.8 вычислению оригиналов этих функций.

Для аппроксимации взаимодействия двух натуральных частиц согласно формулам 13.4.19) и (13.4.22) достаточно аппроксимировать трансформации Фурье функций тока $\widehat{jf'}(\vec{\eta})$ и $\widehat{jf''}(\vec{\eta})$ полиномами Тейлора. Тогда при известных функциях $\mathrm{vin1}\,(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{b})$ и $\mathrm{vin2}\,(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{b})$ вычисление функционала взаимодействия $\mathrm{ni}\,(e, e, u', u'')$ сводится к дифференцированиям функций vin1 и vin2 по переменной $\vec{b}$. Заметим сразу, что процедура замены трансформации Фурье функции тока $\widehat{jf}(\vec{\eta})$ её полиномом Тейлора не даёт аппроксимацию массы частицы, ибо согласно формуле (13.4.30) приводит к расходящемуся выражению. Переход от натуральной частицы с трансформацией Фурье функции тока $\widehat{jf}(\vec{\eta})$ к обобщённой частице с трансформацией Фурье функции тока $t_m(\widehat{jf})(\vec{\eta})$ — полиномом Тейлора порядка m мы называем аппроксимацией частицы *влавином.* Влавин — это обобщённая лоренцева частица, носитель которой состоит только из точки $0 \in \mathbf{R}^3$, т.е. с функцией тока вида

$$jf(\vec{x}) = \sum_{\substack{\alpha \in {\mathbf{N}_o}^3 \\ |\alpha| \le m}} C_\alpha \delta^{(\alpha)}(\vec{x}), \tag{13.0.3}$$

где $C_\alpha \in \mathbf{R}^4$ — постоянные величины. Коэффициенты $C_{k,\alpha}$, $k \in \overline{0,3}$, $\alpha \in {\mathbf{N}_o}^3$ мы называем *характеристиками* частицы. Переходя от натуральной частицы к аппроксимирующему влавину, мы от информации о частицы в виде её функции тока jf переходим к конечному набору констант $C_{k,\alpha} \in \mathbf{R}$ — фактически моментов функции $jf(\vec{x})$ до порядка m. При таком переходе мы асимптотически аппроксимируем структуру поля частицы на больших расстояниях от центра частицы и взаимодействие частиц на больших расстояниях между их центрами.

§ 13.11 посвящен определению таких характеристик агвида, как заряд $e \in \mathbf{R}$, дипольный момент $\vec{d} \in \mathbf{R}^3$, квадр $Qv \in Ms(3)$, спин $\vec{S} \in \mathbf{R}^3$, квин $F \in Mt(3)$ и правилам их преобразования при изменении состояния.

§13.1 Взаимно-однозначность перехода от 3-функции состояния к 4-функции состояния и 4-функции тока

13.1.1 Оператор замены Максвелла и базовый оператор системы.

Для описания среды в главе 1 мы ввели 3-функцию смещений из опорного состояния $v(x) = v(x_0, \vec{x})$. В § 2.2 мы ввели 4-функцию состояния $u(x)$ так, что

$$v(x) = \vec{u} - grad_3 \int_c^{x_0} u_0(x_0, \vec{x}) dx_0 \tag{13.1.1}$$

или $v = Bu$, где B — линейный оператор замены Максвелла. Итак, для описания среды введена одна дополнительная функция от 4 переменных.

Для 4-функции состояния $u(x)$ мы ввели в § 2.2 4-функцию тока $j = Au$, где

$$(Au)_k(x) \equiv (\theta^{kl}\theta_{ij} - \theta^k_j \theta^l_i) \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j} = j_k(x). \tag{13.1.2}$$

Линейный оператор A назвали базовым оператором системы.

Мы рассматриваем область $V \subset \mathbf{R}^4$ специального вида $V = I \times \mathbf{R}^3$ где $I \subset \mathbf{R}$ — замкнутое связное подмножество прямой $\mathbf{R}$. Для того, чтобы для 4-функции $u(x)$ гарантировать существование действия Лоренца мы требуем, чтобы

$$u \in W_{2,4}^{(1)}(V) \cap \bar{C}_{4,0}^{(1)}(V) \equiv U. \tag{13.1.3}$$

Здесь $W_{2,4}^{(1)}(V)$ обозначает класс 4-функций, компоненты которых имеют обобщённые первые частные производные, интегрируемые с квадратом в открытом ядре области V, а $\bar{C}_{4,0}^{(1)}(V)$ — класс 4-функций, имеющих в замыкании области V непрерывные первые частные производные и удовлетворяющие условиям исчезновения в пространственной бесконечности функций и их первых производных

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} u(x_0, \vec{x}) = 0; \tag{13.1.4}$$

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, \vec{x}) = 0. \tag{13.1.5}$$

Множество функций U — линейное пространство.

Линейный оператор замены Максвелла $B : U \to C_3(V)$ мы считаем отображающим линейное пространство U в линейное пространство $C_3(V)$, состоящее из 3-функций, непрерывных в замыкании области V.

Введём линейное пространство $D'(V)$ обобщённых функций на открытом ядре области V и линейное пространство $S'(\mathbf{R}^n)$ обобщённых функций медленного роста на $\mathbf{R}^n$ в терминологии [24]; $D'_4(V) \equiv (D'(V))^4$ и $S'_4(\mathbf{R}^n) \equiv (S'(\mathbf{R}^n))^4$. Линейный оператор $A : U \to D'_4(V)$ рассматриваем как линейное отображение U в $D'_4(V)$.

В п. 2.2.7 мы установили, что ядро $\ker B \subset U$ оператора B принадлежит линейному пространству $Z \subset U$ пассивных функций:

$$Z \equiv \left\{ u \in U \;\middle|\; \exists \varphi \in C^{(2)}(V) \;\middle|\; u = grad_{\,4}\varphi \right\}. \tag{13.1.6}$$

Пассивные функции состояния не создают электрического и магнитного полей и не взаимодействуют с другими частицами. Для пассивных функций состояния отсутствуют движения элементов среды. Итак, пассивные частицы порождены заменой Максвелла, тем что мы ввели дополнительную четвертую функцию для описания состояния частицы. Чтобы ликвидировать не физические пассивные состояния частицы мы введём на 4-функцию $u \in U$ дополнительное линейное условие, а именно условие Лоренца

$$Ku = 0, \tag{13.1.7}$$

где

$$(Ku)(x) \equiv \theta_i^l \frac{\partial u_l}{\partial x_i}(x)$$

Оказывается наложение условия Лоренца позволяет и оператор A сделать взаимно-однозначным.

Итак, наша задача в этом параграфе выделить подмножество $Q \subset U$, так чтобы сужения $B|_Q$ и $A|_Q$ были взаимно-однозначными отображениями. Если $Q \subset U$ — линейное подпространство, то для взаимно-однозначности отображений $B|_Q$ и $A|_Q$ необходимы и достаточны соответственно условия

$$Q \cap \ker B = \{0\}, \tag{13.1.8}$$

$$Q \cap \ker A = \{0\}. \tag{13.1.9}$$

Прежде чем предъявить множество Q установим вспомогательные математические результаты.

13.1.2 Единственность решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в классе $L_2(\mathbf{R}^n)$.

Будем рассматривать полиномы $P(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ от n переменных, принадлежащих коммутативной унитальной алгебре над полем $\mathbf{C}$ с коэффициентом из поля $\mathbf{C}$. Полином

$$P(\xi) \equiv P(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \equiv \sum_{\substack{\alpha \in {\mathbf{N}_o}^3 \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha \xi^\alpha, \quad m \in \mathbf{N}_o, \tag{13.1.10}$$

где $\alpha \in {\mathbf{N}_o}^n$ — мультииндекс, назовём нетривиальным, если существует ненулевой коэффициент $a_\alpha \neq 0$, $|\alpha| \leq m$. Условие нетривиальности может быть записано в следующих эквивалентных формах.

Утверждение 13.1.1 *Следующие утверждение для полинома $P(\xi)$ эквивалентны:*

$$I.\ \exists \xi \in \mathbf{R}^n \ \Big| \ P(\xi) \neq 0;$$

$$II.\ \exists \xi \in \mathbf{C}^n \ \Big| \ P(\xi) \neq 0;$$

$$III.\ \exists a_\alpha \neq 0, |\alpha| \leq m.$$

Доказательство. Очевидные следования $I \Rightarrow II \Rightarrow III$. Если утверждение I не выполнено, то путем дифференцирования убеждаемся, что и утверждение III не выполнено. Поэтому $III \Rightarrow I$ и тогда $I \Leftrightarrow II \Leftrightarrow III$.$\diamondsuit$

Введём множество вещественных нулей полинома

$$\mathrm{Nul}\,(P) \equiv \left\{ \xi \in \mathbf{R}^n \ \Big| \ P(\xi) = 0 \right\}. \tag{13.1.11}$$

Множество $\mathrm{Nul}\,(P) \subset \mathbf{R}^n$ замкнуто в $\mathbf{R}^n$, ибо сужение $P|_{\mathbf{R}^n}$ непрерывная функция. Для нетривиального полинома $P(\xi)$ существует точка $\eta \in \mathbf{R}^n$, что $P(\eta) \neq 0$. Тогда по основной теореме алгебры на любой прямой, проходящей через точку η, у полинома P лежит не более m нулей. Итак, множество $\mathrm{Nul}\,(P) \subset \mathbf{R}^n$ замкнуто и нигде не плотно в $\mathbf{R}^n$.

Утверждение 13.1.2 *Для нетривиального полинома $P(\xi)$ множество его вещественных нулей $\mathrm{Nul}\,(P) \subset \mathbf{R}^n$ имеет меру Лебега нуль.*

Доказательство проведём индукцией по числу переменных $n \in \mathbf{N}$. При $n = 1$ множество нулей нетривиального полинома конечно. Пусть утверждение 13.1.2 верно для натурального числа $n \in \mathbf{N}$. Рассмотрим нетривиальный полином от $n+1$ переменной $P(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \xi_{n+1})$. По утверждению 13.1.1 существует точка $\eta \in \mathbf{R}^{n+1}$, что $P(\eta) \neq 0$. Положим $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \xi_{n+1}) \equiv (\vec{\xi}, \xi_{n+1})$, где $\xi \in \mathbf{R}^n$. Полином $P(\vec{\eta}, \xi_{n+1})$ от одной переменной ξ_{n+1} нетривиален, ибо $P(\vec{\eta}, \eta_{n+1}) \neq 0$, поэтому имеет лишь конечное множество нулей $K \subset \mathbf{R}$. Если $\xi_{n+1} \notin K$, то $P(\vec{\eta}, \xi_{n+1}) \neq 0$ и полином $P(\vec{\xi}, \xi_{n+1})$ от n переменных $\vec{\xi} \in \mathbf{R}^n$ при фиксированном $\xi_{n+1} \notin K$ нетривиален. Обозначим через

$\mathrm{Nul}_n(P(\vec{\xi},\xi_{n+1}))\subset\mathbf{R}^n$ множество нулей полинома $P(\vec{\xi},\xi_{n+1})$ от n переменных $\vec{\xi}\in\mathbf{R}^n$, тогда

$$\mathrm{Nul}\,(P)=\bigcup_{\xi_{n+1}\in\mathbf{R}}\mathrm{Nul}_n(P(\vec{\xi},\xi_{n+1}))= \tag{13.1.12}$$

$$\left(\bigcup_{\xi_{n+1}\in\mathbf{R}\setminus K}\mathrm{Nul}_n(P(\vec{\xi},\xi_{n+1}))\right)\bigcup\left(\bigcup_{\xi_{n+1}\in K}\mathrm{Nul}_n(P(\vec{\xi},\xi_{n+1}))\right).$$

По предположению индукции множество $\mathrm{Nul}_n(P(\vec{\xi},\xi_{n+1}))\subset\mathbf{R}^n$ имеет меру нуль в $\mathbf{R}^n$, если $\xi_{n+1}\in\mathbf{R}\setminus K$. По Теореме Фубини из (13.1.12) следует, что и множество $\mathrm{Nul}\,(P)\subset\mathbf{R}^{n+1}$ имеет меру Лебега нуль. $\diamondsuit$

Сопоставим полиному $P(\xi)$ дифференциальный оператор $P(D)$, $D\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\dots\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ и линейное однородное дифференциальное уравнение

$$P(D)u=0, \tag{13.1.13}$$

в классе обобщённых функций $u\in D'(\mathbf{R}^n)$. Дифференциальный оператор (дифференциальное уравнение) назовём нетривиальным, если полином P нетривиален.

Лемма 13.1.1 *Если $u\in D'(\mathbf{R}^n)\cap L_2(\mathbf{R}^n)$ есть решение нетривиального линейного однородного дифференциального уравнения (13.1.13), то $u=0$.*

Доказательство. Если $u\in L_2(\mathbf{R}^n)$, то функция u является регулярной обобщённой функцией. Более того, u — регулярная обобщённая функция медленного роста, $u\in S'(\mathbf{R}^n)$ ([61], с.30). Обобщённая функция медленного роста $u\in L_2(\mathbf{R}^n)$ имеет трансформацию Фурье $\hat{u}\in S'(\mathbf{R}^n)$. При этом трансформация Фурье $\hat{u}$ является регулярной обобщённой функцией, интегрируемой с квадратом $\hat{u}\in L_2(\mathbf{R}^n)$ ([61], с.34). Пусть $u\in S'(\mathbf{R}^n)$ есть решение уравнение (13.1.13). Применяем трансформацию Фурье и получаем в образах Фурье

$$P(-i\xi)\hat{u}=0, \tag{13.1.14}$$

так как $\widehat{P(D)}=P(-i\xi)$.

По условию полином $P(\xi)$ нетривиален, поэтому и полином $P(-i\xi)$ нетривиален согласно утверждению 13.1.1 часть II. По утверждению 13.1.2 $P(i\xi)=0$ при $\xi\in\mathbf{R}^n$ лишь на множестве меры нуль в $\mathbf{R}^n$. В силу регулярности обобщённых функций $P(-i\xi)$ и $\hat{u}$ из (13.1.14) следует, что $\hat{u}(\xi)=0$ почти всюду на $\mathbf{R}^n$. Откуда $\hat{u}=0$ как обобщённая функция медленного роста. Но тогда и $u=0$.$\diamondsuit$

Замечание 13.1.1 *В доказательстве леммы 13.1.1 мы опирались лишь на факт регулярности обобщённой функции $\hat{u}$. Поэтому лемма 13.1.1 верна и при замене $L_2(\mathbf{R}^n)$ на $L_p(\mathbf{R}^n)$, $p\in[1,2]$, так как если функция $u\in L_p(\mathbf{R}^n)$, то $\hat{u}$ — регулярная обобщённая функция ([61], с. 34).*

13.1.3 Множество пассивных функций и ядра операторов A,B.

В п. 13.1.1 мы уже говорили, что $\ker B\subset Z$.

Утверждение 13.1.3 *Верно включение*

$$Z\subset\ker A. \tag{13.1.15}$$

Доказательство. В классе обобщённых функций, так как $U \subset D'_4(V)$ имеем для $\varphi \in C^{(2)}(V)$

$$\left(A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^{\top}\right)_k = \left(\theta^{kl}\theta_{ij} - \theta^k_j\theta^l_i\right)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_l} =$$

$$\theta^{kl}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\theta_{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\right) - \theta^k_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\theta_{li}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_l\partial x_i}\right) = 0.\diamondsuit$$

Итак справедливы соотношения между множеством пассивных функций Z и ядрами операторов A, B:

$$\ker B \subset Z \subset \ker A. \qquad (13.1.16)$$

13.1.4 Условие Лоренца в случае $I = \mathbf{R}, V = \mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$.

Оператор $K : U \to C(V)$, имеющий вид

$$Ku \equiv \theta^l_i\frac{\partial u_l}{\partial x_i}$$

при $u \in U$ мы назвали в п. 2.5.5 оператором Лоренца. Покажем, что если $I = \mathbf{R}$, то $\ker K \subset U$ есть множество взаимно-однозначности операторов A и B.

Утверждение 13.1.4 *Если* $I = \mathbf{R}$ *, то*

$$(\ker K) \cap Z = \{0\}.$$

Доказательство. Если $u \in Z$, то существует $\varphi \in C^{(2)}(\mathbf{R}^4)$, что $u = \left(\frac{\partial\varphi}{\varphi x}\right)^{\top}$. Если кроме того $u \in \ker K$, то

$$\theta^l_i\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_l} = \theta_{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} = 0. \qquad (13.1.17)$$

Полином $P(\xi) = \theta_{ij}\xi_i\xi_j$ от $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ нетривиален.

Далее если $\varphi \in C^{(2)}(\mathbf{R}^4)$, то $\varphi \in D'(\mathbf{R}^4)$ и $\frac{\partial u_l}{\partial x_k} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\partial x_l} \in D'(\mathbf{R}^4)$ и по условию $u \in U \subset W^{(1)}_{2,4}(\mathbf{R}^4)$ получаем $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\partial x_l} \in L_2(\mathbf{R}^4)$ и также удовлетворяет уравнению

$$\theta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\partial x_l} = 0$$

в классе $D'(\mathbf{R}^4)$. По лемме 13.1.1 тогда $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\partial x_l} = 0$ и следовательно $\frac{\partial u_l}{\partial x_k} = 0$. Отсюда следует, что $u = Const$. Но $u \in U \subset \bar{C}^{(1)}_{4,0}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3)$, поэтому константа может быть лишь нулевой $u = 0.\diamondsuit$

Следствие 13.1.1 *Если* $I = \mathbf{R}$, *то*

$$(\ker K) \cap (\ker B) = \{0\}.$$

Перейдем к взаимно-однозначности оператора A.

Утверждение 13.1.5 *Если* $I = \mathbf{R}$, *то*

$$(\ker K) \cap (\ker A) = \{0\}.$$

Доказательство. В силу включения $U \subset D_4'(\mathbf{R}^4)$ действуем в классе обобщённых функций. Если $u \in \ker K$, то $\theta_i^l \frac{\partial u_l}{\partial x_i} = 0$. Если кроме того $u \in \ker A$, то

$$\theta^{kl}\theta_{ij}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j} - \theta_j^k \theta_i^l \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_l}{\partial x_i} = 0.$$

Но

$$\theta_j^k \theta_i^l \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_l}{\partial x_i} = \theta_j^k \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\theta_i^l \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right) = 0.$$

Поэтому функция $u \in D_4'(\mathbf{R}^4)$ удовлетворяет уравнению

$$\theta^{kl}\theta_{ij}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

или эквивалентному уравнению

$$\Box u = 0, \tag{13.1.18}$$

где $\Box \equiv \theta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ — оператор Даламбера.

Но $u \in U \subset W_{2,4}^{(1)}(\mathbf{R}^4)$, поэтому обобщённые производные $\frac{\partial u_l}{\partial x_k} \in L_2(\mathbf{R}^4) \subset D'(\mathbf{R}^4)$ также будут решениями уравнения Даламбера $\Box\frac{\partial u_l}{\partial x_k} = 0$. По лемме 13.1.1 $\frac{\partial u_l}{\partial x_k} = 0$ и функция $u = const$. Из условия $U \subset \bar{C}_{4,0}^{(1)}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3)$ получаем $u = 0$.$\diamondsuit$

По определению линейное пространство $U \subset W_{2,4}^{(1)}(I \times \mathbf{R}^3)$. В случае $I = \mathbf{R}$ ограничение $u \in W_{2,4}^{(1)}(I \times \mathbf{R}^3)$ становится сильным ограничением, ибо требует не только существования интеграла от суммы квадратов частных производных по всему пространству, но и последующий интегрируемости полученной величины по всей прямой. В случае функции состояния $u \in U$, для которой сохраняется физическая энергия системы получаем из требования $u \in W_{2,4}^{(1)}(\mathbf{R}^4)$, что физическая энергия равна нулю. Итак, ограничение $u \in W_{2,4}^{(1)}(\mathbf{R}^4)$ является существенно менее стеснительным, если $I = [a, b]$ — компактный сегмент. В этом случае лемма 13.1.1 непосредственно неприменима и для получения взаимно-однозначности сужений операторов B и A мы добавим ещё одно ограничение, а именно требование агвидности.

13.1.5 Агвидные функции состояния.

Согласно п. 3.3.1 функция состояния $u(x) \in U$ агвидна, если существует вектор $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ и функция $uf(\vec{x}) \in F_4(\mathbf{R}^3)$, что при $x \in I \times \mathbf{R}^3$ верно

$$u(x) = uf(\vec{x} - \vec{l}x_0) \tag{13.1.19}$$

Пусть далее в этом пункте $I = [a, b]$ — ограниченный сегмент, содержащий нуль. В этом случае из (13.1.19) следует при $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$.

$$uf(\vec{x}) = u(0, \vec{x}) \tag{13.1.20}$$

Если выполнено (13.1.19) и функция $u \in U$, т. е. $u \in W_{2,4}^{(1)}(I \times \mathbf{R}^3) \cap \bar{C}_{4,0}^{(1)}(I \times \mathbf{R}^3)$, то согласно (13.1.20) функция $uf(\vec{x})$ обладает следующими свойствами. Во-первых, $uf \in \bar{C}_{4,0}^{(1)}(\mathbf{R}^3)$, где под $\bar{C}_{4,0}^{(1)}(\mathbf{R}^3)$ мы понимаем множество 4-функций uf непрерывных на $\mathbf{R}^3$ вместе с первыми частными производными и удовлетворяющих условиям исчезновения в бесконечности вместе с первыми производными вида

$$\lim_{|\vec{x}| \to \infty} uf(\vec{x}) = 0, \tag{13.1.21}$$

$$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \frac{\partial uf}{\partial \vec{x}}(\vec{x}) = 0. \tag{13.1.22}$$

Во-вторых, $uf \in W^{(1)}_{2,4}(\mathbf{R}^3)$ в силу неравенств

$$\left\langle \frac{\partial uf}{\partial \vec{x}}(\vec{x} - \vec{l}x_0), \frac{\partial uf}{\partial \vec{x}}(\vec{x} - \vec{l}x_0) \right\rangle \le \tag{13.1.23}$$

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \vec{x}}(x), \frac{\partial u}{\partial \vec{x}}(x) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_0}(x), \frac{\partial u}{\partial x_0}(x) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x}(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right\rangle;$$

$$\int\limits_I \left(\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left\langle \frac{\partial uf}{\partial \vec{x}}(\vec{x} - \vec{l}x_0), \frac{\partial uf}{\partial \vec{x}}(\vec{x} - \vec{l}x_0) \right\rangle dx_1 dx_2 dx_3 \right) dx_0 \le \tag{13.1.24}$$

$$\int\limits_I \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, \vec{x}), \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, \vec{x}) \right\rangle dx_1 dx_2 dx_3 \, dx_0$$

или эквивалентно

$$\operatorname{mes}(I) \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left\langle \frac{\partial uf}{\partial \vec{x}}(\vec{x}), \frac{\partial uf}{\partial \vec{x}}(\vec{x}) \right\rangle dx_1 dx_2 dx_3 \le \int\limits_I \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x}(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right\rangle dx_1 dx_2 dx_3 dx_0.$$

Наоборот, если $uf \in W^{(1)}_{2,4}(\mathbf{R}^3) \cap \bar{C}^{(1)}_{4,0}(\mathbf{R}^3)$, то при любом $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ функция $u(x) \equiv uf(\vec{x} - \vec{l}x_0)$ из класса $W^{(1)}_{2,4}(I \times \mathbf{R}^3) \cap \bar{C}^{(1)}_{4,0}(I \times \mathbf{R}^3) = U$. Введём обозначение для линейного пространства функций $Uf \equiv W^{(1)}_{2,4}(\mathbf{R}^3) \cap \bar{C}^{(1)}_{4,0}(\mathbf{R}^3)$.

Сумма двух агвидных функций состояния u' и u'' уже не есть, вообще говоря, агвидная функция, если $\vec{l'} \neq \vec{l''}$. Итак, агвидные функции состояния $u \in U$ не образуют линейного подпространства в U. Фиксируем вектор $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ и введём подмножество функций

$$\operatorname{Agv}(\vec{l}) \equiv \left\{ u \in U \;\middle|\; \exists uf \in Uf \;\middle|\; u(x) = uf(\vec{x} - \vec{l}x_0) \right\} \tag{13.1.25}$$

Множество $\operatorname{Agv}(\vec{l}) \subset U$ уже линейное подпространство в U.

Для функций $u \in \operatorname{Agv}(\vec{l})$ верно равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_0} u(x) = -\left\langle \vec{l}, \vec{\nabla} \right\rangle u(x), \tag{13.1.26}$$

где $\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ — оператор набла Гамильтона. Поэтому для функций из класса $\operatorname{Agv}(\vec{l})$ действие оператора Даламбера $\Box$ эквивалентно действию оператора

$$\Box(\vec{l}) \equiv \left\langle \vec{l}, \vec{\nabla} \right\rangle^2 - (\vec{\nabla})^2. \tag{13.1.27}$$

Оператор $\Box(\vec{l})$ нетривиален и его трансформация Фурье есть квадратичная форма от трёх переменных вида

$$\widehat{\Box(\vec{l})} = \left\langle \vec{l}, -i\vec{\xi} \right\rangle^2 - (-i\vec{\xi})^2 = (\vec{\xi})^2 - \left\langle \vec{l}, \vec{\xi} \right\rangle^2 \equiv \operatorname{Pd}(\vec{l}, \vec{\xi}). \tag{13.1.28}$$

Заметим, что

$$\operatorname{Pd}(\vec{l},\vec{\xi}) = \left\langle \vec{\xi}, (E - \vec{l}\vec{l}^{\top})\vec{\xi} \right\rangle . \tag{13.1.29}$$

Рассмотрим следующий вопрос: пусть u пассивная агвидная функция, будет ли её потенциал агвидной функцией?

Утверждение 13.1.6 *Если* $u \in \operatorname{Agv}(\vec{l}) \cap Z$, *то существует функция* $\varphi f \in C^{(2)}(\mathbf{R}^3)$, *что*

$$u^{\top} = \frac{\partial}{\partial x}\varphi f(\vec{x} - \vec{l}x_0)$$

Доказательство. Пусть $u \in \operatorname{Agv}(\vec{l})$, т. е. $u(x) = uf(\vec{x} - \vec{l}x_0)$, где $uf \in Uf$. Так как кроме того $u \in Z$, то существует функция $\psi \in C^{(2)}(I \times \mathbf{R}^3)$, что $u^{\top} = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}$. Итак,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x) = uf^{\top}(\vec{x} - \vec{l}x_0). \tag{13.1.30}$$

Проведём линейную замену переменных

$$\begin{cases} y_0 &= x_0 \\ \vec{y} &= \vec{x} - \vec{l}x_0 \end{cases} \tag{13.1.31}$$

с матрицей

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \;\; 0 \;\; 0 \\ -\vec{l} & E_3 \end{pmatrix} \tag{13.1.32}$$

и с матрицей

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \;\; 0 \;\; 0 \\ \vec{l} & E_3 \end{pmatrix} \tag{13.1.33}$$

Введём функцию $\eta(y) \equiv \psi(x(y))$. Тогда

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} = uf^{\top} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \;\; 0 \;\; 0 \\ \vec{l} & E_3 \end{pmatrix}. \tag{13.1.34}$$

Отсюда, в частности,

$$\frac{\partial \eta}{\partial \vec{y}} = \overrightarrow{uf}^{\top}(\vec{y}). \tag{13.1.35}$$

Интегрируя (13.1.35), получаем

$$\eta(y_0, \vec{y}) = \eta(y_0, 0) + \int_0^{\vec{y}} \left\langle \overrightarrow{uf}\ (\vec{y}), d\vec{y} \right\rangle = \eta(y_0, 0) + \chi(\vec{y}), \tag{13.1.36}$$

где функция $\chi \in C^{(2)}(\mathbf{R}^3)$ не зависит от y_0. Для производной по y_0 из (13.1.36) получаем

$$\frac{\partial \eta}{\partial y_0}(y_0, \vec{y}) = \frac{\partial}{\partial y_0}\eta(y_0, 0), \tag{13.1.37}$$

а из (13.1.34) получаем

$$\frac{\partial \eta}{\partial y_0}(y_0, \vec{y}) = \langle l, uf(\vec{y}) \rangle . \tag{13.1.38}$$

При замене переменных (13.1.31) область $V = I \times \mathbf{R}^3$ в переменных x переходит в себя же в переменных y. Поэтому из равенства (13.1.38) следует

$$\forall y_0 \in I \ \forall \vec{y} \in \mathbf{R}^3 \ \Big| \ \frac{\partial \eta}{\partial y_0}(y_0, 0) = \langle l, uf(\vec{y}) \rangle$$

Так как $uf \in \bar{C}^{(1)}_{4,0}(\mathbf{R}^3)$, то $\lim\limits_{|\vec{y}| \to \infty} \langle l, uf(\vec{y}) \rangle = 0$ и следовательно

$$\forall y_0 \in I \ \Big| \ \frac{\partial \eta}{\partial y_0}(y_0, 0) = 0,$$

и в силу (13.1.37)

$$\forall y \in I \times \mathbf{R}^3 \ \Big| \ \frac{\partial \eta}{\partial y_0}(y_0, \vec{y}) = 0.$$

Таким образом, функция $\eta(y_0, \vec{y})$ зависит лишь от $\vec{y}$ и, полагая $\varphi f(\vec{y}) \equiv \eta(0, \vec{y})$, получаем, что $\psi(x) = \varphi f(\vec{y}) = \varphi f(\vec{x} - \vec{l} x_0)$.$\diamondsuit$

Покажем теперь, что множество

$$Q \equiv \operatorname{Agv}(\vec{l}) \cap (\ker K) \tag{13.1.39}$$

при любом $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ есть множество взаимно-однозначности операторов B и A.

Утверждение 13.1.7 *Для любого* $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ *верно*

$$\operatorname{Agv}(\vec{l}) \cap (\ker K) \cap Z = \{0\}.$$

Доказательство. Если $u \in \operatorname{Agv}(\vec{l}) \cap Z$, то по утверждению 13.1.6 существует функция $\varphi f \in C^{(2)}(\mathbf{R}^3)$, что $u^\top(x) = \frac{\partial \varphi f(\vec{x} - \vec{l} x_0)}{\partial x}$. Если, кроме того $u \in \ker K$, то $Ku = 0$ или

$$\Box \varphi f(\vec{x} - \vec{l} x_0) = 0, \tag{13.1.40}$$

что эквивалентно согласно сказанному в начале данного пункта выполнению уравнения

$$\Box(\vec{l}) \varphi f(\vec{x}) = 0 \tag{13.1.41}$$

на $\mathbf{R}^3$. В классе обобщённых функций существует производная $\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \varphi f \in D'(\mathbf{R}^3)$ и также удовлетворяет уравнению (13.1.41). Но $\frac{\partial^2 \varphi f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{\partial u f_\alpha}{\partial x_\beta} \in L_2(\mathbf{R}^3)$, ибо $uf \in Uf \subset W^{(1)}_{2,4}(\mathbf{R}^3)$. По лемме 13.1.1, тогда $\frac{\partial u f_\alpha}{\partial x_\beta} = 0$, следовательно $\overrightarrow{uf}\ (\vec{x}) = Const$. Но $uf \in \bar{C}^{(1)}_{4,0}(\mathbf{R}^3)$, поэтому $\overrightarrow{uf}\ (\vec{x}) = 0$. Далее $\overrightarrow{uf}\ (\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \varphi f(\vec{x})$, что влечет $\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \varphi f(\vec{x}) = 0$ всюду в $\mathbf{R}^3$ и $\varphi f(\vec{x}) = Const$. Отсюда следует, что $u(x) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi f(\vec{x} - \vec{l} x_0) = 0$.$\diamondsuit$

Следствие 13.1.2 *Для любого* $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ *верно*

$$\operatorname{Agv}(\vec{l}) \cap (\ker K) \cap (\ker B) = \{0\}.$$

Для оператора A справедливо следующее утверждение.

Утверждение 13.1.8 *Для любого* $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ *верно*

$$\operatorname{Agv}(\vec{l}) \cap (\ker K) \cap (\ker A) = \{0\}.$$

Доказательство. Если $u \in \ker K$, то в классе обобщённых функций $u \in D_4'(I \times \mathbf{R}^3)$ имеем

$$Au = \Theta \Box u, \tag{13.1.42}$$

ибо

$$(Au)_k = (\theta^{kl}\theta_{ij} - \theta_j^k \theta_i^l)\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j} = \theta^{kl}\theta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u_l - \theta_j^k \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\theta_i^l \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right) =$$

$$(\Theta \Box u)_k - \Theta \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\top (Ku) = (\Theta \Box u)_k.$$

Если, кроме того $u \in \ker A$, то

$$\Box u = 0. \tag{13.1.43}$$

Для агвидной функции $u(x) = uf(\vec{x} - \vec{l}x_0)$ выполнение (13.1.43) эквивалентно выполнению

$$\Box(\vec{l})uf = 0 \tag{13.1.44}$$

для $uf \in D_4'(\mathbf{R}^3)$. Обобщенные производные $\frac{\partial uf_k}{\partial x_\alpha} \in L_2(\mathbf{R}^3)$, ибо $uf \in W_{2,4}^{(1)}(\mathbf{R}^3)$ и удовлетворяют также уравнению

$$\Box(\vec{l})\frac{\partial uf_k}{\partial x_\alpha} = 0.$$

По лемме 13.1.1, тогда $\frac{\partial uf_k}{\partial x_\alpha} = 0$ и функция $uf = Const$. Из включения $uf \in \bar{C}_{4,0}^{(1)}(\mathbf{R}^3)$ следует, что $uf = 0$ и $u = 0$.$\diamondsuit$

Сформулируем теперь основной итог данного параграфа.

Теорема 13.1.1 *Для любого $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ сужения операторов A и B на множестве $Q = \operatorname{Agv}(\vec{l}) \subset (\ker K)$ являются взаимно-однозначными отображениями.*

13.1.6 Лоренцевы частицы.

Ввиду роли условия Лоренца, установленной в данном параграфе, целесообразно ввести следующие понятия.

Определение 13.1.1 *Функция состояния u лоренцева, если, она удовлетворяет условию Лоренца $Ku = 0$.*

Определение 13.1.2 *Частица лоренцева, если у неё существует состояние с лоренцевой функцией состояния.*

Согласно п. 2.5.5 условие Лоренца инвариантно, т. е. если оно выполнено в одном состоянии частицы, то оно выполнено и в любом другом состоянии. Итак, частица лоренцева иф в любом состоянии её функция состояния лоренцева.

Введём обозначение для множества лоренцевых функций $\mathit{Ul} \equiv \ker K$.

Для агвидной функции $u \in \operatorname{Agv}(\vec{l})$ существует единственная функция $uf \in \mathit{Uf}$, что

$$\forall x \in V \;\Big|\; u(x) = uf(\vec{x} - \vec{l}x_0).$$

Тогда

$$\forall x \in V \;\Big|\; (Ku)(x) = \frac{\partial uf_0}{\partial x_0}(\vec{x} - \vec{l}x_0) - \left\langle \vec{\nabla}, \overrightarrow{uf}\ (\vec{x} - \vec{l}x_0)\right\rangle = \left(-\langle \vec{l}, \vec{\nabla}\rangle uf_0 - \langle \vec{\nabla}, \overrightarrow{uf}\rangle\right)\Big|_{x = \vec{x} - \vec{l}x_0}. \tag{13.1.45}$$

Введём линейный дифференциальный оператор $K(\vec{l}) : Uf \to C(\mathbf{R}^3)$ вида

$$\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3 \;\Big|\; (K(\vec{l})uf)(\vec{x}) = -\langle \vec{l}, \vec{\nabla} \rangle uf_0(\vec{x}) - \langle \vec{\nabla}, \overrightarrow{uf}\ (\vec{x}) \rangle.$$

Тогда соотношение (13.1.45) запишется в форме

$$\forall x \in V \;\Big|\; (Ku)(x) = (K(\vec{l})uf)(\vec{x} - \vec{l}x_0). \qquad (13.1.46)$$

Из соотношения (13.1.46) следует эквивалентность включений

$$(u \in \ \mathrm{Agv}\,(\vec{l}) \cap \ Ul) \Leftrightarrow (uf \in \ker K(\vec{l})). \qquad (13.1.47)$$

Для лоренцевой функции состояния $u \in \ Ul$ согласно предыдущему параграфу

$$Au = \Theta \Box u. \qquad (13.1.48)$$

А если $u \in \ \mathrm{Agv}\,(\vec{l}) \cap \ Ul$, то

$$\forall x \in V \;\Big|\; (Au)(x) = (\Theta \Box (\vec{l})uf)(\vec{x} - \vec{l}x_0). \qquad (13.1.49)$$

13.1.7 Электро-магнитная волна с конечной энергией во всем пространстве.

Одним из важнейших следствий теории Максвелла является существование электро-магнитных волн в пустом пространстве без токов и зарядов, распространяющихся со скоростью света в фиксированном направлении. В нашей терминологии "волна"означает агвидная частица и речь идет о существовании агвидной частицы с нулевой 4-функцией тока. В теореме 13.1.1 мы доказали отсутствие таких агвидных частиц, но в предположении принадлежности функции состояния u классу $W^{(1)}_{2,4}(I \times \mathbf{R}^3) \cap \bar{C}^{(1)}_{4,0}(I \times \mathbf{R}^3)$. В приводимых же в учебниках примерах электромагнитных волн в пустом пространстве, распространяющихся с постоянной скоростью в заданном направлении физическая энергия поля бесконечна. Это не случайно, ибо агвидных лоренцевых состояний с конечной физической энергией не существует.

В самом деле, пусть $u \in D'_4(I \times \mathbf{R}^3)$ лоренцева агвидная функция состояния, т. е. $u(x) = uf(\vec{x} - \vec{l}x_0)$, где $uf \in D'_4(I \times \mathbf{R}^3)$. Тогда, если функция тока $j = 0$, то $Au = 0$. Согласно предыдущему пункту для лоренцевой агвидной частицы условие $Au = 0$ эквивалентно условию $\Theta \Box (\vec{l})uf = 0$ или условию

$$\Box(\vec{l})uf = 0. \qquad (13.1.50)$$

Из (13.1.50) следует, что функции $\vec{E}f$ и $\vec{H}f$ как линейные комбинации частных производных uf_k, $k \in \overline{0,3}$ также удовлетворяют как обобщённые функции уравнениям

$$\Box(\vec{l})\vec{E}f = 0, \qquad (13.1.51)$$

$$\Box(\vec{l})\vec{H}f = 0. \qquad (13.1.52)$$

Но по условию $\vec{E}f \in L_{2,3}(\mathbf{R}^3)$ и $\vec{H}f \in L_{2,3}(\mathbf{R}^3)$ и по лемме 13.1.1 получаем $\vec{E}f = 0$ и $\vec{H}f = 0$. Итак, 4-функция u пассивна и не даёт электро-магнитных полей.

Аналогичное свойство, вытекающее из леммы 13.1.1, справедливо для скалярных уравнений квантовой механики в пустом пространстве без возмущений. А именно, не существует интегрируемых с квадратом по пространственным переменным агвидных решений уравнения Шредингера и уравнения Клейна-Фока в пустом пространстве для свободной частицы. Приводимое же в учебниках решение этих уравнений в виде плоской волны всегда неинтегрируемо с квадратом по всему пространству.

13.1.8 Единственность решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в классе Uf.

По определению линейное пространство функций

$$Uf \equiv W_{2,4}^{(1)}(\mathbf{R}^3) \cap \bar{C}_{4,0}^{(1)}(\mathbf{R}^3) = (W_2^{(1)}(\mathbf{R}^3) \cap \bar{C}_0^{(1)}(\mathbf{R}^3))^4.$$

При этом через $W_2^{(k)}(\mathbf{R}^n)$, $k \in \mathbf{N}_o$ мы обозначаем линейное пространство обобщённых числовых функций, имеющих все частные производные порядка k регулярные и интегрируемые с квадратом, и через $\bar{C}_0^{(k)}(\mathbf{R}^n)$ — линейное пространство числовых функций, имеющих все непрерывные частные производные порядка k и у которых $\lim\limits_{|x|\to\infty} u^\alpha(x) = 0$ при любом мультииндексе $\alpha \in {\mathbf{N}_o}^n$ с $0 \le |\alpha| \le k$.

Утверждение леммы 13.1.1 мы обобщим следующим образом.

Лемма 13.1.2 *Если $k \in \mathbf{N}_o$ и $u \in W_2^{(k+1)}(\mathbf{R}^n) \cap \bar{C}_0^{(k)}(\mathbf{R}^n) \cap D'(\mathbf{R}^n)$ обобщенное решение нетривиального линейного однородного уравнения (13.1.13), тогда $u = 0$.*

Доказательство. Если $u \in D'(\mathbf{R}^n)$ — решение уравнения (13.1.13), то и производная $u^{(\alpha)} \in D'(\mathbf{R}^n)$, $\alpha \in {\mathbf{N}_o}^n$, $|\alpha| = k+1$ — также решение уравнения (13.1.13). По условию $u^{(\alpha)} \in L^2(\mathbf{R}^n)$ и из леммы 13.1.1 следует, что $u^{(\alpha)} = 0$ при любом $\alpha \in {\mathbf{N}_o}^n$, $|\alpha| = k+1$. Тогда функция u — полином порядка k, но $u \in \bar{C}_0^{(k)}(\mathbf{R}^n)$ по условию, т. е. $u = 0$.$\diamondsuit$

Следствие 13.1.3 *Уравнение*

$$\Theta\Box(\vec{l})uf = jf \tag{13.1.53}$$

при $jf \in D_4'(\mathbf{R}^3)$ может иметь в классе Uf не более одного решения.

В самом деле, уравнение (13.1.53) эквивалентно уравнению

$$\Box(\vec{l})uf = \Theta jf. \tag{13.1.54}$$

Если uf' и uf'' — два решения уравнения (13.1.54) из класса uf, то разница $(uf' - uf'') \in Uf$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\Box(\vec{l})(uf' - uf'') = 0,$$

и по лемме 13.1.2 $uf' - uf'' = 0$.$\diamondsuit$

§13.2 Функции псевдосостояния и квазисостояния и трансформация Фурье агвидов

13.2.1 Обобщённые состояния и обобщённые частицы.

При изучении взаимодействия частиц нам удобно распространить математический формализм, развитый в предыдущем параграфе для функций класса U, распространить на более широкий класс функций, а именно на обобщённые функции. Агвидную 4-функцию $u(x)$ мы определили ранее (п. 3.3.1) представлением

$$u(x) = uf\left(\vec{x} - \vec{b}(x_0)\right), \tag{13.2.1}$$

где $\vec{b}(x_0) = \vec{l}x_0 + \vec{C}$, а $\vec{l} \in \mathbf{R}^3, \vec{C} \in \mathbf{R}^3$ константы. Для 4-функций uf мы будем рассматривать три вложенных класса $D_4'(\mathbf{R}^3) \supset S_4'(\mathbf{R}^3) \supset Uf$. Здесь $D_4'(\mathbf{R}^3)$ — пространство обобщённых 4-функций на $\mathbf{R}^3$, $S_4'(\mathbf{R}^3)$ — пространство обобщённых функций медленного роста на $\mathbf{R}^3$, а пространство функций $Uf = W_{2,4}^{(1)}(\mathbf{R}^3) \cap \bar{C}_{4,0}^{(1)}(\mathbf{R}^3)$ введено в п. 13.1.5.

Функция $u(x)$ определена на множестве $V = I \times \mathbf{R}^3$, но если функция $u(x)$ агвидна, то в силу представления (13.2.1) она распространяется по агвидности на всё $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^4$. Поэтому далее без ограничения общности мы будем считать агвидную функцию определенной на всем $\mathbf{R}^4$.

Обобщённость функции состояния и соответствующей частицы будет сказываться в том, что действие Лоренца может быть не определен на обобщённой функции состояния.

13.2.2 Условия Лоренца и функция тока для обобщённых агвидов.

В этом и следующем пунктах $uf \in D_4'(\mathbf{R}^3)$.

Распространим в этом параграфе обозначение $\operatorname{Agv}(\vec{l})$ на агвидные функции с $uf \in D_4'(\mathbf{R}^3)$, а именно положим

$$\operatorname{Agv}(\vec{l}) \equiv \left\{ u = uf\left(\vec{x} - (\vec{l}x_0 + \vec{C})\right) \;\Big|\; uf \in D_4'(\mathbf{R}^3), \vec{C} \in \mathbf{R}^3 \right\}. \tag{13.2.2}$$

Если $u \in \operatorname{Agv}(\vec{l})$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = -\left\langle \vec{l}, \vec{\nabla} \right\rangle u(x_0, \vec{x}) = -\left\langle \vec{l}, \vec{\nabla} \right\rangle uf\left(\vec{x} - \vec{b}(x_0)\right). \tag{13.2.3}$$

Условие Лоренца в классе $\operatorname{Agv}(\vec{l})$ принимает вид $Ku = 0$ или $K(\vec{l})uf = 0$, где операторы K и $K(\vec{l})$ те же, что и в предыдущем параграфе, но распространены на пространства обобщённых функций $D_4'(V)$ и $D_4'(\mathbf{R}^3)$ соответственно. Базовый оператор A как линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами также распространяется на пространство обобщённых функций $D_4'(V)$ и определяет функцию тока $j = Au$, также из класса $D_4'(V)$. С учётом (13.2.3) верно

$$jf = A(\vec{l})uf \tag{13.2.4}$$

при любой $uf \in D_4'(\mathbf{R}^3)$. Справедливо тождество для оператора $\tilde{K}$ (п. 2.5.5),

$$\tilde{K}A = 0, \tag{13.2.5}$$

ибо для любой функции $u \in D_4'(V)$

$$\tilde{K}Au = \delta_{sk}\frac{\partial}{\partial x_s}(Au)_k = \delta_{sk}\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\theta^{kl}\theta_{ij} - \theta_j^k\theta_i^l\right)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u_l =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\theta^{sl}\theta_{ij} - \theta_j^s\theta_i^l\right)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u_l =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_s}\theta^{sl}\left(\theta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right) - \theta_i^l\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\theta_{sj}\frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_j}\right)\right)u_l =$$

$$= \left(\theta_s^l\frac{\partial}{\partial x_s}\Box - \theta_i^l\frac{\partial}{\partial x_i}\Box\right)u_l = 0.$$

Поэтому также
$$\tilde{K}(\vec{l})A(\vec{l}) = 0. \tag{13.2.6}$$
Итак, любая функция тока $j \in D_4'(V)$ удовлетворяет условию
$$\tilde{K}j = 0, \tag{13.2.7}$$
а если исходная функция состояния $u \in \operatorname{Agv}(\vec{l})$, то $jf = A(\vec{l})uf$, удовлетворяет условию
$$\tilde{K}jf = 0. \tag{13.2.8}$$

Сохраняются для обобщённых агвидных функций тока и состояния правила их преобразования при изменении состояния согласно п. 3.6.7:
$$\widetilde{uf}(\vec{x}) = G^{\top}(p)uf(R\vec{x}), \tag{13.2.9}$$
$$\widetilde{jf}(\vec{x}) = G^{-1}(p)jf(R\vec{x}). \tag{13.2.10}$$
Сохраняется формула (2.2.24) для электрического поля
$$\vec{E}(x) = -\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_0}(x) + \vec{\nabla}u_0(x),$$
откуда для $u \in \operatorname{Agv}(\vec{l})$ верно
$$\vec{E}f(\vec{x}) = \left\langle \vec{l}, \vec{\nabla} \right\rangle \overrightarrow{uf}(\vec{x}) + \vec{\nabla}uf_0(\vec{x}). \tag{13.2.11}$$
Формула (2.2.25) для магнитного поля также сохраняется
$$\vec{H}(x) = \left[\vec{\nabla}, \vec{u}(x)\right]$$
и даёт при $u \in \operatorname{Agv}(\vec{l})$:
$$\vec{H}f(\vec{x}) = \left[\vec{\nabla}, \overrightarrow{uf}(\vec{x})\right]. \tag{13.2.12}$$

13.2.3 Функция псевдосостояния.

В п. 3.6.5 мы определили для агвидной частицы функцию псевдотока. Определим теперь соответствующую функцию псевдосостояния.

Сначала введём следующее обозначение для матрицы (3.6.56)
$$\operatorname{Am}(\vec{l}) = \begin{pmatrix} 1 & 0\ 0\ 0 \\ -\vec{l} & E_3 \end{pmatrix}. \tag{13.2.13}$$

Сопоставляя каждому вектору $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ матрицу $\operatorname{Am}(\vec{l}) \in \operatorname{GL}(4)$ мы получаем инъективный гомоморфизм группы по сложению $\mathbf{R}^3$ в группу матриц по умножению $\operatorname{GL}(4)$. При любых $\vec{l'}, \vec{l''}, \vec{l} \in \mathbf{R}^3$ справедливы свойства:
$$\operatorname{Am}(\vec{l'})\operatorname{Am}(\vec{l''}) = \operatorname{Am}(\vec{l'} + \vec{l''}), \tag{13.2.14}$$
$$\operatorname{Am}(0) = E, \tag{13.2.15}$$
$$(\operatorname{Am})^{-1}(\vec{l}) = \operatorname{Am}(-\vec{l}), \tag{13.2.16}$$
$$\Theta\operatorname{Am}(\vec{l})\Theta = \operatorname{Am}(-\vec{l}), \tag{13.2.17}$$

$$\det\ \operatorname{Am}(\vec{l}) = 1. \tag{13.2.18}$$

Здесь $\Theta \in M(4)$ матрица вида (2.2.6).

В п. 3.6.5 для агвидной функции состояния $u \in \operatorname{Agv}(\vec{l})$ мы определим функцию тока $j = Au$ и функцию псевдотока

$$\mathit{js}(x) \equiv \operatorname{Am}(\vec{l})j(x). \tag{13.2.19}$$

Аналогично определим функцию псевдосостояния

$$\mathit{us}(x) \equiv \operatorname{Am}(-\vec{l})u(x). \tag{13.2.20}$$

При изменении состояния функции псевдотока преобразуется по правилу (3.6.59)

$$\widetilde{\mathit{jsf}}(\vec{x}) = \mathit{Jr}\ \mathit{jsf}(R\vec{x}), \tag{13.2.21}$$

где матрица

$$\mathit{Jr} \equiv \begin{pmatrix} \det R & \vec{\xi}^{\top} \\ 0 & \\ 0 & R^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix} \tag{13.2.22}$$

и матрица $G(p)$ берется в левом представлении. Для функции псевдосостояния справедливо следующее правило преобразования

$$\widetilde{\mathit{usf}}(\vec{x}) = \Theta \mathit{Jr} \Theta \mathit{usf}(R\vec{x}). \tag{13.2.23}$$

В самом деле, согласно (13.2.9) и (13.2.20)

$$\widetilde{\mathit{usf}}(\vec{x}) = \operatorname{Am}(-\tilde{\vec{l}})\widetilde{uf}(\vec{x}) = \operatorname{Am}(-\tilde{\vec{l}})G^{\top}(p)u(R\vec{x}) = \tag{13.2.24}$$

$$= \operatorname{Am}(-\tilde{\vec{l}})G^{\top}(p)\operatorname{Am}(\vec{l})\mathit{us}(R\vec{x}).$$

Матрица $G = G(p) \in \Omega(\Theta)$, поэтому $G\Theta G^{\top} = \Theta$ и

$$G^{\top} = \Theta G^{-1}\Theta. \tag{13.2.25}$$

Согласно (13.2.17)

$$\operatorname{Am}(-\tilde{\vec{l}}) = \Theta \operatorname{Am}(\tilde{\vec{l}})\Theta, \tag{13.2.26}$$

$$\operatorname{Am}(\vec{l}) = \Theta \operatorname{Am}(-\vec{l})\Theta. \tag{13.2.27}$$

Подставим (13.2.25–13.2.28) в (13.2.24) и получим

$$\widetilde{\mathit{usf}}(\vec{x}) = \Theta \operatorname{Am}(\tilde{\vec{l}})G^{-1}(p)\operatorname{Am}(-\vec{l})\Theta \mathit{usf}(R\vec{x}).$$

Согласно формуле (3.6.58) верно

$$\operatorname{Am}(\tilde{\vec{l}})G^{-1}(p)\operatorname{Am}(-\vec{l}) = \mathit{Jr}$$

и формула (13.2.23) доказана.

Согласно определяющей формуле (13.2.20)

$$u = \operatorname{Am}(\vec{l})us = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ 0 \ 0 \\ -\vec{l} & E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} us_0 \\ \overrightarrow{us} \end{pmatrix} \tag{13.2.28}$$

и функция u представима в виде суммы

$$u = u' + u'', \tag{13.2.29}$$

где

$$u' \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -\vec{l} \end{pmatrix} us_0, \quad u'' \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \overrightarrow{us} \end{pmatrix}. \tag{13.2.30}$$

Функция состояния $u'(x)$ лоренцева, ибо

$$K(\vec{l})u'f = -\left\langle \vec{l}, \vec{\nabla} \right\rangle uf_0 - \left\langle \vec{\nabla}, -\vec{l}usf_0 \right\rangle = 0.$$

Так как оператор K линеен, то функция u'' лоренцева иф функция $u(x)$ лоренцева. Функции состояния u' соответствует функция тока

$$j' = Au' = \Theta\Box u' = \Theta\Box \begin{pmatrix} 1 \\ -\vec{l} \end{pmatrix} us_0 = \tag{13.2.31}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{l} \end{pmatrix} \Box us_0 = l\Box us_0.$$

Т.е. функция тока скалярна с плотностью заряда

$$\rho(x) = \Box us_0(x) = \Box(\vec{l})usf_0\left(\vec{x} - \vec{b}(x_0)\right). \tag{13.2.32}$$

Для функции состояния $u''(x)$ функция тока равна

$$j'' = Au'' = \Theta\Box u'' - \Theta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\top} Ku''.$$

Если u — лоренцево состояние, то и u'' — лоренцево состояние и $Ku'' = 0$. Тогда $j'' = \Theta\Box u''$ и верно $j''_0 = 0$, т.е. состояние с функцией тока j'' абсолютно нейтрально. Так, если u — лоренцева функция состояния, то разложение $j = j' + j''$, где $j' = Au'$, $j'' = Au''$ совпадает с введённым в § 3.6 разложением на скалярную и абсолютно нейтральную составляющие.

Для лоренцева агвидного состояния $u(x)$ мы получаем соотношение

$$\Theta\Box us = js. \tag{13.2.33}$$

Выразим теперь поля $\vec{E}(x)$ и $\vec{H}(x)$ через функцию псевдосостояния агвидной частицы. Согласно формулам (13.2.11, 13.2.12) и (13.2.28) получаем

$$\vec{E}f = \left\langle \vec{l}, \vec{\nabla} \right\rangle \overrightarrow{uf} + \vec{\nabla}uf_0 = \left\langle \vec{l}, \vec{\nabla} \right\rangle \left(-\vec{l}usf_0 + \overrightarrow{usf}\right) + \vec{\nabla}usf_0 =$$

$$= \left(\vec{\nabla} - \vec{l}\left\langle \vec{l}, \vec{\nabla} \right\rangle\right) usf_0 + \left\langle \vec{l}, \vec{\nabla} \right\rangle \overrightarrow{usf},$$

т.е.

$$\vec{E}f = \left(\vec{\nabla} - \vec{l}\left\langle \vec{l}, \vec{\nabla} \right\rangle\right) usf_0 + \left\langle \vec{l}, \vec{\nabla} \right\rangle \overrightarrow{usf}. \tag{13.2.34}$$

Для магнитного поля

$$\vec{H}f = \left[\vec{\nabla}, \vec{uf}\right] = \left[\vec{\nabla}, \left(-\vec{l}usf_0 + \overrightarrow{usf}\right)\right] =$$

$$= \left[\vec{l}, \vec{\nabla}\right] usf_0 + \left[\vec{\nabla}, \overrightarrow{usf}\right],$$

т.е.

$$\vec{H}f = \left[\vec{l}, \vec{\nabla}\right] usf_0 + \left[\vec{\nabla}, \overrightarrow{usf}\right]. \tag{13.2.35}$$

Далее нам будут полезны следующие две формулы

$$\vec{H}f - \left[\vec{l}, \vec{E}f\right] = \left[\left(\vec{\nabla} - \vec{l}\left\langle\vec{l}, \vec{\nabla}\right\rangle\right), \overrightarrow{usf}\right], \tag{13.2.36}$$

$$\vec{E}f + \left[\vec{l}, \vec{H}f\right] = \vec{\nabla}\left(\left(1 - |\vec{l}|^2\right) usf_0 + \left\langle\vec{l}, \overrightarrow{usf}\right\rangle\right), \tag{13.2.37}$$

проверяемые подстановкой формул (13.2.34, 13.2.35). В самом деле,

$$\vec{H}f - \left[\vec{l}, \vec{E}f\right] = \left[\vec{l}, \vec{\nabla}\right] usf_0 + \left[\vec{\nabla}, \overrightarrow{usf}\right] - \left[\vec{l}, \left(\vec{\nabla} - \vec{l}\left\langle\vec{l}, \vec{\nabla}\right\rangle\right)\right] usf_0 -$$

$$\left[\vec{l}\left\langle\vec{l}, \vec{\nabla}\right\rangle \overrightarrow{usf}\right] = \left[\left(\vec{\nabla} - \vec{l}\left\langle\vec{l}, \vec{\nabla}\right\rangle\right), \overrightarrow{usf}\right].$$

Аналогично

$$\vec{E}f + \left[\vec{l}, \vec{H}f\right] = \left(\vec{\nabla} - \vec{l}\left\langle\vec{l}, \vec{\nabla}\right\rangle\right) usf_0 + \left\langle\vec{l}, \vec{\nabla}\right\rangle \overrightarrow{usf} +$$

$$\left[\vec{l}, \left[\vec{l}, \vec{\nabla}\right]\right] usf_0 + \left[\vec{l}, \left[\vec{\nabla}, \overrightarrow{usf}\right]\right] =$$

$$= \left(\vec{\nabla} - \vec{l}\left\langle\vec{l}, \vec{\nabla}\right\rangle\right) usf_0 + \left\langle\vec{l}, \vec{\nabla}\right\rangle \overrightarrow{usf} + \vec{l}\left\langle\vec{l}, \vec{\nabla}\right\rangle usf_0 -$$

$$\vec{\nabla}\left\langle\vec{l}, \vec{l}\right\rangle usf_0 + \vec{\nabla}\left\langle\vec{l}, \overrightarrow{usf}\right\rangle - \left\langle\vec{l}, \vec{\nabla}\right\rangle \overrightarrow{usf} =$$

$$= \vec{\nabla}\left(\left(1 - |\vec{l}|^2\right) usf_0 + \left\langle\vec{l}, \overrightarrow{usf}\right\rangle\right).$$

13.2.4 Функция квазисостояния.

Аналогично предыдущему пункту вспомним, что в п. 3.6.2 мы ввели функцию квазитока jt и сопоставили ей также функцию квазисостояния.

Функцию квазитока агвидной частицы мы определили формулой (3.6.26), т.е.

$$jt(x) \equiv \mathrm{Dm}\,(\vec{l}) j(x), \tag{13.2.38}$$

где матрица $\mathrm{Dm}\,(\vec{l}) \in M(4)$ при любом $l \in \mathbf{R}^3$ есть

$$\mathrm{Dm}\,(\vec{l}) \equiv \begin{pmatrix} 1 & -\vec{l}^{\top} \\ -\vec{l} & E_3 \end{pmatrix}. \tag{13.2.39}$$

Согласно формуле (3.6.28) $\det\ \mathrm{Dm}\,(\vec{l}) = 1 - |\vec{l}|^2$, поэтому матрица $\mathrm{Dm}\,(\vec{l})$ имеет обратную матрицу $\mathrm{Dm}^{-1}(\vec{l})$ вида (3.6.29) лишь при $|\vec{l}| \neq 1$. В случае же $|\vec{l}| = 1$ матрица $\mathrm{Dm}\,(\vec{l})$ необратима и функция тока $j(x)$ не выражается однозначно через функцию квазитока $jt(x)$.

При любом $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ верно

$$\mathrm{Dm}\,(-\vec{l}) = \Theta\, \mathrm{Dm}\,(\vec{l})\Theta. \tag{13.2.40}$$

Определим *функцию квазисостояния* $ut(x)$ формулой

$$ut(x) = \mathrm{Dm}\,(-\vec{l})u(x) \tag{13.2.41}$$

при любом $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$, т.е.

$$ut_0 = u_0 + \left\langle \vec{l}, \vec{u} \right\rangle = \langle l, u \rangle\,, \tag{13.2.42}$$

$$\overrightarrow{ut} = \vec{l}u_0 + \vec{u}. \tag{13.2.43}$$

Выразим функцию квазисостояния через функцию псевдосостояния

$$ut = \mathrm{Dm}\,(-\vec{l})u = \mathrm{Dm}\,(-\vec{l})\,\mathrm{Am}\,(\vec{l})us. \tag{13.2.44}$$

Но записывая матрицы $\mathrm{Dm}\,(-\vec{l})$ и $\mathrm{Am}\,(\vec{l})$ в блочном виде, имеем

$$\mathrm{Dm}\,(-\vec{l})\,\mathrm{Am}\,(\vec{l}) = \begin{pmatrix} 1 & \vec{l}^\top \\ \vec{l} & E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\vec{l} & E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - |\vec{l}|^2 & \vec{l}^\top \\ 0 & E_3 \end{pmatrix}, \tag{13.2.45}$$

т.е.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} ut_0 & = & \left(1 - |\vec{l}|^2\right) us_0 + \left\langle \vec{l}, \overrightarrow{us} \right\rangle, \\ \overrightarrow{ut} & = & \overrightarrow{us}. \end{array} \right. \tag{13.2.46}$$

Рассмотрим закон преобразования функции квазисостояния при изменении состояния. Так как $\overrightarrow{ut} = \overrightarrow{us}$, то согласно предыдущему пункту — формула (13.2.23) имеем

$$\widetilde{\overrightarrow{utf}}(\vec{x}) = R^{-1}\overrightarrow{utf}(R\vec{x}). \tag{13.2.47}$$

Осталось рассмотреть закон преобразования нулевой компоненты utf_0. Согласно формулам (13.2.42), (3.6.78), (3.6.79) имеем

$$\widetilde{utf}(\vec{x}) = \left\langle \tilde{l}, \widetilde{uf}(\vec{x}) \right\rangle = \frac{1}{\langle \xi, l \rangle} \left\langle G^{-1}l, G^\top uf(R\vec{x}) \right\rangle = \tag{13.2.48}$$

$$= \frac{1}{\det R} \langle l, uf(R\vec{x}) \rangle = \frac{1}{\det R} utf_0(R\vec{x}).$$

Из (13.2.47, 13.2.48) получаем следующий закон преобразования

$$\widetilde{utf}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} (\det R)^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} utf(R\vec{x}). \tag{13.2.49}$$

Закон преобразования функции квазитока при изменении состояния ранее в п. 3.6.2 мы установили лишь при $|\vec{l}| \neq 1$. Однако $\vec{js} = \vec{jt}$ и согласно предыдущему пункту при любом $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ согласно формуле (13.2.21) верно

$$\widetilde{\overrightarrow{utf}}(\vec{x}) = R^{-1}\overrightarrow{jtf}(R\vec{x}). \tag{13.2.50}$$

Для функции же $jtf_0(\vec{x})$ имеем согласно определяющей формуле (13.2.38) и формулам (3.6.78), (3.6.79):

$$\widetilde{utf}_0(\vec{x}) = \left\langle \tilde{l}, \Theta\widetilde{jf}(\vec{x}) \right\rangle = \frac{1}{\langle \xi, l \rangle} \left\langle G^{-1}l, \Theta G^{-1} jf(R\vec{x}) \right\rangle = \tag{13.2.51}$$

$$= \frac{1}{\det R} \left\langle l, \Theta jf(R\vec{x}) \right\rangle = \frac{1}{\det R} jtf_0(R\vec{x}).$$

Итак, функция квазитока преобразуется по тому же закону, что и функция квазисостояния при любом $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$:

$$\widetilde{utf}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} (\det(R))^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} jtf(R\vec{x}). \tag{13.2.52}$$

Для лоренцевых агвидных состояний $u \in \operatorname{Agv}(\vec{l})$ имеет место связь функций квазисостояния и квазитока

$$\Theta\Box(\vec{l})utf = jtf. \tag{13.2.53}$$

В самом деле, для лоренцева агвидного состояния $\Theta\Box(\vec{l})uf = jf$ поэтому согласно (13.2.40) имеем

$$\Theta\Box(\vec{l})utf = \Theta\Box(\vec{l}) \operatorname{Dm}(-\vec{l})uf = \Theta \operatorname{Dm}(-\vec{l})\Theta\Theta\Box(\vec{l})uf =$$

$$\Theta \operatorname{Dm}(-\vec{l})\Theta jf = \operatorname{Dm}(\vec{l})jf = jtf.$$

Функция квазисостояния ut обладает тем преимуществом перед функцией псевдосостояния us, что её нулевая компонента ut_0 и пространственные компоненты $\overrightarrow{ut}$ преобразуются независимо при изменении состояния и обладает тем недостатком, что при $|\vec{l}| = 1$ функция состояния u не выражается через функцию квазисостояния ut.

С помощью введенной функции квазисостояния формулы (13.2.36) и (13.2.37) предыдущего пункта приобретают следующий вид

$$\vec{H}f - \left[\vec{l}, \vec{E}f\right] = \left[\left(\vec{\nabla} - \vec{l}\left\langle\vec{l}, \vec{\nabla}\right\rangle\right), \overrightarrow{utf}\right], \tag{13.2.54}$$

$$\vec{E}f + \left[\vec{l}, \vec{H}f\right] = \vec{\nabla} utf_0. \tag{13.2.55}$$

По функции $jt_0(x)$ — плотности квазизаряда введём понятия, аналогичные понятиям абсолютно нейтральной и киперной частиц, определённым в п. 3.1.4 по плотности заряда $j_0(x)$.

Определение 13.2.1 *Состояние называется абсолютно квазинейтральным, если* $jt_0 = 0$.

Определение 13.2.2 *Частица называется квазикиперной, если у неё существует абсолютно квазинейтральное состояние.*

В силу правила преобразования (13.2.52) функции квазизаряда jt_0 при изменении состояния, если одно состояние частицы абсолютно квазинейтрально, то и всякое её состояние абсолютно квазинейтрально. Таким образом, частица квазикиперная иф любое её состояние абсолютно квазинейтрально. В этом преимущество свойства абсолютной квазинейтральности перед свойством абсолютной нейтральности, которое может теряться при изменении состояния.

13.2.5 Трансформация Фурье.

В этом пункте мы сузим класс рассматриваемых функций uf до $uf(\vec{x}) \in S_4'(\mathbf{R}^3)$ — пространству обобщённых функций медленного роста. В этом случае существует трансформация Фурье $\widehat{uf}(\vec{\eta})$ и также принадлежит $\widehat{uf} \in S_4'(\mathbf{R}^3)$. Через $\vec{\eta} \in \mathbf{R}^3$ мы обозначаем здесь переменные Фурье сопряженные с переменными $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$. Для функции $u(x) = uf\left(\vec{x} - \vec{b}(x_0)\right)$ в таком случае определена частичная трансформация Фурье по пространственным переменным

$$\hat{u}(x_0, \vec{\eta}) = l^{i\left\langle \vec{\eta}, \vec{b}(x_0)\right\rangle} \widehat{uf}(\vec{\eta}). \tag{13.2.56}$$

Условия Лоренца на uf в образах Фурье принимает вид

$$i\left(\left\langle \vec{l}, \vec{\eta}\right\rangle \widehat{uf}_0 + \left\langle \vec{\eta}, \widehat{uf}\right\rangle\right) = 0. \tag{13.2.57}$$

Если исходное состояние u лоренцево, то

$$jf = \Theta \Box(\vec{l}) uf$$

и

$$\widehat{jf} = \Theta \operatorname{Pd}(\vec{l}, \vec{\eta}) \widehat{uf},$$

т.е.

$$\widehat{jf} = \left(\vec{\eta}^2 - \left\langle \vec{l}, \vec{\eta}\right\rangle^2\right) \Theta \widehat{uf}. \tag{13.2.58}$$

Поскольку при изменении состояния функции uf, jf, usf, jsf и функция спина $\vec{sf}$ преобразуются линейно, то свойства трансформации Фурье ([24], с. 104) позволяют записать соответствующие линейные правила преобразования образов Фурье при изменении состояния. А именно, формулы (13.2.9) и (13.2.10) эквивалентны соответственно формулам:

$$\widehat{\widetilde{uf}}(\vec{\eta}) = \frac{1}{|\det R|} G^{\top}(p) \widehat{uf}(R^{-1\top}\vec{\eta}), \tag{13.2.59}$$

$$\widehat{\widetilde{jf}}(\vec{\eta}) = \frac{1}{|\det R|} G^{-1}(p) \widehat{jf}(R^{-1\top}\vec{\eta}). \tag{13.2.60}$$

Формулы (13.2.23) и (13.2.21) эквивалентны соответственно формулам

$$\widehat{\widetilde{usf}}(\vec{\eta}) = \frac{1}{|\det R|} \Theta Jr \Theta \widehat{usf}(R^{-1\top}\vec{\eta}), \tag{13.2.61}$$

$$\widehat{\widetilde{jsf}}(\vec{\eta}) = \frac{1}{|\det R|} Jr \widehat{jsf}(R^{-1\top}\vec{\eta}). \tag{13.2.62}$$

Формула преобразования спиновой функции (3.6.51) при $\vec{sf} \in S_4'(\mathbf{R}^3)$ в образах Фурье имеет вид

$$\widehat{\widetilde{\vec{sf}}}(\vec{\eta}) = \frac{1}{(\det R)|\det R|} R^{\top} \widehat{\vec{sf}}(R^{-1\top}\vec{\eta}). \tag{13.2.63}$$

13.2.6 Функция состояния u класса U.

Усилим ограничения на функцию uf в этом пункте — а именно потребуем, чтобы $uf \in Uf$. Согласно предыдущему параграфу условия $u \in U$ и $uf \in Uf$ для агвидов эквивалентны. По определению класс $Uf = W^{(1)}_{2,4}(\mathbf{R}^3) \cap \bar{C}^{(1)}_{4,0}(\mathbf{R}^3)$. Поэтому если $uf \in Uf$, то $uf \in \bar{C}^{(1)}_{4,0}(\mathbf{R}^3)$, а следовательно функция uf непрерывна и ограничена на $\mathbf{R}^3$. Тогда функция uf — функция медленного роста и поэтому ([24], с. 92) регулярная обобщённая функция медленного роста, т.е. $uf \in S'_4(\mathbf{R}^3)$. Функция $u(x) = uf\left(\vec{x} - \vec{b}(x_0)\right)$ также непрерывна и ограничена на $\mathbf{R}^4$, поэтому является регулярной обобщённой функцией медленного роста на $\mathbf{R}^4$. Итак, справедливы включения

$$Uf \subset S'_4(\mathbf{R}^3), \tag{13.2.64}$$

$$\forall \vec{l} \in \mathbf{R}^3 \;\Big|\; \operatorname{Agv}(\vec{l}) \cap U \subset S'_4(\mathbf{R}^4). \tag{13.2.65}$$

Если $uf \in Uf$, то частные производные $\frac{\partial uf_k}{\partial x_\alpha} \in L_2(\mathbf{R}^3)$ и являются регулярными обобщёнными функциями медленного роста. Тогда их образы Фурье $\widehat{\frac{\partial uf_k}{\partial x_\alpha}} \in L_2(\mathbf{R}^3)$ и также являются регулярными обобщёнными функциями медленного роста. В таком случае согласно формулам (13.2.11, 13.2.12) и напряженности полей $\vec{E}f \in L_{2,3}(\mathbf{R}^3)$ и $\vec{H}f \in L_{2,3}(\mathbf{R}^3)$ являются регулярными обобщёнными функциями медленного роста вместе со своими образами Фурье. Функция тока $jf = A(\vec{l})uf$ является линейной комбинацией первых производных от величин $\frac{\partial uf_k}{\partial x_\alpha}$, поэтому её трансформация Фурье $\widehat{jf} = \widehat{A(\vec{l})}\widehat{uf}$ будет регулярной обобщённой функцией медленного роста согласно вышесказанному. Итак, если $uf \in Uf$, то $\widehat{jf} \in S'_4(\mathbf{R}^3)$ — регулярная обобщённая функция, причём если дополнительно $uf \in \bar{C}^{(2)}_{4,0}(\mathbf{R}^3)$, то и сама функция uf — регулярная обобщённая функция медленного роста.

13.2.7 Выражение трансформации Фурье функции тока через трансформации Фурье функций псевдотока и квазитока.

Согласно § 3.6 формулам (3.6.55) и (3.6.57) функция тока агвида j выражается в любом состоянии через функцию псевдотока js по формуле

$$j = l js_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{js} \end{pmatrix}. \tag{13.2.66}$$

Отсюда для трансформации Фурье имеем

$$\widehat{jf}(\vec{\eta}) = l\widehat{jsf}_0(\vec{\eta}) + \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{\vec{jsf}} \end{pmatrix}(\vec{\eta}). \tag{13.2.67}$$

Выразим играющую важную роль далее функцию

$$f(\vec{\eta}) \equiv \left\langle \widehat{jf}(\vec{\eta}), \Theta\widehat{jf}(-\vec{\eta}) \right\rangle \tag{13.2.68}$$

через трансформацию Фурье функции псевдотока. Подставляя (13.2.67) в (13.2.68), получим

$$\left\langle \widehat{jf}(\vec{\eta}), \Theta\widehat{jf}(-\vec{\eta}) \right\rangle = \widehat{jsf}_0(\vec{\eta})\widehat{jsf}_0(-\vec{\eta})\left(1 - |\vec{l}|^2\right) - \tag{13.2.69}$$

$$\left(\widehat{jsf}_0(\vec{\eta})\left\langle \vec{l}, \widehat{\vec{jsf}}(-\vec{\eta}) \right\rangle + \widehat{jsf}_0(-\vec{\eta})\left\langle \vec{l}, \widehat{\vec{jsf}}(\vec{\eta}) \right\rangle\right) - \left\langle \widehat{\vec{jsf}}(\vec{\eta}), \widehat{\vec{jsf}}(-\vec{\eta}) \right\rangle.$$

В несветовом случае $|\vec{l}| \neq 1$ согласно формуле (3.6.29) функция тока выражается через функцию квазитока по формуле

$$j = l\frac{\langle l, jt\rangle}{\langle l, \Theta l\rangle} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{jt} \end{pmatrix}. \tag{13.2.70}$$

Откуда следует

$$\widehat{jf}(\vec{\eta}) = l\frac{\left\langle l, \widehat{jtf}(\vec{\eta})\right\rangle}{\langle l, \Theta l\rangle} + \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{\vec{jtf}}(\vec{\eta}) \end{pmatrix}. \tag{13.2.71}$$

§13.3 Структура поля агвидов

В этом параграфе рассматриваются особенности электрического $\vec{E}(x)$ и магнитного $\vec{H}(x)$ поля агвидных частиц, в том числе обобщённых. Рассматриваются только агвидные частицы во всем параграфе. Кроме того, в п. 13.3.1 требуется, чтобы $uf \in D'_4(\mathbf{R}^3)$, в п. 13.3.2 — чтобы $uf \in D'_4(\mathbf{R}^3)$ и частица была лоренцевой, в пунктах 13.3.3–13.3.6 — чтобы частица была лоренцевой и $uf \in Uf$, где класс Uf введен в п. 13.1.5. Для краткости введём понятие натуральной частицы.

Определение 13.3.1 *Лоренцеву агвидную частицу с $uf \in Uf$ назовём натуральной.*

13.3.1 Функции $\vec{t}(x), \vec{s}(x)$ и их преобразование при изменении состояния.

В этом пункте предполагается $uf \in D'_4(\mathbf{R}^3)$.

Введём две 3-функции

$$\vec{t}(x) \equiv -(\vec{E}(x) + [\vec{l}, \vec{H}(x)]), \tag{13.3.1}$$

$$\vec{s}(x) \equiv -(\vec{H}(x) - [\vec{l}, \vec{E}(x)]). \tag{13.3.2}$$

Согласно п. 13.2.4 функции $\vec{t}(x)$ и $\vec{s}(x)$ выражаются через функцию квазисостояния $ut(x)$ следующим образом

$$\overrightarrow{tf}\,(\vec{x}) = -\vec{\nabla} utf_0(\vec{x}), \tag{13.3.3}$$

$$\overrightarrow{sf}\,(\vec{x}) = -[\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\nabla}, \overrightarrow{utf}\,(\vec{x})]. \tag{13.3.4}$$

Зная закон преобразования функции квазисостояния при изменении состояния, покажем что функции $\vec{t}$ и $\vec{s}$ преобразуются следующим образом

$$\overrightarrow{\widetilde{tf}}\,(\vec{x}) = \frac{1}{\det R} R^\top\, \overrightarrow{tf}\,(R\vec{x}), \tag{13.3.5}$$

$$\overrightarrow{\widetilde{sf}}\,(\vec{x}) = \frac{1}{\det R} R^\top\, \overrightarrow{sf}\,(R\vec{x}). \tag{13.3.6}$$

Доказательство формул (13.3.5, 13.3.6). Положим $\vec{y} \equiv R\vec{x}$, тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} R$$

и

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^\top = R^\top \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^\top.$$

Обозначая $\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right)^{\top}$, получаем

$$\vec{\nabla}_x = R^{\top}\vec{\nabla}_y. \tag{13.3.7}$$

Для нового состояния по определению

$$\overrightarrow{tf}\,(\vec{x}) = -\vec{\nabla}_x \widetilde{utf}_0(\vec{x}).$$

Согласно формуле (13.2.49) преобразования функции квазисостояния получаем

$$\widetilde{\overrightarrow{tf}}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}_x \widetilde{utf}_0(\vec{x}) = -\vec{\nabla}_x \frac{1}{\det R} utf_0(R\vec{x}) = \frac{1}{\det R} R^{\top}\left((-1)\vec{\nabla}_y utf_0(\vec{y})\right)\Big|_{\vec{y}=R\vec{x}} =$$

$$\frac{1}{\det R} R^{\top}\,\overrightarrow{tf}\,(R\vec{x}),$$

что доказывает формулу (13.3.5). Аналогично пользуясь формулами (13.3.4), (13.3.7), (13.2.49) имеем

$$\widetilde{\overrightarrow{sf}}(\vec{x}) = -[\,\mathrm{Ks}\,(\tilde{\vec{l}})\vec{\nabla}_x, \widetilde{\overrightarrow{utf}}(\vec{x})] = -[\,\mathrm{Ks}\,(\tilde{\vec{l}})R^{\top}\vec{\nabla}_y, R^{-1}\,\overrightarrow{utf}\,(\vec{y})]$$

Используем формулу (3.6.88) преобразования векторного произведения и получим

$$\widetilde{\overrightarrow{sf}}(\vec{x}) = -[\,\mathrm{Ks}\,(\tilde{\vec{l}})R^{\top}\vec{\nabla}_y, R^{-1}\,\overrightarrow{utf}\,(\vec{y})]\Big|_{\vec{y}=R\vec{x}} = -\frac{1}{\det R}R^{\top}[R\,\mathrm{Ks}\,(\tilde{\vec{l}}R^{\top}\vec{\nabla}_y, \overrightarrow{utf}\,(\vec{y})]\Big|_{\vec{y}=R\vec{x}}. \tag{13.3.8}$$

По формуле (3.6.73)

$$R\,\mathrm{Ks}\,(\tilde{\vec{l}})R^{\top} = \mathrm{Ks}\,(\vec{l}). \tag{13.3.9}$$

Из (13.3.8, 13.3.9) следует (13.3.6).$\diamondsuit$

По парам векторов $\vec{E}, \vec{H}$ и $\vec{t}, \vec{s}$ сформируем теперь вектора в $\mathbf{R}^6$ вида $\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^6$ и $\begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{s} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^6$. Определяющие формулы (13.3.1, 13.3.2) запишем в виде

$$\begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{s} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E_3 & \mathrm{Sw}\,(\vec{l}) \\ -\,\mathrm{Sw}\,(\vec{l}) & E_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}, \tag{13.3.10}$$

где кососимметрическая матрица $\mathrm{Sw}\,(\vec{l}) = \begin{pmatrix} 0 & -l_3 & l_2 \\ l_3 & 0 & -l_1 \\ -l_2 & l_1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ введена в п. 11.3.5. Матрица

$$\mathrm{Nm}\,(\vec{l}) \equiv -\begin{pmatrix} E_3 & \mathrm{Sw}\,(\vec{l}) \\ -\,\mathrm{Sw}\,(\vec{l}) & E_3 \end{pmatrix} \in Ms(6)$$

и при $|\vec{l}| \neq 1$ имеет обратную матрицу

$$\mathrm{Nm}^{-1}(\vec{l}) = (E_3 + \mathrm{Sw}^{2}(\vec{l}))^{-1}\,\mathrm{Nm}\,(-\vec{l}), \tag{13.3.11}$$

ибо

$$\mathrm{Nm}\,(-\vec{l})\,\mathrm{Nm}\,(\vec{l}) = \begin{pmatrix} E_3 & -\,\mathrm{Sw}\,(\vec{l}) \\ \mathrm{Sw}\,(\vec{l}) & E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_3 & \mathrm{Sw}\,(\vec{l}) \\ -\,\mathrm{Sw}\,(\vec{l}) & E_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} E_3 + (\,\mathrm{Sw}\,(\vec{l}))^2 & 0 \\ 0 & E_3 + (\,\mathrm{Sw}\,(\vec{l}))^2 \end{pmatrix}.$$

Что касается матрицы $E_3+(\,\mathrm{Sw}\,(\vec{l}))^2$, то согласно п. 11.3.5 для любого $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ верно

$$\mathrm{Sw}\,(\vec{l})\vec{x} = [\vec{l}, \vec{x}]$$

и

$$(\,\mathrm{Sw}\,(\vec{l}))^2\vec{x} = [\vec{l}, [\vec{l}, \vec{x}]] = \vec{l}\langle\vec{l}, \vec{x}\rangle - \langle\vec{l}, \vec{l}\rangle\vec{x} = (-|\vec{l}|^2 E + \vec{l}\vec{l}^{\top})\vec{x}.$$

Поэтому

$$E_3 + (\,\mathrm{Sw}\,(\vec{l}))^2 = (1 - |\vec{l}|^2)E_3 + \vec{l}\vec{l}^{\top} \tag{13.3.12}$$

и

$$\Big(E_3 + (\,\mathrm{Sw}\,(\vec{l}))^2\Big)^{-1} = \frac{1}{1-|\vec{l}|^2}(E_3 - \vec{l}\vec{l}^{\top}) = \frac{1}{1-|\vec{l}|^2}\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l}). \tag{13.3.13}$$

При $|\vec{l}| = 1$ ядро отображения $\mathrm{Nm}\,(\vec{l}) : \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^6$ двумерно и состоит из всех векторов из $\mathbf{R}^6$ вида $\begin{pmatrix} \vec{E} \\ [\vec{l}, \vec{E}] \end{pmatrix}$, где $\vec{E} \in \mathbf{R}_3$, $\langle\vec{E}, \vec{l}\rangle = 0$.

Итак, при $|\vec{l}| \neq 1$ переход от $\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^6$ к $\begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{s} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^6$ взаимно-однозначен, а при $|\vec{l}| = 1$ — нет.

13.3.2 Система уравнений для функций $\vec{t}, \vec{s}$. Спиновая функция $\vec{s}$ и коспиновая функция $\vec{t}$.

В этом пункте рассматриваются лоренцевы частицы с $uf \in D_4'(\mathbf{R}^3)$.

В формулах (13.3.3, 13.3.4) выражающих функции $\vec{t}, \vec{s}$ через функцию квазисостояния ut, участвуют два линейных дифференциальных оператора $\vec{\nabla}$ и $\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\nabla}$. Применяя их к формулам (13.3.3, 13.3.4) повторно получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений для функций $\overrightarrow{tf}$ и $\overrightarrow{sf}$:

$$[\vec{\nabla}, \overrightarrow{tf}\,] = 0, \tag{13.3.14}$$

$$\langle\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\nabla}, \overrightarrow{tf}\,\rangle = jtf_0, \tag{13.3.15}$$

$$[\vec{\nabla}, \overrightarrow{sf}\,] = \overrightarrow{jtf}, \tag{13.3.16}$$

$$\langle\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\nabla}, \overrightarrow{sf}\,\rangle = 0. \tag{13.3.17}$$

Или через обычные обозначения дивергенции и ротора уравнения (13.3.14–13.3.17) имеют вид :

$$rot\ \overrightarrow{tf} = 0, \tag{13.3.18}$$

$$div\,(\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\ \overrightarrow{tf}\,) = jtf_0, \tag{13.3.19}$$

$$rot\ \overrightarrow{sf} = \overrightarrow{jtf}, \tag{13.3.20}$$

$$div\,(\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\;\overrightarrow{sf}\,) = 0. \tag{13.3.21}$$

Доказательство формул (13.3.14–13.3.17). Согласно формуле (13.3.3)

$$[\vec{\nabla},\,\overrightarrow{tf}\,] = -[\vec{\nabla},\vec{\nabla}]utf_0 = 0$$

и

$$\langle\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\nabla},\,\overrightarrow{tf}\,\rangle = -\langle\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\nabla},\vec{\nabla}\rangle utf_0 = (\langle\vec{l},\vec{\nabla}\rangle^2 - (\vec{\nabla})^2)utf_0 = \Box(\vec{l})utf_0.$$

Но согласно формуле (13.2.53) для лоренцевых агвидов $\Box(\vec{l})utf_0 = jtf_0$. Мы получили уравнения (13.3.14, 13.3.15).

Согласно формуле (13.3.4)

$$[\vec{\nabla},\,\overrightarrow{sf}\,] = -[\vec{\nabla},[\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\nabla},\overrightarrow{utf}]] = -\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\nabla}\langle\vec{\nabla},\overrightarrow{utf}\rangle + \langle\vec{\nabla},\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\nabla}\rangle\;\overrightarrow{utf}\;.$$

Но для лоренцева состояния $\langle\vec{\nabla},\overrightarrow{utf}\rangle = 0$, получаем

$$[\vec{\nabla},\,\overrightarrow{sf}\,] = \langle\vec{\nabla},\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\nabla}\rangle\;\overrightarrow{utf} = -\Box(\vec{l})\;\overrightarrow{utf}\;.$$

Для лоренцевых агвидов по формуле (13.2.53) верно

$$[\vec{\nabla},\,\overrightarrow{sf}\,] = -\Box(\vec{l})\;\overrightarrow{utf} = \overrightarrow{jtf}\;.$$

Получена формула (13.3.16)

Согласно формуле (13.3.4)

$$\langle\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\nabla},\,\overrightarrow{sf}\,\rangle = \langle\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\nabla},[\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\nabla},\overrightarrow{utf}]\rangle = \langle[\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\nabla},\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\nabla}],\overrightarrow{utf}\rangle = 0.$$

Получена формула (13.3.17). $\diamondsuit$

Сравним теперь систему уравнений (13.3.14–13.3.17) для функций $\vec{t}$ и $\vec{s}$ с системой уравнений Максвелла для полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в агвидном случае, когда $\frac{\partial}{\partial x_0} = -\langle\vec{l},\vec{\nabla}\rangle$.

Для агвидной частицы система 4 уравнений Максвелла (1.3.124–1.3.127) для напряженностей полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ принимает вид :

$$[\vec{\nabla},\vec{E}f] - \langle\vec{l},\vec{\nabla}\rangle\vec{H}f = 0, \tag{13.3.22}$$

$$\langle\vec{\nabla},\vec{E}f\rangle = -jf_0, \tag{13.3.23}$$

$$[\vec{\nabla},\vec{H}f] + \langle\vec{l},\vec{\nabla}\rangle\vec{E}f = -\vec{jf}, \tag{13.3.24}$$

$$\langle\vec{\nabla},\vec{H}f\rangle = 0. \tag{13.3.25}$$

Сравнивая систему 4 дифференциальных уравнений (13.3.14–13.3.17) для двух 3-функций $\overrightarrow{tf}\,,\overrightarrow{sf}$ и систему 4 дифференциальных уравнений для двух 3-функций $\vec{E}f,\vec{H}f$, мы видим, что система (13.3.14–13.3.17) для функций $\overrightarrow{tf}\,,\overrightarrow{sf}$ обладает тем преимуществом, что распадается на две пары уравнений отдельно для функции $\vec{t}$ и отдельно для функции $\vec{s}$.

Соотношение (13.3.16) или (13.3.20) говорит о том, что функция $\vec{s}(x)$ является спиновой функцией агвида согласно определению п. 3.6.2. Однако, согласно п. 3.6.2 мы определяли спиновую функцию $\vec{s}(x)$ лишь соотношением $rot\,\vec{s} = \overrightarrow{jt}$, т. е. с точностью до градиента скалярной функции. Зафиксируем далее однозначно спиновую функцию лоренцевой агвидной частицы.

Определение 13.3.2 *Функцию $\overrightarrow{sf}$ $(\vec{x})$ вида (13.3.4) назовём спиновой функцией, а функцию $\overrightarrow{tf}$ $(\vec{x})$ вида (13.3.3) коспиновой функцией лоренцевой агвидной частицы.*

13.3.3 Условие $\vec{s} = 0$ и скалярность.

В пунктах 13.3.3–13.3.6 рассматриваются натуральные частицы.

В данном пункте нас интересует физический смысл обращения в нуль спиновой функции. Условие обращения в нуль функции в этом параграфе понимается как равенство её нулевому элементу соответствующего линейного пространства функций, т. е. $\vec{s} = 0$ здесь означает, что $\overrightarrow{sf} = 0$ как элемент пространства Uf.

Лемма 13.3.1 *Для натуральной частицы следующие утверждения эквивалентны:*

$$I.\ \overrightarrow{utf} = 0;$$

$$II.\ \overrightarrow{sf} = 0;$$

$$III.\ \overrightarrow{jtf} = 0.$$

Доказательство. Следование $I \Rightarrow II$ вытекает из формулы (13.3.4), а следование $II \Rightarrow III$ — из формулы (13.3.16). Для лоренцевой частицы верна формула (13.2.53) и поэтому

$$-\Box(\vec{l})\ \overrightarrow{utf} = \overrightarrow{jtf}\ .$$

В силу натуральности частицы $utf \in Uf$ и по лемме 13.1.2, если $\overrightarrow{jtf} = 0$, то и $\overrightarrow{utf} = 0$, т. е. $III \Rightarrow I.\diamondsuit$

Условие $\overrightarrow{jtf} = 0$ означает для лоренцевой частицы ее скалярность, т. е. верна

Теорема 13.3.1 *Натуральная частица скалярна иф* $\vec{s} = 0$.

13.3.4 Условие $\vec{t} = 0$ и квазиkиперность.

В данном пункте нас интересует физический смысл обращения в нуль коспиновой функции.

Лемма 13.3.2 *Для натуральной частицы следующие утверждения эквивалентны:*

$$I.\ utf_0 = 0;$$

$$II.\ \overrightarrow{tf} = 0;$$

$$III.\ jtf_0 = 0.$$

Доказательство. Следование $I \Rightarrow II$ вытекает из формулы (13.3.3), следование $II \Rightarrow III$ — из формулы (13.3.15). Для лоренцевой частицы верна формула (13.2.53) и поэтому

$$\Box(\vec{l})utf_0 = jtf_0.$$

В силу условия натуральности $utf \in Uf$ и по лемме 13.1.2 из $jtf_0 = 0$ следует $utf_0 = 0$, т. е. $III \Rightarrow I.\diamondsuit$

Вспоминая определение квазикиперности из п. 13.2.4 мы зафиксируем следующий вывод из леммы 13.3.2.

Теорема 13.3.2 *Натуральная частица квазикиперна иф* $\vec{t} = 0$.

3-функция $-\vec{E}(x)$ согласно п. 2.2.4 не что иное как вектор скорости элемента среды с опорной координатой $\vec{x}_0$ в момент времени x_0. Поэтому условие поперечности волны, означающее что все точки среды движутся перпендикулярно вектору скорости центра $\vec{l}$ принимает при $\vec{l} \neq 0$ вид

$$\langle \vec{l}, \vec{E} \rangle = 0.$$

Справедлив следующий критерий поперечности.

Теорема 13.3.3 *Для натуральной частицы при* $\vec{l} \neq 0$ *верно*

$$\langle \vec{l}, \vec{E}f \rangle = 0, \tag{13.3.26}$$

если частица квазикиперна.

Доказательство. В силу формул (13.3.1, 13.3.3) верно

$$\langle \vec{l}, \vec{E}f \rangle = -\langle \vec{l}, \overrightarrow{tf} \rangle = \langle \vec{l}, \vec{\nabla} \rangle utf_0$$

и условие (13.3.26) эквивалентно условию

$$\langle \vec{l}, \vec{\nabla} \rangle utf_0 = 0. \tag{13.3.27}$$

По условию натуральности $utf \in Uf$ и тогда по лемме 13.1.2 условие (13.3.27) эквивалентно условию $utf_0 = 0$. Из леммы 13.3.2 следует справедливость теоремы 13.3.3.♢

Итак, мы убедились, что квазикиперность характеризуется поперечностью движений частиц среды по отношению к направлению распространения волны. Мы убедились также, что условия $\vec{E} = -[\vec{l}, \vec{H}]$ и $\langle \vec{l}, \vec{E} \rangle = 0$ есть эквивалентные критерии квазикиперности.

13.3.5 Разложение агвидной частицы на скалярную и квазикиперную.

В п. 13.2.3 мы ввели функцию псевдосостояния и с помощью матрицы $\mathrm{Am}\,(\vec{l})$ разложили лоренцеву функцию состояния u на сумму $u = u' + u''$ скалярной u' и абсолютно нейтральной u'' функций состояния (формулы (13.2.29, 13.2.30)). Аналогичным образом из формулы (13.2.41) для функции квазисостояния при $|\vec{l}| \neq 1$ следует, что

$$u = \mathrm{Dm}^{-1}(-\vec{l})ut$$

или, используя формулу (3.6.29) для $\mathrm{Dm}^{-1}(\vec{l})$, мы получаем

$$u = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-|\vec{l}|^2} & -\frac{1}{1-|\vec{l}|^2}\vec{l}^\top \\ -\frac{1}{1-|\vec{l}|^2}\vec{l} & E_3 + \frac{\vec{l}\vec{l}^\top}{1-|\vec{l}|^2} \end{pmatrix} ut. \tag{13.3.28}$$

Откуда следует разложение функции состояния u на скалярную u' и абсолютно квазинейтральную u'' составляющие

$$u = u' + u'', \tag{13.3.29}$$

где

$$u' \equiv \frac{1}{1-|\vec{l}|^2}\Theta l\, ut_0; \quad u'' \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \overrightarrow{ut} \end{pmatrix} - \frac{\langle \vec{l}, \overrightarrow{ut} \rangle}{1-|\vec{l}|^2}\Theta l. \tag{13.3.30}$$

В самом деле

$$\langle l, u'' \rangle = \langle \vec{l}, \overrightarrow{ut} \rangle - \frac{\langle \vec{l}, \overrightarrow{ut} \rangle}{1 - |\vec{l}|^2} \langle l, \Theta l \rangle = 0.$$

Разложение (13.3.29) на скалярную и абсолютно квазинейтральную функцию состояния единственно в силу следующего факта.

Лемма 13.3.3 *Если несветовая натуральная частица скалярна и квазикиперна, то она нулевая.*

Доказательство. Если натуральная частица скалярна, то $\overrightarrow{ut} = 0$ в силу леммы 13.3.1 и теоремы 13.3.1, если — квазикиперна, то $ut_0 = 0$. Итак, функция квазисостояния равна нулю. При $|\vec{l}| \neq 1$ тогда и функция состояния $u = 0$ согласно формуле (13.3.28). ♢

Разложение п. 13.2.3 функции состояния на сумму скалярной и абсолютно нейтральной функций состояния порождает разложение частицы на сумму скалярной и киперной частиц, а разложение (13.3.29) функции состояния на сумму скалярной и абсолютно квазинейтральной функций состояния порождает разложение частицы на сумму скалярной и квазикиперной частиц. Разложение частицы на скалярную и киперную частицы неединственно и определяется фиксацией состояния, в котором проведено разложение функции состояния на скалярную и абсолютно нейтральную функции состояния. Разложение частицы на скалярную и абсолютно квазикиперную единственно, однако определено лишь для несветовых частиц. Заметим, что досветовая квазикиперная лоренцева частица имеет абсолютно нейтральное состояние покоя поэтому является киперной частицей.

Перейдем к рассмотрению световых частиц, для которых неверна лемма 13.3.3.

13.3.6 Световые частицы.

В световом случае согласно формуле (13.2.46) получаем справедливость формулы

$$ut_0 = \langle \vec{l}, \overrightarrow{ut} \rangle \tag{13.3.31}$$

для любой частицы с $|\vec{l}| = 1$.

Лемма 13.3.4 *Скалярная световая натуральная частица квазикиперна.*

Доказательство. Из скалярности натуральной частицы согласно лемме 13.3.1 и теореме 13.3.1 следует, что $\overrightarrow{ut} = 0$. Тогда для световой частицы в силу (13.3.31) $ut_0 = 0$. По лемме 13.3.2 и теореме 13.3.2 частица квазикиперна. ♢

Теперь мы можем охарактеризовать частицы, у которых функции напряженности электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей удовлетворяют условиям

$$\vec{H} = [\vec{l}, \vec{E}], \tag{13.3.32}$$

$$\vec{E} = -[\vec{l}, \vec{H}]. \tag{13.3.33}$$

Теорема 13.3.4 *Ненулевая натуральная частица удовлетворяет соотношениям (13.3.32, 13.3.33), если она световая и скалярная.*

Доказательство. Согласно лемме 13.3.3 соотношения (13.3.32, 13.3.33) при $|\vec{l}| \neq 1$ выполнены иф частица нулевая. При $|\vec{l}| = 1$ справедливость теоремы следует из лемм 13.3.1,13.3.2,13.3.4. $\Diamond$

Итак, векторы $\vec{l}, \vec{E}, \vec{H}$ образуют взаимно ортогональную тройку векторов с $|\vec{E}| = |\vec{H}|$ во всех точках пространства-времени только для скалярных световых частиц.

Охарактеризуем теперь квазикиперную световую частицу.

Лемма 13.3.5 *Для световой натуральной частицы следующие утверждения эквивалентны:*

I. Частица квазикиперна;
$II.\ \langle \vec{l}, \overrightarrow{utf} \rangle = 0;$
$III.\ \ \overrightarrow{sf} = -\vec{l} \langle \vec{l}, [\vec{\nabla}, \overrightarrow{utf}] \rangle;$
IV. Частица ординарна.

Доказательство. Если $|\vec{l}| = 1$, то верна формула

$$\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\nabla} = \vec{\nabla} - \vec{l}\langle \vec{l}, \vec{\nabla} \rangle = [\vec{l}, [\vec{\nabla}, \vec{l}]]. \tag{13.3.34}$$

Формула (13.3.4) тогда принимает вид

$$\overrightarrow{sf} = -[[\vec{l}, [\vec{\nabla}, \vec{l}]], \overrightarrow{utf}] = \vec{l}\langle [\vec{\nabla}, \vec{l}], \overrightarrow{utf} \rangle - [\vec{\nabla}, \vec{l}]\langle \vec{l}, \overrightarrow{utf} \rangle$$

или

$$\overrightarrow{sf} = -\vec{l}\langle \vec{l}, [\vec{\nabla}, \overrightarrow{utf}] \rangle + [\vec{l}, \vec{\nabla}]\langle \vec{l}, \overrightarrow{utf} \rangle. \tag{13.3.35}$$

$I \Leftrightarrow II$. Для световой частицы верны формула (13.3.31) и лемма 13.3.2, теорема 13.3.2.

$II \Rightarrow III$. В силу формулы (13.3.35).

$III \Rightarrow II$. Если выполнено III, то по формуле (13.3.35) выполнено условие

$$[\vec{l}, \vec{\nabla}]\langle \vec{l}, \overrightarrow{utf} \rangle = 0. \tag{13.3.36}$$

Так как частица натуральна, то функция $\langle \vec{l}, \overrightarrow{utf} \rangle \in W_2^{(1)}(\mathbf{R}^3) \cap \bar{C}_0^{(1)}(\mathbf{R}^3)$ и по лемме 13.1.2 из (13.3.36) следует утверждение II, ибо один из операторов $[\vec{l}, \vec{\nabla}]_\alpha,\ \ \alpha \in \overline{1,3}$ нетривиален при $|\vec{l}| = 1$.

$III \Rightarrow IV$. По определению ординарной частицы (п. 3.7.11).

$IV \Rightarrow III$. Если верно IV, т. е. во всех точках $\overrightarrow{sf}\ (\vec{x}) \parallel \vec{l}$, то из (13.3.35) следует (13.3.36). Из соотношения (13.3.36) согласно предыдущему вытекает справедливость утверждения II. Но $II \Leftrightarrow III$.$\Diamond$

§13.4 Выражение функционала взаимодействия агвидов через трансформации Фурье функций тока

В этом параграфе рассматриваются агвидные частицы. В п. 13.4.1 рассматриваются скалярные агвидные функции, в пунктах 13.4.2–13.4.4 — натуральные частицы.

В этом параграфе наша задача выразить функционал взаимодействия двух агвидных частиц $\mathrm{ni}\,(p_1, p_2, u', u'')$ из § 12.1 через трансформации Фурье их функции тока $j'(x), j''(x)$. В случае, если $p_1 = p_2 = e$ — единичный элемент группы Пуанкаре, функционал взаимодействия имеет вид

$$\mathrm{ni}\,(e, e, u', u'') = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} z_{ij}^{kl} \frac{\partial u_k'}{\partial x_i}(x) \frac{\partial u_l''}{\partial x_j}\, dx_1 dx_2 dx_3. \tag{13.4.1}$$

Для преобразования интеграла (13.4.1) мы используем теорему Планшереля и перейдем к интегрированию образов Фурье. Сначала сформулируем некоторые свойства трансформации Фурье.

13.4.1 Формула Планшереля. Пусть $\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x})$ интегрируемые с квадратом на $\mathbf{R}^3$ функции со значениями в $\mathbf{R}$, тогда их трансформации Фурье $\hat{\varphi}(\vec{\eta}), \hat{\psi}(\vec{\eta})$ по переменным x_1, x_2, x_3 интегрируемы с квадратом и справедлива формула Планшереля (см. [24], с.108)

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi(\vec{x})\psi(\vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \hat{\varphi}(\vec{\eta})\bar{\hat{\psi}}(\vec{\eta})\, d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \tag{13.4.2}$$

где $\bar{\hat{\psi}}(\vec{\eta})$ — комплексно сопряжённая к $\hat{\psi}(\vec{\eta})$ функция. Так как функции $\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x})$ принимают действительные значения, то

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi(\vec{x})\psi(\vec{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \psi(\vec{x})\varphi(\vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 = \tag{13.4.3}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \bar{\hat{\varphi}}(\vec{\eta})\hat{\psi}(\vec{\eta})\, d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3.$$

Кроме того выполняется равенство, которое является критерием действительнозначности функции $\varphi(\vec{x})$

$$\bar{\hat{\varphi}}(\vec{\eta}) = \hat{\varphi}(-\vec{\eta}). \tag{13.4.4}$$

Поэтому для действительнозначных функции $\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x})$ теорему Планшереля можно записать в виде

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi(\vec{x})\psi(\vec{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \hat{\varphi}(\vec{\eta})\hat{\psi}(-\vec{\eta}) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 = \tag{13.4.5}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \hat{\varphi}(-\vec{\eta})\hat{\psi}(\vec{\eta})\, d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3.$$

Пусть теперь $\varphi(x) \in S'(\mathbf{R}^4)$ агвидная функция, тогда Её трансформация Фурье по пространственным переменным x_1, x_2, x_3 равна

$$\hat{\varphi}(x_0, \vec{\eta}) = e^{i\langle \vec{\eta}, \vec{b}(x_0)\rangle} \widehat{\varphi f}(\vec{\eta}), \tag{13.4.6}$$

где $\vec{b}(x_0) = \vec{l}x_0 + \vec{C}$ — координаты центра, как функции времени. Поэтому при дифференцировании функции $\varphi(x)$ по пространственным координатам согласно свойствам трансформации Фурье получаем

$$\widehat{\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}}(x_0, \vec{\eta}) = (-i\eta_\alpha)\hat{\varphi}(x_0, \vec{\eta}), \alpha = 1, 2, 3, \tag{13.4.7}$$

а дифференцирование формулы (13.4.6) по x_0 даёт

$$\widehat{\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}}(x_0,\vec{\eta}) = i\langle\vec{\eta},\vec{l}\rangle\hat{\varphi}(x_0,\vec{\eta}). \tag{13.4.8}$$

13.4.2 Вид функционала взаимодействия агвидов.

Рассмотрим две натуральные частицы с функциями состояния u', u''. Тогда их частные производные $\frac{\partial u'_k}{\partial x_i}(x_0,\vec{x})$ и $\frac{\partial u''_l}{\partial x_j}(x_0,\vec{x})$ при фиксированном $x_0 \in \mathbf{R}$ интегрируемы с квадратом по переменной $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ и применима теорема Планшереля, согласно которой формула (13.4.1) переходит в формулу

$$\mathrm{ni}\,(e,e,u',u'') = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} z^{kl}_{ij}\widehat{\frac{\partial u'_k}{\partial x_i}}(x_0,\vec{\eta})\widehat{\frac{\partial u''_l}{\partial x_j}}(x_0,-\vec{\eta})\,d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3. \tag{13.4.9}$$

Введём обозначение

$$\omega_s(\vec{\eta}) \equiv \begin{cases} -i\vec{\eta}_s, & s \in \overline{1,3} \\ i\langle\vec{\eta},\vec{l}\rangle, & s = 0. \end{cases} \tag{13.4.10}$$

Тогда согласно (13.4.6,13.4.7,13.4.8) для агвидной функции состояния $u(x)$ верно

$$\widehat{\frac{\partial u_k}{\partial x_s}}(x_0,\vec{\eta}) = \exp(i\langle\vec{\eta},\vec{b}(x_0)\rangle)\omega_s(\vec{\eta})\widehat{uf}_k(\vec{\eta}) \tag{13.4.11}$$

и равенство (13.4.9) переходит в равенство

$$\mathrm{ni}\,(e,e,u',u'') = \tag{13.4.12}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \exp(-i\langle\vec{\eta},\vec{b}''(x_0)-\vec{b}'(x_0)\rangle)z^{kl}_{sj}\omega'_s(\vec{\eta})\omega''_j(-\vec{\eta})\widehat{uf'_k}(\vec{\eta})\widehat{uf''_l}(-\vec{\eta})\,d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3.$$

Так как функции $\widehat{\frac{\partial u'_k}{\partial x_s}}(x_0,\vec{\eta})$ и $\widehat{\frac{\partial u''_l}{\partial x_j}}(x_0,\vec{\eta})$ квадратично суммируемы по переменной $\vec{\eta}$, то сумма

$$z^{kl}_{sj}\widehat{\frac{\partial u'_k}{\partial x_s}}(x_0,\vec{\eta})\widehat{\frac{\partial u''_l}{\partial x_j}}(x_0,\vec{\eta}) = \exp\left(-i\langle\vec{\eta},\vec{b}''(x_0)-\vec{b}'(x_0)\rangle\right)z^{kl}_{sj}\omega'_s(\vec{\eta})\omega''_j(-\vec{\eta})\widehat{uf'_k}(\vec{\eta})\widehat{uf''_l}(-\vec{\eta})$$

есть абсолютно суммируемая функция по переменной $\vec{\eta}$ и следовательно функция

$$\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta}) \equiv z^{kl}_{sj}\omega'_s(\vec{\eta})\omega''_j(-\vec{\eta})\widehat{uf}_k(\vec{\eta})\widehat{uf''_l}(-\vec{\eta}) \tag{13.4.13}$$

абсолютно суммируема по переменной $\vec{\eta} \in \mathbf{R}^3$ и поэтому является регулярной обобщённой функцией медленного роста $\widehat{\mathrm{nit}} \in S'(\mathbf{R}^3)$. Таким образом, существует единственная обобщённая функция медленного роста $\mathrm{nit}\,(\vec{x})$, имеющая функцию $\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta})$ своим образом Фурье. Тогда формула (13.4.12) есть ни что иное как формула обратной трансформации Фурье, которая показывает, что функция $\mathrm{ni}\,(e,e,u',u'')$ зависит лишь от $\vec{x} \equiv \vec{b}''(x_0) - \vec{b}''(x_0)$ и элементов G', G'' группы Лоренца. Более того по теореме Римана-Лебега функция $\mathrm{ni}\,(e,e,u',u'')$ равномерно непрерывна и класса $\bar{C}_0(\mathbf{R}^3)$ по переменной $\vec{x}$.

Итак, мы пришли к выводу, что абсолютно суммируемая функция $\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta})$ есть трансформация Фурье по переменной $\vec{x}$ от функции $\mathrm{ni}\,(e,e,u',u'')(\vec{x},G',G'')$.

Согласно формуле (12.1.2) массив z^{kl}_{ij} является суммой двух массивов:

$$z^{kl}_{ij} = z1^{kl}_{ij} + z2^{kl}_{ij}; \quad z1^{kl}_{ij} \equiv -\theta^{kl}\theta_{ij}; \quad z2^{kl}_{ij} = \theta^k_l \theta^l_i. \tag{13.4.14}$$

Соответственно функции $\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta})$ и $\mathrm{ni}\,(e, e, u', u'')$ разобьём на суммы

$$\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta}) = \widehat{\mathrm{nit1}}\,(\vec{\eta}) + \widehat{\mathrm{nit2}}\,(\vec{\eta}); \tag{13.4.15}$$

$$\mathrm{ni}\,(e, e, u', u'') = \mathrm{ni1}\,(e, e, u', u'') + \mathrm{ni2}\,(e, e, u', u''). \tag{13.4.16}$$

Для лоренцевых агвидов верна формула (13.2.58) т. е.

$$\widehat{uf}(\vec{\eta}) = \frac{1}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta})} \Theta \widehat{jf}(\vec{\eta}), \tag{13.4.17}$$

где

$$\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta}) = (\vec{\eta})^2 - \langle \vec{l}, \vec{\eta} \rangle^2. \tag{13.4.18}$$

Подставляя в (13.4.13) вместо массива z^{kl}_{ij} массив $z1^{kl}_{ij}$, и выражение (13.4.17), получим

$$\widehat{\mathrm{nit1}}\,(\vec{\eta}) = -\theta^{kl}\theta_{ij}\omega'_i(\vec{\eta})\omega''_j(-\vec{\eta}) \frac{\left(\Theta\widehat{jf'}(\vec{\eta})\right)_k}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l'}, \vec{\eta})} \frac{\left(\Theta\widehat{jf''}(-\vec{\eta})\right)_l}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l''}, \vec{\eta})} =$$

$$\langle \omega'(\vec{\eta}), \Theta\omega''(\vec{\eta}) \rangle \frac{\left\langle \Theta\widehat{jf'}(\vec{\eta}), \Theta\Theta\widehat{jf''}(-\vec{\eta}) \right\rangle}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l'}, \vec{\eta})\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l''}, \vec{\eta})}.$$

Или

$$\widehat{\mathrm{nit1}}\,(\vec{\eta}) = \frac{\left((\vec{\eta})^2 - \langle \vec{l'}, \vec{\eta} \rangle \langle \vec{l''}, \vec{\eta} \rangle\right)}{\left((\vec{\eta})^2 - \langle \vec{l'}, \vec{\eta} \rangle^2\right)\left((\vec{\eta})^2 - \langle \vec{l''}, \vec{\eta} \rangle^2\right)} \left\langle \widehat{jf'}(\vec{\eta}), \Theta\widehat{jf''}(-\vec{\eta}) \right\rangle. \tag{13.4.19}$$

Аналогично, подставляя в (13.4.13) вместо массива z^{kl}_{ij} массив $z2^{kl}_{ij}$ и учитывая (13.4.17), получаем

$$\widehat{\mathrm{nit2}}\,(\vec{\eta}) = \theta^k_j \theta^l_i \omega'_i(\vec{\eta})\omega''_j(-\vec{\eta})\widehat{uf'}_k(\vec{\eta})\widehat{uf''}_l(-\vec{\eta}) = \langle \omega'(\vec{\eta}), \Theta\widehat{uf''}(-\vec{\eta}) \rangle \langle \omega''(-\vec{\eta}), \Theta\widehat{uf'}(\vec{\eta}) \rangle = \tag{13.4.20}$$

$$\frac{\langle \omega'(\vec{\eta}), \widehat{jf''}(-\vec{\eta}) \rangle \langle \omega''(-\vec{\eta}), \widehat{jf'}(\vec{\eta}) \rangle}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l'}, \vec{\eta})\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l''}, -\vec{\eta})}.$$

Согласно тождеству (13.2.5) функция тока агвида j в образах Фурье удовлетворяет условию

$$\exp(i\langle \vec{\eta}, \vec{b}(x_0) \rangle)\omega_k(\vec{\eta})\widehat{jf}_k(\vec{\eta}) = 0,$$

что эквивалентно равенству

$$\langle \vec{\eta}, \widehat{\vec{jf}}\,(\vec{\eta}) \rangle = \langle \vec{\eta}, \vec{l} \rangle \widehat{jf}_0(\vec{\eta}). \tag{13.4.21}$$

Подставляя (13.4.21) в (13.4.20), получим

$$\widehat{\mathrm{nit2}}\,(\vec{\eta}) = -\frac{\langle \vec{l''} - \vec{l'}, \vec{\eta} \rangle^2}{((\vec{\eta})^2 - \langle \vec{l'}, \vec{\eta} \rangle^2)((\vec{\eta})^2 - \langle \vec{l''}, \vec{\eta} \rangle^2)} \widehat{jf'_0}(\vec{\eta})\widehat{jf''_0}(-\vec{\eta}). \tag{13.4.22}$$

Объединяя формулы (13.4.19) и (13.4.22), получаем следующее выражение для трансформации Фурье функционала взаимодействия двух натуральных частиц

$$\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta}) = \frac{\left((\vec{\eta})^2 - \langle \vec{l'}, \vec{\eta} \rangle \langle \vec{l''}, \vec{\eta} \rangle\right) \langle \widehat{jf'}(\vec{\eta}), \Theta\widehat{jf''}(-\vec{\eta}) \rangle - \langle \vec{l''} - \vec{l'}, \vec{\eta} \rangle^2 \widehat{jf'_0}(\vec{\eta})\widehat{jf''_0}(-\vec{\eta})}{\left((\vec{\eta})^2 - \langle \vec{l'}, \vec{\eta} \rangle^2\right)\left((\vec{\eta})^2 - \langle \vec{l''}, \vec{\eta} \rangle^2\right)}. \tag{13.4.23}$$

13.4.3 Скалярные частицы.

Для случая скалярных частиц, когда $jf = ljf_0$ из формул (13.4.19), (13.4.22) получаем

$$\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta}) = \tag{13.4.24}$$

$$(\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l}',\vec{\eta})\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l}'',\vec{\eta}))^{-1}\Big(((\vec{\eta})^2-\langle\vec{l}',\vec{\eta}\rangle\langle\vec{l}'',\vec{\eta}\rangle)(1-\langle\vec{l}',\vec{l}''\rangle)-\langle\vec{l}'-\vec{l}'',\vec{\eta}\rangle^2\Big)\,\widehat{jf'_0}(\vec{\eta})\widehat{jf''_0}(-\vec{\eta}).$$

Из формулы (13.4.24) в частности следует, что если обе скалярные частицы — световые, т. е. $|\vec{l}'|=1$ и $|\vec{l}''|=1$ и имеют равные вектора скорости $\vec{l}'=\vec{l}''$, то $\widehat{\mathrm{nit}}\,=0$ и функционал взаимодействия равен нулю.

13.4.4 Масса.

Согласно определению § 12.2 масса частицы в данном состоянии с функцией состояния u равна

$$m=\frac{1}{2}\,\mathrm{ni}\,(e,e,u,u). \tag{13.4.25}$$

Итак, в формуле (13.4.25) $u'=u''=u, \vec{b}'=\vec{b}''=\vec{b}, \vec{l}'=\vec{l}''=\vec{l}.$ Тогда $\widehat{\mathrm{nit2}}\,(\vec{\eta})=0$ и согласно формуле (13.4.19)

$$\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta})=\frac{\langle\widehat{jf}(\vec{\eta}),\Theta\widehat{jf}(-\vec{\eta})\rangle}{(\vec{\eta})^2-\langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle^2}. \tag{13.4.26}$$

Получаем следующее выражение для массового члена согласно (13.4.12, 13.4.13, 13.4.25, 13.4.26)

$$m=\frac{1}{2(2\pi)^3}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{\langle\widehat{jf}(\vec{\eta}),\Theta\widehat{jf}(-\vec{\eta})\rangle}{(\vec{\eta})^2-\langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle^2}\,d\eta_1d\eta_2d\eta_3. \tag{13.4.27}$$

Из формулы (13.4.27) немедленно следует

Лемма 13.4.1 *Масса скалярной световой натуральной частицы равна нулю.*

Доказательство. В этом случае числитель подинтегрального выражения в (13.4.27) равен

$$\Big\langle\widehat{jf}(\vec{\eta}),\Theta\widehat{jf}(-\vec{\eta})\Big\rangle=\langle l,\Theta l\rangle\,\widehat{jf_0}(\vec{\eta})\widehat{jf_0}(-\vec{\eta})=(1-|\vec{l}|^2)\widehat{jf_0}(\vec{\eta})\widehat{jf_0}(-\vec{\eta})=0.\ \diamondsuit$$

13.4.5 Определение функций vin1 , vin2 , vin3 .

В формулы (13.4.19,13.4.22,13.4.27) входят соответственно следующие выражения, не зависящие от функции тока

$$\widehat{\mathrm{vin1}}\,(\vec{l}',\vec{l}'',\vec{\eta})\equiv\frac{(\vec{\eta})^2-\langle\vec{l}',\vec{\eta}\rangle\langle\vec{l}'',\vec{\eta}\rangle}{((\vec{\eta})^2-\langle\vec{l}',\vec{\eta}\rangle^2)((\vec{\eta})^2-\langle\vec{l}'',\vec{\eta}\rangle^2)}, \tag{13.4.28}$$

$$\widehat{\mathrm{vin2}}\,(\vec{l}',\vec{l}'',\vec{\eta})\equiv\frac{\langle\vec{l}''-\vec{l}',\vec{\eta}\rangle^2}{((\vec{\eta})^2-\langle\vec{l}',\vec{\eta}\rangle^2)((\vec{\eta})^2-\langle\vec{l}'',\vec{\eta}\rangle^2)}, \tag{13.4.29}$$

$$\widehat{\mathrm{vin3}}\,(\vec{l},\vec{\eta})\equiv-\frac{1}{(\vec{\eta})^2-\langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle^2}. \tag{13.4.30}$$

Выражения (13.4.28–13.4.30) мы будем рассматривать как обобщённые функции из $S'(\mathbf{R}^3)$ по переменной $\vec{\eta}\in\mathbf{R}^3$, зависящие от $\vec{l}',\vec{l}'',\vec{l}\in\mathbf{R}^3$ как от параметров.

При выполнении условий

$$|\vec{l}'| < 1, \quad |\vec{l}''| < 1, \quad |\vec{l}| < 1 \tag{13.4.31}$$

функции $\widehat{\text{vin1}}$, $\widehat{\text{vin2}}$, $\widehat{\text{vin3}}$ всюду бесконечно-дифференцируемы, кроме точки ноль, где имеют суммируемую особенность. Поэтому функции $\widehat{\text{vin1}}(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{\eta})$, $\widehat{\text{vin2}}(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{\eta})$, $\widehat{\text{vin3}}(\vec{l}, \vec{\eta})$ являются регулярными обобщёнными функциями медленного роста. Тогда существуют и единственны их прообразы Фурье $\text{vin1}(\vec{l}, \vec{l}'', \vec{b})$, $\text{vin2}(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{b})$, $\text{vin3}(\vec{l}, \vec{b})$ из класса $S'(\mathbf{R}^3)$ по переменной $\vec{b} \in \mathbf{R}^3$.

В силу тождества

$$\frac{(\vec{\eta})^2 - \langle \vec{l}', \vec{\eta} \rangle \langle \vec{l}'', \vec{\eta} \rangle}{((\vec{\eta})^2 - \langle \vec{l}', \vec{\eta} \rangle^2)((\eta)^2 - \langle \vec{l}'', \vec{\eta} \rangle^2)} = \tag{13.4.32}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\vec{\eta})^2 - \langle \vec{l}', \vec{\eta} \rangle^2} + \frac{1}{(\vec{\eta})^2 - \langle \vec{l}'', \vec{\eta} \rangle}\right) + \frac{1}{2}\frac{\langle \vec{l}'' - \vec{l}', \vec{\eta} \rangle^2}{((\vec{\eta})^2 - \langle \vec{l}', \vec{\eta} \rangle^2)((\vec{\eta})^2 - \langle \vec{l}'', \vec{\eta} \rangle^2)},$$

функции vin1, vin2, vin3 связаны тождеством

$$\text{vin1}(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{b}) = \frac{1}{2}(\text{vin3}(\vec{l}', \vec{b}) + \text{vin3}(\vec{l}'', \vec{b})) + \frac{1}{2}\text{vin2}(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{b}). \tag{13.4.33}$$

Поэтому для определения явного вида функции vin1 достаточно построить явный вид функций vin2 и vin3 . В следующих параграфах мы покажем, что при выполнении условий (13.4.31) $\text{vin1}(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{b})$, $\text{vin2}(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{b})$, $\text{vin3}(\vec{l}, \vec{b})$ — регулярные обобщённые функции класса $S'(\mathbf{R}^3)$ как и их образы Фурье.

Из выражений (13.4.28–13.4.30) вытекают следующие свойства симметрии функций vin1, vin2, vin3 . Для любой ортогональной матрицы $Q \in O(3)$ верно:

$$\widehat{\text{vin1}}(Q\vec{l}', Q\vec{l}'', Q\vec{\eta}) = \widehat{\text{vin1}}(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{\eta}), \tag{13.4.34}$$

$$\widehat{\text{vin2}}(Q\vec{l}', Q\vec{l}'', Q\vec{\eta}) = \widehat{\text{vin2}}(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{\eta}), \tag{13.4.35}$$

$$\widehat{\text{vin3}}(Q\vec{l}, Q\vec{\eta}) = \widehat{\text{vin3}}(\vec{l}, \vec{\eta}). \tag{13.4.36}$$

Поэтому те же свойства симметрии верны и для оригиналов

$$\text{vin1}(Q\vec{l}', Q\vec{l}'', Q\vec{b}) = \text{vin1}(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{b}), \tag{13.4.37}$$

$$\text{vin2}(Q\vec{l}', Q\vec{l}'', Q\vec{b}) = \text{vin2}(\vec{l}, \vec{b}), \tag{13.4.38}$$

$$\text{vin3}(Q\vec{l}, Q\vec{b}) = \text{vin3}(\vec{l}, \vec{b}). \tag{13.4.39}$$

Выражения (13.4.28–13.4.30) обладают также следующими свойствами чётности:

$$\widehat{\text{vin1}}(-\vec{l}', -\vec{l}'', \vec{\eta}) = \widehat{\text{vin1}}(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{\eta}) = \widehat{\text{vin1}}(\vec{l}', \vec{l}'', -\vec{\eta}), \tag{13.4.40}$$

$$\widehat{\text{vin2}}(-\vec{l}', -\vec{l}'', \vec{\eta}) = \widehat{\text{vin2}}(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{\eta}) = \widehat{\text{vin2}}(\vec{l}', \vec{l}'', -\vec{\eta}), \tag{13.4.41}$$

$$\widehat{\text{vin3}}(-\vec{l}, \vec{\eta}) = \widehat{\text{vin3}}(\vec{l}, \vec{\eta}) = \widehat{\text{vin3}}(\vec{l}, -\vec{\eta}), \tag{13.4.42}$$

что влечет соответствующие свойства чётности оригиналов:

$$\text{vin1}(-\vec{l}', -\vec{l}'', \vec{b}) = \text{vin1}(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{b}) = \text{vin1}(\vec{l}', \vec{l}'', -\vec{b}), \tag{13.4.43}$$

$$\mathrm{vin2}\,(-\vec{l}', -\vec{l}'', \vec{b}) = \mathrm{vin2}\,(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{b}) = \mathrm{vin2}\,(\vec{l}', \vec{l}'', -\vec{b}), \tag{13.4.44}$$

$$\mathrm{vin3}\,(-\vec{l}, \vec{b}) = \mathrm{vin3}\,(\vec{l}, \vec{b}) = \mathrm{vin3}\,(\vec{l}, -\vec{b}). \tag{13.4.45}$$

Мы определили функции vin1 , vin2 , vin3 в досветовом случае при выполнении условий (13.4.31). В случае нарушения условий (13.4.31) в выражениях (13.4.28–13.4.30) знаменатели обращаются в нуль не в изолированной точке, а на прямой в световом случае и на конусе в сверхсветовом случае. Поэтому при нарушении условия (13.4.31) требуется дополнительная интерпретация выражений (13.4.28–13.4.30) как обобщённых функций. В § 13.6 мы рассмотрим проблему определения обобщённой функции $\mathrm{vin3}\,(\vec{l}, \vec{b})$, при $|\vec{l}| \geq 1$.

13.4.6 Функции $\widehat{\mathrm{vin}}\,(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{\eta})$, $\widehat{\mathrm{vin1}}\,(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{\eta})$, $\widehat{\mathrm{vin2}}\,(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{\eta})$ в случае $\vec{l}' = \vec{l}''$.

Введём функцию

$$\widehat{\mathrm{vin}}\,(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{\eta}) \equiv (1 - \langle \vec{l}', \vec{l}'' \rangle)\, \widehat{\mathrm{vin1}}\,(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{\eta}) - \widehat{\mathrm{vin2}}\,(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{\eta}), \tag{13.4.46}$$

входящую в формулу (13.4.24) для взаимодействия скалярных частиц.

В случае $\vec{l}' = \vec{l}'' = \vec{l}$ согласно формулам (27,28,45) получаем

$$\widehat{\mathrm{vin2}}\,(\vec{l}, \vec{l}, \vec{\eta}) = 0, \tag{13.4.47}$$

$$\widehat{\mathrm{vin1}}\,(\vec{l}, \vec{l}, \vec{\eta}) = \widehat{\mathrm{vin3}}\,(\vec{l}, \vec{\eta}), \tag{13.4.48}$$

$$\widehat{\mathrm{vin}}\,(\vec{l}, \vec{l}, \vec{\eta}) = (1 - |\vec{l}|^2)\, \widehat{\mathrm{vin3}}\,(\vec{l}, \vec{\eta}). \tag{13.4.49}$$

Формулы (13.4.47-13.4.49) упрощают вычисление функционала взаимодействия для частиц с равными скоростями.

13.4.7 Взаимодействие скалярной частицы с квазикиперной и взаимодействие квазикиперных частиц.

В пункте 13.4.3 мы получили формулу (13.4.24) для взаимодействия двух скалярных частиц. Аналогичным образом рассмотрим случай взаимодействия скалярной частицы с квазикиперной и взаимодействия двух квазикиперных частиц.

Для скалярной частицы

$$\widehat{jf}(\vec{\eta}) = l\widehat{jf_0}(\vec{\eta}). \tag{13.4.50}$$

Для несветовой квазикиперной частицы по формуле (13.2.71)

$$\widehat{jf}(\vec{\eta}) = l\frac{\langle \vec{l}, \widehat{\vec{jtf}}(\vec{\eta}) \rangle}{\langle l, \Theta l \rangle} + \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{\vec{jtf}} \end{pmatrix}. \tag{13.4.51}$$

Если первая частица — скалярная, а вторая — несветовая квазикиперная, то

$$\langle \widehat{jf}'(\vec{\eta}), \Theta \widehat{jf}''(-\vec{\eta}) \rangle = \left\langle l'\widehat{jf_0}'(\vec{\eta}), \Theta \left(l'' \frac{\langle \vec{l}'', \widehat{\vec{jtf}}''(-\vec{\eta}) \rangle}{\langle l'', \Theta l'' \rangle} + \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{\vec{jtf}}(-\vec{\eta}) \end{pmatrix} \right) \right\rangle = \tag{13.4.52}$$

$$\widehat{jf_0}'(\vec{\eta}) \frac{\langle \vec{l}'', \widehat{\vec{jtf}}''(-\vec{\eta}) \rangle}{\langle l'', \Theta l'' \rangle} \langle l', \Theta l'' \rangle - \widehat{jf}_0'(\vec{\eta}) \langle \vec{l}', \widehat{\vec{jtf}}''(-\vec{\eta}) \rangle$$

и

$$\widehat{jf'_0}(\vec{\eta})\widehat{jf''_0}(-\vec{\eta}) = \widehat{jf'_0}(\vec{\eta})\frac{\langle\vec{l}'', \widehat{\vec{jtf}}''(-\vec{\eta})\rangle}{\langle l'', \Theta l''\rangle}. \tag{13.4.53}$$

Подставляя (13.4.52) и (13.4.53) в (13.4.19) и (13.4.22), получаем

$$\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta}) = \widehat{\mathrm{vin}}\,(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{\eta})\widehat{jf'_0}(\vec{\eta})\frac{\langle\vec{l}'', \widehat{\vec{jtf}}''(-\vec{\eta})\rangle}{\langle l'', \Theta l''\rangle} - \widehat{\mathrm{vin1}}\,(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{\eta})\widehat{jf_0}'(\vec{\eta})\langle\vec{l}', \widehat{\vec{jtf}}''(-\vec{\eta})\rangle. \tag{13.4.54}$$

Если обе частицы — несветовые квазикиперные, то

$$\left\langle \widehat{jf}'(\vec{\eta}), \widehat{jf}''(-\vec{\eta})\right\rangle = \tag{13.4.55}$$

$$\left\langle l'\frac{\langle\vec{l}', \widehat{\vec{jtf}}'(\vec{\eta})\rangle}{\langle l', \Theta l'\rangle} + \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{\vec{jtf}}'(\vec{\eta}) \end{pmatrix}, \Theta\left(l''\frac{\langle\vec{l}'', \widehat{\vec{jtf}}''(-\vec{\eta})\rangle}{\langle l'', \Theta l''\rangle} + \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{\vec{jtf}}''(-\vec{\eta}) \end{pmatrix}\right)\right\rangle =$$

$$\langle l', \Theta l''\rangle\frac{\langle\vec{l}', \widehat{\vec{jtf}}'(\vec{\eta})\rangle\langle\vec{l}'', \widehat{\vec{jtf}}''(-\vec{\eta})\rangle}{\langle l', \Theta l'\rangle\langle l'', \Theta l''\rangle} -$$

$$\left(\langle\widehat{\vec{jtf}}'(\vec{\eta}), \widehat{\vec{jtf}}''(-\vec{\eta})\rangle + \frac{\langle\vec{l}'', \widehat{\vec{jtf}}'(\vec{\eta})\rangle\langle\vec{l}'', \widehat{\vec{jtf}}''(-\vec{\eta})\rangle}{\langle l'', \Theta l''\rangle} + \frac{\langle\vec{l}', \widehat{\vec{jtf}}'(\vec{\eta})\rangle\langle\vec{l}', \widehat{\vec{jtf}}''(-\vec{\eta})\rangle}{\langle l', \Theta l'\rangle}\right)$$

и

$$\widehat{jf_0}'(\vec{\eta})\widehat{jf_0}''(-\vec{\eta}) = \frac{\langle\vec{l}', \widehat{\vec{jtf}}'(\vec{\eta})\rangle\langle\vec{l}'', \widehat{\vec{jtf}}''(-\vec{\eta})\rangle}{\langle l', \Theta l'\rangle\langle l'', \Theta l''\rangle}. \tag{13.4.56}$$

Подставляя (13.4.55) и (13.4.56) в (13.4.19), (13.4.22), получаем

$$\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta}) = \widehat{\mathrm{vin}}\,(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{\eta})\frac{\langle\vec{l}', \widehat{\vec{jtf}}'(\vec{\eta})\rangle\langle\vec{l}'', \widehat{\vec{jtf}}''(-\vec{\eta})\rangle}{\langle l', \Theta l'\rangle\langle l'', \Theta l''\rangle} - \tag{13.4.57}$$

$$\widehat{\mathrm{vin1}}\,(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{\eta})\left(\langle\widehat{\vec{jtf}}'(\vec{\eta}), \widehat{\vec{jtf}}''(-\vec{\eta})\rangle + \frac{\langle\vec{l}'', \widehat{\vec{jtf}}'(\vec{\eta})\rangle\langle\vec{l}'', \widehat{\vec{jtf}}''(-\vec{\eta})\rangle}{\langle l'', \Theta l''\rangle} + \frac{\langle\vec{l}', \widehat{\vec{jtf}}'(\vec{\eta})\rangle\langle\vec{l}', \widehat{\vec{jtf}}''(-\vec{\eta})\rangle}{\langle l', \Theta l'\rangle}\right).$$

§13.5 Аппроксимация частиц влавинами

Рассматривая частицы, мы с самого начала предполагаем, что соответствующая им функция состояния $u(x) \in C_4^{(k)}(\mathbf{R}^4)$, то есть является достаточно гладкой и не имеет особенностей. Соответственно, функция тока $j(x) \in C_4^{(k-2)}(\mathbf{R}^4)$ также является гладкой функцией, не имеющей особенностей. Показатель гладкости $k \in \mathbf{N}$ мы считаем достаточно большим. Функцию тока $j(x)$ для физической частицы мы считаем абсолютно суммируемой по пространственным переменным по $\mathbf{R}^3$. Область, в которой функция тока $j(x)$ существенно отлична от нуля, мы назвали ядром частицы и заключили её в шар $Q[\vec{b}, \mu]$, где $\vec{b} \in \mathbf{R}^3$ — центр частицы, а число $\mu > 0$ — радиус ядра частицы (см. п. 3.1.3).

При рассмотрении взаимодействия двух частиц при расстоянии между их центрами $|\vec{b}|$, много большем радиуса частиц

$$\frac{\mu}{|\vec{b}|} \ll 1 \tag{13.5.1}$$

возникает возможность перейти к пределу при $\mu \to 0$ и рассматривать взаимодействие точечных частиц. При $\mu \to 0$ функция тока $j(\vec{x})$будет сходиться к обобщённой функции $gf(\vec{x})$ с точечным носителем $\operatorname{supp} gf = 0$. Но обобщённая функция $gf \in D'(\mathbf{R}^3)$ с точечным носителем имеет весьма простую структуру — это есть линейная комбинация δ-функции и конечного числа её частных производных

$$gf(\vec{x}) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha| \le m}} C_\alpha \delta^{(\alpha)}(\vec{x}) \tag{13.5.2}$$

(см. [24], с. 49), где m — целое неотрицательное число.

Возникает вопрос: когда можно удовлетворительно аппроксимировать функцию тока, обобщённой функцией с точечным носителем и чему равна ошибка аппроксимации? В этом параграфе мы покажем, что при вычислении взаимодействия двух частиц относительная ошибка при замене функций токов обобщёнными функциями с точечными носителями порядка m есть $O\left(\left(\frac{\mu}{|\vec{b}|}\right)^{m+1}\right)$. Причём такая аппроксимация в принципе не годится при вычислении массы и энергии самой частицы.

13.5.1 Пример неподвижной скалярной стационарной сферически симметричной частицы с зарядом, равномерно распределенным в шаре.

Пример 13.5.1

Пусть мы имеем неподвижную скалярную стационарную сферически симметричную частицу с функцией тока $j(\vec{x})$, такой что $\vec{j}(x) \equiv 0$, а $j_0(x) = \begin{cases} \rho_0, & |\vec{x}| \le \mu; \\ 0, & |\vec{x}| > \mu. \end{cases}$ Заряд частицы $e = \frac{4}{3}\pi\mu^3\rho_0$.

Для такой частицы энергия деформации равна нулю, поэтому масса и энергия частицы совпадают. Вычислим величину энергии, сосредоточенной в ядре частицы, то есть в шаре радиусом μ, и вне его.

Согласно теореме Гаусса, то есть по формуле (2.2.27)для напряженности электрического поля $\vec{E} = grad\, u_0(\vec{x})$ имеем:

$$-4\pi r^2 E = \begin{cases} e, & r \ge \mu; \\ (\frac{r}{\mu})^3 e, & r \le \mu. \end{cases}$$

Откуда

$$E_r = \begin{cases} \frac{-e}{4\pi|\vec{x}|^2}, & |\vec{x}| \ge \mu; \\ \frac{-e}{4\pi\mu^2}\frac{|\vec{x}|}{\mu}, & |\vec{x}| \le \mu. \end{cases} \tag{13.5.3}$$

Энергия поля внутри ядра будет

$$h_i = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{4\pi\mu^2}\right)^2 \int\limits_0^{\mu} \left(\frac{r}{\mu}\right)^2 r^2 dr\, 4\pi = \frac{1}{5}\frac{e^2}{8\pi}\mu^{-1}. \qquad (13.5.4)$$

Энергия поля вне ядра

$$h_e = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{4\pi}\right)\int_{\mu}^{\infty} \frac{1}{r^4} r^2 dr\, 4\pi = \frac{e^2}{8\pi}\mu^{-1} \qquad (13.5.5)$$

Энергия h и масса m частицы равны

$$h = m = \frac{6}{5}\frac{e^2}{8\pi}\mu^{-1}. \qquad (13.5.6)$$

В формуле (13.5.6) мы не можем перейти к пределу при $\mu \to 0$, при фиксированном заряде частицы это приведет к бесконечности массы и энергии частицы. Важный вывод заключается также в том, что энергии, сосредоточенные в ядре частицы и внешней области, имеют одинаковый порядок при $\mu \to 0$.

Закончив изложение примера, перейдем к рассмотрению скалярной стационарной сферически симметричной частицы с центром в точке $\vec{b}$ и с плотностью заряда, отличной от нуля лишь в шаре $Q[\vec{b}, \mu]$. Если заряд такой частицы равен e, то вне шара $Q[\vec{b}, \mu]$ функция состояния $u(x)$ совпадает с функцией состояния точечного заряда, сосредоточенного в центре частицы. Итак, внешнее поле сферически симметричного стационарного локализованного распределения зарядов совпадает с внешним полем точечного заряда. Оказывается, и воспринимает внешнее электростатическое поле такая частица как точечный заряд в следующем смысле.

Лемма 13.5.1 *Пусть функции $j_0'(\vec{x})$ и $j_0''(\vec{x})$ имеют непересекающиеся ограниченные носители. Функция $j_0'(\vec{x})$ задаёт сферически симметричное распределение заряда величиной e в шаре $Q[\vec{b}, \mu]$, плотности токов $\vec{j}' = \vec{j}'' \equiv 0$ и $u'(x)$, $u''(x)$ — соответствующие функции состояния. Тогда функционал взаимодействия для неподвижных частиц*

$$\mathrm{ni}\,(u', u'') = e u_0''(\vec{b}) \qquad (13.5.7)$$

Доказательство. Поскольку поля $u'(x)$ и $u''(x)$ кулонообразные, то по первой формуле Грина (см. [79], с. 366)

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \langle \vec{E}', \vec{E}'' \rangle\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \langle\, grad\, u_0'(\vec{x}),\ grad\, u_0''(\vec{x}) \rangle\, dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} u_0''(\vec{x}) \Delta u_0'(\vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3.$$

То есть

$$\mathrm{ni}\,(u', u'') = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} u_0''(\vec{x}) j_0(\vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 = \int\limits_0^{\mu} \left(\iint\limits_S u_0''(\vec{b} + r\vec{n}) j_0'(\vec{b} + r\vec{n}) d\sigma \right) r^2 dr,$$

где S — единичная сфера, $\vec{n} \in S$. В силу сферической симметрии распределения заряда функция $j_0(\vec{b}+r\vec{n})$ не зависит от вектора $\vec{n}$ и является лишь функцией r, $j_0'(\vec{b}+r\vec{n}) = \psi(r)$, поэтому

$$\mathrm{ni}\,(u', u'') = \int\limits_0^\mu \psi(r) r^2 \iint\limits_S u_0''(\vec{b}+r\vec{n}) d\sigma dr. \qquad (13.5.8)$$

По условию функция $u_0''(\vec{x})$ — гармоническая в шаре $Q[\vec{b},\mu]$, поэтому по теореме о среднем (см. [79], с. 368)

$$\iint\limits_S u_0''(\vec{b}+r\vec{n}) d\sigma = 4\pi u_0''(\vec{b}). \qquad (13.5.9)$$

В силу (13.5.8, 13.5.9)

$$\mathrm{ni}\,(u', u'') = u_0''(\vec{b}) \int\limits_0^\mu j_0'(\vec{b}+r\vec{n}) 4\pi r^2 dr = u_0''(\vec{b}) \iiint\limits_{Q[\vec{b},\mu]} j_0'(\vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 = u_0''(\vec{b}) e. \diamondsuit$$

Из леммы 13.5.1 и вышесказанного вытекает, что сферически симметричные стационарные локализованные распределения зарядов взаимодействуют как точечные частицы.

Лемма 13.5.2 *Если $u'(x)$, $u''(x)$ — функции состояния двух сферически симметричных скалярных стационарных частиц с центрами $\vec{b}'$, $\vec{b}''$, зарядами e', e'' и плотностями заряда, локализованными в шарах $Q[\vec{b}',\mu']$, $Q[\vec{b}'',\mu'']$ то при*

$$\mu' + \mu'' < |\vec{b}'' - \vec{b}'| \qquad (13.5.10)$$

выполняется точное равенство для функционала взаимодействия

$$\mathrm{ni}\,(u', u'') = \frac{e'e''}{4\pi|\vec{b}'' - \vec{b}'|}. \qquad (13.5.11)$$

Мы видим, что закон Кулона точно справедлив не только для взаимодействия точечных неподвижных зарядов, но и для взаимодействия сферически симметричных не перекрывающихся неподвижных распределений зарядов. Таким образом, при изучении взаимодействий стационарных скалярных сферически симметричных частиц при переходе к пределу при $\mu \to 0$ мы вообще не вносим ошибки в величину функционала взаимодействия.

Вернемся снова к примеру 13.5.1 и предположим, что величина заряда e фиксирована и дано, что плотность заряда сферически симметрично распределена и локализована в шаре $Q[0,\mu]$. Тогда энергия внешнего поля не изменится и будет та же, что и в примере 13.5.1, а энергия внутреннего поля будет

$$h_i = \frac{4\pi}{2} \int\limits_0^\mu E^2(r) r^2 dr, \qquad (13.5.12)$$

где на функцию $E(r)$ — величину напряженности электрического поля — наложено лишь одно ограничение

$$E(\mu) = \frac{-e}{4\pi\mu^2}. \qquad (13.5.13)$$

Отсюда видно, что величина внутренней энергии может принимать любые значения от $+\infty$ до 0 при фиксированном внешнем поле и определяется распределением плотности заряда в ядре частицы.

13.5.2 Сумма Дирака. В этом пункте мы рассмотрим вопрос об аппроксимации регулярной обобщённой функции $f_\mu \in D'(\mathbf{R}^n)$ обобщённой функцией $f \in D'(\mathbf{R}^n)$ с точечным носителем $\operatorname{supp} f = \{a\}$ при вычислении интеграла

$$I = \iint\limits_{\mathbf{R}^n} \ldots \int \varphi(x) f_\mu(x) dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \tag{13.5.14}$$

Интеграл (13.5.14) мы также в этом пункте обозначаем в виде

$$I \equiv (\varphi, f_\mu), \tag{13.5.15}$$

то есть как *двойственность* между пространством основных функций φ и функционалов f_μ. Аппроксимация понимается в асимптотическом смысле, а именно: $\mu > 0$ здесь некоторый параметр, и функции f_μ при $\mu \to 0$ сходятся в пространстве $D'(\mathbf{R}^n)$ к обобщённой функции f с точечным носителем.

В п. 3.1.2 мы уже рассматривали вопрос об асимптотическом вычислении интеграла (13.5.14) при $\mu \to 0$ с помощью моментной теории. Здесь мы фактически дадим интерпретацию аналогичной процедуры вычислений в терминах обобщённых функций.

Как известно, (см. [24], с. 49) всякая обобщённая функция с точечным носителем является конечной линейной комбинацией δ-функции и её частных производных. Следуя [24] в обозначении частных производных, можем записать

$$f = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha| \le m}} C_\alpha \delta^{(\alpha)}(x - a). \tag{13.5.16}$$

Таким образом, последовательность интегралов (13.5.14) будет сходиться к пределу

$$(\varphi, f_\mu) \to \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha| \le m}} C_\alpha \varphi^{(\alpha)}(a)(-1)^{|\alpha|} \tag{13.5.17}$$

при $\mu \to 0$ на каждой основной функции $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$. Пусть $\eta(x) \in D(\mathbf{R}^n)$ — функция, равная единице в некоторой окрестности точки $\alpha \in \mathbf{R}^n$, тогда, подставляя в (13.5.17) $\varphi(x) = (x - a)^\alpha \eta(x)$, получим при $\mu \to 0$

$$((x - a)^\alpha \eta, f_\mu) \to (-1)^{|\alpha|} C_\alpha \alpha!, \tag{13.5.18}$$

причём

$$C_\alpha = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} ((x - a)^\alpha \eta(x), f(x)). \tag{13.5.19}$$

Так как обобщённая функция $f \in D'(\mathbf{R}^n)$ с точечным носителем, то в последней формуле можно убрать вспомогательную функцию η, то есть

$$C_\alpha = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} ((x - a)^\alpha, f(x)). \tag{13.5.20}$$

Однако в формуле (13.5.18) убрать функцию η уже в общем случае нельзя, так как функция $(x - a)^\alpha$ не финитна и не принадлежит пространству основных функций

$D(\mathbf{R}^n)$. В таком случае действие функционала $f_\mu \in D'(\mathbf{R}^n)$ на функцию $(x-a)^\alpha$ может быть не определено.

Чтобы обойти эту техническую трудность, мы ограничимся здесь рассмотрением обобщённых функций f_μ с компактным носителем $f_\mu \in \mathcal{E}'$. В этом случае можно рассматривать обобщённую функцию f_μ как непрерывный функционал на пространстве функций $\varphi \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$ (см. [24], с. 48). Разумеется, предположение $f_\mu \in \mathcal{E}'$ является не совсем реалистичным приближением к реальной ситуации, однако это предположение существенно упрощает выкладки, не изменяя ряда принципиальных физически значимых выводов.

Итак, если $f_\mu \in \mathcal{E}'$ и $f_\mu \to f$ при $\mu \to 0$ в $\mathcal{E}'$, то коэффициент C_α в представлении (13.5.16) будет равен пределу

$$C_\alpha = \lim_{\mu\to 0} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}((x-a)^\alpha, f_\mu). \tag{13.5.21}$$

Предельная обобщённая функция f однозначно задаётся конечным набором числовых коэффициентов C_α — моментов функционала f_μ. Возникает возможность аппроксимации обобщённой функции f_μ, фиксация которой требует континуального объема информации, обобщённой функцией с точечным носителем, задаваемой конечным набором числовых констант. Причём аппроксимация обобщённой функции $g \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ обобщённой функцией с точечным носителем будет двойственна аппроксимации основной функции $\varphi \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$ суммой Тейлора.

Определение 13.5.1 *Суммой Дирака порядка $m = 0, 1, 2, \dots$ обобщённой функции $g \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$с центром в точке $a \in \mathbf{R}^n$ назовём величину*

$$d_m(g; a) \equiv \sum_{\substack{\alpha\in \mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha|\le m}} C_\alpha \delta^{(\alpha)}(x-a), \tag{13.5.22}$$

где

$$C_\alpha = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}((x-a)^\alpha, g). \tag{13.5.23}$$

Коэффициенты $C_\alpha = C_\alpha(g; a)$ назовём *коэффициентами Дирака* обобщённой функции g.

Суммой Тейлора порядка m функции $\varphi \in C^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ с центром в точке $a \in \mathbf{R}^n$ называется величина

$$t_m(\varphi; a) \equiv \sum_{\substack{\alpha\in \mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha|\le m}} \frac{\varphi^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha. \tag{13.5.24}$$

Суммы Дирака и Тейлора связаны соотношением.

Лемма 13.5.3 *Если $\varphi \in C^{(m)}(\mathbf{R}^n)$, $g \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ то*

$$(t_m(\varphi; a), g) = (\varphi, d_m(g; a)). \tag{13.5.25}$$

Доказательство. В самом деле

$$(\varphi, d_m(g;a)) = (\varphi, \sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha|\le m}} C_\alpha \delta^{(\alpha)}(x-a)) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha|\le m}} C_\alpha (-1)^{|\alpha|}\varphi^{(\alpha)}(a) =$$

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha|\le m}} \frac{\varphi^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}((x-a)^\alpha, g) = (t_m(\varphi;a), g).\diamondsuit$$

Для оценки ошибки приближения обобщённой функцией g суммой Дирака нам потребуются следующие обозначения. Для функции $\varphi \in C^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ обозначим однородный полином k-той степени, $k \le m$, входящий в сумму Тейлора (13.5.24) через

$$t\!\!t_k(\varphi;a) \equiv \sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha|= k}} \frac{\varphi^{(\alpha)}(a)(x-a)^\alpha}{\alpha!}, \tag{13.5.26}$$

а через $\|t\!\!t_k(\varphi;a)\|$ обозначим число

$$\|t\!\!t_k(\varphi;a)\| \equiv \sup_{\substack{x\in\mathbf{R}^n \\ |x|=1}} \left| \sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha|= k}} \frac{\varphi^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} x^\alpha \right|. \tag{13.5.27}$$

По построению справедливы неравенство

$$\left|t\!\!t_k(\varphi;a)\right| \le \|t\!\!t_k(\varphi;a)\| \cdot |x-a|^k \tag{13.5.28}$$

и равенство

$$t_m(\varphi;a) = \sum_{k=0}^m t\!\!t_k(\varphi;a). \tag{13.5.29}$$

С помощью введенных обозначений сформулируем следующую оценку.

Лемма 13.5.4 *Пусть* $\varphi \in C^{(m+1)}(\mathbf{R}^n), g \in \mathcal{E}'$, *причём функция* g *регулярна с ядром* $g(x)$ *и* $\operatorname{supp} g \subset Q[a,\mu]$, *тогда*

$$\Big|(\varphi, g) - (\varphi, d_m(g,a))\Big| \le \mu^{m+1} \sup_{x\in Q[a,\mu]} \|t\!\!t_{m+1}(\varphi;x)\| \cdot \iint\limits_{\mathbf{R}^n}\!\dots\!\int |g(x)|dx_1\dots dx_n. \tag{13.5.30}$$

Доказательство. В силу леммы 13.5.1

$$(\varphi, g) - (\varphi, d_m(g,a)) = (\varphi - t_m(\varphi;a), g).$$

В силу формулы Тейлора (см. [81], с. 273) при $x \in Q[a,\mu]$

$$\Big|(\varphi - t_m(\varphi;a))(x)\Big| \le \|t\!\!t_{m+1}(\varphi;x')\| \cdot \Big|x-a\Big|^{m+1},$$

где $x' \in Q[a,\mu]$, откуда

$$\forall x \in Q[a,\mu] \;\Big|\; |(\varphi - t_m(\varphi;a))(x)| \le \sup_{x\in Q[a,\mu]} |t\!\!t_{m+1}(\varphi;x)| \cdot \mu^{m+1}. \tag{13.5.31}$$

Так как обобщённая функция $g \in \mathcal{E}'$ регулярна, то

$$(\varphi - t_m(\varphi;a), g) \le \sup_{x\in Q[a,\mu]} \Big|(\varphi - t_m(\varphi;a))(x)\Big| \cdot \iint\limits_{\mathbf{R}^n}\dots\int \Big|g(x)\Big| dx_1\dots dx_n. \tag{13.5.32}$$

Неравенства (13.5.31) и (13.5.32) доказывают соотношение (13.5.30). $\diamondsuit$

Далее мы часто будем встречаться с функциями $\varphi(x)$, удовлетворяющими следующему условию убывания при $|x| \to \infty$

$$|\varphi^{(\alpha)}(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^{|\alpha|+1}}\right) \tag{13.5.33}$$

при всех $\alpha \in \mathbf{N}_o{}^n$ с $|\alpha| \le m$. Эти условия назовём *условиями кулоновского убывания порядка* m. Если в условиях леммы 13.5.2 функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям кулоновского убывания порядка $(m+1)$, то справедлива оценка

$$(\varphi, g) - (\varphi, d_m(g;a)) = O\left(\left(\frac{\mu}{|a|}\right)^{m+1}\right) \cdot O\left(\frac{1}{|a|}\right). \tag{13.5.34}$$

для аппроксимации обобщённой функции $g \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ суммой Дирака порядка m.

13.5.3 Оценка погрешности аппроксимации суммой Дирака. В предыдущем пункте мы определили сумму Дирака и установили её простейшие свойства для обобщённой функции с компактным носителем $g \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$. Расширим условия применимости полученных формул.

Из формул (13.5.22, 13.5.23) видно, что для существования суммы Дирака порядка m достаточно, чтобы функционал g был определен на всех полиномах степени не выше m. Равенство (13.5.25) леммы 13.5.3 останется верным, если функционал g определен на всех полиномах степени не выше m, а функция φ имеет все частные производные до порядка m в точке $a \in \mathbf{R}^n$. В частности, для функции $g \in S(\mathbf{R}^n)$ определены все суммы Дирака и суммы Тейлора и для функций $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$, $g \in S(\mathbf{R}^n)$ справедлива формула (13.5.25).

Что касается оценки типа (13.5.30) леммы 13.5.4, то она может быть получена также по следующей схеме. Пусть функция $g(x)$ суммируема и существуют все интегралы (x^α, g) при $|\alpha| \le m$. Будем говорить, что функция $\psi(x)$ — *звездная мажоранта* функции $\varphi(x)$ с центром в точке a, если выполнены условия

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \;\Big|\; \Big|\varphi(x)\Big| \le \psi(x-a), \tag{13.5.35}$$

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \;\forall \gamma \in]0,1] \;\Big|\; \psi(\gamma x) \le \psi(x). \tag{13.5.36}$$

Рассмотрим функции $g_\mu \equiv \frac{1}{\mu^n} g(\frac{x-a}{\mu})$, $\mu \in]0,1]$. По определению интеграл $(1, g_\mu) = (1, g)$ не зависит от μ.

Лемма 13.5.5 *Пусть функция $\varphi(x) \in C^{(m+1)}(\mathbf{R}^n)$ и функция $\psi(x)$ является звездной мажорантой всех частных производных порядка $(m+1)$ функции $\varphi(x)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\Big|(\varphi, g_\mu\ ) - (\varphi, d_m(g_\mu; a))\Big| \le \mu^{n+1}\frac{n^{m+1}}{n!}(\psi(t)|t|^{m+1}, |g(t)|). \tag{13.5.37}$$

Доказательство. По формуле Тейлора (см. [32], с. 591)

$$\Big|(\varphi - t_m(\varphi; a))(x)\Big| \le \Big| \sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha|=m+1}} \frac{1}{\alpha!}\varphi^{(\alpha)}(a+\theta(x-a))(x-a)^\alpha\Big| \le \psi(x-a)\,|x-a|^{m+1}\frac{n^{m+1}}{n!}, \tag{13.5.38}$$

где $\theta \in [0,1]$. Применима формула (13.5.25)

$$(\varphi, g_\mu) - (\varphi, d_m(g_\mu; a)) = (\varphi - t_m(\varphi; a), g_\mu).$$

Поэтому в силу неравенства (13.5.38)

$$\Big|(\varphi, g_\mu) - (\varphi, d_m(g_\mu; a))\Big| \le \tag{13.5.39}$$

$$\frac{(n)^{m+1}}{n!}(\psi(x-a))|x-a|^{m+1}, \frac{1}{\mu^n}\Big|g\left(\frac{x-a}{\mu}\right)\Big| \le$$

$$\frac{(n)^{m+1}}{n!}\mu^{m+1}(\psi(t)|t|^{m+1}, \Big|g(t)\Big|),$$

где $t = \frac{x-a}{\mu}$. Доказано неравенство (13.5.37). $\diamondsuit$

13.5.4 Двойственность сумм Тейлора и Дирака можно увидеть и в соответствующих свойствах трансформации Фурье обобщённых функций. Пусть $\hat{g}(\eta), \eta \in \mathbf{R}^n$ — трансформация Фурье обобщённой функции $g(x)$, то есть

$$\hat{g}(\eta) = (e^{i(\eta,x)}, g(x)). \tag{13.5.40}$$

Формально дифференцируя соотношение (13.5.40), получаем

$$\hat{g}^\alpha(0) = (i)^{|\alpha|}(x^\alpha, g(x)). \tag{13.5.41}$$

Аналогично формальным дифференцированием обратного к (13.5.40) соотношения

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}(e^{-i(x,\eta)}, \hat{g}(\eta)) \tag{13.5.42}$$

получаем формулу

$$g^{(\alpha)}(0) = \frac{1}{(2\pi)^n}(-i)^{|\alpha|}(\eta^\alpha, \hat{g}(\eta)). \tag{13.5.43}$$

Для выполнения равенства (13.5.41) достаточно, чтобы обобщённая функция $g(x)$ была регулярной и существовал интеграл

$$(|x|^{|\alpha|}, |g(x)|). \tag{13.5.44}$$

Аналогично для выполнения равенства (13.5.43) достаточно, чтобы обобщённая функция $\hat{g}(\eta)$ была регулярной, и существовал интеграл

$$(|\eta|^{|\alpha|}, |\hat{g}(\eta)|). \tag{13.5.45}$$

В случае $a = 0$ договоримся обозначать $d_m(g; 0) \equiv d_m(g)$, $t_m(g, 0) \equiv t_m(g)$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 13.5.6 *Если $g(x)$ — регулярная обобщённая функция и существует интеграл*

$$((1+|x|^m), |g(x)|), \tag{13.5.46}$$

то справедливо равенство

$$\widehat{d_m(g)} = t_m(\hat{g}). \tag{13.5.47}$$

Доказательство. По определению суммы Тейлора

$$t_m(\hat{g}) = \sum_{\substack{\alpha\in \mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha|\le m}} \frac{1}{\alpha!}\hat{g}^{(\alpha)}(0)\eta^\alpha$$

и в силу соотношения (13.5.41) получаем

$$t_m(\hat{g}) = \sum_{\substack{\alpha\in \mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha|\le m}} \frac{1}{\alpha!}(i)^{|\alpha|}(\, x^\alpha, g(x))\eta^\alpha. \tag{13.5.48}$$

По определению суммы Дирака

$$d_m(g) = \sum_{\substack{\alpha\in \mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha|\le m}} C_\alpha \delta^{(\alpha)}(x) = \sum_{\substack{\alpha\in \mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha|\le m}} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}(x^\alpha, g(x))\delta^{(\alpha)}(x). \tag{13.5.49}$$

Трансформация Фурье обобщённой функции (13.5.49) есть

$$\widehat{d_m(g)}(\eta) = \sum_{\substack{\alpha\in \mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha|\le m}} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}(x^\alpha, g(x))(-i)^{|\alpha|}\eta^\alpha. \tag{13.5.50}$$

Сравнивая (13.5.48) и (13.5.50), получаем равенство (13.5.47). ♢

Справедлива и формула двойственная (13.5.47).

Лемма 13.5.7 *Если $\hat{g}(\eta)$ — регулярная обобщённая функция и существует интеграл*

$$((1+|\eta|^m), |\hat{g}(\eta)|) \tag{13.5.51}$$

то справедливо равенство

$$d_m(\hat{g}) = \widehat{t_m(g)}. \tag{13.5.52}$$

Доказательство. По определению суммы Дирака

$$d_m(\hat{g})(\eta) = \sum_{\substack{\alpha\in \mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha|\le m}} C_\alpha \delta^{(\alpha)}(\eta) = \sum_{\substack{\alpha\in \mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha|\le m}} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}(\eta^\alpha, \hat{g}(\eta))\delta^{(\alpha)}(\eta). \tag{13.5.53}$$

Трансформация Фурье суммы Тейлора равна

$$\widehat{t_m(g)}(\eta) = \widehat{\left(\sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha| \le m}} \frac{g^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} x^\alpha \right)}(\eta) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha| \le m}} \frac{g^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} \delta^{(\alpha)}(\eta). \qquad (13.5.54)$$

В силу равенства (13.5.43) выражения (13.5.53) и (13.5.54) совпадают. $\diamondsuit$

Таким образом, лемма 13.5.6 показывает, что для того, чтобы построить трансформацию Фурье суммы Дирака обобщённой функции $g(x)$ достаточно взять сумму Тейлора от её трансформации Фурье $\hat{g}(\eta)$. Соотношение (13.5.47) может служить и определением суммы Дирака обобщённой функции $g(x)$.

13.5.5 Обобщенные частицы — влавины. В предыдущих пунктах мы выяснили смысл аппроксимации регулярной обобщённой функции обобщённой функцией с точечным носителем. Пример п. 13.5.2 показывает, что при замене функции тока $jf(\vec{x})$ обобщённой функцией с точечным носителем мы не получим частицу, так как наряду с нарушением условий гладкости и ограниченности на функцию тока и функцию состояния теряют смысл и обращаются в бесконечность такие характеристики как масса и энергия. Однако при замене функции тока $jf(\vec{x})$ её суммой Дирака мы согласно предыдущему пункту получаем асимптотическую аппроксимацию двух величин:

1) функции состояния на больших расстояниях от ядра частицы, то есть при

$$\frac{\mu}{|\vec{x} - \vec{b}} | \ll 1\,, \qquad (13.5.55)$$

2) функционала взаимодействия двух частиц $\mathrm{ni}\,(p', p'', u', u'')$ при расстоянии между их центрами много больше радиусов их ядер

$$\frac{\mu' + \mu''}{|\vec{b}'' - \vec{b}'|} \ll 1. \qquad (13.5.56)$$

Для получения аппроксимации этих двух величин мы и вводим обобщённые частицы — *влавины.*

Определение 13.5.2 *Лоренцеву обобщённую частицу, для которой функция тока $jf(\vec{x}) \in S_4'(\mathbf{R}^3)$ является обобщённой функцией с точечным носителем, назовём влавином.*

Так же как и для обычных частиц для функции тока влавинов $j(x)$ определено преобразование $\tilde{T}_p,\ p \in P$. Функция состояния $u(x) \in S'(\mathbf{R}^4)$ связана с функцией тока с помощью базового оператора системы $Au = j$ и при изменении состояния преобразуется с помощью оператора $T_p,\ p \in P$. Однако для влавина плотность лагранжиана $\mathcal{N}(\frac{\partial u}{\partial x})(x)$ уже, вообще говоря, не интегрируема по пространственным переменным x_1, x_2, x_3 по пространству $\mathbf{R}^3$.

Переходя от частиц к влавинам, мы изучаем роль простейших числовых характеристик частиц: заряда, спина, дипольного момента и т.д. в формировании поля частицы на больших расстояниях от центра и во взаимодействии частиц. Вводя влавины, у которых отлична от нуля лишь одна из характеристик частицы, мы можем выяснить в чистом виде роль этой характеристики.

Итак, определением влавина является равенство

$$jf(\vec{x}) = \sum_{\substack{\alpha\in{\mathbf{N}_o}^3\\ |\alpha|\le m}} C_\alpha \delta^{(\alpha)}(\vec{x}), \tag{13.5.57}$$

где $C_\alpha \in \mathbf{R}^4$, $\alpha \in {\mathbf{N}_o}^3$. Носителем обобщённой функции jf мы полагаем точку нуль. Число $m \in \mathbf{N}_o$ есть порядок обобщённой функции (13.5.57), который мы также будем называть *порядком влавина.* Если в формуле (13.5.57) $C_\alpha \neq 0$ лишь при $|\alpha| = m$, то влавин мы называем *элементарным влавином порядка* m. Всякий влавин представим в виде суммы конечного числа элементарных влавинов.

В образах Фурье равенство (13.5.57) эквивалентно равенству

$$\widehat{jf}(\vec{\eta}) = \sum_{\substack{\alpha\in{\mathbf{N}_o}^3\\ |\alpha|\le m}} C_\alpha\,(-i\vec{\eta})^\alpha = \sum_{\substack{\alpha\in{\mathbf{N}_o}^3\\ |\alpha|\le m}} (-i)^{|\alpha|} C_\alpha\,(\vec{\eta})^\alpha, \tag{13.5.58}$$

то есть эквивалентным определением влавина является полиномиальность обобщённой функции медленного роста $\widehat{jf}(\vec{\eta})$.

Так как функция тока j всегда удовлетворяет условию $\tilde{K}j = 0$ согласно тождеству (13.2.5), то в образах Фурье выполнено эквивалентное условие (13.4.21), то есть

$$\langle \vec{\eta}, \widehat{\overrightarrow{jf}} - \vec{l}\widehat{jf}_0 \rangle = 0. \tag{13.5.59}$$

Через функцию псевдотока js имеем согласно п. 13.2.3, что $\vec{j} - \vec{l}j_0 = \vec{js}$, поэтому для вектора псевдотока js условие (13.5.59) эквивалентно условию

$$\langle \vec{\eta}, \widehat{\overrightarrow{jsf}} \rangle = 0. \tag{13.5.60}$$

Так как $\widehat{jsf} = \mathrm{Am}\,(\vec{l})\widehat{jf}$, и $\widehat{jf} = \mathrm{Am}\,(-\vec{l})\widehat{jsf}$, где $\mathrm{Am}\,(\vec{l})$ и $\mathrm{Am}\,(-\vec{l})$ — постоянные невырожденные матрицы согласно п. 13.2.3, то $\widehat{jf}(\vec{\eta})$ полином степени m иф $\widehat{jsf}(\vec{\eta})$ полином степени m. Аналогичным образом в несветовом случае условия, что $\widehat{jf}(\vec{\eta})$ полином степени m и $\widehat{jtf}(\vec{\eta})$ полином степени m — эквивалентны.

Согласно предыдущему пункту влавин, аппроксимирующий частицу, мы получаем, заменяя функцию $\widehat{jf}(\vec{\eta})$ на её полином Тейлора $t_m(\widehat{jf})$. Итак, при аппроксимации частицы влавином мы переходим от исходной функции, несущей континуальную информацию, к функции, зависящей от конечного числа параметров, а именно моментов функции тока jf. Связь констант C_α в формулах (13.5.57, 13.5.58) в условиях леммы 13.5.6 имеет вид

$$C_\alpha = \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!}((\vec{x})^\alpha, jf(\vec{x})). \tag{13.5.61}$$

При $m = 0$ получаем

$$C_0 = (1, jf(\vec{x})). \tag{13.5.62}$$

При $|\alpha| = 1$ получаем

$$C_\alpha = -((\vec{x})^\alpha, jf(\vec{x})). \tag{13.5.63}$$

Рассмотрим теперь элементарные влавины.

<u>$m = 0$</u>. Для элементарного влавина порядка 0 верно $\widehat{jsf}(\vec{\eta}) = C$ и должно быть выполнено условие (13.5.60), то есть $(\vec{C}, \vec{\eta}) \equiv C_\alpha \eta_\alpha = 0$. Поэтому $\vec{C} = 0$ и всякий влавин нулевого порядка является элементарным влавином и имеет функцию тока

$$jf(\vec{x}) = e\,l\,\delta(\vec{x}), \tag{13.5.64}$$

зависящую от одного числового параметра $e \in \mathbf{R}$, являющегося зарядом частицы. Влавин с функцией тока (13.5.64) назовём власкайлом.

<u>$m = 1$</u>. Для элементарного влавина первого порядка

$$\widehat{jsf}_0(\vec{\eta}) = (-1)(-i)\langle \vec{d}, \vec{\eta} \rangle, \tag{13.5.65}$$

где $\vec{d} \in \mathbf{R}^3$ произвольный вектор, а

$$\widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta}) = (-1)(-i)W\vec{\eta},$$

где $W \in M(3, \mathbf{R})$. Однако матрица W должна быть такой, чтобы выполнялось условие (13.5.60), то есть в данном случае

$$\langle \vec{\eta}, W\vec{\eta} \rangle = 0.$$

Матрицу Wразложим на сумму симметричной матрицы C и кососимметричной матрицы D, $W = C + D$, тогда

$$\langle \vec{\eta}, W\vec{\eta} \rangle = \langle \vec{\eta}, (C + D)\vec{\eta} \rangle = \langle \vec{\eta}, C\vec{\eta} \rangle = 0.$$

Откуда следует, что $C = 0$. Итак, $W \in Ma(3, \mathbf{R})$ — произвольная кососимметричная матрица и однозначно представима в виде $W = \mathrm{Sw}\,(\vec{S})$ согласно п. 11.3.5, где $\vec{S} \in \mathbf{R}^3$ произвольный вектор.

Вывод 13.5.1 *Любой элементарный влавин первого порядка однозначно представим в виде суммы двух элементарных влавинов следующего вида: 1) влавина с*

$$\widehat{jsf}_0(\vec{\eta}) = (-1)(-i)\langle \vec{d}, \vec{\eta} \rangle; \tag{13.5.66}$$

$$\widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta}) = 0$$

и 2) влавина с

$$\widehat{jsf}_0(\vec{\eta}) = 0; \tag{13.5.67}$$

$$\widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta}) = (-1)(-i)[\vec{S}, \vec{\eta}].$$

Элементарный влавин вида (13.5.66) мы назовём *владипом*, а элементарный влавин с функцией псевдотока в некотором состоянии вида (13.5.67) — *влакипером.*

Итак, любой влавин первого порядка представим в виде суммы трёх элементарных влавинов: власкайла, владипа и влакипера и определяется $1+3+3 = 7$ характерными параметрами. На самом деле согласно п. 3.7.3 заряженный влавин первого порядка ($e \neq 0$) представим в виде суммы власкайла и влакипера, то есть содержит $1 + 3 = 4$ характерных параметра, а нейтральный влавин первого порядка представим в виде суммы владипа и влакипера, то есть содержит $3 + 3 = 6$ характерных параметров.

Власкайл обладает только одной характеристикой — зарядом e, все остальные его характеристики: дипольный момент, спин и моменты более высокого порядка равны нулю. Владип обладает только дипольным моментом $\vec{d}$, все другие его характеристики заряд , спин и моменты более высокого порядка, — равны нулю. Однако не существует элементарного влавина, который обладает только спином, но не обладает дипольным моментом в силу формул преобразования дипольного момента (3.7.26). Поэтому влакипер обладает спином и дипольным моментом, причём дипольный момент влакипера выражается через спин. Остальные характеристики влакипера — заряд и моменты, начиная со второго порядка, — нулевые.

В несветовом случае $|\vec{l}| \neq 1$ вместо влакипера удобно пользоваться влаквазикипером, то есть элементарным влавином первого порядка с

$$\widehat{jtf}_0(\vec{\eta}) = 0, \quad \widehat{\overrightarrow{jtf}}(\vec{\eta}) = (-1)(-i)[\vec{S}, \vec{\eta}]. \tag{13.5.68}$$

Тогда любой несветовой элементарный влавин первого порядка однозначно разлагается на сумму владипа и влаквазикипера.

На основе приведенных рассуждений дадим определение дипольного момента $\vec{d}$ и спина $\vec{S}$ через трансформацию Фурье функции тока обобщённой частицы в данном состоянии. А именно, рассмотрим состояние агвидной частицы, в котором функция $\widehat{jsf} \in S_4'(\mathbf{R}^3)$ является регулярной обобщённой функцией, дифференцируемой в нуле. Тогда имеет место представление

$$\widehat{jsf}_0(\vec{\eta}) = \widehat{\overrightarrow{jsf}}_0(0) + i\langle \vec{d}, \vec{\eta}\rangle + o(|\vec{\eta}|), \tag{13.5.69}$$

$$\widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta}) = \widehat{\overrightarrow{jsf}}(0) + iW\vec{\eta} + o(|\vec{\eta}|), \tag{13.5.70}$$

где $\vec{d} \in \mathbf{R}^3$ произвольный вектор, а $W \in M(3, \mathbf{R})$ матрица, удовлетворяющая дополнительным условиям, вытекающим из условия

$$\langle \vec{\eta}, \widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta})\rangle = 0. \tag{13.5.71}$$

Но в силу (13.5.70) условие (13.5.71) принимает вид:

$$\langle \vec{\eta}, \widehat{\overrightarrow{jsf}}(0)\rangle + i\langle \vec{\eta}, W\vec{\eta}\rangle = o(|\vec{\eta}|^2),$$

откуда следует

$$\widehat{\overrightarrow{jsf}}(0) = 0 \tag{13.5.72}$$

и

$$\langle \vec{\eta}, W\vec{\eta}\rangle = 0. \tag{13.5.73}$$

Из условия (13.5.73), как мы уже видели в этом пункте, следует, что $W \in Ma(3, \mathbf{R})$, то есть $W = \mathrm{Sw}\,(\vec{S})$, где $\vec{S} \in \mathbf{R}^3$ — произвольный вектор. Итак, представления (13.5.70, 13.5.71) переходят в представления

$$\widehat{jsf}_0(\vec{\eta}) = e + i\langle \vec{d}, \vec{\eta}\rangle + o(|\vec{\eta}|), \tag{13.5.74}$$

$$\widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta}) = i[\vec{S}, \vec{\eta}] + o(|\vec{\eta}|). \tag{13.5.75}$$

Последние равенства будем рассматривать как определения заряда — $e \in \mathbf{R}$, дипольного момента $\vec{d} \in \mathbf{R}^3$ и спина $\vec{S} \in \mathbf{R}^3$.

13.5.6 Аппроксимация взаимодействия агвидов.

Мы привели в предыдущем параграфе функционал взаимодействия натуральных частиц к виду (13.4.12) и установили, что функционал $\mathrm{ni}\,(e,e,u',u'')$ есть прообраз Фурье по аргументу $\vec{\eta} \in \mathbf{R}^3$ абсолютно суммируемой функции $\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta}) = \widehat{\mathrm{nit1}}\,(\vec{\eta}) + \widehat{\mathrm{nit2}}\,(\vec{\eta})$. Так как согласно (13.4.19), (13.4.22) верно

$$\widehat{\mathrm{nit1}}\,(\vec{\eta}) = \widehat{\mathrm{vin1}}\,(\vec{l}',\vec{l}'',\vec{\eta})\langle\widehat{jf}'(\vec{\eta}),\Theta\widehat{jf}''(-\vec{\eta})\rangle, \tag{13.5.76}$$

$$\widehat{\mathrm{nit2}}\,(\vec{\eta}) = \widehat{\mathrm{vin2}}\,(\vec{l}',\vec{l}'',\vec{\eta})\widehat{jf}'_0(\vec{\eta})\widehat{jf}''_0(-\vec{\eta}), \tag{13.5.77}$$

то в случае, если $\widehat{jf}'(\vec{\eta})$ и $\widehat{jf}''(\vec{\eta})$ — полиномы, прообразы функций $\widehat{\mathrm{nit1}}\,(\vec{\eta})$ и $\widehat{\mathrm{nit2}}\,(\vec{\eta})$ получаются из функций $\mathrm{vin1}\,(\vec{l}',\vec{l}'',\vec{b})$ и $\mathrm{vin2}\,(\vec{l}',\vec{l}'',\vec{b})$ конечным числом дифференцирований по аргументу $\vec{b} \in \mathbf{R}^3$. Таким образом, функции $\mathrm{nit1}\,(\vec{b})$ и $\mathrm{nit2}\,(\vec{b})$ можно считать построенными, если построены функции $\mathrm{vin1}\,(\vec{l}',\vec{l}'',\vec{b})$ и $\mathrm{vin2}\,(\vec{l}',\vec{l}'',\vec{b})$. Итак, после построения функций vin1 и vin2 при аппроксимации частиц влавинами порядка m мы получаем аппроксимацию их взаимодействия, определенную только через моменты частиц до порядка m.

Замечание 13.5.1 *Поскольку аппроксимирующий влавин порядка m строится только по моментам частицы до порядка m, то частицы с совпадающими моментами до порядка m имеют в моментной теории порядка m совпадающие взаимодействия.*

Так как всякий влавин есть сумма элементарных влавинов, то в моментной теории порядка m достаточно научиться вычислять попарные взаимодействия элементарных влавинов до порядка m. В частности, в моментной теории нулевого порядка достаточно вычислить взаимодействие власкайл–власкайл, а в моментной теории первого порядка кроме взаимодействия власкайл–власкайл достаточно ещё вычислить взаимодействие власкайл–власарм и власкайл–влакипер.

Определим теперь *мейн* и *главк* обобщённой частицы путем следующего построения. Пусть обобщённая частица имеет регулярную функцию медленного роста $\widehat{jf}$, дифференцируемую порядка m в нуле, то есть допускающую в некоторой окрестности нуля представление

$$\widehat{jf}(\vec{\eta}) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{N}_o{}^3\\ |\alpha|\le m}} (-i)^{|\alpha|}C_\alpha(\vec{\eta})^\alpha + o(|\vec{\eta}|^m). \tag{13.5.78}$$

Пусть в равенстве (13.5.78) все $C_\alpha = 0$ при $|\alpha| < m$ и существует $C_\alpha \ne 0$ с $|\alpha| = m$. Тогда мы говорим, что число $m \in \mathbf{N}_o$ есть *мейн* частицы, а влавин, для которого

$$\widehat{jf}(\vec{\eta}) = (-i)^m \sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{N}_o{}^3\\ |\alpha|=m}} C_\alpha\,(\vec{\eta})^\alpha, \tag{13.5.79}$$

называется *главком* частицы.

По определению порядок взаимодействия двух обобщённых частиц равен сумме их мейнов, а главное взаимодействие — взаимодействию их главков. Главк обобщённой частицы есть ненулевой аппроксимирующий влавин наименьшего порядка. Для элементарного влавина его мейн равен его порядку и его главк с ним совпадает.

13.5.7 Аппроксимация поля агвидов.

Для натуральной частицы верно согласно (13.2.58)

$$\widehat{uf}(\vec{\eta}) = \frac{1}{(\vec{\eta})^2 - \langle \vec{\eta}, \vec{l} \rangle^2} \Theta \widehat{jf}(\vec{\eta}). \tag{13.5.80}$$

Поэтому равенство (13.2.58) сохраняется и для аппроксимирующих влавинов, когда функцию $\widehat{jf}(\vec{\eta})$ мы заменяем на её полином Тейлора $t_m(\widehat{jf})$. (Влавин мы по определению считаем лоренцевой обобщённой частицей). По определению функции $\mathrm{vin3}\,(\vec{l}, \vec{b})$ верно $\widehat{\mathrm{vin3}}\,(\vec{l}, \vec{\eta}) = \frac{1}{(\vec{\eta})^2 - \langle \vec{\eta}, \vec{l} \rangle^2}$. Поэтому, если $\widehat{jf}(\vec{\eta})$ — полином степени m, то согласно равенству (13.5.80) функция $uf(\vec{b})$ получается из функции $\mathrm{vin3}\,(\vec{l}, \vec{b})$ конечным числом дифференцирований по аргументу $\vec{b} \in \mathbf{R}^3$. Итак, определение поля влавина сводится к построению функции $\mathrm{vin3}\,(\vec{l}, \vec{b})$.

13.5.8 Ступени аппроксимации.

В § 1.1 и § 1.2 мы ввели функцию пространственных смещений элемента среды из опорного состояния, которую здесь обозначим через $\vec{v}(x)$. Мы ввели аксиому, что функция $\vec{v}(x)$ есть физическое смещение среды, если она достаточно гладкая и является экстремалью в смысле § 2.5 действия L идеальной среды. В § 2.2 мы провели замену Максвелла, то есть ввели 4-функцию u, так что $\vec{v} = Bu$, где B — оператор замены Максвелла. Мы ввели действие Лоренца N и базовый оператор A. При этом функция $u \in U$ не есть экстремаль действия Лоренца, то есть

$$Au = j, \tag{13.5.81}$$

где $j \neq 0$.

Для изучения решений линейного уравнения (13.5.81), мы провели разложение $j = j' + j''$ и соответственно $u = u' + u''$. Здесь уже 3-функции $\vec{v}' \equiv Bu'$, $\vec{v}'' \equiv Bu''$ не обязаны быть экстремалями действия идеальной среды, то есть не являются, вообще говоря, физическими состояниями, а есть лишь некоторые аппроксимации физических состояний. Но, однако, определено действие Лоренца $N(u')$, $N(u'')$. Здесь мы ввели первую ступень аппроксимации.

Далее при изучении решений уравнения (13.5.81) мы ввели влавины, получающиеся при замене функции jf на аппроксимирующую сумму Дирака $d_m(jf)$ — это вторая ступень аппроксимации, когда функция $\vec{v} = Bu$ уже становится обобщённой функцией и не определено действие Лоренца $N(u)$.

Переход от физических состояний к аппроксимациям их упрощает математическую задачу, а поскольку абсолютно точного действия, учитывающего все особенности реального мира, мы никогда не сможем ввести в модель, то ценность наших аппроксимаций оправдывается их объяснением простейших свойств динамики частиц.

§13.6 Вид функции $\mathrm{vin3}\,(\vec{l}, \vec{b})$

В этом и следующих параграфах наша цель — построение явного вида функций $\mathrm{vin3}\,(\vec{l}, \vec{b})$ и $\mathrm{vin2}\,(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{b})$, для которых согласно § 13.4 известна их трансформация Фурье по переменной $\vec{b}$. Таким образом, речь идет о вычислении обратной трансформации Фурье от функций $\widehat{\mathrm{vin3}}\,(\vec{l}, \vec{\eta})$ и $\widehat{\mathrm{vin2}}\,(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{\eta})$. Функции $\widehat{\mathrm{vin3}}\,(\vec{l}, \vec{\eta})$ и $\widehat{\mathrm{vin2}}\,(\vec{l}', \vec{l}'', \vec{\eta})$ по переменной $\vec{\eta}$ являются дробно-рациональными функциями 3 переменных η_1, η_2, η_3

специального вида. При вычислении оригинала Фурье, образом которого является такая функция, попытка применения интегральной формулы обратной трансформации Фурье встречает трудности двух типов. Во-первых, подинтегральная функция убывает в бесконечности как $O(\frac{1}{|\vec{\eta}|^2})$, то есть интеграл расходится в бесконечности. Эта трудность преодолевается рассмотрением интеграла в смысле главного значения (см. п. 13.6.1 настоящего параграфа). Вторая трудность заключается в обращении в нуль знаменателя подинтегральной функции на множестве, состоящем из одной точки в досветовом случае, из прямой – в световом случае и из конуса – в сверхсветовом случае. Для преодоления этой трудности следует вернуться к пониманию операции деления образа Фурье на многочлен как обратной к применению соответствующего дифференциального оператора в оригиналах. Кроме того, для преодоления второй трудности мы используем требования на убывание решения в бесконечности и свойства симметрии решения.

13.6.1 Вычисление обратной трансформации Фурье от рациональной функции специального вида. В этом пункте мы рассмотрим один прием для вычисления обратной трансформации Фурье от рациональной функции вида $\frac{P(\vec{\eta})}{Q(\vec{\eta})}$, где $P(\vec{\eta})$, $Q(\vec{\eta})$ — однородные полиномы от действительных переменных η_1, η_2, η_3 с комплексными коэффициентами. Предполагаем, что степень полинома $P(\vec{\eta})$ равна неотрицательному целому числу k, а степень полинома $Q(\vec{\eta})$ равна $k+2$. Предполагается, что многочлен $Q(\vec{\eta})$ обращается в нуль лишь при $\vec{\eta} = 0$.

В сформулированных условиях проведём вычисление следующего интеграла

$$I(\vec{b}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{P(\vec{\eta})}{Q(\vec{\eta})} e^{-i\langle\vec{\eta},\vec{b}\rangle}\, d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \tag{13.6.1}$$

в смысле главного значения при $|\vec{b}| \neq 0$. В сферических координатах интеграл (13.6.1) понимается как предел

$$I(\vec{b}) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{-R}^{R} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{P(\vec{\eta}(\theta,\varphi))}{Q(\vec{\eta}(\theta,\varphi))} e^{-ir\langle\vec{n}(\theta,\varphi),\vec{b}\rangle} \sin\theta\, d\varphi d\theta dr, \tag{13.6.2}$$

где

$$\vec{n}(\theta,\varphi) \equiv (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \tag{13.6.3}$$

единичный направляющий вектор.

Вычислим интеграл по r и получим

$$I(\vec{b}) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int\limits_{0}^{2\pi} \lim_{R\to\infty} \left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(R\langle\vec{n}(\theta,\varphi),\vec{b}\rangle)}{\langle\vec{n}(\theta,\varphi),\vec{b}\rangle} \frac{P(\vec{n}(\theta,\varphi))}{Q(\vec{n}(\theta,\varphi))} \sin\theta\, d\theta \right) d\varphi. \tag{13.6.4}$$

Интеграл (13.6.1) заменой переменных $\vec{\eta} = V\vec{\eta}'$, где $V \in SO(3)$ — матрица ортогонального поворота, сводится к интегралу вида

$$I'(\vec{b}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{P'(\vec{\eta}')}{Q'(\vec{\eta}')} e^{-i\langle\vec{\eta}',\vec{b}'\rangle}\, d\eta_1' d\eta_2' d\eta_3', \tag{13.6.5}$$

где полиномы $P'(\vec{\eta}') \equiv P(V\vec{\eta}')$, $Q'(\vec{\eta}') \equiv Q(V\vec{\eta}')$ удовлетворяют тем же ограничениям, а вектор $\vec{b}' = (0,0,|\vec{b}|)$, то есть $I(\vec{b}) = I'(\vec{b}')$. Поэтому далее без ограничения общности полагаем $\vec{b} = (0,0,b)$, $b > 0$ при вычислении интеграла (13.6.4).

В интеграле (13.6.4) во введённом предположении проводим замену переменных $\cos\theta = \xi$ и получаем

$$I(\vec{b}) = I(b) = \frac{2}{(2\pi)^3 b} \int_0^{2\pi} \left(\lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{\sin(R\xi)}{\xi} \frac{P(\vec{n}(\theta(\xi),\varphi))}{Q(\vec{n}(\theta(\xi),\varphi))}\, d\xi \right) d\varphi. \tag{13.6.6}$$

Функция

$$\vec{n}(\theta(\xi),\varphi) = \left(\sqrt{1-\xi^2}\cos\varphi, \sqrt{1-\xi^2}\sin\varphi, \xi \right)$$

аналитическая по ξ в окрестности нуля, поэтому по свойству сходимости ряда Фурье к значениям функции в точках её дифференцируемости (см. [31])

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{\sin(R\xi)}{\xi} \frac{P(\vec{n}(\theta(\xi),\varphi))}{Q(\vec{n}(\theta(\xi),\varphi))}\, d\xi = \frac{\pi}{2} \frac{P(\vec{n}(\varphi))}{Q(\vec{n}(\varphi))},$$

где $\vec{n}(\varphi) \equiv \vec{n}(\theta(0),\varphi)$ или

$$\vec{n}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0). \tag{13.6.7}$$

Мы получаем следующую формулу для интеграла $I(b)$

$$I(b) = \frac{\pi}{(2\pi)^3 b} \int_0^{2\pi} \frac{P(\vec{n}(\varphi))}{Q(\vec{n}(\varphi))}\, d\varphi. \tag{13.6.8}$$

Поскольку знаменатель этой формулы по условию не обращается в нуль, то интеграл (13.6.8) явно вычисляется с помощью теории функций комплексной переменной. В самом деле, интеграл (13.6.8) сводится к интегралу по единичной окружности γ заменой $z = \exp(i\psi)$

$$I(b) = \frac{\pi}{(2\pi)^3 b} \frac{1}{i} \int_\gamma \frac{P(\vec{n}(z))}{Q(\vec{n}(z))} \frac{dz}{z}, \tag{13.6.9}$$

где

$$\vec{n}(z) \equiv \left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), 0 \right). \tag{13.6.10}$$

Осталось заметить, что интеграл

$$\int_\gamma \frac{P(\vec{n}(z))}{Q(\vec{n}(z))} \frac{1}{z}\, dz \tag{13.6.11}$$

равен сумме вычетов подинтегральной функции $\frac{P(\vec{n}(z))}{Q(\vec{n}(z))}\frac{1}{z}$, по особым точкам, лежащим внутри единичной окружности, умноженной на $2\pi i$. Получаем следующий результат

$$I(b) = \frac{1}{4\pi b} \sum_{|z_k|<1} \operatorname{res} \left\{ \frac{P(\vec{n}(z))}{Q(\vec{n}(z))} \frac{1}{z}; z_k \right\}, \tag{13.6.12}$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам, лежащим внутри единичной окружности. При этом предполагается, что на единичной окружности особых точек нет.

13.6.2 С помощью линейной замены переменных сведем вычисление функции $\mathrm{vin3}\,(\vec{l},\vec{b})$ к трем простейшим частным случаям.

Введём вектор $\vec{\beta} \equiv (0,0,|\vec{l}|)$, число $\beta \equiv |\vec{l}|$ и матрицу $Q \in O(3)$, такую что

$$Q\vec{l} = \vec{\beta}. \tag{13.6.13}$$

Тогда по свойству (6.2.54) независимости функции $\mathrm{vin3}\,(\vec{l},\vec{b})$ от ортогональных поворотов

$$\mathrm{vin3}\,(\vec{l},\vec{b}) = \mathrm{vin3}\,(Q\vec{l},Q\vec{b}) = \mathrm{vin3}\,(\vec{\beta},Q\vec{b}). \tag{13.6.14}$$

Введём функцию 4 действительных переменных

$$\mathrm{vi3}\,(\beta,\vec{b}) \equiv \mathrm{vin3}\,(\vec{\beta},Q\vec{b}), \tag{13.6.15}$$

где $\vec{\beta} = (0,0,\beta)$, $\beta \geq 0$. В силу (13.6.14) в общем случае

$$\mathrm{vin3}\,(\vec{l},\vec{b}) = \mathrm{vi3}\,(|\vec{l}|,Q\vec{b}). \tag{13.6.16}$$

Таким образом, для вычисления функции $\mathrm{vin3}\,(\vec{l},\vec{b})$ при всех значениях аргументов $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$, $\vec{b} \in \mathbf{R}^3$ достаточно вычислить функцию $\mathrm{vi3}\,(\beta,\vec{b})$.

В силу определяющей формулы (13.6.15) функция $\mathrm{vi3}\,(\beta,\vec{b})$ задаётся своей трансформацией Фурье по переменной $\vec{b} \in \mathbf{R}^3$:

$$\widehat{\mathrm{vi3}}\,(\beta,\vec{\eta}) = \frac{1}{\vec{\eta}^2 - \beta^2\eta_3^2} \tag{13.6.17}$$

Линейной заменой по третьему аргументу в силу (13.6.17) вычисление функции $\mathrm{vi3}\,(\beta,\vec{\eta})$ при всех $\beta \geq 0$ можно свести к трем частным случаям $\beta = 0$, $\beta = 1$ и $\beta = \sqrt{2}$.

В случае $0 \leq \beta < 1$ введём невырожденную матрицу

$$S \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix}. \tag{13.6.18}$$

Справедливо равенство $\widehat{\mathrm{vi3}}\,(\beta,\vec{\eta}) = \widehat{\mathrm{vi3}}\,(0,S\vec{\eta})$ для образов Фурье, что влечет следующее равенство для оригиналов

$$\mathrm{vi3}\,(\beta,\vec{b}) = \frac{1}{|\det S|}\ \mathrm{vi3}\,(0,S^{-1}\vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ \mathrm{vi3}\,(0,S^{-1}\vec{b})) = \tag{13.6.19}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ \mathrm{vi3}\,\left(0,\left(b_1,b_2,\frac{b_3}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\right),\quad 0 \leq \beta < 1.$$

Трансформация Фурье функции $\mathrm{vi3}\,(0,\vec{b})$ равна

$$\widehat{\mathrm{vi3}}\,(0,\vec{\eta}) = \frac{1}{(\vec{\eta})^2}. \tag{13.6.20}$$

В случае $\beta = 1$ получаем

$$\widehat{\mathrm{vi3}}\,(1,\vec{\eta}) = \frac{1}{\eta_1^2+\eta_2^2} \tag{13.6.21}$$

В случае $\beta > 1$ введём невырожденную матрицу

$$D \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\beta^2 - 1} \end{pmatrix}. \tag{13.6.22}$$

Справедливо равенство

$$\widehat{\mathrm{vi3}}\,(\beta, \vec{\eta}) = \widehat{\mathrm{vi3}}\,(\sqrt{2}, D\vec{\eta})$$

для образов Фурье, эквивалентно следующему равенству для оригиналов

$$\mathrm{vi3}\,(\beta, \vec{\eta}) = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}}\ \mathrm{vi3}\,(\sqrt{2}, D^{-1}\vec{b}) = \tag{13.6.23}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}}\ \mathrm{vi3}\ \left(\sqrt{2}, \left(b_1, b_2, \frac{b_3}{\sqrt{\beta^2 - 1}}\right)\right),\ 1 < \beta < \infty.$$

Трансформация Фурье функции $\mathrm{vi3}\,(\sqrt{2}, \vec{b})$ равна

$$\widehat{\mathrm{vi3}}\,(\sqrt{2}, \vec{\eta}) = \frac{1}{\eta_1^2 + \eta_2^2 - \eta_3^2}. \tag{13.6.24}$$

Итак, наша задача свелась к построению оригиналов для обобщённых функций трёх переменных с образами Фурье (13.6.20, 13.6.21, 13.6.24).

13.6.3 Функция $\mathrm{vi3}\,(0, \vec{b})$**.** Вычисление оригинала для образа Фурье (13.6.20) проводится по рецепту пункта 13.6.1. Полагаем многочлен $P(\vec{\eta}) \equiv 1$, $Q(\vec{\eta}) \equiv (\vec{\eta})^2$. Выбираем матрицу ортогонального поворота $V \in SO(3)$, так, чтобы $\vec{b} = V\vec{b}'$, где $\vec{b}' = (0, 0, |\vec{b}|)$. Многочлены $P'(\vec{\eta}')$ и $Q'(\vec{\eta}')$ совпадают по виду с многочленами $P(\vec{\eta})$ и $Q(\vec{\eta})$, поэтому по формуле (13.6.12) получаем

$$\mathrm{vi3}\,(0, \vec{b}) = \frac{1}{4\pi|b|}\,\mathrm{res}\,\left\{\frac{1}{z}; 0\right\} = \frac{1}{4\pi|\vec{b}|}. \tag{13.6.25}$$

13.6.4 Условия симметрии и исчезновения на бесконечности однозначно определяют фундаментальное решение. Для построения функции $\mathrm{vi3}\,(\beta, \vec{b})$ по её образу Фурье (13.6.17) нам естественно обратиться к интерпретации функции $\mathrm{vi3}\,(\beta, \vec{b})$ как фундаментального решения линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\left(\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \Delta\right)\ \mathrm{vi3}\,(\beta, \vec{x}) = \delta(\vec{x}), \tag{13.6.26}$$

где $\delta(\vec{x})$ — трёхмерная δ-функция, β — числовой параметр, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ — трехмерный оператор Лапласа. Случаям $\beta = 0$, $\beta = 1$, $\beta = \sqrt{2}$ соответствуют задачи построения фундаментального решения для операторов: Лапласа, двумерного оператора Лапласа и оператора Даламбера.

Однако, фундаментальное решение не единственно — при прибавлении к нему обобщенного решения однородного уравнения мы снова получаем фундаментальное решение. Возникает вопрос: какими дополнительными ограничениями фиксировать фундаментальное единственное решение? Мы будем фиксировать фундаментальное решение двумя условиями: максимальной симметрией, то есть наибольшей подгруппой $\Gamma si(\,\mathrm{vi3}\,(\beta,\vec{x}))$ согласно § 4.5 ($n=3$) и условием убывания на бесконечности.

Вернемся с этой точки зрения ещё раз к случаю $\beta=0$. Образ Фурье обобщённой функции $\mathrm{vi3}\,(0,\vec{x})$ есть функция от квадратичной формы с единичной матрицей $E\in M(3)$. Поэтому согласно п. 4.7.2 и сама функция $\mathrm{vi3}\,(0,\vec{x})$ представима в виде

$$\mathrm{vi3}\,(0,\vec{x})=\psi(|\vec{x}|),$$

где $\psi(\alpha)$ – функция одного переменного. При $|\vec{x}|\neq 0$ должно выполняться условие на фундаментальное решение

$$\Delta\psi(|\vec{x}|)=0,$$

откуда $\psi(\alpha)=\frac{C_1}{\alpha}+C_2$, где $C_1,C_2\in\mathbf{R}$ — числовые константы. Из условия исчезновения в бесконечности $C_2=0$, а условие $-\Delta\,\mathrm{vi3}\,(0,\vec{x})=\delta(\vec{x})$ даёт $C_1=\frac{1}{4\pi}$. Итак, при $\beta=0$ условия симметрии и исчезновения на бесконечности однозначно определяют фундаментальное решение.

13.6.5 Функция $\mathrm{vi3}\,(1,\vec{b})$**.** В случае $\beta=1$ трансформация Фурье (13.6.21) представима в виде

$$\widehat{\mathrm{vi3}}\,(1,\vec{\eta})=\frac{1}{\eta_1^2+\eta_2^2}1(\eta_3),$$

поэтому

$$\mathrm{vi3}\,(1,(x_1,x_2,x_3))=\varphi(x_1,x_2)\delta(x_3).$$

То есть построение функции $\mathrm{vi3}\,(1,\vec{x})$ сводится к определению функции двух переменных $\varphi(x_1,x_2)$ по её образу Фурье

$$\hat{\varphi}(\vec{\eta})=\frac{1}{\eta_1^2+\eta_2^2}.$$

Из соображений симметрии п. 4.7.2 тогда сама обобщённая функция $\varphi(x_1,x_2)$ должна иметь вид

$$\varphi(x_1,x_2)=\mu\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right).$$

При $x_1^2+x_2^2>0$ должно выполняться условие на фундаментальное решение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\varphi(x_1,x_2)=0,$$

откуда $\mu(\alpha)=C_1\ln\alpha+C_2$, где $C_1,C_2\in\mathbf{R}$ — константы. Функция $C_1\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}+C_2$ исчезает в бесконечности лишь в тривиальном случае $C_1=0$, $C_2=0$. Таким образом, фундаментального решения, исчезающего в бесконечности, в данном случае не существует. Условие нормировки

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\varphi(x_1,x_2)=\delta_2(x_1,x_2),$$

где $\delta_2(x_1,x_2)$ — двумерная δ-функция, даёт $C_1=\frac{-1}{2\pi}$. Итак,

$$\mathrm{vi3}\,(1,\vec{x})=\left(-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}+C\right)\delta(x_3),$$

где $\delta(x_3)$ — одномерная δ-функция , $C\in\mathbf{R}$ — произвольная константа, которую мы всюду далее полагаем $C=0$.

Рассмотрение случая $\beta=\sqrt{2}$, как наиболее сложного, мы выделяем в отдельный параграф.

13.6.6 Независимость функций vin1 , vin2 , vin3 **от третьей компоненты скорости.** В случае скоростей, меньших единицы, $|\vec{\beta}| < 1$, при вычислении функций $\mathrm{vin1}\,(\vec{\beta}', \vec{\beta}'', \vec{b})$, $\mathrm{vin2}\,(\vec{\beta}', \vec{\beta}'', \vec{b})$, $\mathrm{vin3}\,(\vec{\beta}, \vec{b})$ по их образам Фурье применима формула (13.6.8). Поэтому, так как многочлены $P(\vec{n}(\varphi))$, $Q(\vec{n}(\varphi))$ зависят от векторов $\vec{\beta}'$, $\vec{\beta}''$, $\vec{\beta}$ лишь через скалярные произведения $\langle \vec{n}, \vec{\beta}' \rangle$, $\langle \vec{n}, \vec{\beta}'' \rangle$, $\langle \vec{n}, \vec{\beta} \rangle$, а третья компонента $n_3(\varphi) \equiv 0$ по формуле (13.6.7), то функции vin1 , vin2 , vin3 не зависят от третьих компонент векторов скорости $\vec{\beta}$, $\vec{\beta}''$, $\vec{\beta}$, а именно при $k = 1, 2$:

$$\mathrm{vink}\,((\beta_1', \beta_2', \beta_3'), (\beta_1'', \beta_2'', \beta_3''), \vec{b}) = \mathrm{vink}\,((\beta_1', \beta_2', 0), (\beta_1'', \beta_2'', 0), \vec{b}) \tag{13.6.27}$$

и

$$\mathrm{vin3}\,((\beta, \beta_2, \beta_3), \vec{b}) = \mathrm{vin3}\,((\beta_1, \beta_2, 0), \vec{b}). \tag{13.6.28}$$

Но это означает, что функции vin1 , vin2 , vin3 не зависят от составляющей скорости, параллельной вектору $\vec{b}$, а зависят лишь от их ортогональных составляющих

$$\vec{\beta}_{\perp} \equiv \vec{\beta} - \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{b} \rangle}{|\vec{b}|}. \tag{13.6.29}$$

Итак, при скоростях, меньших единицы, при $k = 1, 2$

$$\mathrm{vink}\,(\vec{\beta}', \vec{\beta}'', \vec{b}) = \mathrm{vink}\,(\vec{\beta}_{\perp}', \vec{\beta}_{\perp}'', \vec{b}) \tag{13.6.30}$$

и

$$\mathrm{vin3}\,(\vec{\beta}, \vec{b}) = \mathrm{vin3}\,(\vec{\beta}_{\perp}, \vec{b}). \tag{13.6.31}$$

§13.7 Лоренц-симметричное фундаментальное решение уравнения Даламбера

В этом параграфе наша задача — построить функцию $\mathrm{vi3}\left(\sqrt{2}, \vec{x}\right)$, которую мы интерпретируем через фундаментальное решение волнового оператора. Для удобства связи с предшествующими построениями переобозначим переменную x_3 в x_0 и введём функцию $\varphi(x_0, x_1, x_2) \equiv \mathrm{vi3}\left(\sqrt{2}, (x_1, x_2, x_0)\right)$. Согласно формуле (6.4.27) обобщённая функция $\varphi(x) \in S'(\mathbf{R}^3)$, $x \equiv (x_0, x_1, x_2)$ понимается как фундаментальное решение волнового оператора

$$\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \tag{13.7.1}$$

и имеет образ Фурье

$$\hat{\varphi}(\eta) = \frac{-1}{\eta_0^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}, \quad \eta \equiv (\eta_0, \eta_1 \eta_2). \tag{13.7.2}$$

Функция $\hat{\varphi}(\eta)$ согласно лемме 4.5.3 имеет сохраняющееся множество $\Gamma si(\hat{\varphi}) = \Gamma m^{\top}(\Theta)$, где матрица $\Theta \in M(3)$ равна

$$\Theta \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{13.7.3}$$

Если бы функция $\varphi(x)$ была регулярной и трансформация Фурье понималась не в обобщённом смысле, то функция $\varphi(x)$ имела бы то же самое сохраняющиеся множество $\Gamma si(\varphi) = \Gamma si(\hat{\varphi}) = \Gamma m^{\top}(\Theta) = \Gamma m(\Theta)$ и по лемме 4.5.3 была бы функцией квадратичной формы $\langle x, \Theta x\rangle$ всюду, кроме точки $x = 0$. Однако, поскольку трансформация Фурье в формуле (13.7.2) понимается в обобщённом смысле и непосредственное обращение формулы (13.7.2) встречает трудности в силу обращения в нуль функции $\hat{\varphi}(\eta)$ на конусе $\eta_1^2 - (\eta_1^2 + \eta_2^2) = 0$ мы будем здесь понимать $\varphi(x)$ как фундаментальное решение оператора Даламбера (13.7.1), удовлетворяющее условиям симметрии. Причём сначала построим фундаментальное решение, обладающее меньшей сохраняющей группой, чем $\Gamma m^{\top}(\Theta)$, а именно, удовлетворяющее условию

$$\Gamma si(\varphi) \supset \Gamma me(\Theta), \tag{13.7.4}$$

где $\Gamma me(\Theta) \subset \Gamma m(\Theta)$ — связная компонента единицы группы $\Gamma m(\Theta)$. Здесь $\Gamma m(\Theta) = O(1,2)$, $\Gamma me(\Theta) = SO(1,2)$ — псевдоортогональная группа и её связная компонента единицы.

13.7.1 Разбиение пространства $\mathbf{R}^3$ на 10 непересекающихся множеств $X_1, X_2, \ldots X_{10}$. Вид функции φ_1. В этом пункте предполагаем, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию симметрии (13.7.4). Лемма 4.5.4 описывает тогда функцию $\varphi(x) \in F(\mathbf{R}^3)$, указывая её явный вид на каждом из 10 непересекающихся множеств $X_1, X_2, \ldots X_{10}$ в объединении дающих всё пространство $\mathbf{R}^3$. Множества $X_1, X_2, \ldots X_{10}$ в данном случае имеют вид

$$X_1 = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x_0 > \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\}, \tag{13.7.5}$$

$$X_2 = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; -x_0 > \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\}, \tag{13.7.6}$$

$$X_3 = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x_0^2 < x_1^2 + x_2^2 \right\}, \tag{13.7.7}$$

$$X_4 = X_6 = X_9 = X_{10} = \emptyset, \tag{13.7.8}$$

$$X_5 = \{0\}, \tag{13.7.9}$$

$$X_7 = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x_0 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\} \setminus X_5, \tag{13.7.10}$$

$$X_8 = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x_0 = -\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\} \setminus X_5. \tag{13.7.11}$$

Предположим, что функция $\varphi(x)$ регулярна в областях X_1, X_2, X_3, тогда в этих областях она будет по лемме 4.5.4 функцией от квадратичной формы $\langle x, \Theta x\rangle$. Пусть в области X_1 функция $\varphi(x)$ имеет представление

$$\varphi(x) = \psi(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2), \tag{13.7.12}$$

где $\psi(\alpha)$ — числовая функция одного переменного. В области X_1 должно выполняться условие

$$\Box\varphi(x) = 0,$$

Откуда получаем следующее уравнение для функции $\psi(\alpha)$:

$$6\psi'(\alpha) + 4\alpha\psi''(\alpha) = 0. \tag{13.7.13}$$

Его общее решение

$$\psi(\alpha) = C_1 \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + C_2, \tag{13.7.14}$$

где $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ —производные константы.

Для вычисления действия оператора Даламбера на обобщённую функцию $\varphi \in D'(\mathbf{R}^3)$ мы будем пользоваться равенством

$$\langle \Box\varphi, f \rangle = \langle \varphi, \Box f \rangle, \tag{13.7.15}$$

где $f(x) \in D(\mathbf{R}^3)$ произвольная основная функция, вытекающим из определения обобщённой производной. Мы будем также использовать тождество

$$g\Box f - f\Box g = \theta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(g \frac{\partial f}{\partial x_\beta} \right) - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial g}{\partial x_\alpha} \right) \right). \tag{13.7.16}$$

Введём две регулярные обобщённые функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$, равные нулю вне области X_1 заданные формулами

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \tag{13.7.17}$$

$$\varphi_1(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - x_1^2 - x_3^2}}, \tag{13.7.18}$$

и вычислим действие оператора Даламбера на них.

Согласно формуле (13.7.15)

$$\langle \Box\varphi_0, f \rangle = \langle \varphi_0, \Box f \rangle = \iiint\limits_{X_1} \varphi_0(x)\Box f(x)\, dx_1 dx_2 dx_0. \tag{13.7.19}$$

применим формулу (13.7.16) с $g(x) = \varphi_0(x)$ и формулу Остроградского, получим

$$\iiint\limits_{X_1} \varphi_0(x)\Box f(x)\, dx_1 dx_2 dx_0 = \iint\limits_{X_7} \Theta \frac{\partial f}{\partial x_\beta} d\sigma, \tag{13.7.20}$$

где

$$\vec{n} \equiv (n_1, n_2, n_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos\varphi, \sin\varphi, -1) \tag{13.7.21}$$

единичная внешняя нормаль к поверхности конуса. Преобразуя последний поверхностный интеграл, получаем

$$\langle \Box\varphi_0, f \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iint\limits_{X_7} \left(\cos\varphi \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sin\varphi \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_0} \right) d\sigma. \tag{13.7.22}$$

Введём линейный оператор

$$S:\ D(\mathbf{R}^3) \to D(\bar{\mathbf{R}}_+),$$

переводящий основную функцию $f \in D(\mathbf{R}^3)$ в основную функцию одного переменного на $\bar{\mathbf{R}}_+ \equiv [0, \infty[$ по правилу

$$(Sf)(\rho) \equiv \int\limits_0^{2\pi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, \rho) d\varphi. \tag{13.7.23}$$

Тогда формула (13.7.21) приводится к виду

$$\langle \Box\varphi_0, f\rangle = -\int\limits_0^\infty \rho \frac{\partial}{\partial\rho}\left((Sf)(\rho)\right)\, d\rho = \int\limits_0^\infty (Sf)(\rho) d\rho = \int\limits_0^\infty d\rho \int\limits_0^{2\pi} f\left(x(\rho,\varphi)\right) d\varphi. \qquad (13.7.24)$$

Итак, обобщённая функция $\Box\varphi_0$ имеет носитель на конусе $\bar{X}_7$ и действует по формулам (13.7.23, 13.7.24).

Перейдем к вычислению обобщённой функции $\Box\varphi_1$. Поскольку ядро обобщённой функции $\varphi_1(x)$ имеет особенности на конусе X_7, то интеграл по области X_1 нам следует понимать как несобственный и проводить предельный переход при интегрировании по подобласти $X_{1\varepsilon} \equiv \left\{x \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq \varepsilon^2\right\} \subset X_1$. Полагаем в равенстве (13.7.16) $g(x) = \varphi_1(x)$ и интегрируем равенство (13.7.16) по области $X_{1\varepsilon}$, получаем

$$\iiint\limits_{X_{1\varepsilon}} \varphi_1(x)\Box f(x)\, dx_1 dx_2 dx_0 = \iint\limits_{\Gamma_{1\varepsilon}} \left(\left\langle \vec{n}, \Theta\frac{\partial f}{\partial x}\right\rangle \varphi_1 - f\left\langle \vec{n}, \Theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle\right) d\sigma. \qquad (13.7.25)$$

Здесь $\Gamma_{1\varepsilon} \equiv \left\{x \in \mathbf{R}_3 \;\middle|\; x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = \varepsilon^2\right\}$ — граница области $X_{1\varepsilon}$ и интеграл справа понимается как поверхностный. Так как функция $\varphi_1(x)$ зависит лишь от квадратичной формы $\langle x, \Theta x\rangle$, то её градиент $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x)$ ортогонален поверхности $\Gamma_{1\varepsilon}$ в точке $x \in \Gamma_{1\varepsilon}$ и равен

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x) = \frac{1}{(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{\frac{3}{2}}}(-x_0, +x_1, +x_2). \qquad (13.7.26)$$

А единичная нормаль

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + x_1 + x_2}}(-x_0, +x_1, x_2). \qquad (13.7.27)$$

Подставим (13.7.26, 13.7.27) в (13.7.25) и получим

$$\iiint\limits_{X_{1\varepsilon}} \varphi_1(x)\Box f(x)\, dx_1 dx_2 dx_0 = -\frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{\Gamma_{1\varepsilon}} \left\langle \frac{\vec{r}}{r}, \frac{\partial f}{\partial x}\right\rangle - \frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{\Gamma_{1\varepsilon}} \frac{f}{r}\, d\sigma = \qquad (13.7.28)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{\Gamma_{1\varepsilon}} \frac{f + \left\langle \vec{r}, \frac{\partial f}{\partial x}\right\rangle}{r}\, d\sigma = -\frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{\Gamma_{1\varepsilon}} \left(\frac{f}{r} + \frac{\partial f}{\partial r}\right) d\sigma,$$

где $\vec{r} = \vec{x},\ r = |\vec{r}|$.

Для вычисления поверхностного интеграла (13.7.28) параметризуем поверхность $\Gamma_{1\varepsilon}$ параметрами сферической системы координат r — длина радиуса-вектора и φ — азимут,

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}, \\ x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}\cos\varphi, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}\sin\varphi, \end{cases} \qquad (13.7.29)$$

где $r \in [\varepsilon, \infty[$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. В параметризации (13.7.29) получаем

$$-\frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{\Gamma_{1\varepsilon}} \left(\frac{f}{r} + \frac{\partial f}{\partial r}\right) d\sigma = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\varepsilon^\infty \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{f}{r} + \frac{\partial f}{\partial r}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}} dr d\varphi = \qquad (13.7.30)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{\varepsilon}\left[\int\limits_\varepsilon^\infty \frac{rf}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}dr+\int\limits_\varepsilon^\infty \frac{r^2}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}\frac{\partial f}{\partial r}dr\right]d\varphi.$$

Преобразуем последний интеграл интегрированием по частям и получаем

$$-\frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{\Gamma_{1\varepsilon}}\left(\frac{f}{r}+\frac{\partial f}{\partial r}\right)d\sigma=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} f\Big|_{r=\varepsilon}d\varphi+\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\varepsilon^\infty \frac{r}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}\left(\frac{\varepsilon^2}{r^2+\varepsilon^2}\right)f\,drd\varphi. \quad (13.7.31)$$

Вычислим пределы при $\varepsilon\to 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} f\left(x(\varepsilon,\theta,\varphi)\right)\,d\varphi=\pi f(0), \quad (13.7.32)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\varepsilon^\infty \frac{r}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}\frac{\varepsilon^2}{r^2+\varepsilon^2}f(r,\theta,\varphi)\,dr=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_1^\infty \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\frac{1}{t^2+1}f(\varepsilon t,\theta,\varphi)\,dt= \quad (13.7.33)$$

$$f(0)\int\limits_1^\infty \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\frac{1}{t^2+1}dt=f(0)\frac{1}{2}\int\limits_2^\infty \frac{dz}{z^{\frac{3}{2}}}=f(0)\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Получаем следующее значение функционала $\Box\varphi_1$ на основной функции $f(x)$:

$$\langle\Box\varphi_1,f\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{\Gamma_{1\varepsilon}}\left(\frac{f}{r}+\frac{\partial f}{\partial r}\right)d\sigma\right)=2\pi f(0),$$

т.е.

$$\Box\varphi_1=2\pi\delta(x), \quad (13.7.34)$$

где $\delta(x)$ — трёхмерная δ-функция. Таким образом функция

$$\varphi(x)\equiv\frac{1}{2\pi}\varphi_1(x) \quad (13.7.35)$$

фундаментальное решение для оператора Даламбера, такое что $\Gamma si(\varphi)\supset\Gamma me(\Theta)$.

13.7.2 Обобщённая функция $\varphi_7(x)$, носитель который — поверхность конуса X_1. Рассмотрим теперь обобщённую функцию $\varphi_7(x)$, носитель который — поверхность конуса X_1, т.е. множество X_7. Будем искать её в виде поверхностного интеграла по поверхности X_7, т.е. полагаем

$$\langle\varphi_7,f\rangle=\iint\limits_{X_7}\varphi_7(x)f(x)d\sigma. \quad (13.7.36)$$

В сферических координатах параметризуем поверхность конуса параметрами (r,φ) и получаем двойной интеграл

$$\langle\varphi_7,f\rangle=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\varphi_7\left(x\left(r,\frac{\pi}{4},\varphi\right)\right)f\left(x\left(r,\frac{\pi}{4},\varphi\right)\right)\frac{r}{\sqrt{2}}\,drd\varphi, \quad (13.7.37)$$

где $(r,\frac{\pi}{4},\varphi)$ — сферические координаты точки на поверхности конуса. Введём функцию

$$k(r,\varphi)\equiv\frac{r}{\sqrt{2}}\varphi_7\left(x\left(r,\frac{\pi}{4},\varphi\right)\right),$$

тогда из (13.7.37) получаем

$$\langle \varphi_7, f \rangle = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} k(r,\varphi) f\left(x\left(r, \frac{\pi}{4}, \varphi\right)\right) drd\varphi. \qquad (13.7.38)$$

Потребуем, чтобы обобщённая функция φ_7 обладала сохраняющей группой $\Gamma me(\Theta)$, т.е.

$$\forall G \in \Gamma me(\Theta) \;\Big|\; \langle \varphi_7, Ts_G f \rangle \,. \qquad (13.7.39)$$

Выберем в качестве матрицы $G \in \Gamma me(\Theta)$ матрицу ортогонального поворота вокруг оси x_0, тогда действие оператора Ts_G на функцию $f(x)$ приводит к замене в сферических координатах азимута φ на $\varphi + \varphi_0$, где $\varphi_0 \in \mathbf{R}$ — произвольная константа.

Итак, из условия (13.7.39) следует

$$\forall \varphi_0 \in \mathbf{R} \;\Big|\; \int_0^\infty \int_0^{2\pi} k(r,\varphi) f\left(x\left(r, \frac{\pi}{4}, \varphi\right)\right) drd\varphi = \qquad (13.7.40)$$

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} k(r,\varphi) f\left(x(r, \frac{\pi}{4}, \varphi + \varphi_0)\right) drd\varphi = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} k(r,\varphi - \varphi_0) f\left(x\left(r, \frac{\pi}{4}, \varphi\right)\right) drd\varphi.$$

Так как (13.7.40) должно быть верно для любой основной функции $f(x)$ из (13.7.40) следует, что функция $k(r,\varphi)$ не зависит от аргумента φ, т.е. $k(r,\varphi) = k(r)$ и

$$\langle \varphi_7, f \rangle = \int_0^\infty k(r) \left(\int_0^{2\pi} f\left(x\left(r, \frac{\pi}{4}, \varphi\right)\right) d\varphi \right) dr. \qquad (13.7.41)$$

Далее рассмотрим 2 однопараметрические группы матриц $G_i(\alpha) \equiv \exp(\alpha\Gamma_i) \in \Gamma me(\Theta)$, где $i = 1, 2$

$$\Gamma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \Gamma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (13.7.42)$$

Тогда в силу условия (13.7.39), дифференцируя по α при $\alpha = 0$, получаем два условия

$$\int_0^\infty k(r) \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Gamma_i x \right) \Big|_{x = x(r, \frac{\pi}{4}, \varphi)} d\varphi \right) dr = 0, \; i = 1, 2,$$

т.е.

$$\int_0^\infty k(r) \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1} x_0 \right) \Big|_{x = x(r, \frac{\pi}{4}, \varphi)} d\varphi \right) dr = 0, \qquad (13.7.43)$$

$$\int_0^\infty k(r) \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_0 \right) \Big|_{x = x\left(r, \frac{\pi}{4}, \varphi\right)} d\varphi \right) dr = 0, \qquad (13.7.44)$$

В сферических координатах

$$\begin{cases} x_0 = r\cos\theta, \\ x_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \\ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi \end{cases} \qquad (13.7.45)$$

и матрица частных производных равна ($\xi = (r, \theta, \varphi)$):

$$\left\| \frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_\beta} \right\| = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{13.7.46}$$

и обратная матрица

$$\left\| \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_\alpha} \right\| = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi \\ 0 & -\frac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi & \frac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{13.7.47}$$

Поэтому в сферических координатах

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{1}{r}\sin\theta, \tag{13.7.48}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi, \tag{13.7.49}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi. \tag{13.7.50}$$

Полагаем $\theta = \frac{\pi}{4}$ и подставляем (13.7.45, 13.7.48, 13.7.49, 13.7.50) в (13.7.43, 13.7.44) получаем

$$\int_0^\infty k(r) \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \right) r\cos\varphi + \frac{1}{2} r \left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{1}{r}\cos\varphi \right.\right. \tag{13.7.51}$$

$$\left.\left. -2\frac{\partial f}{\partial \varphi}\sin\varphi \right) \right] \Big|_{x = x(r, \frac{\pi}{4}, \varphi)} d\varphi dr = 0,$$

$$\int_0^\infty k(r) \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \right) r\sin\varphi + \frac{1}{2} r \left(\frac{\partial f}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{1}{r}\sin\varphi \right.\right. \tag{13.7.52}$$

$$\left.\left. +2\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r} \right) \right] d\varphi dr = 0.$$

После упрощения (13.7.51, 13.7.52) приводим к виду:

$$\int_0^\infty k(r) \int_0^{2\pi} \left[(r\cos\varphi)\frac{\partial f}{\partial r} - \sin\varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right] \Big|_{x = x(r, \frac{\pi}{4}, \varphi)} d\varphi dr = 0, \tag{13.7.53}$$

$$\int_0^\infty k(r) \int_0^{2\pi} \left[(r\sin\varphi)\frac{\partial f}{\partial r} + \cos\varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right] \Big|_{x = x(r, \frac{\pi}{4}, \varphi)} d\varphi dr = 0. \tag{13.7.54}$$

Соотношения (13.7.53, 13.7.54) должны выполняться для любой функции $f(x) \in D(\mathbf{R}^3)$. Полагая, в частности, $f(x\left(r, \frac{\pi}{4}, \varphi\right)) = g(r)\cos\varphi$, где функция $g \in D(\bar{\mathbf{R}}_+)$, получаем условие:

$$\int_0^\infty k(r) \left(r\frac{\partial g}{\partial r} + g \right) dr = 0, \tag{13.7.55}$$

или после интегрирования по частям

$$\int_0^\infty \left(gk - g\frac{d}{dr}(rk) \right) dr = \int_0^\infty rk'(r)g(r)dr = 0. \qquad (13.7.56)$$

Откуда в силу произвольности основной функции $g(r)$ вытекает $k(r) = Const$.

Итак, из условия симметрии мы определили вид обобщённой функции $\varphi_7(x)$ с точностью до умножения на константу. Положим далее $k \equiv 1$ и вычислим действие параметра Даламбера на обобщённую функцию $\varphi_7(x)$.

Найдем сначала вид оператора Даламбера в сферических координатах:

$$\Box f = \theta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \theta_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_\gamma}\frac{\partial \xi_\gamma}{\partial x_\beta}\right) = \qquad (13.7.57)$$

$$\theta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_\gamma \partial \xi_\nu}\frac{\partial \xi_\gamma}{\partial x_\beta}\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\alpha} + \theta_{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial \xi_\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_\nu}\left(\frac{\xi_\gamma}{\partial x_\beta}\right)\right)\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\alpha}.$$

Используя формулы (13.7.47), вычислим величины

$$a_{\gamma\nu}(\xi) \equiv \theta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi_\gamma}{\partial x_\beta}\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\alpha}, \qquad (13.7.58)$$

$$b_\gamma(\xi) \equiv \theta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial \xi \nu}\left(\frac{\partial \xi_\gamma}{\partial x_\beta}\right). \qquad (13.7.59)$$

Получаем для коэффициентов $a_{\gamma\nu}(\xi)$:

$$a_{11}(\xi) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta, \qquad (13.7.60)$$

$$a_{22}(\xi) = \left(\frac{1}{r}\right)^2\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right) = -\frac{1}{r^2}\cos 2\theta, \qquad (13.7.61)$$

$$a_{33}(\xi) = \frac{-1}{(r\sin\theta)^2}, \qquad (13.7.62)$$

$$a_{12}(\xi) = -\frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta = -\frac{\sin 2\theta}{r}, \qquad (13.7.63)$$

$$a_{13}(\xi) = 0, \qquad (13.7.64)$$

$$a_{23}(\xi) = 0. \qquad (13.7.65)$$

Для коэффициентов $b_\gamma(\xi)$ получаем:

$$b_1(\xi) = \theta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial \xi_\nu}\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_\beta}\right) = \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial \xi_\nu}\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_0}\right) - \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial \xi_\nu}\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial \xi_\nu}\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right) = \qquad (13.7.66)$$

$$+\frac{1}{r}\sin\theta\sin\theta - \left(\frac{1}{r}\cos^2\theta\cos^2\varphi + \frac{\sin\theta}{r\sin\theta}\sin^2\varphi\right) - \left(\frac{1}{r}\cos^2\theta\sin^2\varphi + \frac{1}{r}\cos^2\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\cos^2\varphi - \sin^2\varphi - \cos^2\theta\sin^2\varphi - cos^2\varphi\right) = -\frac{2}{r}\cos^2\theta,$$

$$b_2(\xi) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_\nu}\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_0}\right)\right)\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_0} - \left(\frac{\partial}{\partial \xi_\nu}\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\right)\right)\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial}{\partial \xi_\nu}\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right)\right)\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_2} = \qquad (13.7.67)$$

$$\left(\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta+\left(\frac{1}{r}\right)^2\cos\theta\sin\theta\right)-$$

$$\left(-\frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi-\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi+\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin^2\varphi\right)-$$

$$\left(-\frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi-\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi+\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos^2\varphi\right)=$$

$$\frac{1}{r^2}\left(2\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin^2\varphi+2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos^2\varphi\right)=$$

$$\frac{1}{r^2}\left(2\sin 2\theta-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right),$$

$$b_3(\xi)=\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\left(\frac{\partial\xi_3}{\partial x_0}\right)\right)\frac{\partial\xi_\nu}{\partial x_0}-\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\left(\frac{\partial\xi_3}{\partial x_1}\right)\right)\frac{\partial\xi_\nu}{\partial x_1}-\left(\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\left(\frac{\partial\xi_3}{\partial x_2}\right)\right)\frac{\partial\xi_\nu}{\partial x_2}= \qquad (13.7.68)$$

$$-\left(\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\sin\varphi\cos\varphi\right)-$$

$$\left(-\frac{1}{r^2\sin\theta}\cos\varphi\sin\varphi\sin\theta-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cos\varphi\sin\varphi\right)=$$

$$-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi+\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi\cos\varphi-\right.$$

$$\left.\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi-\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi\cos\varphi\right)=0.$$

Формулы (13.7.57–13.7.68) приводят к следующему выражению для оператора Даламбера в сферических координатах:

$$\Box f=\cos 2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\cos 2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}-\frac{2\sin 2\theta}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta} \qquad (13.7.69)$$

$$-\frac{2}{r}\cos^2\theta\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(2\sin 2\theta-\operatorname{ctg}\theta\right)\frac{\partial f}{\partial\theta}.$$

На рассматриваемом множестве X_7 имеем $\theta=\frac{\pi}{4}$ и оператор Даламбера на множестве X_7 равен

$$\Box f=-\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}. \qquad (13.7.70)$$

Вычислим теперь действие обобщённой функции $\Box\varphi_7(x)$ на основную функцию $f(x)$ по формуле (13.7.38)

$$\langle\Box\varphi_7,f\rangle=\langle\varphi_7,\Box f\rangle=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\Box f\left(x\left(r,\frac{\pi}{4},\varphi\right)\right)drd\varphi= \qquad (13.7.71)$$

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\left(-\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)dr\,d\varphi=$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^\infty\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{2}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)dr\right)d\varphi.$$

Выберем такую основную функцию $f(x)$, что $f\left(x\left(r, \frac{\pi}{4}, \varphi\right)\right) = g(r)$, где $g(r)$ бесконечно-дифференцируемая финитная функция, равная нулю вне интервала $]a, b[\subset \mathbf{R}_+$, где она положительна. В этом случае

$$\langle \Box\varphi_7, f\rangle = -2\pi \int\limits_0^\infty \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} dr = -2\pi \int\limits_0^\infty \frac{1}{r^2} f(r) dr = -\frac{2\pi}{b^2}\int\limits_a^b g(r) dr < 0. \tag{13.7.72}$$

Откуда следует, что носитель обобщённой функции $\Box\varphi_7$ не является точкой 0, а $\operatorname{supp}(\Box\varphi_7) = \bar{X}_7$. Итак, обобщённая функция φ_7 не является фундаментальным решением оператора Даламбера.

13.7.3 В области X_3

Введём две регулярные обобщённые функции

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \tag{13.7.73}$$

$$\varphi_1(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_0^2}} \tag{13.7.74}$$

и вычислим действие оператора Даламбера на них. Здесь мы применим метод, отличный от п. 13.7.1 основанный на выражении оператора Даламбера в сферических координатах – формула (13.7.69).

Вычисляем действие оператора Даламбера на функцию $\varphi_0(x)$:

$$\langle \Box\varphi_0, f\rangle = \langle \varphi_0, \Box f\rangle = \iiint\limits_{X_3} \Box f\, dx_1 dx_2 dx_0 = \tag{13.7.75}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^\infty dr \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[r^2\cos(2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \cos(2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} - 2\sin(2\theta) r\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta} \right.$$

$$\left. -2\cos^2(\theta) r\frac{\partial f}{\partial r} + (2\sin 2\theta - \operatorname{ctg}\theta)\frac{\partial f}{\partial\theta}\right]\sin\theta dr.$$

Проведём преобразования однократных интегралов

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} d\varphi = \left.\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0, \tag{13.7.76}$$

$$\int\limits_0^\infty r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} dr = \left. r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right|_0^\infty - \int\limits_0^\infty 2r\frac{\partial f}{\partial r} dr = \tag{13.7.77}$$

$$-2rf\Big|_0^\infty + 2\int\limits_0^\infty f dr = 2\int\limits_0^\infty f dr,$$

$$\int\limits_0^\infty r\frac{\partial f}{\partial r} dr = rf\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty f dr = -\int\limits_0^\infty f dr, \tag{13.7.78}$$

$$\int\limits_0^\infty r\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial r} dr = \left. r\frac{\partial f}{\partial\theta}\right|_{r=0}^{r=\infty} - \int\limits_0^\infty \frac{\partial f}{\partial\theta} dr = -\int\limits_0^\infty \frac{\partial f}{\partial\theta} dr, \tag{13.7.79}$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos(2\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}d\theta = \cos(2\theta)\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial\theta}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos(2\theta)\sin(\theta)\right)d\theta = \tag{13.7.80}$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\partial f}{\partial\theta}\left(2\sin 2\theta\sin\theta - \cos(2\theta)\cos(\theta)\right)d\theta.$$

Используя равенства (13.7.76–13.7.80), преобразуем интеграл (13.7.75):

$$\iiint\limits_{X_3} \Box f\, dx_1dx_2dx_0 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} dr \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \Bigg[\left(2\cos(2\theta)\sin(\theta)\right) f - \tag{13.7.81}$$

$$\left(2\sin(2\theta)\sin(\theta) - \cos(2\theta)\cos(\theta)\right)\frac{\partial f}{\partial\theta} + 2\sin(2\theta)\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial\theta} +$$

$$2\cos^2(\theta)\sin(\theta)f + \left(2\sin(2\theta)\sin(\theta) - \cos(\theta)\right)\frac{\partial f}{\partial\theta}\Bigg] d\theta =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} dr \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[(1 + 3\cos(2\theta))\sin(\theta)f + \left(2\sin(2\theta)\sin(\theta) - \cos(\theta) + \cos(2\theta)\cos(\theta)\right)\frac{\partial f}{\partial\theta}\right] d\theta.$$

Используем следующие тригонометрические равенства

$$1 + 3\cos 2\theta = 1 + 3(1 - 2\sin^2\theta) = 4 - 6\sin^2\theta, \tag{13.7.82}$$

$$2\sin 2\theta\sin\theta - \cos\theta + \cos 2\theta\cos\theta = \cos\theta - \cos 3\theta - \cos\theta + \frac{1}{2}(\cos\theta + \cos 3\theta) = \tag{13.7.83}$$

$$\frac{1}{2}(\cos\theta - \cos 3\theta),$$

$$\frac{d}{d\theta}\frac{1}{2}(\cos\theta - \cos 3\theta) = \frac{1}{2}(3\sin 3\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}\Big(3(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) - \sin\theta\Big) = \tag{13.7.84}$$

$$\sin\theta(4 - 6\sin^2\theta)$$

для преобразования интеграла (13.7.81) интегрированием по частям, получим

$$\iiint\limits_{X_3} \Box f\, dx_1dx_2dx_3 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \left[f(r,\theta,\varphi)\frac{1}{2}(\cos\theta - \cos 3\theta)\right]\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} dr,$$

т.е.

$$\iiint\limits_{X_3} \Box f\, dx_1dx_2dx_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} f(r,\frac{\pi}{4},\varphi)\,drd\varphi + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} f(r,\frac{3\pi}{4},\varphi)\,drd\varphi\right). \tag{13.7.85}$$

Интегралы в правой части (13.7.85) могут быть записаны как поверхностные интегралы первого рода

$$\iiint\limits_{X_3} \Box f\, dx_1dx_2dx_0 = -\iint\limits_{X_7\cup X_8} \frac{f(x)}{|x|}d\sigma. \tag{13.7.86}$$

Итак, мы вычислили обобщённую функцию $\Box\varphi_0$ — её действие на основную функцию $f \in D(\mathbf{R}^3)$ есть:

$$\langle \Box\varphi_0, f\rangle = -\iint\limits_{X_7 \cup X_8} \frac{f(x)}{|x|} d\sigma, \tag{13.7.87}$$

т.е. носитель обобщённой функции $\Box\varphi_0$ — множество $X_7 \cup X_8 \cup X_5$ — поверхность светового конуса $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$.

Проведём аналогичные вычисления для обобщённой функции $\varphi_1(x)$:

$$\langle \Box\varphi_1, f\rangle = \langle \varphi_1, \Box f\rangle = \tag{13.7.88}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} dr \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{-\cos 2\theta}} \left[r\cos 2\theta\ \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \cos 2\theta \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} - 2\sin 2\theta \times \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} - 2\cos^2\theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(2\sin 2\theta - \operatorname{ctg}\theta\right)\frac{\partial f}{\partial \theta}\right] \sin\theta d\theta.$$

Преобразуем однократные интегралы, входящие в последнее выражение

$$\int\limits_0^{\infty} r\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} dr = r\frac{\partial f}{\partial r}\Big|_0^{\infty} - \int\limits_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial r} dr = f(0), \tag{13.7.89}$$

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial r} dr = -f(0), \tag{13.7.90}$$

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} dr = \frac{\partial f}{\partial \theta}\Big|_0^{\infty} = 0, \tag{13.7.91}$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{-\cos 2\theta}\sin\theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} d\theta = \sqrt{-\cos 2\theta}\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sqrt{-\cos 2\theta}\sin\theta\right) d\theta =$$

$$-\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\cos\theta\sqrt{-\cos 2\theta} + \frac{\sin 2\theta \sin\theta}{\sqrt{-\cos 2\theta}}\right)\frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos 3\theta}{\sqrt{-\cos 2\theta}}\frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta. \tag{13.7.92}$$

Подставляем интегралы (13.7.89–13.7.92) и (13.7.76) в выражение (13.7.88):

$$\langle \Box\varphi_1, f\rangle = f(0)2\pi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} -\sqrt{-\cos 2\theta}\sin\theta d\theta + \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} dr \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos 3\theta}{\sqrt{-\cos 2\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \tag{13.7.93}$$

$$f(0)2\pi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{2\cos^2\theta\sin\theta}{\sqrt{-\cos 2\theta}} d\theta + \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} dr \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{2\sin 2\theta\sin\theta - \cos\theta}{\sqrt{-\cos 2\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta =$$

$$f(0)2\pi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{(\cos 2\theta + 2\cos^2\theta)}{\sqrt{-\cos 2\theta}} \sin\theta d\theta =$$

$$f(0)2\pi \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2z^2+2z^2-1}{\sqrt{1-2z^2}}dz =$$

$$f(0)4\pi \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4z^2-1}{\sqrt{1-2z^2}}dz = f(0)\frac{4\pi}{\sqrt{2}} \int\limits_{0}^{1} \frac{2t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}dt =$$

$$f(0)\frac{4\pi}{\sqrt{2}} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin^2 s - 1)ds = f(0)\frac{4\pi}{\sqrt{2}} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 2s)ds =$$

$$f(0)\frac{4\pi}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\sin 2s}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Итак, мы убедились, что

$$\Box\varphi_1(x) = 0. \qquad (13.7.94)$$

13.7.4 Вид решения на множествах X_5, X_1, X_2, X_3**.** Обобщённая функция, носитель которой множество X_5, т.е. точка 0, как известно, (см. [28], с. 49) имеет вид конечной суммы производных δ-функции с постоянными коэффициентами, что в образах Фурье соответствует многочлену конечной степени.

Введём три регулярные обобщённые функции $\operatorname{gi}1(x)$, $\operatorname{gi}2(x)$, $\operatorname{gi}3(x)$ с носителями X_1, X_2, X_3, соответственно, определенные правилом

$$\operatorname{gi}k(x) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x_0^2-x_1^2-x_2^2|}} & , \ x \in X_k \\ 0 & , \ x \notin X_k. \end{cases} \qquad (13.7.95)$$

Функции $\operatorname{gi}1(x)$, $\operatorname{gi}2(x)$, $\operatorname{gi}3(x)$ обладают следующими свойствами симметрии

$$\Gamma si(\operatorname{gi}k) \supset \Gamma me^{\top}(\Theta), \quad k \in \overline{1,3}. \qquad (13.7.96)$$

Функции $\operatorname{gi}1(x)$ и $\operatorname{gi}2(x)$ являются фундаментальными решениями, т.е.

$$\Box \operatorname{gi}k(x) = \delta(x), \qquad k = 1,2, \qquad (13.7.97)$$

а функция $\operatorname{gi}3(x)$ — решение однородного уравнения.

$$\Box \operatorname{gi}3(x) = 0. \qquad (13.7.98)$$

По фундаментальным решениям $\operatorname{gi}1(x)$, $\operatorname{gi}2(x)$ оператора Даламбера построим фундаментальное решение

$$\operatorname{gif}(x) \equiv \frac{1}{2}\left(\operatorname{gi}1(x) + \operatorname{gi}2(x)\right), \qquad (13.7.99)$$

обладающее более высокой симметрией, т.е. такое что

$$\Gamma si(\operatorname{gif}) = \Gamma m^{\top}(\Theta). \qquad (13.7.100)$$

Из рассуждений пунктов 13.7.1-13.7.3 следует, что фундаментальное решение $\varphi(x)$ оператора Даламбера, имеющее сохраняющую группу $\Gamma m^{\top}(\Theta) = \Omega(\Theta)$ равно

$$\varphi(x) = \operatorname{gif}(x) + C \cdot \operatorname{gi}3(x), \qquad (13.7.101)$$

где $C \in \mathbf{R}$ — произвольная константа.

Наряду с регулярными обобщёнными функциями $\mathrm{gi}\,1(x)$, $\mathrm{gi}\,2(x)$, $\mathrm{gi}\,3(x)$, соответствующими множествам X_1, X_2, X_3, введём сингулярные обобщённые функции $\mathrm{gi}\,7(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_7(x)$ (см. п. 13.7.2) и $\mathrm{gi}\,8(x) \equiv \mathrm{gi}\,7(-x)$ с носителями на множествах $\bar{X}_7$ и $\bar{X}_8$ соответственно. Введём также симметризированную чётную обобщённую функцию $\mathrm{gus}\,(x) \equiv (\mathrm{gi}\,7(x) + \mathrm{gi}\,8(x))$. Введённые функции обладают следующими свойствами

$$\mathrm{gi}\,1(-x) = \mathrm{gi}\,2(x), \tag{13.7.102}$$

$$\mathrm{gi}\,3(-x) = \mathrm{gi}\,3(x),\ \ \mathrm{gif}\,(-x) = \mathrm{gif}\,(x),\ \ \mathrm{git}\,(-x) = \mathrm{git}\,(x). \tag{13.7.103}$$

В дальнейшем для удобства мы будем также обозначать

$$\mathrm{gi}\,1(x) \equiv \mathrm{gip}\,(x),\ \ \mathrm{gi}\,3(x) \equiv \mathrm{gis}\,(x),\ \ \mathrm{gi}\,7(x) \equiv \mathrm{gup}\,(x). \tag{13.7.104}$$

13.7.5 Вычисление трансформации Фурье введенных обобщённых функций. Перейдем к вычислению трансформации Фурье введенных обобщённых функций. Достаточно построить трансформации Фурье функций (13.7.104), ибо остальные функции выражаются через них.

Начнем с функции $\mathrm{gip}\,(x_0, x_1, x_2)$ и сначала вычислим её трансформацию Фурье по переменным x_1, x_2 при $x_0 \geq 0$:

$$\widehat{\mathrm{gip}}\,(x_0, \xi_1, \xi_2) = \iint\limits_{\mathbf{R}^2} \mathrm{gip}\,(x_0, x_1, x_2) \exp\left(i\left(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2\right)\right) dx_1 dx_2 = \tag{13.7.105}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{x_0} d\rho \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - \rho^2}} \exp\left(i\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi')\right)\rho d\varphi.$$

Здесь (ρ, φ) — цилиндрические координаты точки (x_1, x_2) и (ρ', φ') — цилиндрические координаты точки (ξ_1, ξ_2). Последний интеграл не зависит от φ' и после замены $\rho = x_0 t$ приводится к виду

$$\widehat{\mathrm{gip}}\,(x_0, \xi_1, \xi_2) = \frac{x_0}{2\pi}\int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \exp\left(itx\rho' \cos\varphi\right) dt d\varphi. \tag{13.7.106}$$

Интеграл по переменной φ равен (см. [29], формула 8.511.4)

$$\int\limits_0^{2\pi} \exp\left(itx_0\rho' \cos\varphi\right) d\varphi = 2\pi J_0(tx_0\rho'). \tag{13.7.107}$$

Подставим (13.7.107) в (13.7.106) и преобразуем

$$\widehat{\mathrm{gip}}\,(x_0, \xi_1, \xi_2) = x_0 \int\limits_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} J_0(tx_0\rho') dt = x_0 \int\limits_0^{2\pi} \sin\psi\, J_0(x_0\rho' \sin\psi) d\psi. \tag{13.7.108}$$

Согласно [29] формула 6.683.5

$$x_0 \int\limits_0^{2\pi} \sin\psi\, J_0(x_0\rho' \sin\psi) d\psi = x_0 \frac{H_{-\frac{1}{2}}(x_0\rho')}{\sqrt{\frac{2(x_0\rho')}{\pi}}}. \tag{13.7.109}$$

Согласно [29] формула 8.552.4

$$H_{-\frac{1}{2}}(x_0\rho') = J_{\frac{1}{2}}(x_0\rho')$$

и формула 8.464.1

$$J_{\frac{1}{2}}(x_0\rho') = \sqrt{\frac{2}{\pi(x_0\rho')}}\sin(x_0\rho')$$

получаем

$$\widehat{\mathrm{gip}}\,(x_0,\xi_1,\xi_2) = x_0\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi(x_0\rho')}}}{\sqrt{\frac{2(x_0\rho')}{\pi}}}\sin(x_0\rho') = \frac{\sin(x_0\rho')}{\rho'},\ x_0 \geq 0. \tag{13.7.110}$$

Трансформацию Фурье по переменной x_0 теперь построим как предел в пространстве $S'(\mathbf{R}^3)$ функций

$$\widehat{\mathrm{gip}}_{\gamma}(\xi) = \int\limits_0^{\gamma}\widehat{\mathrm{gip}}\,(x_0,\xi_1,\xi_2)\exp\left(ix_0\xi_0\right)dx_0 = \int\limits_0^{\gamma}\frac{\sin x_0\rho'}{\rho'}\exp\left(ix_0\xi_0\right)dx_0. \tag{13.7.111}$$

Преобразуем интеграл (13.7.111)

$$\frac{1}{2i}\int\limits_0^{\gamma}\frac{\exp\left(ix_0\rho'\right)-\exp\left(-ix_0\rho'\right)}{\rho'}\exp\left(ix_0\xi_0\right)dx_0 = \tag{13.7.112}$$

$$\frac{1}{2i\rho'}\left[\frac{\exp\left(ix_0(\rho'+\xi_0)\right)}{i(\rho'+\xi_0)}\Bigg|_{x_0=0}^{x_0=\gamma} - \frac{\exp\left(ix_0(\xi_0-\rho')\right)}{i(\xi_0-\rho')}\Bigg|_{x_0=0}^{x_0=\gamma}\right] =$$

$$\frac{1}{2\rho'}\left(\frac{1}{\rho'+\xi_0}-\frac{1}{\xi_0-\rho'}\right) - \frac{1}{2\rho'}\left(\frac{\exp\left(i\gamma(\xi_0+\rho')\right)}{(\xi_0+\rho')} - \frac{\exp\left(i\gamma(\xi_0-\rho')\right)}{(\xi_0-\rho')}\right) =$$

$$-\frac{1}{\xi_0^2-(\rho')^2} - \frac{1}{2\rho'}\left(\frac{\exp\left(i\gamma(\xi_0+\rho')\right)}{(\xi_0+\rho')} - \frac{\exp\left(i\gamma(\xi_0-\rho')\right)}{(\xi_0-\rho')}\right).$$

Возьмём точку $\xi \in \mathbf{R}^3$ в сферических координатах и рассмотрим действие регулярной обобщённой функции $\mathrm{gip}_{\gamma}(\xi)$ на основную функцию $f(\xi) \in S'(\mathbf{R}^3)$

$$\left\langle\widehat{\mathrm{gip}}_{\gamma}, f\right\rangle = \left\langle -\frac{1}{\xi_0^2-\xi_1^2-\xi_2^2}, f\right\rangle - \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2r^2\sin\theta}\left(\frac{\exp\left(i\gamma r(\cos\theta+\sin\theta)\right)}{\cos\theta+\sin\theta} - \frac{\exp\left(i\gamma r(\cos\theta-\sin\theta)\right)}{\cos\theta-\sin\theta}\right)\right] f(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi\,, \tag{13.7.113}$$

где несобственный интеграл по θ понимается в смысле главного значения.

Введём функцию

$$f_m(r,\theta) \equiv \int\limits_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi)d\varphi \tag{13.7.114}$$

и вычислим пределы интегралов в (13.7.113) при $\gamma \to +\infty$

$$\lim_{\gamma\to+\infty}\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{\exp\left(i\gamma r(\cos\theta+\sin\theta)\right)}{\cos\theta+\sin\theta}f_m(r,\theta)drd\theta. \tag{13.7.115}$$

Предположим далее, что функция $f(x)$ равна нулю в окрестности начала координат, тогда

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\pi \frac{\exp\left(i\gamma r(\cos\theta+\sin\theta)\right)}{\cos\theta+\sin\theta} f_m(r,\theta)\,drd\theta = \tag{13.7.116}$$

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha(f)}^\infty\int_0^\pi \frac{\exp\left(i\gamma r(\cos\theta+\sin\theta)\right)}{\cos\theta+\sin\theta} f_m(r,\theta)drd\theta\,,$$

где $\alpha(f) > 0$.

Вычислим асимптотику по γ интеграла

$$F(\gamma) \equiv \int_0^\pi \frac{\exp\left(i\gamma r(\cos\theta+\sin\theta)\right)}{\cos\theta+\sin\theta} f_m(r,\theta)\,d\theta = \tag{13.7.117}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\pi \frac{\exp\left(i\gamma r\sqrt{2}\sin(\frac{3}{4}\pi-\theta)\right)}{\sin(\frac{3}{4}\pi-\theta)} f_m(r,\theta)\,d\theta =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\pi \frac{\exp\left(i\gamma r\sqrt{2}\sin(\frac{3}{4}\pi-\theta)\right)}{(\theta-\frac{3}{4}\pi)}\cdot\frac{f_m(r,\theta)}{\frac{\sin(\frac{3}{4}\pi-\theta)}{(\frac{3}{4}\pi-\theta)}}\,d\theta =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\exp\left(i\gamma r(-\sqrt{2}\sin\psi)\right)}{\psi}\cdot\frac{f_m(r,\psi+\frac{3}{4}\pi)}{\frac{\sin\psi}{\psi}}d\psi.$$

Применяем к последнему интегралу результаты монографии ([62], глава 3, § 1) получаем

$$F(\gamma) = +\frac{\pi i}{\sqrt{2}} f_m(r,\frac{3}{4}\pi) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) w(r), \tag{13.7.118}$$

где

$$\int_\alpha^\infty |w(r)|\,dr < \infty. \tag{13.7.119}$$

Аналогичное рассмотрение проводим с интегралом

$$G(\gamma) \equiv \int_0^\pi \frac{\exp\left(i\gamma r(\cos\theta-\sin\theta)\right)}{\cos\theta-\sin\theta} f_m(r,\theta)\,d\theta = \tag{13.7.120}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\pi \frac{\exp\left(i\gamma r(\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4}))\right)}{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)} f_m(r,\theta)\,d\theta =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\exp\left(i\gamma r(-\sqrt{2})\sin\psi\right)}{\psi}\cdot\frac{f_m(r,\psi+\frac{\pi}{4})}{\frac{\sin\psi}{\psi}}\,d\psi.$$

Его асимптотика при $\gamma \to +\infty$ равна

$$G(\gamma) = \frac{\pi i}{\sqrt{2}} f_m\left(r,\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) v(r), \tag{13.7.121}$$

где $\int\limits_{\alpha}^{\infty} |v(r)|\, dr < \infty$.

Таким образом, для функции $f \in S'(\mathbf{R}^3)$, равной нулю в некоторой окрестности нуля, получаем

$$\lim_{\gamma\to\infty} \left\langle \widehat{\mathrm{gip}}_{\gamma}, f \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}, f(\xi) \right\rangle - \frac{\pi i}{2\sqrt{2}} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} f\left(r, \frac{3}{4}\pi, \varphi\right) dr d\varphi +$$

$$\frac{\pi i}{2\sqrt{2}} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} f\left(r, \frac{\pi}{4}, \varphi\right) dr d\varphi = \left\langle \widehat{\mathrm{gip}}\,(\xi), f(\xi) \right\rangle.$$

Откуда

$$\widehat{\mathrm{gip}}\,(\xi) = \frac{-1}{\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} + \frac{\pi i}{2} \left(\mathrm{gi}\,7(\xi) - \mathrm{gi}\,8(\xi) \right) \tag{13.7.122}$$

при условии, что функция не имеет одноточечного сингулярного носителя в нуле. Но последнее вытекает из того, что $\widehat{\mathrm{gip}}\,(\xi)$ однородная обобщённая функция степени $\alpha = -2$, в силу леммы 4.7.2.

Так как $\mathrm{gi}\,2(x) = \mathrm{gi}\,1(-x)$, то $\widehat{\mathrm{gi}\,2}(\xi) = \widehat{\mathrm{gi}\,1}(-\xi) = \widehat{\mathrm{gip}}\,(-\xi)$ и в силу формулы (116)

$$\widehat{\mathrm{gi}\,2}(\xi) = \widehat{\mathrm{gip}}\,(-\xi) = \frac{-1}{\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} + \frac{\pi i}{2} \left(\mathrm{gi}\,8(\xi) - \mathrm{gi}\,7(\xi) \right). \tag{13.7.123}$$

Для функции $\mathrm{gif}\,(x)$ получаем из (13.7.122, 13.7.123)

$$\widehat{\mathrm{gif}}\,(\xi) = \frac{-1}{\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}. \tag{13.7.124}$$

В последних формулах требует уточнения вопрос: как мы понимаем обобщённую функцию $\varphi(\xi) \in S'(\mathbf{R}^3)$

$$\varphi(\xi) \equiv \frac{1}{\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}. \tag{13.7.125}$$

Обобщённая функция $\varphi(\xi)$ регулярна в точках $\xi \in \mathbf{R}^3$ не лежащих на конусе $K = X_7 \cup X_8 \cup X_5$. Несобственный интеграл

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi(\xi) f(\xi) d\xi_0 d\xi_1 d\xi_2 \tag{13.7.126}$$

для произвольной функции $f \in S(\mathbf{R}^3)$ вообще говоря расходится. Поэтому мы выбираем для функции $\varphi(\xi)$ следующую регуляризацию

$$\langle \varphi, f \rangle \equiv \lim_{\varepsilon\to+0} \iiint\limits_{G_\varepsilon} \varphi(\xi) f(\xi) d\xi_0 d\xi_1 d\xi_2$$

где $G_\varepsilon \subset \mathbf{R}^3$ область, вырезаемая в сферических координатах условиями $\left|\theta - \frac{\pi}{4}\right| \geq \varepsilon$ и $\left|\theta - \frac{3\pi}{4}\right| \geq \varepsilon$. Или в сферических координатах

$$\langle \varphi, f \rangle \equiv \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_0^{\infty} dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}-\varepsilon} + \int\limits_{\frac{\pi}{4}+\varepsilon}^{\frac{3\pi}{4}-\varepsilon} + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}+\varepsilon}^{\pi} \right) \left(\frac{\sin\theta}{\cos 2\theta} f(r, \theta, \varphi) \right) d\theta, \tag{13.7.127}$$

что соответствует пониманию сингулярных определенных интегралов по переменной θ в смысле главного значения в приведенных выкладках. Построенная обобщённая функция (13.7.125) будет однородной степени $\alpha = -2$ как предел однородности регулярных функций степени $\alpha = -2$.

13.7.6 Трансформация Фурье функции $\mathrm{git}\,(x)$ **с носителем на конусе** $X_7 \cup X_8 \cup X_5$. Вычислим теперь трансформацию Фурье функции $\mathrm{git}\,(x)$ с носителем на конусе $X_7 \cup X_8 \cup X_5$. Трансформацию Фурье $\widehat{\mathrm{git}}\,(\xi)$ построим ([24], с. 108) как предел в пространстве $S'(\mathbf{R}^3)$ функций

$$\widehat{\mathrm{git}}_R(\xi) \equiv \langle\, \mathrm{git}\,(x), \chi_R(x) \exp\left(i \langle x, \xi\rangle\right)\rangle\,, \tag{13.7.128}$$

где $\chi_R(x)$ — характеристическая функция шара $\{x \in \mathbf{R}^3 \,\big|\, |x| \le R\}$. Согласно определяющей формуле (13.7.128)

$$\widehat{\mathrm{git}}_R(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{-R}^{R} dr \int\limits_{0}^{2\pi} \exp\left(irr' \left(\frac{\cos\theta'}{\sqrt{2}} + \frac{\sin\theta'}{\sqrt{2}} \cos(\varphi - \varphi') \right)\right) d\varphi = \tag{13.7.129}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin\left(R\frac{r'}{\sqrt{2}}(\cos\theta' + \sin\theta' \cos\varphi)\right)}{\frac{r'}{\sqrt{2}}(\cos\theta' + \sin\theta \cos\varphi)}\, d\varphi.$$

Из теории интегралов Фурье известно, что предел

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\sin Ra}{R} = \pi\delta(a) \tag{13.7.130}$$

в пространстве $S'(R)$, поэтому из (13.7.129, 13.7.130) следует

$$\widehat{\mathrm{git}}_R(\xi) = \lim_{R\to+\infty} \mathrm{git}_R(\xi) = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \int\limits_{0}^{2\pi} \delta(a(\varphi)) d\varphi, \tag{13.7.131}$$

где

$$a(\varphi) \equiv \frac{r'}{\sqrt{2}} \left(\cos\theta' + \sin\theta \cos\varphi\right). \tag{13.7.132}$$

Рассмотрим нули функции $a(\varphi)$, зависящей от величин r', θ' как от параметров ($(r',\ \theta',\ \varphi')$ — полярные координаты точки $\xi \in \mathbf{R}^3$).

Если $|\cos\theta'| > \sin\theta'$, что соответствует $\theta' \in [0, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{3}{4}\pi, \pi]$, то функция $a(\varphi)$ не имеет нулей. Если $|\cos\theta'| < \sin\theta'$, что соответствует $\theta' \in]\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi[$, то функция $a(\varphi)$ имеет на периоде два нуля φ_1, φ_2, таких что

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = -\frac{\cos\theta'}{\sin\theta'},\ a'(\varphi_1) \equiv \frac{d}{d\varphi} a(\varphi)|_{\varphi=\varphi_1} = -a'(\varphi_2) \equiv \frac{d}{d\varphi} a(\varphi)|_{\varphi=\varphi_2},$$

$$|a'(\varphi_1)| = \frac{r'}{\sqrt{2}} \sin\theta' \sqrt{1 - \frac{\cos^2\theta'}{\sin^2\theta'}} = \frac{r'}{\sqrt{2}} \sqrt{-\cos 2\theta'}. \tag{13.7.133}$$

В этом случае

$$\delta\left(a(\varphi)\right) = \frac{\delta(\varphi - \varphi_1)}{|a'(\varphi_1)|} + \frac{\delta(\varphi - \varphi_2)}{|a'(\varphi_2)|}. \tag{13.7.134}$$

Согласно формуле (13.7.131) получаем

$$\widehat{\mathrm{git}}\,(\xi) = \begin{cases} 0 & ,\ \theta' \in [0,\ \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{3}{4}\pi, \pi], \\ \frac{4\pi}{\sqrt{|\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2|}} & ,\ \theta' \in]\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi[. \end{cases} \tag{13.7.135}$$

Учитывая, что $\mathrm{git}\,(x)$ однородная функция порядка $\alpha = -2$, мы получаем, что $\widehat{\mathrm{git}}\,(\xi)$ — однородная функция порядка $\alpha = -1$. По определению функции $\mathrm{gi}\,3(x)$ получаем из (13.7.135)

$$\widehat{\mathrm{git}}\,(\xi) = 8\pi^2\,\mathrm{gi}\,3(\xi). \tag{13.7.136}$$

Применив к формуле (13.7.136) обратную трансформацию Фурье, получим

$$\mathrm{git}\,(x) = \frac{1}{\pi}\,\widehat{\mathrm{gi}\,3}(-x) = \frac{1}{\pi}\,\widehat{\mathrm{gi}\,3}(x),$$

т.е.

$$\widehat{\mathrm{gi}\,3}(\xi) = \pi\,\mathrm{git}\,(\xi) = \pi\left(\mathrm{gi}\,7(\xi) + \mathrm{gi}\,8(\xi)\right). \tag{13.7.137}$$

Согласно формулам (13.7.122, 13.7.123)

$$\widehat{\mathrm{gi}\,1}(\xi) - \widehat{\mathrm{gi}\,2}(\xi) = \pi\left(\mathrm{gi}\,7(\xi) - \mathrm{gi}\,8(\xi)\right). \tag{13.7.138}$$

Сравнивая (13.7.137, 13.7.138), получим

$$\mathrm{gi}\,7(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\left(\widehat{\mathrm{gi}\,1}(\xi) - \widehat{\mathrm{gi}\,2}(\xi) + i\,\widehat{\mathrm{gi}\,3}(\xi)\right), \tag{13.7.139}$$

$$\mathrm{gi}\,8(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\left(\widehat{\mathrm{gi}\,2}(\xi) - \widehat{\mathrm{gi}\,1}(\xi) + i\,\widehat{\mathrm{gi}\,3}(\xi)\right). \tag{13.7.140}$$

Применим к равенствам (13.7.139, 13.7.140) оператор трансформации Фурье, получим

$$\widehat{\mathrm{gi}\,7}(\xi) = \frac{4\pi^2}{i}\left(\mathrm{gi}\,1(-\xi) - \mathrm{gi}\,2(-\xi) + i\,\mathrm{gi}\,3(-\xi)\right),$$

$$\widehat{\mathrm{gi}\,8}(\xi) = \frac{4\pi^2}{i}\left(\mathrm{gi}\,2(-\xi) - \mathrm{gi}\,1(-\xi) + i\,\mathrm{gi}\,3(-\xi)\right)$$

или

$$\widehat{\mathrm{gi}\,7}(\xi) = 4\pi^2\left(\mathrm{gi}\,3(\xi) + i\left(\mathrm{gi}\,1(\xi) - \mathrm{gi}\,2(\xi)\right)\right), \tag{13.7.141}$$

$$\widehat{\mathrm{gi}\,8}(\xi) = 4\pi^2\left(\mathrm{gi}\,3(\xi) - i\left(\mathrm{gi}\,1(\xi) - \mathrm{gi}\,2(\xi)\right)\right). \tag{13.7.142}$$

Для записи полученных соотношений удобно ввести для функций $\mathrm{gi}\,1, \ldots \mathrm{gi}\,8$ базис из чётных и нечётных функций:

$$\mathrm{gif}\,(x) \equiv \frac{1}{2}\left(\mathrm{gi}\,1(x) + \mathrm{gi}\,2(x)\right), \tag{13.7.143}$$

$$\mathrm{gic}\,(x) \equiv \frac{1}{2}\left(\mathrm{gi}\,1(x) - \mathrm{gi}\,2(x)\right), \tag{13.7.144}$$

$$\mathrm{gis}\,(x) \equiv \mathrm{gi}\,3(x), \tag{13.7.145}$$

$$\mathrm{gus}\,(x) \equiv \mathrm{gi}\,7(x) + \mathrm{gi}\,8(x), \tag{13.7.146}$$

$$\mathrm{guc}\,(x) \equiv \mathrm{gi}\,7(x) - \mathrm{gi}\,8(x), \tag{13.7.147}$$

и функции

$$\mathrm{gid}\,(x) \equiv \frac{1}{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2}, \tag{13.7.148}$$

описанной в п. 13.7.5. Функции $\operatorname{gif}(x)$, $\operatorname{gis}(x)$, $\operatorname{gus}(x)$, $\operatorname{gid}(x)$ — чётные и имеют сохраняющую группу $\Gamma m(\Theta)$, функции $\operatorname{gic}(x)$, $\operatorname{guc}(x)$ — нечётные и имеют сохраняющую группу $\Gamma me(\Theta)$. Обобщённая функция $\operatorname{gif}(x) \in S'(\mathbf{R}^3)$ является фундаментальным решением уравнения Даламбера, однозначно выделяемым условием Лоренц-симметрии $\Gamma si(\operatorname{gif}) \supset \Gamma m(\Theta) = O(1,2)$ и условием

$$\widehat{\operatorname{gif}}(\xi) = -\frac{1}{\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} = -\operatorname{gid}(\xi).$$

На основании предыдущего таблица образов Фурье функций (13.7.143–13.7.148) имеет следующий вид:

$$\widehat{\operatorname{gif}}(\xi) = -\operatorname{gid}(\xi), \tag{13.7.149}$$

$$\widehat{\operatorname{gic}}(\xi) = \frac{\pi i}{2}\operatorname{guc}(\xi), \tag{13.7.150}$$

$$\widehat{\operatorname{gis}}(\xi) = \pi \operatorname{gus}(\xi), \tag{13.7.151}$$

$$\widehat{\operatorname{guc}}(\xi) = 8\pi^2 \operatorname{gis}(\xi), \tag{13.7.152}$$

$$\widehat{\operatorname{gid}}(\xi) = -8\pi^3 \operatorname{gif}(\xi). \tag{13.7.153}$$

13.7.7 Симметрия фундаментального решения оператора Даламбера. Вернемся к вопросу о том, что мы будем считать фундаментальным решением оператора Даламбера. Наложив условие симметрии $\Gamma si(\varphi) \supset \Gamma me(\Theta) = SO(1,2)$, мы получили фундаментальное решение $\varphi(x) \in S'(\mathbf{R}^3)$ как регулярную функцию вида

$$\varphi(x) = C_1 \operatorname{gi}1(x) + (1 - C_1)\operatorname{gi}2(x) + C_2 \operatorname{gi}3(x), \tag{13.7.154}$$

где $C_1,\ C_2 \in \mathbf{R}$ — произвольные константы. Добавив условие большей симметрии $\Gamma si(\varphi) \supset \Gamma m(\Theta) = O(1,2)$, мы определили константу $C_1 = \frac{1}{2}$ и получили

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{gi}1(x) + \operatorname{gi}2(x)) + C_2 \operatorname{gi}3(x) \equiv \operatorname{gif}(x) + C_2 \operatorname{gi}3(x) \tag{13.7.155}$$

Добавив условие на отсутствие в образе Фурье $\hat{\varphi}(\xi)$ сингулярной составляющей $\pi C_2 \operatorname{gus}(\xi)$, мы определили константу $C_2 = 0$ и получили единственное фундаментальное решение

$$\varphi(x) = \operatorname{gif}(x). \tag{13.7.156}$$

Вернёмся к физической интерпретации. Фундаментальное решение $\varphi(x)$ соответствует влавину, движущемуся со скоростью $\pm\sqrt{2}$ вдоль оси x_3. В частности, нулевая компонента функции состояния власкайла имеет вид

$$v_0(x_0, x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_3 - \sqrt{2}x_0, x_1, x_2).$$

Если мы выберем фундаментальное решение (13.7.156), то при движении со скоростью $\sqrt{2}$ в положительном направлении оси x_3 возмущение будет сосредоточено в переднем конусе $(\sqrt{2}x_0, 0, 0) + \bar{X}_1$ и заднем конусе $(\sqrt{2}x_0, 0, 0) + \bar{X}_2$, а в средней зоне $(\sqrt{2}x_0, 0, 0) + X_3$ элементу среды будут в состоянии покоя. Однако, из опыта движения тел в воздухе со сверхзвуковыми скоростями мы знаем, что реализуются движения в которых возмущение среды присутствуют лишь в заднем конусе $(\sqrt{2}x_0, 0, 0) + \bar{X}_2$, что соответствует в формуле (13.7.154) выбору $C_1 = 0,\ C_2 = 0$ т.е. фундаментальному решению

$$\varphi(x) = \operatorname{gi}2(x) \equiv \operatorname{gin}(x) \tag{13.7.157}$$

для которого мы ввели специальное обозначение $\operatorname{gin}(x)$.

§13.8 Функции vin2 , vin3 , vin1 в досветовом случае

Мы будем вычислять функцию $\mathrm{vin2}\,(\vec{\beta}', \vec{\beta}'', \vec{b})$ через её образ Фурье по формуле (13.6.12). В силу инвариантности функции vin2 при ортогональном преобразовании аргументов — формула (13.4.38) достаточно вычислить функцию

$$\mathrm{vic2}\,(\vec{\beta}', \vec{\beta}'', b) \equiv \mathrm{vin2}\,(\vec{\beta}', \vec{\beta}'', (0,0,b)),\ \ b>0. \tag{13.8.1}$$

В случае $|\vec{\beta}'|<1$, $|\vec{\beta}''|<1$ для вычисления функции vic2 применима схема п. 13.6.1, ибо $\widehat{\mathrm{vin2}}\,(\vec{\beta}', \vec{\beta}', \vec{\eta}) = \frac{P(\vec{\eta})}{Q(\vec{\eta})}$, и однородный многочлен четвертой степени $Q(\vec{\eta})$ имеет нуль лишь в точке $\vec{\eta}=0$. Согласно формуле (13.6.12) в этом случае вычисление функции $\mathrm{vic2}\,(\vec{\beta}', \vec{\beta}'', b)$ сводится к вычислению вычетов функции $w(z) \equiv \frac{P(\vec{n}(z))}{Q(\vec{n}(z))}\frac{1}{z}$, где $z \in C$,

$$\vec{n}(z) = \left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right), 0\right). \tag{13.8.2}$$

Особые точки функции $w(z)$ — нули знаменателя

$$Q(\vec{n}(z)) = (1-\langle\vec{\beta}', \vec{n}(z)\rangle^2)(1-\langle\vec{\beta}'', \vec{n}(z)\rangle^2). \tag{13.8.3}$$

Поэтому сначала рассмотрим корни простейшего множителя, входящего в выражение (13.8.3).

13.8.1 Корни уравнения $1-\langle\vec{\beta}, \vec{n}(z)\rangle = 0$.

Рассмотрим корни уравнения

$$1-\langle\vec{\beta}, \vec{n}(z)\rangle = 0. \tag{13.8.4}$$

Обозначим комплексное число

$$\chi \equiv \beta_1 + i\beta_2 \tag{13.8.5}$$

и запишем уравнение (13.8.4) в виде

$$1-\frac{1}{2}\beta_1\left(z+\frac{1}{z}\right) - \beta_2\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) = 0$$

или

$$(\beta_1 - i\beta_2)z^2 - 2z + (\beta_1 + i\beta_2) = 0 \tag{13.8.6}$$

или

$$z^2 - \frac{2}{(\beta_1 - i\beta_2)}z + \frac{\beta_1 + i\beta_2}{\beta_1 - i\beta_2} = 0. \tag{13.8.7}$$

Корни уравнения (13.8.6)

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-|\chi|^2}}{\chi^*},\ \ \chi^* = \beta_1 - i\beta_2. \tag{13.8.8}$$

Введём обозначения для двух корней (13.8.8)

$$z_+ \equiv \frac{1-\sqrt{1-|\chi|^2}}{\chi^*} = \chi\left(\frac{1-\sqrt{1-|\chi|^2}}{|\chi|^2}\right), \tag{13.8.9}$$

$$z_{d+} \equiv \frac{1+\sqrt{1-|\chi|^2}}{\chi^*} = \chi\left(\frac{1+\sqrt{1-|\chi|^2}}{|\chi|^2}\right). \qquad (13.8.10)$$

Из уравнения (13.8.7) следует, что

$$|z_+||z_{d+}| = \left|\frac{\beta_1+i\beta_2}{\beta_1-i\beta_2}\right| = 1. \qquad (13.8.11)$$

При $0 \leq |\chi| < 1$ справедливо неравенство $\frac{1}{2} \leq \frac{1-\sqrt{1-|\chi|^2}}{|\chi|^2} \leq 1$, поэтому будет

$$\frac{1}{2}|\chi| \leq |z_+| \leq |\chi| < 1. \qquad (13.8.12)$$

Корень $z_+(\chi)$ обращается в нуль при $\chi = 0$. При $|\chi| = 1$

$$z_+(\chi) = z_{d+}(\chi) = \chi, \qquad (13.8.13)$$

т.е. получаем краткий корень. При $|\chi| > 1$ будет

$$|z_+(\chi)| = |z_{d+}(\chi)| = \frac{\sqrt{1+(|\chi|^2-1)^2}}{|\chi|}. \qquad (13.8.14)$$

При этом справедливы сравнения

$$\left\{\begin{array}{lllll} |z_+(\chi)| & < & 1, & 1 < |\chi| & < \sqrt{2}, \\ |z_+(\chi)| & = & 1, & |\chi| & = \sqrt{2}, \\ |z_+(\chi)| & > & 1, & |\chi| & > \sqrt{2}. \end{array}\right. \qquad (13.8.15)$$

Вектор $\vec{n}(z)$ в точке z_+ равен

$$\vec{n}_+ \equiv \vec{n}(z_+) =$$

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{1-|\chi|^2}}{\chi^*} + \frac{\chi^*}{1-\sqrt{1-|\chi|^2}}\right),\ \frac{1}{2i}\left(\frac{1-\sqrt{1-|\chi|^2}}{\chi^*} - \frac{\chi^*}{1-\sqrt{1-|\chi|^2}}\right),\ 0\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\chi\left(\frac{1-\sqrt{1-|\chi|^2}}{|\chi^2|}\right) + \chi^*\left(\frac{1+\sqrt{1-|\chi|^2}}{|\chi|^2}\right)\right.,$$

$$\left.\frac{1}{i}\left(\chi\left(\frac{1-\sqrt{1-|\chi|^2}}{|\chi|^2}\right) - \chi^*\left(\frac{1+\sqrt{1-|\chi|^2}}{|\chi|^2}\right)\right),\ 0\right) =$$

$$\frac{1}{|\chi|^2}\left(\beta_1 - i\beta_2\sqrt{1-|\chi|^2}, \frac{1}{i}\left(-\beta_1\sqrt{1-|\chi|^2}+i\beta_2\right), 0\right) =$$

$$\frac{1}{|\chi|^2}(\beta_1,\beta_2,0) + i\frac{\sqrt{1-|\chi|^2}}{|\chi|^2}(-\beta_2,\beta_1,0). \qquad (13.8.16)$$

Вектор $\vec{n}(z)$ в точке z_{d+} равен

$$\vec{n}_{d+} \equiv \vec{n}(z_{d+}) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\chi\frac{1+\sqrt{1-|\chi|^2}}{|\chi|^2}+\frac{\chi^*}{1+\sqrt{1-|\chi|^2}},\frac{1}{i}\left(\chi\frac{1+\sqrt{1-|\chi|^2}}{|\chi|^2}-\frac{\chi^*}{1+\sqrt{1-|\chi|^2}}\right),0\right)=$$

$$\frac{1}{2|\chi|^2}\left(\chi\left(1+\sqrt{1-|\chi|^2}\right)+\chi^*\left(1-\sqrt{1-|\chi|^2}\right),\right.$$

$$\left.\frac{1}{i}\left(\chi\left(1+\sqrt{1-|\chi|^2}\right)-\chi^*\left(1-\sqrt{1-|\chi|^2}\right)\right),\ 0\right)=$$

$$\frac{1}{|\chi|^2}\left(\beta_1+i\beta_2\sqrt{1-|\chi|^2},\frac{1}{i}\left(\beta_1\sqrt{1-|\chi|^2}+i\beta_2\right),0\right)=$$

$$\frac{1}{|\chi|^2}(\beta_1,\beta_2,0)+i\frac{\sqrt{1-|\chi|^2}}{|\chi|^2}(\beta_2,-\beta_1,0). \tag{13.8.17}$$

Итак, в случае $|\chi|<1$ вектора $\vec{n}_+$ и $\vec{n}_{d+}$ комплексно сопряжены

$$\vec{n}_{d+}=\vec{n}_+^*,\quad |\chi|<1, \tag{13.8.18}$$

в случае $|\chi|=1$

$$\vec{n}_{d+}=\vec{n}_+=(\beta_1,\beta_2,0) \tag{13.8.19}$$

и в случае $|\chi|>1$ вектора $\vec{n}_{d+}$ и $\vec{n}_+$ чисто действительные

$$\vec{n}_+=\frac{1}{|\chi|^2}(\beta_1,\beta_2,0)+\frac{\sqrt{|\chi|^2-1}}{|\chi|^2}(\beta_2,-\beta_1,0), \tag{13.8.20}$$

$$\vec{n}_{d+}=\frac{1}{|\chi|^2}(\beta_1,\beta_2,0)-\frac{\sqrt{|\chi|^2-1}}{|\chi|^2}(\beta_2,-\beta_1,0). \tag{13.8.21}$$

Разложим теперь на множители квадратный трёхчлен

$$z(1-\langle\vec{\beta},\vec{n}(z)\rangle)=-\frac{1}{2}(\beta_1-i\beta_2)(z-z_+)(z-z_{d+}). \tag{13.8.22}$$

Таким образом

$$\left.\frac{z(1-\langle\vec{\beta},\vec{n}(z)\rangle)}{z-z_+}\right|_{z=z_+}=-\frac{1}{2}\chi^*(z_+-z_{d+})=\sqrt{1-|\chi|^2}, \tag{13.8.23}$$

$$\left.\frac{z(1-\langle\vec{\beta},\vec{n}(z)\rangle)}{z-z_{d+}}\right|_{z=z_{d+}}=-\frac{1}{2}\chi^*(z_{d+}-z_+)=-\sqrt{1-|\chi|^2}. \tag{13.8.24}$$

Функция $\vec{n}(z)$ нечётная функция $z\in\mathbf{C}$, поэтому корни уравнения

$$1+\langle\vec{\beta},\vec{n}(z)\rangle=0. \tag{13.8.25}$$

равны

$$z=-z_+,z_{d-}=-z_{d+}. \tag{13.8.26}$$

13.8.2 Вычисление вычетов функции $w(z)$. Перейдем теперь к вычислению вычетов функции $w(z)$. В точке $z'_+ \equiv z_+(\chi')$ имеем в случае $|\chi'| \neq 1$

$$\operatorname{res}\left(\frac{P(\vec{n}(z))}{Q(\vec{n}(z))}\frac{1}{z}, z'_+\right) = \frac{\langle \vec{n}'_+, \vec{\beta}' - \vec{\beta}''\rangle^2}{\sqrt{1-|\chi|^2}2(1-\langle \vec{n}'_+, \vec{\beta}''\rangle^2)}. \tag{13.8.27}$$

Функция $w(z)$ нечётная рациональная функция z, имеющая при $|\chi'| \neq 1$ и $|\chi''| \neq 1$ восемь особых точек — нулей знаменателя кратности 1. При $|\chi'| < 1$ и $|\chi''| < 1$ четыре корня лежат внутри и четыре — вне единичного круга. Вычеты в точках z_0 и $(-z_0)$ функции $w(z)$ равны в силу ее нечётности. Итак при $|\vec{\beta}'| < 1, |\vec{\beta}''| < 1$ получаем

$$\operatorname{vic2}(\vec{\beta}', \vec{\beta}'', b) = \frac{1}{4\pi b}2(\operatorname{res}(w(z), z'_+) + \operatorname{res}(w(z), z''_+)) = \tag{13.8.28}$$

$$\frac{1}{4\pi b}\left(\frac{\langle \vec{n}'_+, \vec{\beta}' - \vec{\beta}''\rangle^2}{\sqrt{1-|\chi'|^2}(1-\langle \vec{n}'_+, \vec{\beta}''\rangle^2)} + \frac{\langle \vec{n}''_+, \vec{\beta}' - \vec{\beta}''\rangle^2}{\sqrt{1-|\chi''|^2}(1-\langle \vec{n}''_+, \vec{\beta}'\rangle^2)}\right) =$$

$$\frac{1}{4\pi b}\left(\frac{1}{\sqrt{1-|\chi'|^2}}\frac{1-\langle \vec{n}'_+, \vec{\beta}''\rangle}{1+\langle \vec{n}'_+, \vec{\beta}''\rangle} + \frac{1}{\sqrt{1-|\chi''|^2}}\frac{1-\langle \vec{n}''_+, \vec{\beta}'\rangle}{(1+\langle \vec{n}''_+, \vec{\beta}'\rangle)}\right).$$

Преобразуем последнее выражение. Для этого введём промежуточные обозначения

$$m' \equiv |\chi'|^2,\ m'' \equiv |\chi''|^2,\ s \equiv \beta'_1\beta''_1 + \beta'_2\beta''_2,\ \Delta \equiv \beta'_1\beta''_2 - \beta''_1\beta'_2. \tag{13.8.29}$$

В силу формулы (13.8.26)

$$\frac{1}{1+\langle \vec{n}'_+, \vec{\beta}''\rangle} = \frac{m'}{m'+s+i\Delta\sqrt{1-m'}} = \frac{m'(m'+s-i\Delta\sqrt{1-m'})}{(m'+s)^2+\Delta^2(1-m')}, \tag{13.8.30}$$

что в силу тождества

$$s^2 + \Delta^2 = m'm'' \tag{13.8.31}$$

преобразуется к виду

$$\frac{1}{1+\langle \vec{n}'_+, \vec{\beta}''\rangle} = \frac{m'+s-i\Delta\sqrt{1-m'}}{m'+m''+2s-\Delta^2}. \tag{13.8.32}$$

Используя (13.8.39), элементарными преобразованиями приводим выражение (13.8.28) к виду

$$\operatorname{vic2}(\vec{\beta}', \vec{\beta}'', b) = \frac{1}{4\pi b}\left[-\left(\frac{1}{\sqrt{1-m'}} + \frac{1}{\sqrt{1-m''}}\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{1-m'}}\frac{m'+s-i\Delta\sqrt{1-m'}}{m'+m''+2s-\Delta^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{\sqrt{1-m''}}\frac{m''+s+i\Delta\sqrt{1-m''}}{m'+m''+2s-\Delta^2}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{4\pi b}\cdot\left[-\left(\frac{1}{\sqrt{1-m'}} + \frac{1}{\sqrt{1-m''}}\right) + \frac{2}{m'+m''+2s-\Delta^2}\left(\frac{m'+s}{\sqrt{1-m'}} + \frac{m''+s}{\sqrt{1-m''}}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{4\pi b}\frac{1}{m'+m''+2s-\Delta^2}\left[\frac{m'-m''+\Delta^2}{\sqrt{1-m'}} + \frac{m''-m'+\Delta^2}{\sqrt{1-m''}}\right]. \tag{13.8.33}$$

13.8.3 Функция $\mathrm{vin2}\,(\vec{\beta}', \vec{\beta}'', \vec{b})$ не зависит от выбора ортогональной декартовой системы координат, поэтому из формулы (13.8.33) вытекает следующее выражение для функции

$$\mathrm{vin2}\,(\vec{\beta}', \vec{\beta}'', \vec{b}) = \frac{1}{4\pi}\left([\vec{\beta}' + \vec{\beta}'', \vec{b}]^2 b^2 - [[\vec{\beta}', \vec{b}], [\vec{\beta}'', \vec{b}]]^2\right)^{-1} \times \tag{13.8.34}$$

$$\left[\left([\vec{\beta}, \vec{b}]^2 - [\vec{\beta}'', \vec{b}]^2\right) b^2 \left(\frac{1}{\sqrt{b^2 - [\vec{\beta}', \vec{b}]^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 - [\vec{\beta}'', \vec{b}]^2}}\right) + \right.$$

$$\left. [[\vec{\beta}', \vec{b}], [\vec{\beta}'', \vec{b}]]^2 \left(\frac{1}{\sqrt{b^2 - [\vec{\beta}', \vec{b}]^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - [\vec{\beta}'', \vec{b}]^2}}\right)\right].$$

Для доказательства формулы (13.8.34) введём единичный вектор $\vec{e} = \frac{1}{b}\vec{b}$ и проверим, что в случае $\vec{e} = (0, 0, 1)$ выражение (13.8.34) совпадает с выражением (13.8.33). Для этого достаточно убедиться, что

$$[\vec{\beta}, \vec{e}] = (\beta_2, -\beta_1, 0), \tag{13.8.35}$$

$$m = [\vec{\beta}, \vec{e}]^2, \tag{13.8.36}$$

$$s = \langle [\vec{\beta}', \vec{e}], [\vec{\beta}'', \vec{e}] \rangle, \tag{13.8.37}$$

$$[[\vec{\beta}', \vec{e}], [\vec{\beta}'', \vec{e}]] = \Delta \vec{e}. \tag{13.8.38}$$

Замечание 13.8.1 *При вычислении вычетов мы предполагали, что функция $Q(\vec{n}(z))$ имеет нули кратности 1, т.е. исключали случай $\chi' = \chi''$, однако, в силу формулы (13.6.8) функция $\mathrm{vin2}\,(\vec{\beta}', \vec{\beta}'', \vec{b})$ непрерывно и аналитично зависит от векторов $\vec{\beta}', \vec{\beta}''$, поэтому формула (13.8.34) продолжается по непрерывности и на случай любых $\vec{\beta}', \vec{\beta}''$, меньших единице по модулю.*

13.8.4 функция $\mathrm{vin3}\,(\vec{\beta}, \vec{b})$. На основании результатов п. 13.6.2 выпишем функцию $\mathrm{vin3}\,(\vec{\beta}, \vec{b})$.

Согласно формуле (13.6.14)

$$\mathrm{vin3}\,(\vec{\beta}, \vec{b}) = \mathrm{vi3}\,(\beta, Q\vec{b}), \quad \beta = |\vec{\beta}|, \tag{13.8.39}$$

где $Q \in SO(3)$ ортогональное преобразование такое, что

$$\vec{\beta} = Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}. \tag{13.8.40}$$

Согласно формуле (13.6.19)

$$\mathrm{vi3}\,(\beta, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ \mathrm{vi3}\left(0, \left(b_1, b_2, \frac{b_3}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\right). \tag{13.8.41}$$

Согласно формуле (13.6.20)

$$\mathrm{vi3}\,(0, \vec{b}) = \frac{1}{4\pi|\vec{b}|}. \tag{13.8.42}$$

Из (13.8.39–13.8.42) получаем

$$\mathrm{vin3}\,(\vec{\beta}, \vec{b}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{b^2(1-\beta^2) + \langle\vec{\beta}, \vec{b}\rangle^2}} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{b^2 - [\vec{\beta}, \vec{b}]^2}}. \tag{13.8.43}$$

13.8.5 Функция $\mathrm{vin1}\,(\vec\beta',\vec\beta'',\vec b)$**.** Зная функции vin2 и vin3, с помощью соотношения (13.4.33), т.е. соотношения

$$\mathrm{vin1}\,(\vec\beta',\vec\beta'',\vec b)=\frac{1}{2}(\,\mathrm{vin3}\,(\vec\beta',\vec b)+\,\mathrm{vin3}\,(\vec\beta'',\vec b)+\,\mathrm{vin2}\,(\vec\beta',\vec\beta'',\vec b)) \tag{13.8.44}$$

напишем явное выражение функции $\mathrm{vin1}\,(\vec\beta',\vec\beta'',\vec b)$ в досветовом случае

$$\mathrm{vin1}\,(\vec\beta',\vec\beta'',\vec b)=\frac{1}{4\pi}b^2\left([\vec\beta'+\vec\beta'',\vec b]^2b^2-[[\vec\beta',\vec b],[\vec\beta'',\vec b]]^2\right)^{-1}\times \tag{13.8.45}$$

$$\left(\frac{\langle[\vec\beta',\vec b],[\vec\beta'+\vec\beta'',\vec b]\rangle}{\sqrt{b^2-[\vec\beta',\vec b]^2}}+\frac{\langle[\vec\beta'',\vec b],[\vec\beta'+\vec\beta'',\vec b]\rangle}{\sqrt{b^2-[\vec\beta'',\vec b]^2}}\right).$$

13.8.6 Приближенные выражения для функций vin1**,** vin2**,** vin3 **в случае малых скоростей.** Выпишем теперь приближенные выражения для функций vin1, vin2, vin3 в случае малых скоростей $|\vec\beta|\ll 1$ с ошибкой четвертого порядка по скорости. Соответствующие приближенные функции мы будем обозначать vis1, vis2, vis3 . Для построения приближений удобнее пользоваться не окончательными выражениями для функций vin1, vin2, vin3, а формулой (13.6.8).

Согласно формуле (13.6.8)

$$\mathrm{vic3}\,(\vec\beta,b)=\frac{1}{8\pi^2b}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{1-\langle\vec\beta,\vec n(\varphi)\rangle^2}\,d\varphi, \tag{13.8.46}$$

где $\vec n(\varphi)=(\cos\varphi,\sin\varphi,0)$. Поэтому

$$\mathrm{vic3}\,(\vec\beta,b)=\frac{1}{4\pi b}\left(1+\frac{\beta_\perp^2}{2}+O(\beta_\perp^4)\right),\ \vec\beta_\perp=(\beta_1,\beta_2,0) \tag{13.8.47}$$

Введём функцию

$$\mathrm{vics3}\,(\vec\beta,b)\equiv\frac{1}{4\pi b}\left(1+\frac{\beta_\perp^2}{2}\right) \tag{13.8.48}$$

и соответствующую функцию

$$\mathrm{vis3}\,(\vec\beta,\vec b)\equiv\frac{1}{4\pi|\vec b|}\left(1+\frac{[\vec\beta,\vec b]^2}{2|\vec b|^2}\right), \tag{13.8.49}$$

аппроксимирующую функцию $\mathrm{vin3}\,(\vec\beta,\vec b)$ с ошибкой четвертого порядка по скорости.

Согласно формуле (13.6.8) и формуле (13.4.38)

$$\mathrm{vic2}\,(\vec\beta',\vec\beta'',b)=\frac{1}{8\pi^2b}\int\limits_0^{2\pi}\langle\vec n(\varphi),\vec\beta'-\vec\beta''\rangle^2\,d\varphi+O(\beta_\perp'^4+\beta_\perp''^4). \tag{13.8.50}$$

Функции

$$\mathrm{vics2}\,(\vec\beta',\vec\beta'',b)\equiv\frac{1}{8\pi b}(\vec\beta_\perp'-\vec\beta_\perp'')^2, \tag{13.8.51}$$

и

$$\mathrm{vis2}\,(\vec\beta',\vec\beta'',\vec b)\equiv\frac{1}{8\pi|\vec b|^3}[\vec\beta'-\vec\beta'',\vec b]^2 \tag{13.8.52}$$

аппроксимируют функции $\mathrm{vic2}\,(\vec{\beta}', \vec{\beta}'', b)$ и $\mathrm{vin2}\,(\vec{\beta}', \vec{\beta}'', \vec{b})$ с ошибкой четвертого порядка по скоростям.

Согласно формуле (13.8.44) функции vic1 и vin1 будут аппроксимироваться с ошибкой четвертого порядка по скоростям выражениями

$$\mathrm{vics1}\,(\vec{\beta}', \vec{\beta}'', b) = \frac{1}{4\pi b}\left(1 + \frac{1}{4}\left(\beta_{\perp}'^2 + \beta_{\perp}''^2 + (\beta_{\perp}' - \beta_{\perp}'')^2\right)\right), \tag{13.8.53}$$

$$\mathrm{vis1}\,(\vec{\beta}', \vec{\beta}'', \vec{b}) = \frac{1}{4\pi|\vec{b}|}\left(1 + \frac{1}{4|\vec{b}|^2}\left([\vec{\beta}', \vec{b}]^2 + [\vec{\beta}'', \vec{b}]^2 + [\vec{\beta}' - \vec{\beta}'', \vec{b}]^2\right)\right). \tag{13.8.54}$$

§13.9 Поведение функции состояния в пространственной бесконечности

В этом параграфе рассматриваются агвидные обобщённые частицы.

13.9.1 Условия кулоновского убывания и кулоновские состояния.

При вычислении моментов по пространственным переменным требуется знать поведение функций в пространственной бесконечности. Условия на поведение функций состояния в пространственной бесконечности встречались ранее в пунктах 1.3.6, 2.2.5, 12.2.3, 13.5.2. Опираясь на условия кулоновского убывания порядка m на функцию $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$ из п. 13.5.2, введём следующее определение для агвидов. Пусть $m \in \mathbf{N}_o$.

Определение 13.9.1 *Состояние обобщённой агвидной частицы m-кулоновское, если её 4-функция состояния $uf(\vec{x})$ регулярна в некоторой окрестности бесконечности вместе с производными до порядка m и удовлетворяет условиям кулоновского убывания порядка m.*

Если состояния обобщённой частицы m-кулоновские для всякого $m \in \mathbf{N}_o$, то оно называется ∞-кулоновским. 1-кулоновское состояние далее мы назовём просто *кулоновским.*

Определение 13.9.2 *Обобщённая частица, имеющая m-кулоновское состояние называется m-кулоновской.*

Если одно состояние частицы *m-кулоновское*, то и любое другое также m-кулоновское, поэтому у m-кулоновской частицы любое состояние является m-кулоновским.

В следующем параграфе мы покажем естественность требования кулоновости для натуральной досветовой частицы.

Далее в пунктах 13.9.3–13.9.5 мы рассмотрим три простейших досветовых влавина: влаcкайл, владип, влаквазикипер и убедимся, что они являются ∞-кулоновскими влавинами. В п. 13.9.5 мы увидим, что для состояния покоя влаквазикипера функция тока $jf(\vec{x})$ имеет точечный носитель и поэтому для неё существуют все пространственные моменты, однако, спиновая функция $\overrightarrow{sf}(\vec{x})$ имеет порядок убывания в пространственной бесконечности $\overrightarrow{sf}(\vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right)$ и неинтегрируема. Этот пример показывает целесообразность обобщения понятия спина, сделанного в § 13.5.

Согласно сказанному для проверки ∞-кулоновости досветовых агвидов достаточно проверить лишь ∞-кулоновость их состояния покоя.

13.9.2 Локальность дифференцирования обобщённых функций.

В п. 13.8.4, мы нашли вид функции $\mathrm{vin3}\,(\vec{l},\vec{b})$ в досветовом случае при $|\vec{l}| < 1$, а именно согласно (13.8.43)

$$\mathrm{vin3}\,(\vec{l},\vec{b}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{b^2 - [\vec{l},\vec{b}]^2}}. \tag{13.9.1}$$

Функция $\mathrm{vin3}\,(\vec{l},\vec{b})$ по переменной $\vec{b} \in \mathbf{R}^3$ есть регулярная обобщённая функция медленного роста, бесконечно-дифференцируемая во всех точках кроме 0. Поэтому согласно ([24], § 2 п. 1, с. 36) в любом открытом множестве $W \subset \mathbf{R}^3$ не содержащем нуля, функция $\mathrm{vin3}\,(\vec{l},\vec{b})|_W$ есть регулярная обобщённая функция и все её обобщённые частные производные совпадают с классическими частными производными. Итак, обобщённые частные производные функции $\mathrm{vin3}\,(\vec{l},\vec{b})$ по переменной $\vec{b} \in \mathbf{R}^3$ всюду кроме нуля определены и совпадают с классическими производными. Что бы придать смысл производной $\left(\mathrm{vin3}\,(\vec{l},\vec{b})\right)^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbf{N}_o{}^3$ как элементу пространства $S'(\mathbf{R}^3)$ нужно ещё доопределить её в сколь угодно малый окрестности нуля. Но нас интересует функция $\left(\mathrm{vin3}\,(\vec{l},\vec{b})\right)^{(\alpha)}$ именно при $|\vec{b}| > 0$, ибо при $|\vec{b}| = 0$ приближение взаимодействия частиц взаимодействием влавинов теряет смысл. Поэтому мы вычисляем далее производную $\left(\mathrm{vin3}\,(\vec{l},\vec{b})\right)^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbf{N}_o{}^3$ по обычным правилам вычисления производных.

При $\vec{l} = 0$ имеем

$$\mathrm{vin3}\,(0,\vec{b}) = \frac{1}{4\pi|\vec{b}|} = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{cul}\,(\vec{b}), \tag{13.9.2}$$

где при $\vec{b} \in \mathbf{R}^3$, $\vec{b} \neq 0$ регулярная функция

$$\mathrm{cul}\,(\vec{b}) = \frac{1}{|\vec{b}|}. \tag{13.9.3}$$

13.9.3 Поле власкайла.

В состоянии покоя функции тока, псевдотока и квазитока совпадают $j = js = jt$. Согласно п. 13.5.5 для власкайла в состоянии покоя

$$jf(\vec{x}) = e\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\delta(\vec{x}), \tag{13.9.4}$$

поэтому

$$uf(\vec{x}) = e\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\mathrm{vin3}\,(0,\vec{b}). \tag{13.9.5}$$

Итак, власкайл является скалярным влавином

$$\vec{H}f = \overrightarrow{sf} = 0 \tag{13.9.6}$$

и

$$\vec{E}f(\vec{x}) = \overrightarrow{tf}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}uf_0(\vec{x}) = \frac{e}{4\pi}\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}. \tag{13.9.7}$$

Из (13.9.5) следует, что при любом $\alpha \in \mathbf{N_o}^3$ верно

$$uf^{(\alpha)}(\vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^{1+|\alpha|}}\right) \tag{13.9.8}$$

при $|\vec{x}| \to \infty$, т.е. власкайл есть ∞-кулоновская частица. Власкайл соответствует точечному заряду.

13.9.4 Поле владипа.

По определению п. 13.5.5 для владипа в состоянии покоя трансформация Фурье функции тока есть

$$\widehat{jf}(\vec{\eta}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} i\langle \vec{d}, \vec{\eta}\rangle = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \langle \vec{d}, -i\vec{\eta}\rangle, \tag{13.9.9}$$

поэтому

$$uf(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \langle \vec{d}, \vec{\nabla}\rangle \ \mathrm{vin3}\,(0, \vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\langle \vec{d}, \vec{x}\rangle}{4\pi|\vec{x}|^3}. \tag{13.9.10}$$

Итак, владип есть скалярный владип с

$$\vec{H}f = \overrightarrow{sf} = 0 \tag{13.9.11}$$

и при $\vec{x} \neq 0$ верно

$$\vec{E}f(\vec{x}) = \overrightarrow{tf}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\left(\frac{\langle \vec{d}, \vec{x}\rangle}{4\pi|\vec{x}|^3}\right) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\vec{d}}{|\vec{x}|^3} - 3\frac{\langle \vec{d}, \vec{x}\rangle\vec{x}}{|\vec{x}|^5}\right). \tag{13.9.12}$$

Из (13.9.10) следует, что при любом $\alpha \in \mathbf{N_o}^3$ верно

$$uf^{(\alpha)}(\vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^{2+|\alpha|}}\right) \tag{13.9.13}$$

при $|\vec{x}| \to \infty$, т.е. владип есть ∞-кулоновская частица. Владип соответствует точечному диполю.

13.9.5 Поле влаквазикипера.

Согласно п. 13.5.5 для влаквазикипера в состоянии покоя

$$\widehat{jf_0} = 0, \tag{13.9.14}$$

$$\overrightarrow{jf}\ (\vec{\eta}) = i[\vec{S}, \vec{\eta}] = -[\vec{S}, -i\vec{\eta}], \tag{13.9.15}$$

поэтому

$$uf_0 = 0, \tag{13.9.16}$$

$$uf(\vec{x}) = [\vec{S}, \vec{\nabla}]\ \mathrm{vin3}\,(0, \vec{x}) = -\frac{1}{4\pi|\vec{x}|^3}[\vec{S}, \vec{x}]. \tag{13.9.17}$$

Итак, влаквазикипер является квазикиперным влавином с

$$\vec{E}f = \overrightarrow{tf} = 0 \tag{13.9.18}$$

и при $\vec{x} \neq 0$

$$\vec{H}f(\vec{x}) = \overrightarrow{sf}\ (\vec{x}) = -[\vec{\nabla}, \overrightarrow{uf}(\vec{x})] = -[\vec{\nabla}, [\vec{S}, \vec{\nabla}]]\frac{1}{4\pi|\vec{x}|} = \tag{13.9.19}$$

$$-\left(\vec{S}(\vec{\nabla})^2 - \vec{\nabla}\langle\vec{S}, \vec{\nabla}\rangle\right)\frac{1}{4\pi|\vec{x}|} = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\langle\vec{S}, \vec{\nabla}\rangle\frac{1}{|\vec{x}|}.$$

Согласно п. 13.9.2 при $\vec{x} \neq 0$ имеем

$$\vec{H}f(\vec{x}) = \overrightarrow{sf}\ (\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\vec{S}}{|\vec{x}|^3} - 3\frac{\left\langle\vec{S}, \vec{x}\right\rangle\vec{x}}{|\vec{x}|^5}\right). \tag{13.9.20}$$

Из (13.9.16, 13.9.17) следует, что при любом $\alpha \in \mathbf{N}_o{}^3$ верно (13.9.13) при $|\vec{x}| \to \infty$, т.е. влаквазикипер есть ∞-кулоновская частица.

Согласно формуле (13.9.17) функция $uf(\vec{x})$ является регулярной обобщённой функцией класса $S_3'(\mathbf{R}^3)$ и спиновая функция $\overrightarrow{sf}\ (\vec{x}) = -\left[\vec{\nabla}, \overrightarrow{uf}(\vec{x})\right]$ также будет обобщённой функцией класса $S_3'(\mathbf{R}^3)$, но уже не регулярной, ибо согласно (13.9.20) имеет неинтегрируемую особенность в нуле. Непосредственное определение моментов $\langle sf_\alpha, 1\rangle$, $\alpha \in \overline{1,3}$ встречает теперь трудности, ибо единица не принадлежит классу основных функций $S(\mathbf{R}^3)$. Кроме того для любой открытой окрестности бесконечности $W \subset \mathbf{R}^3$ интеграл $\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \overrightarrow{sf}\ (\vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3$ не существует по Лебегу. В самом деле из суммируемости по Лебегу функции на некотором множестве вытекает её суммируемость на любом подмножестве этого множества. Выберем ось z системы координат вдоль вектора $\vec{S}$, тогда для любого $A \in \mathbf{R}_+$ в полярных координатах имеем

$$\iiint\limits_{\substack{|\vec{x}|\geq A\\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}}} sf_3(\vec{x})\, dxdydz = \frac{(-1)}{4\pi}\iiint\limits_{\substack{|\vec{x}|\geq A\\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}}} \frac{Sr^2 - 3(r\cos\theta)^2 S}{r^5} r^2 \sin\theta\, dr d\varphi d\theta =$$

$$\frac{(-1)S}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1 - 3\cos^2\theta\right)\sin\theta\, d\theta \int\limits_A^\infty \frac{1}{r}\, dr = \frac{S}{2}\int\limits_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(1 - 3\xi^2\right)\, d\xi \int\limits_A^\infty \frac{1}{r}\, dr =$$

$$\frac{S}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\int\limits_A^\infty \frac{1}{r}\, dr = +\infty,$$

т.е. интеграл не существует по Лебегу.

Итак, в данном примере определение спина как интеграла от спиновой функции $\overrightarrow{sf}(\vec{x})$ не применимо, в то время как определение спина из п. 13.5.5 через трансформацию Фурье сохраняет смысл.

13.9.6 Кулоновские состояния неагвидных частиц.

Распространим понятие m-кулоновского состояния п. 13.9.1 на неагвидные частицы. Необходимость такого распространения обусловлена тем неудобством, что сумма агвидных частиц может быть неагвидной частицей.

Рассматриваем обобщённую функцию состояния $u \in D_4'(I \times \mathbf{R}^3)$, где $I \subset \mathbf{R}$ связное подмножество прямой. Пусть $m \in \mathbf{N}_o$.

Определение 13.9.3 *Обобщенное состояние — m-кулоновское, если функция состояния $u(x)$ и все её производные до порядка m при каждом $x_0 \in I$ регулярные функции аргумента $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ в окрестности пространственной бесконечности и при любом $\alpha \in {\mathbf{N}_o}^4$, $|\alpha| \le m$ верно*

$$u^{(\alpha)}(x) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^{1+|\alpha|}}\right)$$

при $|\vec{x}| \to \infty$, равномерно по x_0 на любом компакте $K \subset I$.

Сумма m-кулоновских состояний есть m-кулоновское состояние, так что m-кулоновские состояния образуют линейное пространство.

Если одно состояние обобщённой частицы m-кулоновское, то и любое другое её состояние m-кулоновское в силу конкретного вида оператора $T_p(u)$, $p \in P$ — формула (2.5.14).

Обобщённую частицу мы назовём *m-кулоновской* если у неё существует m-кулоновское состояние или эквивалентно, если любое её состояние m-кулоновское. Сумма конечного числа m-кулоновских частиц — m-кулоновская частица. В случае $m = 1$ мы говорим просто *кулоновское* состояние, *кулоновская* обобщённая частица.

Для агвидных частиц определения 1 и 2 эквивалентны.

§13.10 Свойства кулоновского потенциала и свёртки

Для состояния покоя обобщённой лоренцевой частицы согласно формуле (13.2.58) имеет место следующая связь между трансформациями Фурье функции состояния и функции тока

$$\widehat{uf} = \Theta \frac{1}{|\vec{\eta}|^2} \widehat{jf}(\vec{\eta}). \tag{13.10.1}$$

Поэтому в оригиналах

$$uf = \Theta \frac{1}{4\pi}(\,\mathrm{cul} * jf). \tag{13.10.2}$$

Таким образом изучение свойств состояния при заданной функции тока сводится к изучению свойств кулоновского потенциала.

Далее в п. 13.10.1 этого параграфа мы рассмотрим свойства кулоновского потенциала, в п. 13.10.2 — некоторые свойства свёртки и в п. 13.10.3 вернемся к вопросу о кулоновских состояниях.

13.10.1 Свойства кулоновского потенциала.

В этом пункте мы рассматриваем кулоновский потенциал, т.е. свертку

$$v(\vec{x}) = \text{cul} * \varphi \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\varphi(\vec{y})\, dy_1 dy_2 dy_3, \tag{13.10.3}$$

где $\varphi(\vec{x})$ измеримая числовая функция, определенная на $\mathbf{R}^3$. Нас интересует вопрос о том когда существует и какими свойствами обладает функция $v(\vec{x})$ в зависимости от свойств функции $\varphi(\vec{x})$.

Лемма 13.10.1 *Если $\varphi \in L_1(\mathbf{R}^3)$ и $\varphi(x) = 0$ на открытом непустом множестве $G \subset \mathbf{R}^3$, то при $\vec{x} \in G$ интеграл (13.10.3) существует, функция $v|_G$ гармонична и при любом $\alpha \in {\mathbf{N}_o}^3$ и любом $\vec{x} \in G$ справедливо равенство*

$$v^{(\alpha)}(\vec{x}) = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\right)^{(\alpha)} \varphi(\vec{y})\, dy_1 dy_2 dy_3. \tag{13.10.4}$$

Доказательство. В условиях леммы

$$v(\vec{x}) = \iiint\limits_{\mathrm{R}^3 \setminus G} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\varphi(\vec{y})\, dy_1 dy_2 dy_3. \tag{13.10.5}$$

Так как множество G открыто, то если $\vec{a} \in G$, то существует $\mu \in \mathbf{R}_+$, что замкнутый шар $Q\left[\vec{a}, 2\mu\right] \subset G$.

Пусть $\vec{x} \in Q\left[\vec{a}, \mu\right]$, $\vec{y} \in \mathbf{R}^3 \setminus G$, $\alpha \in {\mathbf{N}_o}^3$, тогда функция

$$h(\vec{x}, \vec{y}) \equiv \text{cul}^{(\alpha)}(\vec{x}-\vec{y})\, \varphi(\vec{y}) \tag{13.10.6}$$

удовлетворяет условиям теоремы о дифференцировании интеграла по параметру ([81], с. 794, теорема 115), а именно 1) при почти всяком $\vec{y} \in \mathbf{R}^3 \setminus G$ функция $h(\vec{x}, \vec{y})$ класса $C^{(1)}$ по $\vec{x} \in Q\left[\vec{a}, \mu\right]$; 2) при любом $\vec{x} \in Q\left[\vec{a}, \mu\right]$ и любом $\vec{y} \in \mathbf{R}^3 \setminus G$ верно неравенство

$$|h(\vec{x}, \vec{y})| \le \frac{C_\alpha}{(|\vec{y}| - \mu)^{|\alpha|+1}} \left|\varphi(\vec{y})\right| \le \frac{C_\alpha}{\mu^{|\alpha|+1}} \left|\varphi(\vec{y})\right|, \tag{13.10.7}$$

где функция $|\varphi(\vec{y})| \in L_1(\mathbf{R}^3 \setminus G)$. По теореме 115 из [81] функция $v^{(\alpha)}(\vec{x})$ определена и непрерывна в G при любых $\alpha \in {\mathbf{N}_o}^3$ и верно (13.10.4). Из гармоничности функции $\text{cul}\,(\vec{x}-\vec{y})$ при $\vec{x} \ne \vec{y}$ следует гармоничность функции $v|_G$. ♢

Рассмотрим теперь поведение интеграла (13.10.3) когда функция φ имеет компактный носитель.

Лемма 13.10.2 *Пусть $\varphi \in L_\infty(\mathbf{R}^3)$ и обращается в нуль вне компакта K, тогда выполнены утверждения:*

1) $v \in \bar{C}_0^{(1)}(\mathbf{R}^3) \cap W_2^{(1)}(\mathbf{R}^3)$;
2) $v\Big|_{\mathrm{R}^3 \setminus K} \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^3 \setminus K)$;
3) $\forall \alpha \in {\mathbf{N}_o}^3 \;\Big|\; v^{(\alpha)}(\vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^{(\alpha)+1}}\right)$;
4) *Равенство (13.10.4) верно при всех $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$, если $|\alpha| \le 1$ и верно при всех $\vec{x} \in \mathbf{R}^3 \setminus K$, если $|\alpha| \ge 2$.*

Доказательство. Утверждение 2) и вторая часть утверждения 4) верны по лемме 13.10.1.

Пусть $Q \equiv \left\{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; |\vec{x}| < \mu\right\}$ — открытый шар, содержащий компакт K, тогда в силу условия $\varphi \in L_\infty(\mathbf{R}^3)$ существует положительное число M, что

$$\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3 \;\Big|\; |\varphi(\vec{x})| \le M. \tag{13.10.8}$$

В силу оценки

$$\left|\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\varphi(\vec{y})\right| \le \frac{M}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

интеграл (13.10.3) существует при каждом $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$. Введём 3 интеграла

$$q_\beta(\vec{x}) \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta}\operatorname{cul}(\vec{x}-\vec{y})\right)\varphi(\vec{y})\,dy_1dy_2dy_3\;,\;\; \beta \in \overline{1,3}.$$

Они существуют при любом $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ в силу оценки

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_\beta}\operatorname{cul}(\vec{x}-\vec{y})\varphi(\vec{y})\right| \le \frac{M}{|\vec{x}-\vec{y}|^2}.$$

Функции $v(\vec{x})$ и $\vec{q}(\vec{x}) \equiv (q_1(\vec{x}), q_2(\vec{x}), q_3(\vec{x}))$ согласно теореме Соболева ([60], теорема VI.1, с. 261) непрерывны на $\mathbf{R}^3$ и удовлетворяют соотношениям

$$v(\vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right), \tag{13.10.9}$$

$$\vec{q}(\vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^2}\right) \tag{13.10.10}$$

при $x \to \infty$.

Далее мы докажем следующее утверждение.

Утверждение 13.10.1 *В каждой точке $\vec{x} \in Q$ 3-функция $\vec{q}(\vec{x})$ есть градиент функции $v(\vec{x})$, т.е.*

$$\lim_{|\Delta\vec{x}|\to\infty} \frac{1}{|\Delta\vec{x}|}\left|v(\vec{x}+\Delta\vec{x}) - v(\vec{x}) - \langle\vec{q}(\vec{x}), \Delta\vec{x}\rangle\right| = 0. \tag{13.10.11}$$

Если утверждение 13.10.1 верно, то в силу произвольности шара $Q \supset K$ соотношение $\frac{\partial v}{\partial \vec{x}}(\vec{x}) = \vec{q}^{\top}(\vec{x})$ верно при всех $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ и верно утверждение 4). В силу предыдущего тогда также $v \in C^{(1)}(\mathbf{R}^3)$ и в силу (13.10.9), (13.10.10) тогда также $v \in \bar{C}_0^{(1)}(\mathbf{R}^3)$ и $v \in W_2^{(1)}(\mathbf{R}^3)$, т.е. верно утверждение 1). Утверждение 3) следует из утверждения 4) и оценки интеграла при $|\vec{x}| > \mu$:

$$\left|\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \operatorname{cul}^{(\alpha)}(\vec{x}-\vec{y})\varphi(\vec{y})\,dy_1dy_2dy_3\right| \le M\frac{C_\alpha\mu^3}{(|\vec{x}|-\mu)^{|\alpha|+1}}.$$

Итак, для справедливости леммы 13.10.2 осталось доказать утверждение 13.10.1.

Доказательство утверждения 13.10.1. Согласно определению функций $v(\vec{x})$ и $\vec{q}(\vec{x})$

$$v(\vec{x}+\Delta\vec{x})-v(\vec{x})-\langle\vec{q}(\vec{x}),\Delta\vec{x}\rangle=\iiint\limits_{Q}\Bigg(\,\mathrm{cul}\,(\vec{x}+\Delta\vec{x}-\vec{y})-\,\mathrm{cul}\,(\vec{x}-\vec{y})-$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\,\mathrm{cul}\,(\vec{x}-\vec{y})\right)\Delta\vec{x}\Bigg)\,\varphi(\vec{y})\,dy_1dy_2dy_3,$$

поэтому

$$|v(\vec{x}+\Delta\vec{x})-v(\vec{x})-\langle\vec{q}(\vec{x}),\Delta\vec{x}\rangle|\le \tag{13.10.12}$$

$$M\iiint\limits_{Q}\left|\,\mathrm{cul}\,(\vec{x}+\Delta\vec{x}-\vec{y})-\,\mathrm{cul}\,(\vec{x}-\vec{y})-\left(\frac{\partial}{\partial\vec{x}}(\,\mathrm{cul}\,(\vec{x}-\vec{y}))\right)\Delta\vec{x}\right|\,dy_1dy_2dy_3=$$

$$M\iiint\limits_{Q(\vec{x},\mu)}\left|\,\mathrm{cul}\,(\Delta\vec{x}-\vec{y})-\,\mathrm{cul}\,(-\vec{y})+\left(\frac{\partial}{\partial\vec{y}}(\,\mathrm{cul}\,(-\vec{y}))\right)\Delta\vec{x}\right|\,dy_1dy_2dy_3\le$$

$$\le M\iiint\limits_{Q[0,2\mu]}\left|\,\mathrm{cul}\,(\Delta\vec{x}-\vec{y})-\,\mathrm{cul}\,(-\vec{y})+\left(\frac{\partial}{\partial\vec{y}}(\,\mathrm{cul}\,(-\vec{y}))\right)\Delta\vec{x}\right|\,dy_1dy_2dy_3.$$

Введём обозначения $y'\equiv\vec{y}-\Delta\vec{x}$, $y\equiv\vec{y}$, $\Delta x\equiv\Delta\vec{x}$,

$$w\equiv\,\mathrm{cul}\,(y')-\,\mathrm{cul}\,(-y)+\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{cul}\,(-y)\Delta x=\frac{1}{|y'|}-\frac{1}{|y|}-\frac{\langle y,\Delta x\rangle}{|y|^3}. \tag{13.10.13}$$

Проведём алгебраические преобразования для оценки величины w. Во-первых,

$$\frac{1}{|y'|}-\frac{1}{|y|}=\frac{|y|^2-|y'|^2}{|y'||y|(|y'|+|y|)}=\frac{2\langle y,\Delta x\rangle-|\Delta x|^2}{|y'||y|(|y'|+|y|)}, \tag{13.10.14}$$

поэтому

$$w=\frac{\langle y,\Delta x\rangle}{|y|}\left(\frac{2}{|y'||y|(|y'|+|y|)}-\frac{1}{|y|^2}\right)-\frac{|\Delta x|^2}{|y'||y|(|y'|+|y|)}. \tag{13.10.15}$$

Далее

$$\frac{2}{|y'|(|y'|+|y|)}-\frac{1}{|y|^2}=\frac{2|y|^2-|y'||y|-|y'|^2}{|y'||y|^2(|y'|+|y|)}= \tag{13.10.16}$$

$$\frac{\frac{|y|(|y|^2-|y'|^2)}{(|y|+|y'|)}+(|y|^2-|y'|^2}{|y'||y|^2(|y'|+|y|)}=\frac{\left(\frac{|y|}{|y|+|y'|}+1\right)(2\langle y,\Delta x\rangle-|\Delta x|^2)}{|y'||y|^2(|y'|+|y|)}.$$

Из (13.10.15, 13.10.16) получаем оценку

$$|w|\le 2|\Delta x|\frac{|2\langle y,\Delta x\rangle-|\Delta x|^2|}{|y'||y|^2(|y'|+|y|)}+\frac{|\Delta x|^2}{|y'||y|(|y'|+|y|)}.$$

Откуда

$$\frac{|w|}{|\Delta x|}\le\frac{4|\Delta x|}{|y'||y|(|y'|+|y|)}+\frac{2|\Delta x|^2}{|y'||y|^2(|y'|+|y|)}+\frac{|\Delta x|}{|y'||y|(|y'|+|y|)}. \tag{13.10.17}$$

По неравенству треугольника

$$|y'|+|y|=|\Delta x-y|+|y|\ge|\Delta x|,$$

поэтому из (13.10.17) следует

$$\frac{|w|}{|\Delta x|} \le 4\frac{|\Delta x|}{|y'||y|^2} + \frac{2|\Delta x|}{|y'||y|^2} + \frac{|\Delta x|}{|y'||y|^2} = 7\frac{|\Delta x|}{|y'||y|^2}. \tag{13.10.18}$$

Мы пришли к неравенству

$$\frac{1}{|\Delta\vec{x}|}\left|v(\vec{x}+\Delta\vec{x}) - v(\vec{x}) - \langle\vec{q}(\vec{x}),\Delta\vec{x}\rangle\right| \le \tag{13.10.19}$$

$$7M|\Delta\vec{x}|\iiint\limits_{Q[0,2\mu]} \frac{1}{|\vec{y}-\Delta\vec{x}||\vec{y}|^2}\,dy_1dy_2dy_3.$$

Согласно лемме Соболева ([60], лемма VI.2, с. 253)

$$\iiint\limits_{Q[0,2\mu]} \frac{1}{|\vec{y}-\Delta\vec{x}||\vec{y}|^2}\,dy_1dy_2dy_3 = O(\ln|\Delta\vec{x}|). \tag{13.10.20}$$

Из (13.10.19) и (13.10.20) вытекает утверждение 13.10.1. $\diamondsuit$

Перейдем теперь к случаю когда функция φ не имеет компактного носителя, но убывает на бесконечности степенным образом.

Лемма 13.10.3 *Пусть $\varphi \in L_\infty(\mathbf{R}^3)$ и $\varphi(x) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^\gamma}\right)$, $\gamma > 3$ при $|\vec{x}| \to \infty$, тогда выполнены утверждения:*

1) $v \in \bar{C}_0^{(1)}(\mathbf{R}^3) \cap W_2^{(1)}(\mathbf{R}^3)$;
2) $\forall\alpha \in {\mathbf{N}_o}^3,\ |\alpha| \le 1 \mid v^{(\alpha)}(\vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^{|\alpha|+1}}\right)$ *при* $|\vec{x}| \to \infty$;
3) $\forall\alpha \in {\mathbf{N}_o}^3,\ |\alpha| \le 1\ \forall x \in \mathbf{R}^3 \mid v^{(\alpha)}(\vec{x}) = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \operatorname{cul}^{(\alpha)}(\vec{x}-\vec{y})\varphi(\vec{y})\,dy_1dy_2dy_3$.

Доказательство. Пусть $\mu \in \mathbf{R}_+$ и $\chi(\vec{x})$ — характеристическая функция замкнутого шара Q с центром в нуле, радиуса μ. Разобьём функцию φ на сумму $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где $\varphi_1 \equiv \chi\varphi$, $\varphi_2 \equiv (1-\chi)\varphi$. Функции $\varphi_i \in L_p(\mathbf{R}^3)$, $i \in \overline{1,2}$ при любом $p \in [1,\infty]$ в силу условий $\varphi \in L_\infty(\mathbf{R}^3)$ и $\varphi(\vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^\gamma}\right)$ при $|\vec{x}| \to \infty$. Функция $\varphi_1(\vec{x}) = 0$ вне замкнутого шара Q, а функция $\varphi_2(\vec{x}) = 0$ в замкнутом шаре Q. Тогда функция $v(\vec{x})$ соответственно разбивается на сумму $v = v_1 + v_2$, где $v_1 \equiv \operatorname{cul} * \varphi_1$; $v_2 \equiv \operatorname{cul} * \varphi_2$.

Для функции v_1 верна лемма 13.10.2, а функция v_2 по лемме 13.10.1 внутри шара Q бесконечно дифференцируема и

$$v_2^{(\alpha)}(\vec{x}) = \left(\operatorname{cul}^{(\alpha)} * \varphi_1\right)(\vec{x})$$

при любом $\alpha \in {\mathbf{N}_o}^3$. Получаем при $|\vec{x}| < \mu$, $|\alpha| \le 1$

$$v^{(\alpha)}(\vec{x}) = v_1^{(\alpha)}(\vec{x}) + v_2^{(\alpha)}(\vec{x}) = \left(\operatorname{cul}^{(\alpha)} * \varphi\right)(\vec{x}),$$

причём производные $v^{(\alpha)}(\vec{x})$ при $|\vec{x}| \le 1$ непрерывны внутри шара Q. Так как $\mu \in \mathbf{R}_+$ произвольно, мы доказали, что $v \in C^{(1)}(\mathbf{R}^3)$ и верно утверждение 3).

Функция $(|\varphi(\vec{x})||\vec{x}|^\nu)^p$ суммируема на $\mathbf{R}^3$, если $\nu = 3$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{6}\min\{1, \gamma-3\}$ в силу оценки

$$(|\varphi(\vec{x})||\vec{x}|^\nu)^p = \left(O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^\gamma}\right)|\vec{x}|^\nu\right)^p = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^{p(\gamma-\nu)}}\right),$$

ибо

$$p(\gamma-\nu)=p(\gamma-3)\geq 6.$$

Согласно теореме Соболева ([60], теорема VI.1', с. 261) тогда для интегралов из утверждения 3) выполнена оценка 2).

Мы уже показали, что $v\in C^{(1)}(\mathbf{R}^3)$. Из утверждения 2) тогда следует, что $v\in C_0^{(1)}(\mathbf{R}^3)$ и $v\in W_2^{(1)}(\mathbf{R}^3)$.

13.10.2 Свёртка функций, убывающих в бесконечности степенным образом.

В предыдущем пункте мы рассматривали свойства свёртки с функцией $\operatorname{cul}(\vec{x})\equiv\frac{1}{|\vec{x}|}$ в трёхмерном случае. В этом пункте рассмотрим оценки свёртки двух функций

$$f\equiv f_1*f_2 \tag{13.10.21}$$

заданных на $\mathbf{R}^n$, предполагая, что $f_i(x)=O\left(\frac{1}{|x|^{\lambda_i}}\right)$, $i\in 1,2$ при $|x|\to\infty$, $x\in\mathbf{R}^n$. Нас интересует здесь существование и поведение функции $f(x)$ при достаточно больших $|x|$. Начнем со следующего модельного случая.

Лемма 13.10.4 *Пусть числовые функции $f_i(x)$, $i\in\overline{1,2}$ определены на $\mathbf{R}^n$ неотрицательны, локально суммируемы и существуют неотрицательные числа μ_1, μ_2, C_1, C_2, λ_1, λ_2, что $\lambda_1+\lambda_2>n$ и при $i\in\overline{1,2}$ верно*

$$\forall x\in\mathbf{R}^n,\ |x|\geq\mu_i\ \Big|\ f_i(x)=\frac{C_i}{|x|^{\lambda_i}}. \tag{13.10.22}$$

Тогда при $|x|>2\max\{\mu_1,\mu_2\}$ существует свёртка (13.10.21) и выполнена оценка

$$\frac{1}{|x|^{\lambda_1}}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\lambda_1}C_1\int\limits_{|y|\leq\mu_2}f_2(y)dy\right)+\frac{1}{|x|^{\lambda_2}}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\lambda_2}C_2\int\limits_{|y|\leq\mu_1}f_1(y)dy\right)+$$

$$+C_1C_2\sigma_n n\left[\frac{1}{|x|^{\lambda_1}}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\lambda_1}\int\limits_{\mu_2}^{\frac{|x|}{2}}r^{n-\lambda_2-1}dr\right)+\frac{1}{|x|^{\lambda_2}}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\lambda_2}\int\limits_{\mu_1}^{\frac{|x|}{2}}r^{n-\lambda_1-1}dr\right)\right]$$

$$\leq f(x)\leq \tag{13.10.23}$$

$$\frac{1}{|x|^{\lambda_1}}\left(2^{\lambda_1}C_1\int\limits_{|y|\leq\mu_2}f_2(y)dy\right)+\frac{1}{|x|^{\lambda_2}}\left(2^{\lambda_2}C_2\int\limits_{|y|\leq\mu_1}f_1(y)dy\right)+$$

$$+C_1C_2\sigma_n n\left[\frac{1}{|x|^{\lambda_1}}\left(2^{\lambda_1}\int\limits_{\mu_2}^{\frac{|x|}{2}}r^{n-\lambda_2-1}dr\right)+\frac{1}{|x|^{\lambda_2}}\left(2^{\lambda_2}\int\limits_{\mu_1}^{\frac{|x|}{2}}r^{n-\lambda_1-1}dr\right)+2\int\limits_{\frac{|x|}{2}}^{\infty}r^{n-(\lambda_1+\lambda_2)-1}dr\right].$$

где σ_n — объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$.

Доказательство. Рассмотрим свёртку при $|x|>2\max\{\mu_1,\mu_2\}$

$$f(x)=\int\limits_{\mathbf{R}^n}f_1(x-y)f_2(y)\,dy.$$

Разобьём $\mathbf{R}^n$ на 4 непересекающихся множества

$$A_{1,1} \equiv \left\{ y \in \mathbf{R}^n \;\Big|\; |x-y| \le \frac{|x|}{2} \right\},$$

$$A_{2,1} \equiv \left\{ y \in \mathbf{R}^n \;\Big|\; |y| < \frac{|x|}{2} \right\},$$

$$A_{1,2} \equiv \left\{ y \in \mathbf{R}^n \;\Big|\; \left(|x-y| > \frac{|x|}{2} \right) \wedge (|x-y| \le |y|) \right\},$$

$$A_{2,2} \equiv \left\{ y \in \mathbf{R}^n \;\Big|\; \left(|y| \ge \frac{|x|}{2} \right) \wedge (|x-y| > |y|) \right\}.$$

На множестве $A_{1,1}$ верно $f_2(y) = \frac{C_2}{|y|^{\lambda_2}}$, поэтому и

$$\frac{C_2}{\left(\frac{3}{2}|x|\right)^{\lambda_2}} \le f_2(y) \le \frac{C_2}{\left(\frac{1}{2}|x|\right)^{\lambda_2}}.$$

После интегрирования получаем

$$C_2 \left(\frac{2}{3}\right) \frac{1}{|x|^{\lambda_2}} \int\limits_{A_{1,1}} f_1(x-y)dy \le \int\limits_{A_{1,1}} f_1(x-y) f_2(y) dy \le C_2 2^{\lambda_2} \frac{1}{|x|^{\lambda_2}} \int\limits_{A_{1,1}} f_1(x-y)dy. \tag{13.10.24}$$

Но

$$\int\limits_{A_{1,1}} f_1(x-y)dy = \int\limits_{|y| \le \frac{|x|}{2}} f_1(y)dy = \int\limits_{|y| \le \mu_1} f_1(y)dy + \int\limits_{\mu_1 \le |y| \le \frac{|x|}{2}} \frac{C_1}{|y|^{\lambda_1}} dy = \tag{13.10.25}$$

$$\int\limits_{|y| \le \mu_1} f_1(y)dy + C_1 \sigma_n n \int\limits_{\mu_1}^{\frac{|x|}{2}} r^{n-\lambda_1-1} dr.$$

На множестве $A_{1,2}$ верно $f_1(x-y) = \frac{C_1}{|x-y|^{\lambda_1}}$, $f_2(y) = \frac{C_2}{|y|^{\lambda_2}}$, поэтому

$$\int\limits_{A_{1,2}} f_1(x-y) f_2(y) dy = C_1 C_2 \int\limits_{A_{1,2}} \frac{1}{|x-y|^{\lambda_1} |y|^{\lambda_2}} dy.$$

Кроме того на множестве $A_{1,2}$

$$\frac{1}{|y|^{\lambda_1+\lambda_2}} \le \frac{1}{|x-y|^{\lambda_1} |y|^{\lambda_2}} \le \frac{1}{|x-y|^{\lambda_1+\lambda_2}},$$

поэтому

$$C_1 C_2 \int\limits_{A_{1,2}} \frac{1}{|y|^{\lambda_1+\lambda_2}} dy_1 dy_2 \le \int\limits_{A_{1,2}} f_1(x-y) f_2(y) dy \le C_1 C_2 \int\limits_{A_{1,2}} \frac{1}{|x-y|^{\lambda_1+\lambda_2}} dy. \tag{13.10.26}$$

На множестве $A_{2,2}$ верно $f_1(x-y) = \frac{C_1}{|x-y|^{\lambda_1}}$, $f_2(y) = \frac{C_2}{|y|^{\lambda_2}}$ и

$$\frac{1}{|x-y|^{\lambda_1+\lambda_2}} \le \frac{1}{|x-y|^{\lambda_1} |y|^{\lambda_2}} \le \frac{1}{|y|^{\lambda_1+\lambda_2}},$$

поэтому

$$C_1C_2 \int\limits_{A_{2,2}} \frac{1}{|x-y|^{\lambda_1+\lambda_2}}dy \le \int\limits_{A_{2,2}} f_1(x-y)f_2(y)dy \le C_1C_2 \int\limits_{A_{2,2}} \frac{1}{|y|^{\lambda_1+\lambda_2}}dy. \qquad (13.10.27)$$

Заметим, что

$$\int\limits_{A_{2,2}} \frac{1}{|x-y|^{\lambda_1+\lambda_2}}dy = \int\limits_{A_{1,2}} \frac{1}{|y|^{\lambda_1+\lambda_2}}dy, \qquad (13.10.28)$$

$$\int\limits_{A_{1,2}} \frac{1}{|x-y|^{\lambda_1+\lambda_2}}dy = \int\limits_{A_{2,2}} \frac{1}{|y|^{\lambda_1+\lambda_2}}dy. \qquad (13.10.29)$$

Далее

$$\int\limits_{A_{2,2}} \frac{1}{|y|^{\lambda_1+\lambda_2}}dy \le \int\limits_{|y|\ge\frac{|x|}{2}} \frac{1}{|y|^{\lambda_1+\lambda_2}}dy = \sigma_n n \int\limits_{\frac{|x|}{2}}^{\infty} r^{n-(\lambda_1+\lambda_2)-1}dr. \qquad (13.10.30)$$

Из соотношений (13.10.26–13.10.30) получаем

$$2C_1C_2 \int\limits_{A_{1,2}} \frac{1}{|y|^{\lambda_1+\lambda_2}}dy \le \int\limits_{A_{1,2}\cup A_{2,2}} f_1(x-y)f_2(y)dy \le 2C_1C_2\sigma_n n \int\limits_{\frac{|x|}{2}}^{\infty} r^{n-(\lambda_1+\lambda_2)-1}dr. \qquad (13.10.31)$$

На множестве $A_{2,1}$ верно $f_1(x-y) = \frac{C_1}{|x-y|^{\lambda_1}}$, поэтому

$$C_1\left(\frac{2}{3}\right)^{\lambda_1} \frac{1}{|x|^{\lambda_1}} \int\limits_{A_{2,1}} f_2(y)dy \le \int\limits_{A_{2,1}} f_1(x-y)f_2(y)dy \le C_1 2^{\lambda_1}\frac{1}{|x|^{\lambda_1}} \int\limits_{A_{2,1}} f_2(y)dy \qquad (13.10.32)$$

и

$$\int\limits_{A_{2,1}} f_2(y)dy = \int\limits_{|y|\le\frac{|x|}{2}} f_2(y)dy = \int\limits_{|y|\le\mu_2} f_2(y)dy + \sigma_n nC_2 \int\limits_{\mu}^{\frac{|x|}{2}} r^{n-(\lambda_1+\lambda_2)-1}dr. \qquad (13.10.33)$$

Складывая неравенства (13.10.24, 13.10.31, 13.10.32) с учётом равенств (13.10.25) и (13.10.33), получаем справедливость неравенств (13.10.23). $\diamondsuit$

Пусть функции $g_i(x),\ i \in \overline{1,2}$ локально суммируемы на $\mathbf{R}^n$ и $g_i(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{\lambda_i}}\right),\ i \in \overline{1,2}$ при $|x| \to \infty$ где λ_1, λ_2 — неотрицательные числа. Тогда существуют неотрицательные числа $\mu_i,\ C_i$, что

$$\forall x \in \mathbf{R}^n,\ |x| \ge \mu_i \Big|\ |g_i(x)| \le \frac{C_i}{|x|^{\lambda_i}}. \qquad (13.10.34)$$

Положим

$$f_i(x) \equiv \begin{cases} |g_i(x)| & ,\ |x| < \mu_i; \\ \frac{C_i}{|x|^{\lambda_i}} & ,\ |x| \ge \mu_i. \end{cases}$$

Таким образом, если g_1 и g_2 измеримые функции, заданные на $\mathbf{R}^n$, то переходя к построенным мажорирующим функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$ мы получаем при всех $x \in \mathbf{R}^n$

$$|(g_1 * g_2)(x)| \le (f_1 * f_2)(x). \qquad (13.10.35)$$

В силу проведённого мажорирования и леммы 13.10.4 верна следующая лемма.

Лемма 13.10.5 *Пусть функции $g_i(x)$, $i \in \overline{1,2}$ локально суммируемы на $\mathbf{R}^n$ и удовлетворяют условиям $g_i(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{\lambda_i}}\right)$ при $|x| \to \infty$ с $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 > n$. Пусть $\alpha \equiv \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\beta \equiv \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Тогда свёртка $g(x) \equiv (g_1 * g_2)(x)$ существует при достаточно больших $|x|$ и при $|x| \to \infty$ верно:*

$$g(x) = \begin{cases} O\left(\frac{1}{|x|^{\lambda_1+\lambda_2-n}}\right), & \beta < n; \\ O\left(\frac{\ln|x|}{|x|^{\alpha}}\right), & \beta = n; \\ O\left(\frac{1}{|x|^{\alpha}}\right), & \beta > n. \end{cases} \tag{13.10.36}$$

Леммы 13.10.4, 13.10.5 позволяют оценивать взаимодействие m-кулоновских частиц.

13.10.3 Условия кулоновости досветовых частиц.

Из леммы 13.10.3 и формулы (13.10.2) следует достаточное условие кулоновости.

Теорема 13.10.1 *Если у покоящегося лоренцева агвида функция тока $jf(\vec{x})$ измеримая и ограничена на $\mathbf{R}^3$ и удовлетворяет условию $jf(\vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^{\gamma}}\right)$, $\gamma > 3$ при $|\vec{x}| \to \infty$, то это кулонова натуральная частица.*

Ввиду важности теоремы 13.10.1 введём следующие термины для описания её условий. Через $BT(\mathbf{R}^n)$ обозначим линейное подпространство пространства измеримых ограниченных почти всюду функций $f \in L_\infty(\mathbf{R}^n)$, таких для каждой из которых существуют числа $\lambda > n$ и $C > 0$, что для почти всех $x \in \mathbf{R}^n$ верно

$$|f(x)| \leq \frac{C}{|x|^{\lambda}}, \tag{13.10.37}$$

или эквивалентно $f(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{\lambda}}\right)$ при $|x| \to \infty$. Обозначаем $BT_m(\mathbf{R}^n) \equiv (BT(\mathbf{R}^n))^m$.

Определение 13.10.1 *Лоренцева агвидная частицы добрая, если функция тока $jf \in BT_4(\mathbf{R}^3)$.*

Теорему 1 теперь можно сформулировать в следующем виде: досветовая добрая частица является натуральной кулоновской частицей. Для световых и сверхсветовых частиц мы этого не утверждаем, поэтому будем использовать словосочетания вида "добрая натуральная частица".

13.10.4 Применимость теоремы о свёртке.

В предыдущих пунктах мы сформулировали условия при которых существует свёртка двух функций $h = f * g$. Однако, остался ещё вопрос о том, при каких условиях выполнена теорема а свёртке, т.е. следующее соотношение для образов Фурье

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}, \tag{13.10.38}$$

если $f \in S'(\mathbf{R}^n)$, $g \in S'(\mathbf{R}^n)$. Справедливость равенства (13.10.38) доказана в следующих случаях:

1)$f \in L_1(\mathbf{R}^n)$, $g \in L_p(\mathbf{R}^n)$, $p \in [1,2]$ ([61], с. 29).

2)$f \in S'(\mathbf{R}^n)$, $g \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, где $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ — подпространство обобщённых функций с компактным носителем ([24], с. 25).

3)$f \in S'(\mathbf{R}^n)$, $g \in S(\mathbf{R}^n)$ ([24], с. 26).

4)$f \in L_2(\mathbf{R}^n)$, $g \in L_2(\mathbf{R}^n)$ ([24], с. 26).

Однако, если $f(x) = \frac{1}{|x|}$, то $f \notin L_p(\mathbf{R}^n)$ ни при каком $p \in [1, \infty]$, а применение случаев 2) и 3) требует весьма сильных ограничений на поведение функции $g(x)$ в бесконечности. Поэтому мы докажем формулу (13.10.38) ещё в одном случае.

Обозначим через $S're(\mathbf{R}^n)$ линейное подпространство регулярных порождает функций медленного роста в $S'(\mathbf{R}^n)$, а через $S'red(\mathbf{R}^n)$ — линейное подпространство регулярных обобщённых функций медленного роста таких, что их образ Фурье также регулярная обобщённая функция медленного роста. Верны включения $S'red(\mathbf{R}^n) \subset S're(\mathbf{R}^n) \subset S'(\mathbf{R}^n)$. При $p \in [1, 2]$ имеет место включение $L_p(\mathbf{R}^n) \subset S'red(\mathbf{R}^n)$ ([61], с. 201). По определению предыдущего пункта $BT(\mathbf{R}^n) \subset L_1(\mathbf{R}^n)$.

Лемма 13.10.6 *Пусть $f \in S'red(\mathbf{R}^n)$, $g \in L_1(\mathbf{R}^n)$ и существует свёртка модулей $|f|*|g|$ из класса $S're(\mathbf{R}^n)$ тогда существует свёртка $f*g$ из класса $S'red(\mathbf{R}^n)$ и верно равенство (13.10.38).*

Доказательство. По теореме Римана-Лебега ([61], с. 8) существует образ Фурье $\hat{g} \in \bar{C}_0(\mathbf{R}^n)$, равный

$$\hat{g}(\eta) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} g(x) \exp\left(i \langle \eta, x \rangle\right) dx.$$

По условию леммы $\hat{f} \in S're(\mathbf{R}^n)$ поэтому произведение функций $\hat{f}\hat{g} \in S're(\mathbf{R}^n)$.

Для основной функции $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$, тогда

$$(\hat{f}\hat{g}, \varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\eta)\hat{g}(\eta)\varphi(\eta)d\eta = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\eta)\varphi(\eta) \left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} g(x) \exp\left(i \langle \eta, x \rangle\right) dx \right) d\eta. \quad (13.10.39)$$

По теореме Фубини-Фату ([81], с. 670) существует двойной интеграл

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \left|\hat{g}(\eta)\varphi(\eta)g(x) \exp\left(i \langle \eta, x \rangle\right)\right| dx d\eta = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \left|\hat{f}(\eta)\varphi(\eta)\right| d\eta \int\limits_{\mathbf{R}^n} |g(x)| \, dx, \quad (13.10.40)$$

ибо из условия $g \in L_1(\mathbf{R}^n)$ следует существование интеграла $\int\limits_{\mathbf{R}^n} |g(x)| \, dx$, а из условия $f \in S'red(\mathbf{R}^n)$ —существование интеграла $\int\limits_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\eta)\varphi(\eta)| d\eta$. В силу существования двойного интеграла (13.10.40) по теореме Фубини-Лебега ([81]], с. 664) мы можем менять порядок интегрирования в (13.10.39), получим

$$\left(\hat{f}\hat{g}, \varphi\right) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} g(x) \left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\eta) \exp\left(i \langle \eta, x \rangle\right) \varphi(\eta) d\eta \right) dx. \quad (13.10.41)$$

Так как по условию $\hat{f} \in S're(\mathbf{R}^n)$, то

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\eta) \exp\left(i \langle \eta, x \rangle\right) \varphi(\eta) d\eta = \left(\exp(i \langle \eta, x \rangle \hat{f}(\eta), \varphi(\eta) \right).$$

По свойству трансформации Фурье обобщённая функция $\exp\left(i \langle \eta, x \rangle\right) \hat{f}(\eta)$ является трансформацией Фурье сдвинутой обобщённой функции $f(y - x)$ по аргументу $y \in \mathbf{R}^n$. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\eta) \exp\left(i \langle \eta, x \rangle\right) \varphi(\eta) d\eta = (f(y - x), \hat{\varphi}(y)) = \quad (13.10.42)$$

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(y-x)\hat{\varphi}(y)dy,$$

учитывая регулярность обобщённой функции $f \in Sred(\mathbf{R}^n)$. Подставляя (13.10.42) в (13.10.41), получим

$$\left(\hat{f}\hat{g},\varphi\right) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} g(x)\left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(y-x)\hat{\varphi}(y)dy\right)dx. \tag{13.10.43}$$

Существует повторный интеграл от модулей

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} |\hat{\varphi}(y)|\left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(y-x)|\,|g(x)|\,dx\right)dy = \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\hat{\varphi}(y)|\left(|f| * |g|\right)(y)dy$$

в силу условия существования свёртки $|f|*|g|$ из класса $S\!re(\mathbf{R}^n)$, поэтому по теоремам Фубини-Фату и Фубини-Лебега в (13.10.43) можно поменять порядок интегрирования. Итак, получим

$$(\hat{f}\hat{g},\varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \hat{\varphi}(y)\left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(y-x)g(x)\,dx\right)dy = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \hat{\varphi}(y)(f*g)(y)\,dy =$$

$$= (f*g,\hat{\varphi}) = \left(\widehat{f*g},\varphi\right). \quad \diamondsuit$$

Из лемм 13.10.5 и 13.10.6 получаем.

Лемма 13.10.7 *Пусть измеримое отображение $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ при почти всех $x \in \mathbf{R}^n$ удовлетворяет условию*

$$|f(x)| \le \frac{C}{|x|^\lambda}$$

с константами $C \in \mathbf{R}_+,\ \lambda \in]0,n[$ и $\hat{f} \in S\!re(\mathbf{R}^n)$, а функция $g \in BT(\mathbf{R}^n)$, тогда: 1) существует свёртка $h = f*g$ из класса $L_\infty(\mathbf{R}^n)$; 2) существует $C_1 \in \mathbf{R}_+$, что при почти всех $x \in \mathbf{R}^n$ верно $|h(x)| \le \frac{C_1}{|x|^\lambda}$; 3) $h \in S\!re(\mathbf{R}^n)$; 4) верно (13.10.38).

Следствие 13.10.1 *В условиях леммы 13.10.3 для трансформации Фурье верно $\hat{v}(\eta) = \frac{1}{|\vec{\eta}|^2}\hat{\varphi}(\vec{\eta})$. В условиях теоремы 13.10.1 верны формулы (13.10.1) и(13.10.2).*

13.10.5 Обобщенные теоремы о свёртке.

Для формулирования достаточных условий существования свёртки двух функций введём следующее понятие.

Определение 13.10.2 *Пару функций $f_1,\ f_2$ медленного роста на $\mathbf{R}^n$ назовём абсолютно свёртываемой, если существует почти всюду свёртка модулей функций*

$$|f_1| * |f_2|(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f_1(y)|\,|f_2(x-y)|\,dy \tag{13.10.44}$$

и является функцией медленного роста на $\mathbf{R}^n$.

Напомним ([24], с. 92) что по определению функция f медленного роста иф функция $|f|$ медленного роста. В наших обозначениях f — функция медленного роста иф соответствующая ей регулярная обобщённая функция $f \in \mathcal{S}\!\mathit{re}(\mathbf{R}^n)$.

Если пара функций f_1, f_2 абсолютно свёртываема, то существует свёртка $f_1 * f_2$ из класса функций медленного роста, что следует из существования интеграла (13.10.44). Из определения 13.10.2 также следует

Утверждение 13.10.2 *Если пара функций f_1, f_2 абсолютно свёртываема и пара измеримых функций g_1, g_2 на $\mathbf{R}^n$ удовлетворяет неравенствам*

$$\forall i \in \overline{1,2}\ \forall x \in \mathbf{R}^n \ \Big|\ |g_i(x)| \leq |f_i(x)|, \tag{13.10.45}$$

то пара функций g_1, g_2 абсолютно свёртываема.

Из леммы 13.10.4 получаем следующее следствие

Утверждение 13.10.3 *Пара функций $f_1(x) = |x|^{\lambda_1}$, $f_2(x) = |x|^{\lambda_2}$ с $\lambda_1 \in]0, n[$, $\lambda_2 \in]0, n[$ и $\lambda_1 + \lambda_2 > n$ абсолютно свёртываема и верно неравенство*

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \ \Big|\ (f_1 * f_2)(x) \leq \sigma_n n \left(\frac{|x|}{2}\right)^{n-(\lambda_1+\lambda_2)} \left(\frac{1}{n-\lambda_1} + \frac{1}{n-\lambda_2} + \frac{2}{\lambda_1+\lambda_2-n}\right). \tag{13.10.46}$$

Доказательство. Для $x \in \mathbf{R}^n$, $|x| > 0$ применяем лемму 4 с $(\mu_1 + \mu_2) < \frac{|x|}{2}$ и в неравенстве (13.10.23) переходим к пределу при $\mu_1 \to 0$, $\mu_2 \to 0$. Получаем (13.10.46).

Следствие 13.10.2 *Пусть для пары измеримых на $\mathbf{R}^n$ функций f_1, f_2 верны неравенства*

$$\forall i \in 1, 2\ \forall x \in \mathbf{R}^n \ \Big|\ |f_i(x)| \leq \frac{C_i}{|x|^{\lambda_i}},$$

где $C_i \in \mathbf{R}_+$, $\lambda_i \in]0, n[$, $\lambda_1 + \lambda_2 > n$. Тогда пара функций f_1, f_2 абсолютно свёртываема.

Пусть $f \in \mathcal{S}\!\mathit{re}(\mathbf{R}^n)$ регулярная обобщённая функция медленного роста. Введём при $R \in \mathbf{R}_+$ функцию

$$f_R(x) \equiv \begin{cases} f(x) & , \ |x| \leq R; \\ 0 & , \ |x| > R. \end{cases} \tag{13.10.47}$$

Тогда в $S'(\mathbf{R}^n)$ имеет место сходимость $f_R \to f$ при $R \to \infty$ по теореме Лебега о мажорированной сходимости. В самом деле так как f — функция медленного роста, то для любой основной функции $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$ существует интеграл

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx.$$

Но $|f_R(x)| \leq |f(x)|$ при всех $x \in \mathbf{R}^n$, поэтому

$$\lim_{a\to\infty} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f_R(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx = (f, \varphi).$$

Пусть пара функций f_1, f_2 абсолютно свёртываема, тогда существует их свёртка $f_1 * f_2$ из класса функций медленного роста. По утверждению 13.10.2 при любом

$R \in \mathbf{R}_+$ пара функций f_1, f_{2R} также абсолютно свёртываема и существует свёртка $f_R \equiv f_1 * f_{2R}$ из класса функций медленного роста. Для основной функции $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$

$$(f_R, \varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} f_1(y) f_{2R}(x-y) dy \right) \varphi(x)\, dx = \tag{13.10.48}$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f_1(y) f_{2R}(x-y) \varphi(x)\, dxdy.$$

Справедливо неравенство

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \ \forall y \in \mathbf{R}^n \ \Big| \ |f_1(y) f_{2R}(x-y)\varphi(x)| \le |f_1(y)|\, |f_2(x-y)|\, |\varphi(x)| \tag{13.10.49}$$

и существует интеграл

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f_1(y)|\, |f_{2R}(x-y)|\, |\varphi(x)|\, dxdy$$

по теореме Фубини-Фату ([81], с. 670). Поэтому по теореме Лебега о мажорированной сходимости из (13.10.48, 13.10.49)

$$\lim_{R\to\infty} (f_R, \varphi) = (f, \varphi).$$

Мы доказали справедливость следующего утверждения.

Лемма 13.10.8 *Пусть пара функций f_1, f_2 абсолютно свёртываема, тогда существует свёртка $f_1 * f_2 \in S\!\!\!\!\!\!\;\,'re(\mathbf{R}^n)$ при любом $R \in \mathbf{R}_+$ существует свёртка $f_1 * f_{2R} \in S\!\!\!\!\!\!\;\,'re(\mathbf{R}^n)$ и имеют место сходимости при $R \to \infty$ в пространстве $S'(\mathbf{R}^n)$:*

$$1) f_{2R} \to f_2;\ 2) f_1 * f_{2R} \to f_1 * f_2.$$

При обобщении теоремы о свёртке возникает та трудность, что произведение обобщённых функций может быть не определено. Однако, мы воспользуемся одним частным случаем, когда определение произведения обобщённых функций не вызывает трудностей, а именно при умножении бесконечно дифференцируемой функции на обобщённую функцию.

Лемма 13.10.9 *Пусть f_1 и f_2 — абсолютно свёртываемая пара функций и $\hat{f}_1 \in S\!\!\!\!\!\!\;\,'re(\mathbf{R}^n)$, причём сужение регулярной обобщённой функции $\hat{f}_1$ на открытое множество $U \subset \mathbf{R}^n$ есть бесконечно дифференцируемая функция. Тогда существует свёртка $f_1 * f_2$ из класса $S\!\!\!\!\!\!\;\,'re(\mathbf{R}^n)$ и существует её трансформация Фурье $\widehat{f_1 * f_2}$ из класса $S'(\mathbf{R}^n)$ и для сужений на множество U верно равенство*

$$\widehat{f_1 * f_2}\Big|_U = \hat{f}_1\Big|_U \cdot \hat{f}_2\Big|_U. \tag{13.10.50}$$

Доказательство. В условиях леммы 13.10.9 по лемме 13.10.8 имеют место при $R \to \infty$ сходимости $\widehat{f_{2R}} \to \hat{f}_2$ и $\widehat{f_1 * f_{2R}} \to \widehat{f_1 * f_2}$ в $S'(\mathbf{R}^n)$, а следовательно в $D'(\mathbf{R}^n)$, а следовательно и в $D'(U)$. К функциям f_1 и f_{2R} применима лемма 13.10.6 и поэтому

$$\widehat{f_1 * f_{2R}} = \hat{f}_1 \cdot \hat{f}_{2R}.$$

В $D'(U)$ при $R \to \infty$ верны сходимости

$$\hat{f}_{2R}|_U \to \hat{f}_2|_U$$

и

$$\hat{f}_1|_U \cdot \hat{f}_{2R}|_U \to (\widehat{f_1 * f_2})|_U. \tag{13.10.51}$$

Но так как $\hat{f}_1|_U \in C^{(\infty)}(U)$, то в $D'(U)$

$$\hat{f}_1|_U \cdot \hat{f}_{2R}|_U \to \hat{f}_1|_U \cdot \hat{f}_2|_U. \tag{13.10.52}$$

Из (13.10.51, 13.10.52) следует (13.10.50). $\diamondsuit$

Замечание 13.10.1 *Условия леммы 13.10.9 будут, например, выполнены с* $U = \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, *если* $f_1 = \frac{C_1}{|x|^{\lambda_1}}$, *и*

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \;\Big|\; |f_2(x)| \le \frac{C_2}{|x|^{\lambda_2}},$$

где $C_i \in \mathbf{R}_+$, $\lambda_i \in]0, n[$, $i \in \overline{1,2}$, $\lambda_1 + \lambda_2 > n$.

§13.11 Характеристики агвида

В этом параграфе мы уточним понятие числовых характеристик агвидной частицы и рассмотрим правила их преобразования при изменении состояния.

13.11.1 Суммы Дирака и Тейлора.

Пусть $g(x) \in S'(\mathbf{R}^n)$ обобщённая функция медленного роста над полем чисел $\mathbf{R}$, такая что её трансформация Фурье $\hat{g}(\eta) = S'(\mathbf{R}^n)$ есть регулярная обобщённая функция медленного роста, дифференцируемая порядка $m \in \mathbf{N}_o$ в нуле. Составим функции $\hat{g}(\eta)$ её сумму Тейлора порядка m в нуле (13.5.24):

$$t_m(\hat{g}) \equiv \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}_o{}^n \\ |\alpha| \le m}} \frac{g^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} \eta^\alpha. \tag{13.11.1}$$

Тогда

$$\hat{g}(\vec{\eta}) = t_m(\hat{g})(\eta) + o\left(|\eta|^m\right). \tag{13.11.2}$$

Согласно теории двойственности суммы Дирака и Тейлора п. 13.5.4 сопоставим также функции g сумму Дирака с центром в нуле

$$d_m(g)(x) \equiv \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}_o{}^n \\ |\alpha| \le m}} C_\alpha \delta^{(\alpha)}(x), \tag{13.11.3}$$

где по определению

$$C_\alpha \equiv (i)^{|\alpha|} \frac{\hat{g}^{(\alpha)}(0)}{\alpha!}, \quad \alpha \in \mathbf{N}_o{}^n. \tag{13.11.4}$$

Через

$$MC_\alpha \equiv \langle x^\alpha, g(x) \rangle, \quad \alpha \in \mathbf{N}_o{}^n \tag{13.11.5}$$

обозначим моменты функции g. Если функция g удовлетворяет условиям леммы 13.5.6 т.е. регулярна и существует интеграл $\int\limits_{\mathbf{R}^n}(1+|x|^m)|g(x)|\,dx$, то

$$C_\alpha = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}MC_\alpha, \tag{13.11.6}$$

$$\hat{g}^{(\alpha)}(0) = (i)^{|\alpha|}MC_\alpha \tag{13.11.7}$$

при $|\alpha| \le m$.

Для основной функции $f \in S(\mathbf{R}^n)$

$$\langle f, d_m(g)\rangle = \sum_{\substack{\alpha\in{\mathbf{N}_o}^n \\ |\alpha|\le m}} C_\alpha \left\langle f, \delta^{(\alpha)}\right\rangle = \sum_{\substack{\alpha\in{\mathbf{N}_o}^n \\ |\alpha|\le m}} (-1)^{|\alpha|}C_\alpha f^{(\alpha)}(0). \tag{13.11.8}$$

Поэтому далее мы будем также использовать коэффициенты $C'_\alpha \equiv (-1)^{|\alpha|}C_\alpha$.

В силу соотношения (13.11.4) сумма Тейлора $t_m(\hat{g})$ через коэффициенты Дирака C_α записывается в виде

$$t_m(\hat{g})(\eta) = \sum_{r=0}^{m}(-i)^r \sum_{\substack{\alpha \in {\mathbf{N}_o}^n \\ |\alpha| = r}} C_\alpha\eta^\alpha. \tag{13.11.9}$$

Произвольный однородный действительный полином степени r от n действительных переменных $p(\eta)$ может быть записан в виде

$$p(\eta) = \sum_{\substack{\alpha\in{\mathbf{N}_o}^n \\ |\alpha|=r}} C_\alpha\eta^\alpha, \tag{13.11.10}$$

где $C_\alpha \in \mathbf{R}$. Полином (13.11.10) можно записать в другой форме

$$p(\eta) = \sum_{\beta\in(\overline{1,n})^r} B_\beta\eta^{[\beta]} \equiv \sum_{\beta_1=1}^{n}\sum_{\beta_2=1}^{n}\dots\sum_{\beta_r=1}^{n} B_{(\beta_1,\beta_2,\dots\beta_r)}\eta_{\beta_1}\eta_{\beta_2}\dots\eta_{\beta_r}, \tag{13.11.11}$$

где введены обозначения: $(\beta_1,\beta_2,\dots\beta_r) \equiv \beta \in (\overline{1,n})^r$; $\eta^{[\beta]} \equiv \eta_{\beta_1},\eta_{\beta_2},\dots\eta_{\beta_r}$; $B_\beta = B_{(\beta_1,\beta_2,\dots\beta_r)}$ числовой массив от $\beta_1,\beta_2,\dots\beta_r$. То что переменные $\eta_1\,\eta_2,\dots\eta_n$ коммутативны, учитывается в требовании симметричности массива B_β, т.е. числа $B_{(\beta_1,\beta_2,\dots\beta_r)}$ не изменяются при перестановке любых двух индексов β_i,β_j.

Сопоставим также каждому индексу $\beta \in (\overline{1,n})^r$ частную производную

$$f^{[\beta]}(\eta) \equiv \frac{\partial^r f}{\partial\eta_{\beta_1}\partial\eta_{\beta_2}\dots\partial\eta_{\beta_r}}(\eta) \tag{13.11.12}$$

и момент

$$MB_\beta \equiv \left\langle x^{[\beta]}, g(x)\right\rangle. \tag{13.11.13}$$

Каждому индексу $\beta \in (\overline{1,n})^r$, $r \in \mathbf{N}_o$ сопоставим индекс $\alpha \equiv \alpha(\beta)$, $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n) \in {\mathbf{N}_o}^n$, где α_1 — число единиц в наборе $(\beta_1,\beta_2,\dots\beta_r)$, α_2 — число двоек и т.д., $|\alpha| = r$. В силу равенства

$$\sum_{\substack{\alpha\in{\mathbf{N}_o}^n \\ |\alpha|=r}} C_\alpha\eta^\alpha = \sum_{\beta\in(\overline{1,n}^r} B_\beta\eta^{[\eta]}$$

справедливы равенства при $\alpha = \alpha(\beta)$

$$C_\alpha = \frac{|\alpha|!}{\alpha!} B_\beta, \tag{13.11.14}$$

$$\hat{g}^{(\alpha)} = \hat{g}^{[\beta]}, \tag{13.11.15}$$

$$MC_\alpha = MB_\beta. \tag{13.11.16}$$

Переход от представления стандартного полинома (13.11.10) к представлению (13.11.11) соответствует переходу от нумерации мономов η^α индексами $\alpha \in \mathbf{N}_o{}^n$, $|\alpha| = r$, учитывающей коммутативность переменных $\eta_k, \eta_2, \ldots \eta_n$, к нумерации мономов $\eta^{[\beta]}$ индексами $\beta \in (\overline{1,n})^r$, не учитывающей коммутативность переменных $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$. С помощью новой нумерации сумма Дирака $d_m(g)$ и сумма Тейлора $t_m(\hat{g})$ записываются в виде

$$d_m(g) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{\beta \in (\overline{1,n})^r} B_\beta \delta^{[\beta]}, \tag{13.11.17}$$

$$t_m(\hat{g}) = \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{r!} \sum_{\beta \in (\overline{1,n})^r} \hat{g}^{[\beta]}(0) \eta^{[\beta]}, \tag{13.11.18}$$

причём из соотношений (13.11.4), (13.11.6), (13.11.7) и соотношений (13.11.14)–(13.11.16) следует, что при $\beta \in (\overline{1,n})^r$, $r \in \overline{0,m}$

$$B_\beta = \frac{(i)^r}{r!} \hat{g}^{[\beta]}(0), \tag{13.11.19}$$

$$B_\beta = \frac{(-1)^r}{r!} MB_\beta, \tag{13.11.20}$$

$$\hat{g}^{[\beta]}(0) = (i)^r MB_\beta, \tag{13.11.21}$$

где соотношение (13.11.19) мы считаем выполненным по определению суммы Дирака, а соотношения (13.11.20, 13.11.21) выполнены, если обобщённая функция $g(x)$ удовлетворяет условиям леммы 13.5.6.

Представление однородного полинома в виде (13.11.11) удобно при проведении линейной замены переменных. Пусть $A \in M(n)$ и $\tilde{p}(\eta) \equiv p(A\eta)$, где $p(\eta)$ — полином (13.11.11). Тогда

$$\tilde{p}(\eta) \equiv \sum_{\beta \in (\overline{1,n})^r} \tilde{B}_\beta \eta^{[\beta]} = \sum_{\gamma \in (\overline{1,n})^r} \beta_\gamma (A\eta)^{[\gamma]} =$$

$$\sum_{\gamma_1=1}^{n} \sum_{\gamma_2=1}^{n} \ldots \sum_{\gamma_r=1}^{n} B_{(\gamma_1,\gamma_2,\ldots\gamma_r)} \sum_{\beta_1=1}^{n} A_{\gamma_1,\beta_1} \eta_{\beta 1} \sum_{\beta_2=1}^{n} A_{\gamma_2,\beta_2} \eta_{\beta 2} \ldots \sum_{\beta_r=1}^{n} A_{\gamma_r,\beta_r} \eta_{\beta r} =$$

$$\sum_{\beta \in (\overline{1,n})^r} \left(\sum_{\gamma \in (\overline{1,n})^r} B_{(\gamma_1,\gamma_2,\ldots\gamma_r)} A_{\gamma_1,\beta_1} A_{\gamma_2,\beta_2} \ldots A_{\gamma_r,\beta_r} \right) \eta^{[\beta]}.$$

Откуда при $\beta \in (\overline{1,n})^r$

$$\tilde{B}_\beta = \sum_{\gamma \in (\overline{1,n})^r} B_{(\gamma_1,\gamma_2,\ldots\gamma_r)} A_{\gamma_1,\beta_1} A_{\gamma_2,\beta_2} \ldots A_{\gamma_r,\beta_r}. \tag{13.11.22}$$

При $r = 0$ мы по определению полагаем $(\overline{1,n})^0 \equiv \{0\}$ и $\eta^{[0]} \equiv 1$. Тогда при $\beta = 0$ верно $\alpha(\beta) = 0$ и $C_0 = B_0$, т.е. соответствие $\alpha = \alpha(\beta)$ при $\beta \in (\overline{1,n})^0$ взаимно однозначно.

При $\beta \in (\overline{1,n})^1$ соответствие $\alpha = \alpha(\beta)$ также взаимно-однозначно и индексу $\beta \in \overline{1,n}$ соответствует $\alpha(\beta) = (\underset{\overset{\uparrow}{1}}{0}, \underset{\overset{\uparrow}{2}}{0} \ldots 0, \underset{\overset{\uparrow}{\beta}}{1}, 0, \ldots \underset{\overset{\uparrow}{n}}{0})$. Итак, при $|\alpha(\beta)| \le 1$ нет разницы в использовании коэффициентов C_α или B_β.

13.11.2 Числовые характеристики агвида.

Рассмотрим теперь функцию тока $jf \in S_4'(\mathbf{R}^3)$ обобщённой агвидной частицы. Предположим, что трансформация Фурье $\widehat{jf} \in S_4'(\mathbf{R}^3)$ есть регулярная обобщённая функция, дифференцируемая порядка $m \in \mathbf{N}_o$ в нуле. Тогда

$$\widehat{jf}_k(\vec{\eta}) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha|=r}} \frac{\widehat{jf}_k^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} \vec{\eta}^\alpha + o\left(|\vec{\eta}|^m\right), \ k \in \overline{0,3}. \tag{13.11.23}$$

Определим для функции jf_k её коэффициенты Дирака $C_{k,\alpha}$ и моменты $MC_{k,\alpha}$, где $k \in \overline{0,3}$, $\alpha \in \mathbf{N}_o{}^3$. Согласно формуле (13.11.4)

$$\widehat{jf_k}(\vec{\eta}) = \sum_{r=0}^{m} (-i)^r \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}_o{}^3 \\ |\alpha|=r}} C_{k,\alpha} \vec{\eta}^\alpha + o\left(|\vec{\eta}|^m\right), \ k \in \overline{0,3}. \tag{13.11.24}$$

Аналогичным образом для функции jf_k определены её коэффициенты Дирака $B_{k,\beta}$, производные $\widehat{jf}_k^{[\beta]}(0)$ и моменты $MB_{k,\beta}$ при $k \in \overline{0,3}$, $\beta \in (\overline{1,3})^r$, $r \in \mathbf{N}_o$. Числа $C_{k,\alpha}$, $MC_{k,\alpha}$, $\widehat{jf}_k^{(\alpha)}(0)$ и $B_{k,\beta}$, $MB_{k,\beta}$, $\widehat{jf}_k^{[\beta]}(0)$ мы будем называть *характеристиками* агвида. Число $|\alpha|$ или $|\alpha(\beta)|$ мы называем *порядком* характеристики.

Функция тока $j(x)$ удовлетворяет условию $\frac{\partial j_k}{\partial x_k}(x) = 0$, эквивалентному для агвида в образах Фурье условию

$$\left\langle \vec{\eta}, \widehat{\vec{jsf}}(\vec{\eta}) \right\rangle = 0. \tag{13.11.25}$$

Поэтому характеристики $C_{k,\alpha}$ не являются все независимыми. В силу вида дополнительного условия (13.11.25) для выяснения числа независимых характеристик вместо функции тока jf удобно рассматривать функцию псевдотока jsf или функцию кватитока jtf. Характеристики функций jsf_k и jtf_k мы будем обозначать теми же символами, что и характеристики функции jf_k с добавлением букв s или t соответственно. Например, $Cs_{k,\alpha}$ — коэффициент Дирака функции jsf_k, $MBt_{k,\beta}$ — момент функции jtf_k при нумерации индексом $\beta \in (\overline{1,3})^r$.

Перейдем к закону преобразования коэффициентов Дирака $B_{k,\beta}$, $Bs_{k,\beta}$, $Bt_{k,\beta}$ при изменении состояния частицы. Предварительно договоримся объединять коэффициента Дирака в 3 и 4-мерные вектора

$$\vec{B}_\beta \equiv \begin{pmatrix} B_{1,\beta} \\ B_{2,\beta} \\ B_{3,\beta} \end{pmatrix}, \ B_\beta \equiv \begin{pmatrix} B_{0,\beta} \\ B_{1,\beta} \\ B_{2,\beta} \\ B_{3,\beta} \end{pmatrix} \tag{13.11.26}$$

(аналогично для $Bs_{k,\beta}$ и $Bt_{k,\beta}$).

Закон преобразования функции тока в образах Фурье согласно (13.2.60) есть

$$\widehat{\widehat{jf}}(\vec{\eta}) = \frac{1}{|\det R|} G^{-1} \widehat{jf}(\vec{\eta}). \tag{13.11.27}$$

Отсюда, приравнивая однородные полиномы одинаковых степеней, согласно правилу преобразования однородного полинома при линейной замене аргумента (13.11.22) получаем для $\beta \in (\overline{1,3})^r$

$$\tilde{B}_\beta = \frac{1}{|\det R|} G^{-1} \sum_{\gamma \in (\overline{1,3})^r} B_{(\gamma_1,\gamma_2,\ldots\gamma_r)} R^{-1\top}_{\gamma_1,\beta_1} R^{-1\top}_{\gamma_2,\beta_2} \ldots R^{-1\top}_{\gamma_r,\beta_r}. \tag{13.11.28}$$

Закон преобразования функции квазитока (13.2.52) в образах Фурье имеет вид

$$\widehat{\widetilde{jtf}}(\vec{\eta}) = \frac{1}{|\det R|} \begin{pmatrix} (\det R)^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} \widehat{jtf}(R^{-1\top}\vec{\eta}). \tag{13.11.29}$$

Откуда согласно формуле (13.11.22) для $\beta \in (\overline{1,3})^r$ имеем

$$\widetilde{Bt}_{0,\beta} = \frac{1}{|\det R| \det R} \sum_{\gamma \in (\overline{1,3})^r} Bt_{0,(\gamma_1,\gamma_2,\ldots\gamma_r)} R^{-1\top}_{\gamma_1,\beta_1} R^{-1\top}_{\gamma_2,\beta_2} \ldots R^{-1\top}_{\gamma_r,\beta_r}, \tag{13.11.30}$$

$$\widetilde{\overrightarrow{Bt}}_\beta = \frac{1}{|\det R| \det R} R^{-1} \sum_{\gamma \in (\overline{1,3})^r} \overrightarrow{Bt}_{(\gamma_1,\gamma_2,\ldots\gamma_r)} R^{-1\top}_{\gamma_1,\beta_1} R^{-1\top}_{\gamma_2,\beta_2} \ldots R^{-1\top}_{\gamma_r,\beta_r}. \tag{13.11.31}$$

Так как $\vec{js} = \vec{jt}$, то $\overrightarrow{Bs}_\beta = \overrightarrow{Bt}_\beta$ и правило преобразования характеристик $\overrightarrow{Bs}_\beta$ совпадает с (13.11.31). Для нулевой компоненты псевдотока правило преобразования псевдотока (13.2.21) даёт

$$\widehat{\widetilde{jsf}}_0(\vec{\eta}) = \frac{1}{|\det R|} \left((\det R) \widehat{jsf}_0(R^{-1\top}\vec{\eta}) + \left\langle \vec{\xi}, \widehat{\overrightarrow{jsf}}(R^{-1\top}\vec{\eta}) \right\rangle \right). \tag{13.11.32}$$

Откуда получаем при $\beta \in (\overline{1,3})^r$

$$\widetilde{Bs}_{0,\beta} = \operatorname{sign}(\det R) \left(\sum_{\gamma \in (\overline{1,3})^r} \left(Bs_{0,\gamma} + \frac{1}{\det R} \left\langle \vec{\xi}, \overrightarrow{Bs}_\gamma \right\rangle \right) R^{-1\top}_{\gamma_1,\beta_1} R^{-1\top}_{\gamma_2,\beta_2} \ldots R^{-1\top}_{\gamma_r,\beta_r} \right). \tag{13.11.33}$$

Так как функция jf выражается через функцию jsf по формуле

$$jf = l\, jsf_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ \overrightarrow{jsf} \end{pmatrix} \tag{13.11.34}$$

в силу (13.2.19), то коэффициенты Дирака $B_{k,\beta}$ следующим образом выражаются через коэффициенты Дирака $Bs_{k,\beta}$ при $\beta \in (\overline{1,3})$

$$B_{0,\beta} = Bs_{0,\beta}, \tag{13.11.35}$$

$$\vec{B}_\beta = \vec{l} Bs_{0,\beta} + \overrightarrow{Bs}_\beta. \tag{13.11.36}$$

В несветовом случае функция jf выражается через функцию jtf по формуле

$$jf = \frac{1}{1 - |\vec{l}|^2} l \langle l, jt \rangle + \begin{pmatrix} 0 \\ \overrightarrow{jtf} \end{pmatrix} \tag{13.11.37}$$

в силу формул (13.2.38) и (3.6.29). Откуда для коэффициента Дирака получаем

$$B_{0,\beta} = \frac{1}{1 - |\vec{l}|^2} \langle l, Bt_\beta \rangle, \tag{13.11.38}$$

$$\vec{B}_\beta = \vec{l}\frac{1}{1-|\vec{l}|^2}\langle l, Bt_\beta\rangle + \overrightarrow{Bt}_\beta. \tag{13.11.39}$$

Запишем функцию $\widehat{jsf}(\vec{\eta})$ через коэффициенты Дирака $C_{k,\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{N_o}^3$

$$\widehat{jsf}_0(\vec{\eta}) = \sum_{r=0}^{m}(-i)^r \sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{N_o}^3\\|\alpha|=r}} C_{0,\alpha}\vec{\eta}^\alpha + o\left(|\vec{\eta}|^m\right), \tag{13.11.40}$$

$$\widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta}) = \sum_{r=0}^{m}(-i)^r \sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{N_o}^3\\|\alpha|=r}} C_\alpha\vec{\eta}^\alpha + o\left(|\vec{\eta}|^m\right) \tag{13.11.41}$$

и рассмотрим вопрос о числе независимых коэффициентов $C_{k,\alpha}$ в этом представлении. На функции $\widehat{jsf}_k(\vec{\eta})$ есть одно ограничение (13.11.25), поэтому все коэффициенты $C_{0,\alpha}$ свободны, а коэффициенты C_α удовлетворяют при данном $r = |\alpha|$ системе

$$\left\langle \vec{\eta}, \sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{N_o}^3\\|\alpha|=r}} \vec{C}_\alpha\vec{\eta}^\alpha \right\rangle = 0. \tag{13.11.42}$$

Перейдём к рассмотрению уравнения (13.11.42).

13.11.3 Два свойства однородных функций.

Рассмотрим однородную степени $m \in \mathbf{R}$ числовую функцию $f(x)$, заданную и непрерывно дифференцируемую на открытом множестве $W \subset \mathbf{R}^n$. Условие однородности степени m означает выполнение равенства

$$f(tx) = t^m f(x) \tag{13.11.43}$$

при $t \in \mathbf{R}_+,\ x \in W,\ tx \in W$. Тогда справедлива формула Эйлера для однородной функции в W

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x)x = mf(x). \tag{13.11.44}$$

Векторную функцию $p : W \to \mathbf{R}^n$ мы называем однородной степени m, если каждая её скалярная компонента однородная функция степени m.

Лемма 13.11.1 *Если $p(x)$ — непрерывно дифференцируемая однородная степени $m \in \mathbf{R}$ вектор-функция на открытом множестве $W \subset \mathbf{R}^n$ и на W верно равенство*

$$\langle x, p(x)\rangle = 0 \tag{13.11.45}$$

то на W верно равенство

$$(m+1)p(x) = \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^\top\right)x. \tag{13.11.46}$$

Доказательство. Дифференцируя равенство (13.11.45) по x_k получаем равенство

$$p_k(x) = -\left\langle x, \frac{\partial p}{\partial x_k}(x)\right\rangle = -\left(\frac{\partial p}{\partial x_k}\right)^{\top}(x)x. \qquad (13.11.47)$$

Согласно однородности верна формула Эйлера

$$mp_k(x) = \frac{\partial p_k}{\partial x}(x)x. \qquad (13.11.48)$$

Складываем равенства (13.11.47) и (13.11.48), получаем

$$(m+1)p_k(x) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial x}(x) - \left(\frac{\partial p}{\partial x_k}\right)^{\top}(x)\right)x = \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{\top}\right)x\right)_k.$$

$\diamondsuit$

Лемма 13.11.2 *Если $p(x)$ —непрерывно дифференцируемая однородная степени $m \in \mathbf{R}$ вектор-функция на открытом множестве $W \subset \mathbf{R}^n$ и любых $k, s \in \overline{1,n}$ на множестве W верно равенство*

$$\begin{vmatrix} x_k & p_k(x) \\ x_s & p_s(x) \end{vmatrix} = 0, \qquad (13.11.49)$$

то на множестве W верно равенство

$$(m+n-1)p(x) = \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial p_2}{\partial x_2}(x) + \ldots \frac{\partial p}{\partial x_k}(x)\right)x. \qquad (13.11.50)$$

Доказательство. Продифференцируем равенство (13.11.49) по x_k. При $k \neq s$ получим

$$p_s(x) = -x_k\frac{\partial p_s}{\partial x_k}(x) + x_s\frac{\partial p_k}{\partial x_k}(x), \qquad (13.11.51)$$

а при $k = s$ получим

$$0 = -x_k\frac{\partial p_s}{\partial x_k}(x) + x_k\frac{\partial p_k}{\partial x_k}(x). \qquad (13.11.52)$$

Суммируя (13.11.51, 13.11.52), получаем

$$(n-1)p_s(x) = -\sum_{k=1}^{n} x_k\frac{\partial p_s}{\partial x_k}(x) + x_s\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial p_k}{\partial x_k}(x). \qquad (13.11.53)$$

По условию однородности

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\frac{\partial p_s}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial p_s}{\partial x}(x)x = mp_s(x). \qquad (13.11.54)$$

Из (13.11.53) и (13.11.54) следует (13.11.50). $\diamondsuit$

В трехмерном случае из лемм 1, 2 получаем следствия.

Следствие 13.11.1 *Пусть векторное поле $\vec{p}(\vec{x})$ непрерывно дифференцируемо, однородно степени $m \in \mathbf{R}$ на открытом множестве $W \subset \mathbf{R}^3$ и удовлетворяет на этом множестве условно*

$$\langle\vec{x}, \vec{p}(\vec{x})\rangle = 0, \qquad (13.11.55)$$

тогда на множестве W

$$(m+1)\vec{p}(\vec{x}) = [\,rot\,\vec{p}(\vec{x}), \vec{x}]\,. \qquad (13.11.56)$$

В самом деле, в трёхмерном случае

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{x}} - \left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{x}}\right)^{\top} = \mathrm{Sw}\ (\ rot\, \vec{p}(\vec{x})) \tag{13.11.57}$$

в обозначениях п. 11.3.5. Тогда согласно (11.3.27)

$$\mathrm{Sw}\ (\ rot\, \vec{p}(\vec{x}))\, \vec{x} = [\ rot\, \vec{p}(\vec{x}), \vec{x}]\,.$$

Следствие 13.11.2 *Пусть векторное поле $\vec{p}(\vec{x})$ непрерывно дифференцируемо, однородно степени $m \in \mathbf{R}$ на открытом множестве $W \subset \mathbf{R}^3$ и удовлетворяет на этом множестве условию*

$$[\vec{x}, \vec{p}(\vec{x})] = 0, \tag{13.11.58}$$

тогда на множестве W

$$(m+2)\vec{p}(\vec{x}) = (\ div\, \vec{p}(\vec{x}))\, \vec{x}. \tag{13.11.59}$$

13.11.4 Множество решений уравнения $\langle \vec{x}, \vec{p}(\vec{x}) \rangle = 0$ в однородных полиномах.

Обозначим через UP_m – линейное пространство скалярных однородных полиномов степени $m \in \mathbf{N}_o$ над полем $\mathbf{R}$ от трёх вещественных переменных $(x_1, x_2, x_3) \equiv \vec{x}$. Его линейная размерность

$$\dim\ UP_m = C(m+2, 2) = \frac{(m+2)(m+1)}{2}. \tag{13.11.60}$$

Через VUP_M обозначим линейное пространство 3-векторных однородных полиномов степени $m \in \mathbf{N}_o$ над полем $\mathbf{R}$ от трёх вещественных переменных $\vec{x}$. Его линейная размерность

$$\dim\ VUP_m = 3 \dim\ UP_m = 3C(m+2, 2) = \frac{3}{2}(m+2)(m+1). \tag{13.11.61}$$

Через $RVUP_m$ обозначим линейное пространство векторных однородных полиномов $\vec{p}(\vec{x}) \in VUP_m$, являющихся решением уравнения

$$\langle \vec{x}, \vec{p}(\vec{x}) \rangle = 0. \tag{13.11.62}$$

Для любого однородного полинома $\vec{q}(\vec{x}) \in VUP_{m-1}$ однородный полином

$$\vec{p}(\vec{x}) = [\vec{q}(\vec{x}), \vec{x}] \tag{13.11.63}$$

есть решение уравнения (13.11.62) в классе VUP_m. Наоборот, согласно следствию 13.11.1 любое решение $\vec{p}(\vec{x}) \in RVUP_m$ представимо в виде (13.11.63) с $\vec{q}(\vec{x}) \in VUP_{m-1}$. Итак, справедливо представление при любом $m \in \mathbf{N}_o$

$$RVUP_m = [VUP_{m-1}, \vec{x}]\,. \tag{13.11.64}$$

Мы доопределим при $m = -1$ и $m = -2$ пространства $UP_m \equiv \{0\}$ и $VUP_m \equiv \{0\}$ для понимания соотношения (13.11.64) при $m = 0$.

Определим линейное отображение $H_m : VUP_{m-1} \to VUP_m$ при $m \in \mathbf{N}_o$, сопоставляя $\vec{q}(\vec{x}) \in VUP_{m-1}$ полином $\vec{p}(\vec{x}) \in VUP_m$ $H_m(\vec{q}) \equiv \vec{p}$ по формуле (13.11.63). Согласно формуле (13.11.64)

$$\dim\ RVUP_m = \dim\ VUP_{m-1} - \dim\ \ker\ H_m. \tag{13.11.65}$$

Но $\vec{q}(\vec{x}) \in \ker\ H_m$ иф $\vec{q}(\vec{x}) = r(\vec{x})\vec{x}$, где $r(\vec{x}) \in UP_{m-2}$ т.е.

$$\ker\ H_m = \vec{x}UP_{m-2}. \tag{13.11.66}$$

и

$$\dim\ \ker\ H_m = \dim\ UP_{m-2} = C(m,2) = \frac{m(m-1)}{2}. \tag{13.11.67}$$

Итак, согласно (65) получаем

$$\dim\ RVUP_m = \frac{3}{2}(m+1)m - \frac{m(m-1)}{2} = m(m+2). \tag{13.11.68}$$

При $m = 0$ и $m = 1$ $\dim\ker H_m = 0$, отображение H_m инъективно и представление решений $\vec{p}(\vec{x}) \in RVUP_m$ в виде (13.11.63) однозначно. При $m = 2, 3, \ldots$ имеем $\dim\ker H_m = \frac{m(m-1)}{2} > 0$ и представление решения $\vec{p}(\vec{x}) \in RVUP_m$ в форме (13.11.63) не однозначно.

При $m = 2$ имеем $\ker H_2 = \vec{x}UP_0 = \vec{x}\mathbf{R}$ и $\dim\ker H_2 = 1$. В этом случае $\dim VUP_{m-1} = \dim VUP_1 = 9$. В этом случае $\vec{q}(\vec{x}) \in VUP_1$ однозначно представляется в форме

$$\vec{q}(\vec{x}) = F\vec{x}, \tag{13.11.69}$$

где $F \in M(3)$. Но разные матрицы $F \in M(3)$ могут давать одно и то же решение $\vec{p}(\vec{x}) \in RVUP_2$ вида

$$\vec{p}(\vec{x}) = [F\vec{x}, \vec{x}]. \tag{13.11.70}$$

Чтобы однозначно занумеровать решения $\vec{p}(\vec{x}) \in RVUP_2$ матрицами F в форме (13.11.70), мы введём линейное подпространство матриц с нулевым следом

$$Mt(3) \equiv \left\{F \in M(3)\ \middle|\ \mathrm{tr}\ F = 0\right\}. \tag{13.11.71}$$

Тогда $Mt(3)\vec{x} \subset VUP_1$ и сужение линейного отображения H_2 на линейное подпространство $Mt(3)\vec{x}$ инъективно и

$$H_2\left(Mt(3)\vec{x}\right) = H_2\left(M(3)\vec{x}\right) = H_2(VUP_1) = RVUP_2, \tag{13.11.72}$$

т.е. каждое решение $\vec{p}(\vec{x}) \in RVUP_2$ однозначно представимо в виде (13.11.70) с $F \in Mt(3)$.

В самом деле, если $G \in M(3)$, то матрица $F \equiv G - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\ G)E$ принадлежит $Mt(3)$ и

$$H_2(F\vec{x}) = [F\vec{x}, \vec{x}] = [G\vec{x}, \vec{x}] - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\ G\,[\vec{x}, \vec{x}] = [G\vec{x}, \vec{x}] = H_2(G\vec{x}),$$

что доказывает (13.11.72).

Отображение $H_2|_{Mt(3)\vec{x}}$ инъективно, ибо если $H_2(F\vec{x}) = 0$ и $F \in Mt(3)$, то $[F\vec{x}, \vec{x}] = 0$ и существует число $\lambda \in \mathbf{R}$, что $F\vec{x} = \lambda\vec{x}$, т.е. $F = \lambda E$. Но равенство $0 = \mathrm{tr}(F) = 3\lambda$ влечет $\lambda = 0$, влечет $F = 0$.

Итак, существование и единственность представления полинома $\vec{p}(\vec{x}) \in RVUP_2$ в виде (13.11.70) с $F \in Mt(3)$ доказана.

13.11.5 Характеристики вектора псевдотока.

В условиях п. 13.11.2 для трансформации Фурье функции псевдотока справедливо представление

$$\widehat{jsf}_0(\vec{\eta}) = \sum_{r=0}^{m} (-i)^r \sum_{\beta \in (\overline{1,3})^r} Bs_{0,\beta} \vec{\eta}^{[\beta]} + o\left(|\vec{\eta}|^m\right), \tag{13.11.73}$$

$$\widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta}) = \sum_{r=0}^{m} (-i)^r \sum_{\beta \in (\overline{1,3})^r} \overrightarrow{Bs}_{\beta} \vec{\eta}^{[\beta]} + o\left(|\vec{\eta}|^m\right). \tag{13.11.74}$$

Число свободных характеристик порядка r для функции $\widehat{jsf}_0(\vec{\eta})$ равно размерности $\dim\ UP_r = C(r+2,2) = \frac{(r+2)(r+1)}{2}$. Число свободных характеристик порядка r для функции $\widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta})$ равно согласно предыдущему пункту размерности $\dim\ RVUP_r = r(r+2)$. Итак, число свободных характеристик порядка r равно:

r	0	1	2	3	4	$\cdots$	m
$\widehat{jsf}_0(\vec{\eta})$	1	3	6	10	15	$\cdots$	$\frac{(m+2)(m+1)}{2}$
$\widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta})$	0	3	8	15	24	$\cdots$	$(m+2)m$
$\widehat{jsf}(\vec{\eta})$	1	6	14	25	39	$\cdots$	$\frac{(m+2)(3m+1)}{2}$

Далее при $m = 2$ мы фиксируем следующее представление трансформации Фурье функции псевдотока $\widehat{jsf}(\vec{\eta})$:

$$\widehat{jsf}_0(\vec{\eta}) = e + i\left\langle \vec{d}, \vec{\eta}\right\rangle - \langle\ Qv\vec{\eta}, \vec{\eta}\rangle + o\left(|\vec{\eta}|^2\right), \tag{13.11.75}$$

$$\widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta}) = i\left[\vec{S}, \vec{\eta}\right] - [F\vec{\eta}, \vec{\eta}] + o\left(|\vec{\eta}|^2\right), \tag{13.11.76}$$

где введённые величины мы соответственно называем:
$e \in \mathbf{R}$ — *заряд*,
$\vec{d} \in \mathbf{R}^3$ — *дипольный момент*,
$Qv \in Ms(3)$ — *квадр*,
$\vec{S} \in \mathbf{R}^3$ — *спин*,
$F \in Mt(3)$ — *квин*.

Утверждение 13.11.1 *Коэффициенты Дирака $Bs_{k,\beta}$ до второго порядка выражаются через величины $e, \vec{d},\ Qv, \vec{S}, F$ следующим образом:*

Порядок 0.

$$Bs_{0,0} = e; \tag{13.11.77}$$

$$\overrightarrow{Bs}_0 = 0. \tag{13.11.78}$$

Порядок 1.

$$Bs_{0,\beta} = -d_\beta, \quad \beta \in \overline{1,3}; \tag{13.11.79}$$

$$Bs_{\nu,\beta} = e_{\nu\beta\mu} S_\mu, \quad \nu \in \overline{1,3}, \quad \beta \in \overline{1,3}. \tag{13.11.80}$$

Порядок 2.

$$Bs_{0,(\beta_1,\beta_2)} = \ Qv_{\beta_1,\beta_2}, \quad \beta_1 \in \overline{1,3}, \quad \beta_2 \in \overline{1,3}; \tag{13.11.81}$$

$$Bs_{\nu,(\beta_1,\beta_2)} = \frac{1}{2}\left(e_{\nu,\tau,\beta_2} F_{\tau,\beta_1} + e_{\nu,\tau,\beta_1} F_{\tau,\beta_2}\right),\ \nu \in \overline{1,3},\ \beta_1 \in \overline{1,3},\ \beta_2 \in \overline{1,3}. \tag{13.11.82}$$

Доказательство. Доказательства требуют лишь формулы (13.11.80, 13.11.82). Сравнивая (13.11.74) и (13.11.76) при $r=1$, получаем

$$-\left[\vec{S},\vec{\eta}\right]=\sum_{\beta=1}^{3}\overrightarrow{Bs}_{\beta}\eta_{\beta},$$

или, вводя единичный вектор $\vec{k}_\beta$ вдоль β -оси,

$$\overrightarrow{Bs}_{\beta}=\left[\vec{k}_\beta,\vec{S}\right].$$

Что в координатах даёт формулу (13.11.80):

$$Bs_{\nu,\beta}=e_{\nu\tau\mu}\delta_{\tau\beta}S_\mu=e_{\nu\beta\mu}S_\mu.$$

При $r=2$ из формул (13.11.74, 13.11.76) получаем

$$[F\vec{\eta},\vec{\eta}]=\sum_{\beta_1=1}^{3}\sum_{\beta_2=1}^{3}\overrightarrow{Bs}_{(\beta_1,\beta_2)}\eta_{\beta_1}\eta_{\beta_2}. \tag{13.11.83}$$

При $\beta_1=\beta_2$ из (13.11.83) следует

$$\left[F\vec{k}_{\beta_1},\vec{k}_{\beta_2}\right]=\overrightarrow{Bs}_{(\beta_1,\beta_2)}, \tag{13.11.84}$$

а при $\beta_1\neq\beta_2$ из (13.11.83) следует

$$2\overrightarrow{Bs}_{(\beta_1,\beta_2)}=\left[F\vec{k}_{\beta_1},\vec{k}_{\beta_2}\right]+\left[F\vec{k}_{\beta_2},\vec{k}_{\beta_1}\right]. \tag{13.11.85}$$

Итак, из (13.11.84), (13.11.85)

$$\overrightarrow{Bs}_{(\beta_1,\beta_2)}=\frac{1}{2}\left(\left[F\vec{k}_{\beta_1},\vec{k}_{\beta_2}\right]+\left[F\vec{k}_{\beta_2},\vec{k}_{\beta_1}\right]\right),\ \beta_1\in\overline{1,3},\ \beta_2\in\overline{1,3}. \tag{13.11.86}$$

Отсюда в координатах

$$Bs_{\nu,(\beta_1,\beta_2)}=\frac{1}{2}\left(e_{\nu,\tau,\mu}F_{\tau,\omega}\delta_{\omega,\beta_1}\delta_{\mu,\beta_2}+e_{\nu,\tau,\mu}F_{\tau,\omega}\delta_{\omega,\beta_2}\delta_{\mu,\beta_1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e_{\nu,\tau,\beta_2}F_{\tau,\beta_1}+e_{\nu,\tau,\beta_1}F_{\tau,\beta_2}\right),\ \nu\in\overline{1,3},\ \beta_1\in\overline{1,3},\ \beta_2\in\overline{1,3},$$

что доказывает (13.11.82). ♢

Лемма 13.11.3 *При изменении состояния агвида справедливы следующие правила преобразования:*

$$\tilde{e}=\sigma(R)e, \tag{13.11.87}$$

$$\tilde{\vec{d}}=\sigma(R)R^{-1}\left(\vec{d}+\frac{1}{\det R}\left[\vec{\xi},\vec{S}\right]\right), \tag{13.11.88}$$

$$\widetilde{Qv}=\sigma(R)R^{-1}\left(\ Qv+\frac{1}{2\det R}\left(\mathrm{Sw}\,(\vec{\xi})F+(\mathrm{Sw}\,(\xi)F)^{\top}\right)\right)R^{-1\top}, \tag{13.11.89}$$

$$\tilde{\vec{S}}=\frac{\sigma(R)}{(\det R)^2}R^{\top}\vec{S}, \tag{13.11.90}$$

$$\tilde{F} = \frac{\sigma(R)}{(\det R)^2} R^\top F R^{-1\top}, \tag{13.11.91}$$

где $\sigma(R) \equiv \operatorname{sign}(\det R)$,

$$\operatorname{Sw}(\vec{\xi}) \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & +\xi_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Согласно формуле преобразования трансформаций Фурье функции квазитока (13.11.29) и равенству $\vec{\tilde{js}} = \vec{jt}$ имеем

$$\widehat{\vec{\tilde{jsf}}}(\vec{\eta}) = \frac{\sigma(R)}{\det R} R^{-1} \widehat{\vec{jsf}}(R^{-1\top}\vec{\eta}). \tag{13.11.92}$$

Поэтому в силу представления (13.11.76) имеем

$$\left[\tilde{\vec{S}}, \vec{\eta}\right] = \frac{\sigma(R)}{\det R} R^{-1} \left[\vec{S}, R^{-1\top}\vec{\eta}\right], \tag{13.11.93}$$

$$\left[\tilde{F}\vec{\eta}, \vec{\eta}\right] = \frac{\sigma(R)}{\det R} R^{-1} \left[F R^{-1\top}\vec{\eta}, R^{-1\top}\vec{\eta}\right]. \tag{13.11.94}$$

По свойству векторного произведения (3.6.88) верны равенства

$$R^{-1}\left[\vec{S}, R^{-1\top}\vec{\eta}\right] = \det(R^{-1\top}) R^{-1} R \left[R^\top \vec{S}, \vec{\eta}\right] = \frac{1}{\det R}\left[R^\top \vec{S}, \vec{\eta}\right], \tag{13.11.95}$$

$$R^{-1}\left[F R^{-1\top}\vec{\eta}, R^{-1\top}\vec{\eta}\right] = \det(R^{-1\top}) R^{-1} R \left[R^\top F R^{-1\top}\vec{\eta}, \vec{\eta}\right] = \frac{1}{\det R}\left[R^\top F R^{-1\top}\vec{\eta}, \vec{\eta}\right]. \tag{13.11.96}$$

Из равенств (13.11.93, 13.11.95) следует равенство (13.11.90), а из равенств (13.11.94, 13.11.96) — равенство (13.11.91).

Для получения равенств (13.11.87–13.11.89) возьмём формулу преобразования трансформации Фурье плотности псевдозаряда (13.11.32), сравним её с формулами (13.11.75, 13.11.76) и приравняем однородные полиномы от $\vec{\eta}$ слева и справа степеней 0, 1, 2. Получим 3 равенства:

$$\tilde{e} = \sigma(R) e, \tag{13.11.97}$$

$$\left\langle \tilde{\vec{d}}, \vec{\eta} \right\rangle = \sigma(R)\left(\left\langle \vec{d}, R^{-1\top}\vec{\eta} \right\rangle + \frac{1}{\det R}\left\langle \vec{\xi}, \left[\vec{S}, R^{-1\top}\vec{\eta}\right] \right\rangle \right), \tag{13.11.98}$$

$$\left\langle \tilde{Qv}\vec{\eta}, \vec{\eta} \right\rangle = \sigma(R)\left(\left\langle Qv R^{-1\top}\vec{\eta}, R^{-1\top}\vec{\eta} \right\rangle + \frac{1}{\det R}\left\langle \vec{\xi}, \left[F R^{-1\top}\vec{\eta}, R^{-1\top}\vec{\eta}\right] \right\rangle \right). \tag{13.11.99}$$

Формула (13.11.87) доказана. Преобразуя формулу (13.11.98) по свойствам скалярного и смешанного произведения, получим

$$\left\langle \tilde{\vec{d}}, \vec{\eta} \right\rangle = \sigma(R)\left(\left\langle R^{-1}\vec{d}, \vec{\eta} \right\rangle + \frac{1}{\det R}\left\langle \left[\vec{\xi}, \vec{S}\right], R^{-1\top}\vec{\eta} \right\rangle \right) =$$

$$= \sigma(R)\left\langle R^{-1}\left(\vec{d} + \frac{1}{\det R}\left[\vec{\xi}, \vec{S}\right]\right), \vec{\eta} \right\rangle.$$

Что доказывает равенство (13.11.88).

Из равенства (13.11.99) следует равенство (13.11.89) в силу следующих преобразований. Во-первых,

$$\left\langle Qv R^{-1\top}\vec{\eta}, R^{-1\top}\vec{\eta} \right\rangle = \left\langle R^{-1}\, Qv R^{-1\top}\vec{\eta}, \vec{\eta} \right\rangle. \tag{13.11.100}$$

По свойству смещенного произведения

$$\left\langle FR^{-1\top}\vec{\eta}, R^{-1\top}\vec{\eta}\right\rangle = \left\langle \left[\vec{\xi}, FR^{-1\top}\vec{\eta}\right], R^{-1\top}\vec{\eta}\right\rangle. \qquad (13.11.101)$$

Согласно формуле (11.3.27)

$$\left[\vec{\xi}, FR^{-1\top}\vec{\eta}\right] = \mathrm{Sw}\,(\vec{\xi})FR^{-1\top}\vec{\eta}. \qquad (13.11.102)$$

Поэтому

$$\left\langle \xi, \left[FR^{-1\top}\vec{\eta}, R^{-1\top}\vec{\eta}\right]\right\rangle = \left\langle \mathrm{Sw}\,(\xi)FR^{-1\top}\vec{\eta}, R^{-1\top}\vec{\eta}\right\rangle = \qquad (13.11.103)$$

$$\frac{1}{2}\left\langle R^{-1}\left(\mathrm{Sw}\,(\vec{\xi})F + (\mathrm{Sw}\,(\vec{\eta})F)^{\top}\right)R^{-1\top}\vec{\eta}, \vec{\eta}\right\rangle.$$

Из (13.11.99, 13.11.100, 13.11.103) получаем (13.11.89). $\diamondsuit$

13.11.6 Характеристики вектора квазитока.

Из формул (13.2.38) и (13.2.19) следует, что вектор квазитока jt следующим образом выражается через вектор псевдотока js:

$$\mathit{jt} = \begin{pmatrix} 1-|\vec{l}|^2 & -\vec{l}^{\top} \\ 0 & \\ 0 & E_3 \\ 0 & \end{pmatrix} \mathit{js}. \qquad (13.11.104)$$

Для трансформаций Фурье, в частности

$$\widehat{\mathit{jtf}_0}(\vec{\eta}) = \left(1-|\vec{l}|^2\right)\widehat{\mathit{jsf}_0}(\vec{\eta}) - \left\langle \vec{l}, \widehat{\vec{\mathit{jsf}}}(\vec{\eta})\right\rangle, \qquad (13.11.105)$$

$$\widehat{\vec{\mathit{jtf}}}(\vec{\eta}) = \widehat{\vec{\mathit{jsf}}}(\vec{\eta}). \qquad (13.11.106)$$

Поэтому функция $\widehat{\vec{\mathit{jtf}}}(\vec{\eta})$ имеет совпадающие характеристики с функцией $\widehat{\vec{\mathit{jsf}}}(\vec{\eta})$. Для функции $\widehat{\mathit{jtf}}_0(\vec{\eta})$ введём представление, аналогичное представлению (13.11.75) функции $\widehat{\mathit{jsf}}_0(\vec{\eta})$, а именно

$$\widehat{\mathit{jtf}_0}(\vec{\eta}) = et + i\left\langle \vec{dt}, \vec{\eta}\right\rangle - \langle\, \mathit{Qt}\vec{\eta}, \vec{\eta}\rangle + o\left(|\vec{\eta}|^2\right), \qquad (13.11.107)$$

где:
$et \in \mathbf{R}$ — *квазизаряд*,
$\vec{dt} \in \mathbf{R}^3$ — *квазидипольный момент*,
$\mathit{Qt} \in Ms(3)$ — *квазиквадр.*

Из правила преобразования функции квазитока в образах Фурье (13.11.29) имеем

$$\widetilde{\widehat{\mathit{jtf}_0}}(\vec{\eta}) = \frac{\sigma(R)}{(\det R)^2}\widehat{\mathit{jtf}_0}\left(R^{-1\top}\vec{\eta}\right). \qquad (13.11.108)$$

Поэтому верна следующая лемма.

Лемма 13.11.4 *Величины* et, $\overrightarrow{dt}$, Qt *при изменении состояния преобразуются следующим образом*

$$\widetilde{et} = \frac{\sigma(R)}{(\det R)^2} et, \tag{13.11.109}$$

$$\widetilde{\overrightarrow{dt}} = \frac{\sigma(R)}{(\det R)^2} R^{-1} \overrightarrow{dt}, \tag{13.11.110}$$

$$\widetilde{Qt} = \frac{\sigma(R)}{(\det R)^2} R^{-1}\ Qt R^{-1\top}. \tag{13.11.111}$$

Доказательство. Подставим представление (13.11.107) в формулу (13.11.108) и приравняем однородные полиномы степеней 0, 1, 2 слева и справа, получим

$$\widetilde{et} = \frac{\sigma(R)}{(\det R)^2} et,$$

$$\left\langle \widetilde{\overrightarrow{dt}}, \vec\eta \right\rangle = \frac{\sigma(R)}{(\det R)^2} \left\langle \overrightarrow{dt}, R^{-1\top}\vec\eta \right\rangle,$$

$$\left\langle\ \widetilde{Qt}\vec\eta, \vec\eta \right\rangle = \frac{\sigma(R)}{(\det R)^2} \left\langle\ Qt R^{-1\top}\vec\eta, R^{-1\top}\vec\eta \right\rangle.$$

Откуда следуют равенства (13.11.109–13.11.111). ♢

Из равенств (13.11.105, 13.11.106) следует связь коэффициентов Дирака при $\beta \in (\overline{1,3})^n$, $r \in \mathbf{N}_o$ вида

$$Bt_{0,\beta} = \left(1 - |\vec l|^2\right) Bs_{0,\beta} - \left\langle \vec l, \overrightarrow{Bs}_\beta \right\rangle, \tag{13.11.112}$$

$$\overrightarrow{Bt}_\beta = \overrightarrow{Bs}_\beta. \tag{13.11.113}$$

Величины же e, $\vec d$, Qv и et, $\overrightarrow{dt}$, Qt связаны следующим образом.

Лемма 13.11.5 *Справедливы равенства*

$$et = \left(1 - |\vec l|^2\right) e, \tag{13.11.114}$$

$$\overrightarrow{dt} = \left(1 - |\vec l|^2\right) \vec d - \left[\vec l, \vec S\right], \tag{13.11.115}$$

$$Qt = (1 - |\vec l|^2)\ Qv - \frac{1}{2}\left(\mathrm{Sw}\,(\vec l) F + \left(\mathrm{Sw}\,(\vec l) F\right)^\top \right). \tag{13.11.116}$$

Доказательство. Подставим в равенство (13.11.105) представления (13.11.107, 13.11.75, 13.11.76) и приравняем однородные полиномы степени 0, 1, 2 слева и справа, получим

$$et = \left(1 - |\vec l|^2\right) e, \tag{13.11.117}$$

$$\left\langle \overrightarrow{dt}, \vec\eta \right\rangle = \left(1 - |\vec l|^2\right) \left\langle \vec d, \vec\eta \right\rangle - \left\langle \vec l, \left[\vec S, \vec\eta\right] \right\rangle, \tag{13.11.118}$$

$$\langle\ Qt\vec\eta, \vec\eta\rangle = \left(1 - |\vec l|^2\right) \langle\ Qv\vec\eta, \vec\eta\rangle - \left\langle \vec l, [F\vec\eta, \vec\eta] \right\rangle. \tag{13.11.119}$$

Формулы (13.11.117–13.11.119) влекут соответственно формулы (13.11.114–13.11.116). ♢

13.11.7 Характеристики скалярных частиц.

Скалярный лоренцев агвид характеризуется условием $\overrightarrow{jtf} = 0$ или эквивалентно $\overrightarrow{jsf} = 0$. Поэтому для него $\overrightarrow{Bs}_\beta = 0$ при всех $\beta \in (\overline{1,3})^r$, $r \in \mathbf{N}_o$ и $\vec{S} = 0$, $F = 0$. Итак, характеристики скалярной частицы сводятся к характеристикам скалярной функции jsf_0 — плотности заряда, т.е. к коэффициентам $Bs_{0,\beta}$ или величинам e, $\vec{d}$, Qv среди характеристик не выше второго порядка.

Закон преобразования коэффициентов Дирака $Bs_{0,\beta}$ согласно формуле (13.11.33) принимает вид

$$\widetilde{Bs}_{0,\beta} = \sigma(R) \sum_{\gamma \in (\overline{1,3})^r} Bs_{0,\gamma} R^{-1\top}_{\gamma_1,\beta_1} R^{-1\top}_{\gamma_2,\beta_2} \dots R^{-1\top}_{\gamma_r,\beta_r}, \quad \beta \in (\overline{1,3})^r, \; r \in \mathbf{N}_o. \tag{13.11.120}$$

А закон преобразования величин $e, \vec{d}$, Qv при изменении состояния согласно лемме 13.11.3 принимает вид

$$\tilde{e} = \sigma(R) e, \tag{13.11.121}$$

$$\tilde{\vec{d}} = \sigma(R) R^{-1} \vec{d}, \tag{13.11.122}$$

$$\widetilde{Qv} = \sigma(R) R^{-1}\, Qv R^{-1\top}. \tag{13.11.123}$$

Коэффициенты Дирака $B_{k,\beta}$ скалярной частицы согласно формулам (13.11.35, 13.11.36) равны

$$B_\beta = l B_{0,\beta}, \; \beta \in (\overline{1,3})^r, \; r \in \mathbf{N}_o. \tag{13.11.124}$$

Для влавинов мы приходим к следующему выводу.

Вывод 13.11.1 *Влавин второго порядка является скалярным иф* $\vec{S} = 0$ *и* $F = 0$.

13.11.8 Характеристики квазикиперных частиц.

Квазикиперный лоренцев агвид характеризуется условием $jtf_0 = 0$. Поэтому у него коэффициенты Дирака $Bt_{0,\beta} = 0$ при всех $\beta \in (\overline{1,3})^r$, $r \in \mathbf{N}_o$ и величины et, $\overrightarrow{dt}$, Qt обращаются в нуль. Согласно формуле (13.11.112) квазикиперность влечет следующее дополнительные связи на коэффициенты Дирака

$$\left(1 - |\vec{l}|^2\right) Bs_{0,\beta} = \left\langle \vec{l}, \overrightarrow{Bs}_\beta \right\rangle, \quad \beta \in (\overline{1,3})^r, \quad r \in \mathbf{N}_o. \tag{13.11.125}$$

В несветовом случае отсюда коэффициенты Дирака $Bs_{0,\beta}$ однозначно выражаются через коэффициенты Дирака $\overrightarrow{Bs}_\beta$

$$Bs_{0,\beta} = \frac{1}{\left(1 - |\vec{l}|^2\right)} \left\langle \vec{l}, \overrightarrow{Bs}_\beta \right\rangle, \quad \beta \in (\overline{1,3})^r, \quad r \in \mathbf{N}_o \tag{13.11.126}$$

при отсутствии дополнительных ограничений на коэффициенты $\overrightarrow{Bs}_\beta$. В световом случае $|\vec{l}| = 1$ получаем, что условия квазикиперности не накладывает ограничений на коэффициенты $Bs_{0,\beta}$, а накладывает лишь ограничения на коэффициенты $\overrightarrow{Bs}_\beta$ вида

$$\left\langle \vec{l}, \overrightarrow{Bs}_\beta \right\rangle = 0, \quad \beta \in (\overline{1,3})^r, \quad r \in \mathbf{N}_o. \tag{13.11.127}$$

Для характеристик второго порядка условия квазикиперности есть $et = 0$, $\overrightarrow{dt} = 0$, $Qt = 0$, что по лемме 13.11.5 эквивалентно условиям

$$\left(1 - |l|^2\right) e = 0, \tag{13.11.128}$$

$$\left(1-|l|^2\right)\vec{d}=\left[\vec{l},\vec{S}\right], \tag{13.11.129}$$

$$\left(1-|l|^2\right)\ Qv=\frac{1}{2}\left(\mathrm{Sw}\,(\vec{l})F+\left(\mathrm{Sw}\,(\vec{l})F\right)^{\top}\right). \tag{13.11.130}$$

В несветовом случае отсюда

$$e=0, \tag{13.11.131}$$

$$\vec{d}=\frac{1}{\left(1-|\vec{l}|^2\right)}\left[\vec{l},\vec{S}\right], \tag{13.11.132}$$

$$Qv=\frac{1}{\left(1-|\vec{l}|^2\right)}\frac{1}{2}\left(\mathrm{Sw}\,(\vec{l})F+\left(\mathrm{Sw}\,(\vec{l})F\right)^{\top}\right), \tag{13.11.133}$$

т.е. величины $\vec{S}$, F свободны, а величины e, $\vec{d}$, Qv однозначно выражаются через них. В световом случае (13.11.128–13.11.130) принимают вид двух условий

$$\left[\vec{l},\vec{S}\right]=0, \tag{13.11.134}$$

$$\mathrm{Sw}\,(\vec{l})F+\left(\mathrm{Sw}\,(\vec{l})F\right)^{\top}=0, \tag{13.11.135}$$

т.е. величина e, $\vec{d}$, Qv свободны, а величины $\vec{S}$ и F удовлетворяют дополнительным условиям (13.11.134, 13.11.135). Условие (13.11.134) эквивалентно коллинеарности векторов $\vec{S}\parallel\vec{l}$, а условие (13.11.135) эквивалентно существованию вектора $\vec{q}\in\mathbf{R}^3$, что

$$F=\vec{l}\vec{q}^{\top}-\frac{1}{3}\left\langle\vec{l},\vec{q}\right\rangle E_3. \tag{13.11.136}$$

Для влавинов получаем следующий вывод.

Вывод 13.11.2 *Влавин второго порядка квазикиперный в несветовом случае иф верно (13.11.131–13.11.133), а в световом случае иф $\vec{S}\parallel\vec{l}$ и матрица $F\in Mt(3)$ допускает представление (13.11.136).*

13.11.9 О характеристиках квартетов частиц.

Согласно п. 3.6.10 наличие четырёх компонент связности группы Лоренца может порождать существование квартетов частиц с симметричными свойствами. Применяя к данному агвиду преобразование Пуанкаре функции тока $\tilde{T}_p$ в случае, когда $p\in P_g$ преобразование Лоренца с матрицей $G_{\sigma\varepsilon}$ вида (3.6.94), мы получим из данного агвида 4 агвида. Согласно правилу преобразования функции псевдотока (3.6.100) при этом мы получаем в образах Фурье

$$\widetilde{\widehat{jsf}}_0(\vec{\eta})=\sigma\widehat{jsf}_0(\varepsilon\vec{\eta}), \tag{13.11.137}$$

$$\widetilde{\widehat{\overrightarrow{jsf}}}(\vec{\eta})=\varepsilon\widehat{\overrightarrow{jsf}}(\varepsilon\vec{\eta}). \tag{13.11.138}$$

Из равенств (13.11.137, 13.11.138) и (13.11.75, 13.11.76) получаем следующие правила преобразования характеристик частиц

$$\tilde{e}=\sigma e, \tag{13.11.139}$$

$$\tilde{\vec{d}}=\sigma\varepsilon\vec{d}, \tag{13.11.140}$$

$$\widetilde{Qv}=\sigma\ Qv, \tag{13.11.141}$$

$$\tilde{\vec{S}}=\vec{S}, \tag{13.11.142}$$

$$\tilde{F}=\varepsilon F. \tag{13.11.143}$$

Глава 14

Законы сохранения

В этой главе мы вводим понятие закона сохранения для системы, задаваемой действием L, следующим образом (§ 14.1). Пусть задана функция $\mathcal{L}(x, u, w)$, определенная на произведение $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n \times W$, где $W \subset M(n \times k)$ открытое подмножество. Пусть $U \subset C_n^{(2)}(\mathbf{R}^k)$ некоторое множество функций, содержащее нуль, и таких, что $\frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{R}^k) \subset W$. Множество функций $u \in U$, удовлетворяющих уравнению Эйлера для плотности лагранжиана $\mathcal{L}(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x))$, обозначаем $\mathrm{kla}\,(\mathcal{L})$ и называем ядром Эйлера. Вводится оператор $q : U \to C_k(\mathbf{R}^k)$. Оператор q называется *храном* для действия L, если для любой функции $U \in \mathrm{kla}\,(\mathcal{L})$ векторное поле $q(u)(x) \in C_k(\mathbf{R}^k)$ соленоидально. Хран q называется *универсальным*, если векторное поле $q(u)(x)$ соленоидально при любой функции $u \in U$. Сумма хранов и скобка Ли хранов, если она определена, снова являются хранами действия.

Понятие храна соответствует принятому в литературе понятию локального закона сохранения. Существование непостоянных универсальных хранов и возможность складывать храны и брать их скобки Ли расширяет множество хранов действия и приводит к вопросам: как от хранов перейти к законам сохранения в интегральной форме и какие законы сохранения имеют физический интерес? Переход от храна к глобальному закону сохранения мы называем глобализацией. В § 14.1 мы выясняем при каких условиях хран допускает глобализацию и показываем, что при дополнительных ограничениях глобализация универсального храна даёт нулевой закон сохранения.

Чтобы выделить законы сохранения, представляющие физический интерес, мы прибегаем к теореме Нётер. Исходное действие идеальной среды по построению обладает 3+3+3+3+1=13 параметрической группой инвариантных преобразований: 3 параметра — сдвиги опорного состояния, 3 — ортогональные повороты опорного состояния, 3 — сдвиги текущего состояния, 3 — ортогональные повороты текущего состояния, 1 — сдвиг времени. По теореме Нётер мы получаем 13 хранов для действия идеальной среды, которые легко интерпретируются. При этом мы получаем две различные тройки локальных законов сохранения импульса и две различные тройки локальных законов сохранения момента — происходит раздвоение законов сохранения импульса и момента. Перейдя от функции состояния $X(x_0, \vec{x})$ к смещениям $u(x_0, \vec{x})$ и к плотности лагранжиана в смещениях $\mathcal{L}_t(\frac{\partial u}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial u}{\partial x_0})$, мы по-прежнему сохраняем 13-параметрическую группу инвариантных преобразований и соответствующие 13 хранов Нётер. Однако, мы переходим к рассмотрению состояний идеальной среды, носящих характер возмущений, исчезающих в бесконечности, т.е. таких, для которых $\lim\limits_{|\vec{x}| \to \infty} u(x_0, \vec{x}) = 0$. Тогда класс допустимых инвариантных преобразований сокращается до 7-параметрической группы преобразований, порождаемую: 1) сдвигами опорного состояния — 3 параметра, согласованными ортогональными поворотами в опорных координатах и текущих координатах — 3 параметра, сдвигом по времени — 1 параметр. Эту 7-параметрическую группу инвариантных преобразований мы называем *тесной* группой преобразований. Она даёт 7 хранов Нётер, легко отождествляемых с тремя законами сохранения импульса, тремя законами сохранения момента и законом сохранения энергии. Тесная 7-параметрическая группа инвариантных преобразований сохраняется при переходе от действия идеальной среды к его квадратичной аппроксимации — действию Максвелла и далее при переходе к усечённому действию Максвелла. Далее аналогичная 7-параметрическая тесная группа инвариантных преобразований имеется у действия Лоренца и у конденсированного действия. Таким образом, по теореме Нётер мы получаем семь аналогичных законов сохранения: 3 закона сохранения импульса, 3 закона сохранения момента и закон сохранения энергии, — у пяти различных действий: действия идеальной среды, действия Максвелла, усеченного действия Максвелла, действия Лоренца, конденсированного действия. Мы показываем в §§ 14.2-14.3, что храны энергии для действия идеальной среды, для действия Максвелла, для усеченного действия Максвелла и для действия Лоренца все различны. Законы сохранения энергии для действия Максвелла и усеченного действия Максвелла совпадают и являются аппроксимацией глобального сохранения энергии для идеальной среды. Глобальный закон сохранения энергии для действия

Лоренца, глобальный закон сохранения энергии для усеченного действия Максвелла и глобальный закон сохранения энергии для конденсированного действия — все различны (§ 14.4). При этом глобальный закон сохранения энергии для среды Лоренца не является аппроксимацией глобального закона сохранения энергии для идеальной среды.

Величину энергии для глобального закона сохранения энергии усеченного действия Максвелла мы назвали физической энергией. В § 14.4 мы получаем выражение для физической энергии натуральной частицы через трансформацию Фурье её функции тока. Для досветовой агвидной частицы условие конечности массы или физической энергии не накладывает ограничений на её характеристики. Для световой же и сверхсветовой частиц условия конечности массы и энергии приводят к существенным ограничениям на их характеристики. В § 14.7 мы убеждаемся, что световая натуральная частица конечной физической энергии имеет нулевой заряд и нулевой спин и дипольный момент, ортогональный вектору скорости. В § 14.8 мы убеждаемся, что сверхсветовая натуральная частица конечной физической энергии имеет нулевой заряд, нулевой дипольный момент и спин, а её квадр и квин имеют специальный вид.

Параграфы 14.5, 14.6 содержат вспомогательную математическую технику, требуемую для рассмотрению интегралов массы и физической энергии. В частности, в § 14.5 строится критерий делимости полиномов от n действительных переменных через сравнение множеств нулей, аналогичный случаю полиномов от n комплексных переменных. В § 14.6 выясняется как должна себя вести непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$, чтобы интеграл Лебега $\int\limits_{\mathrm{R}^n} \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ существовал, если $g(x)$ — полином, имеющий нули в $\mathbf{R}^n$.

§14.1 Инвариантные преобразования и законы сохранения

В этом и следующих двух параграфах не используется тензорное соглашение о суммировании — все суммы снабжаются знаками суммирования — $\sum$.

В этом параграфе мы формулируем понятие храна для действия L и напоминаем Теорему Нётер о связи между инвариантностью действия и существованием храна.

14.1.1 Четыре действия: 1) действие идеальной среды, 2) действие Максвелла, 3) действие Лоренца, 4) конденсированное действие, — и их свойства инвариантности.

В параграфе 1.2 мы начали наши построения с характеризации идеальной среды действием идеальной среды L с плотностью лагранжиана $\mathcal{L}$, которая может быть записана в виде $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\frac{\partial X}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial X}{\partial x_0}\right)$. Здесь $x_0 = ct$, c — скорость света, t — время; $\vec{x}$ — координаты опорного состояния; $X(x_0, \vec{x})$ — текущие координаты точки в момент x_0 с опорной координатой $\vec{x}$. По определению идеальной среды действие L обладает 1+6+6=13 параметрической группой инвариантных преобразований: сдвиг времени — 1 параметр; евклидовы движения опорного состояния — 6 параметров; евклидовы движения текущего состояния — 6 параметров.

Мы провели в п. 1.1.5 замену переменных, а именно, ввели смещения

$$u(x_0, \vec{x}) \equiv X(x_0, \vec{x}) - \vec{x}$$

и ввели плотность лагранжиана идеальной среды в смещениях

$$\mathcal{L}_t\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial u}{\partial x_0}\right) \equiv \mathcal{L}\left(E + \frac{\partial u}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial u}{\partial x_0}\right) - \mathcal{L}(E, 0).$$

Действие L_t эквивалентно действию L и имеет также 13-параметрическую группу инвариантных преобразований. Однако, если мы рассматриваем лишь состояние идеальной среды типа возмущений, т.е. с функцией смещений $u(x_0, \vec{x})$, исчезающей в пространственной бесконечности, то действие идеальной среды $L(X)$ имеет в общем случае лишь 7-параметрическую группу инвариантных преобразований, порождённую: 1) сдвигами по времени — 1 параметр; 2) сдвигами по опорным пространственным координатам — 3 параметра; 3) согласованные пространственные повороты по опорным и текущим координатам; — п. 1.2.8. Эту группу преобразований мы назовём *тесной группой.* Эта группа наследуется и действием в смещениях $L_t(u)$ — п.1.2.9.

Квадратичное действие, аппроксимирующее действие $L_t(u)$, мы назвали в §1.3 действием Максвелла $M(u)$ с плотностью лагранжиана $\mathcal{M}\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial u}{\partial x_0}\right)$. Действие Максвелла M наследует согласно п. 1.3.3 7-параметрическую тесную группу инвариантных преобразований действия L_t. Кроме того, в силу независимости плотности лагранжиана $\mathcal{M}\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial u}{\partial x_0}\right)$ от аргумента u в явном виде добавляется ещё 3-параметрическая группа сдвигов по u, оставляющих неизменным действие. Итого, мы имеем 7+3=10 параметрическую группу инвариантных преобразований действия.

Мы ввели в §2.2 действие Лоренца N с помощью линейной операторной замены переменных Максвелла $u = Bu'$, где $u' \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)$, $u'(x) \equiv u'(x_0, \vec{x})$, полагая

$$N(u') \equiv M(Bu')$$

для кулоновских в смысле п. 13.9.6 функций. 7-параметрическая тесная группа инвариантных преобразований действия Максвелла M имеет естественный аналог — 7-параметрическую группу инвариантных преобразований действия Лоренца N, которую мы назовём *тесной* группой инвариантных преобразований действия Лоренца N. Кроме того действие Лоренца имеет ещё специфическое 3-параметрическое семейство инвариантных преобразований, зависящее от констант, входящих в действие — чистые преобразования Лоренца. В силу независимости в явном виде функции плотности $N\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)$ от аргумента $u' \in \mathbf{R}^4$ имеется еще 4-параметрическая группа сдвигов по u' не изменяющих действие. Итого 7+3+4=14 параметрическая группа инвариантных преобразований действия Лоренца.

В результате конденсации действия Лоренца для системы k частиц без внешнего поля мы получаем конденсированное действие On с функцией Лагранжа n, которое, как мы увидим в §14.4, для случая агвидных частиц допускает 7-параметрическую группу инвариантных преобразований, порождённую: 1)сдвигами по времени — 1 параметр; 2)сдвигами на постоянный пространственный вектор центров частиц — 3 параметра; 3)группой пространственных вращений — 3 параметра. Эту группу также назовём *тесной* группой преобразований конденсированного действия On.

Итак, все перечисленные 4 действия имеют 7-параметрические группы инвариантных преобразований — jfтесные группы, следующие друг из друга.

14.1.2 Законы сохранения для действия.

Далее в этом параграфе $W \subset M(n \times k)$ открытое непустое подмножество и $\mathcal{L}$: $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n \times W \to \mathbf{R}$ отображение класса $C^{(2)}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n \times W)$, т.е. $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, u, w)$ $x \in$

$\mathbf{R}^k, u \in \mathbf{R}^n, w \in W$. Для функции $u(x) \in C_n^{(2)}(\mathbf{R}^k)$, удовлетворяющей условию

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{R}^k) \subset W, \tag{14.1.1}$$

определена плотность функции Лагранжа $\mathcal{L}(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x))$ и является функцией из $C^{(1)}(\mathbf{R}^k)$. Пусть далее U некоторое подмножество функций $u \in C_n^{(2)}(\mathbf{R}^k)$, удовлетворяющих условию (14.1.1). Определим на множестве U оператор Эйлера, сопоставляя функции $u \in U$ функцию $j(x) \in C_n(\mathbf{R}^k)$ вида

$$j_r(x) \equiv (\mathcal{L}_{u_r})\Bigg|_{\substack{u=u(x),\\ w=\frac{\partial u}{\partial x}(x)}} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\mathcal{L}_{w_{r_i}}\Bigg|_{\substack{u=u(x),\\ w=\frac{\partial u}{\partial x}(x)}}\Big), \quad r \in \overline{1,n}. \tag{14.1.2}$$

Основной областью $D \subset \mathbf{R}^k$ называется замыкание открытой ограниченной области с достаточно гладкой границей. Точное описание основной области см. в [2, с.111]. Для наших целей достаточно знать, что параллелепипед и шар — основные области и произведение параллелепипеда из $\mathbf{R}^s$ на шар из $\mathbf{R}^{k-s}$, $s \in \overline{0,k}$ есть основная область в $\mathbf{R}^k$.

Векторное поле $f \in C_k^{(1)}(\mathbf{R}^k)$ мы называем согласно п. 5.3.4 *соленоидальным*, если

$$div\, f(x) \equiv \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) = 0 \tag{14.1.3}$$

на $\mathbf{R}^k$. Векторное поле $f \in C_k(\mathbf{R}^k)$ мы называем *соленоидальным*, если поток вектора f через границу любой основной области равен нулю. Согласно формуле Остроградского-Гаусса [79, с.324] эти определения соленоидальности для векторных полей $f \in C_k^{(1)}(\mathbf{R}^k)$ эквивалентны.

Обозначим согласно п. 5.3.4 через $\mathrm{Sol}^{(m)}(\mathbf{R}^k)$ множество соленоидальных векторных полей класса $C_k^{(m)}$. Далее мы будем рассматривать отображения $q : U \to C_k(\mathbf{R}^k)$. Множество

$$\mathrm{kso}\,(q) \equiv \{u \in U \;\big|\; q(u) \in \mathrm{Sol}\,(\mathbf{R}^k)\} \tag{14.1.4}$$

будем называть *ядром соленоидальности* отображения q. Кроме того Введём обозначение для множества решений уравнения Эйлера

$$\mathrm{kla}\,(\mathcal{L}) \equiv \{u \in U \;\big|\; \mathcal{L}[u] = 0\}, \tag{14.1.5}$$

которое назовём *ядром Эйлера* плотности лагранжиана $\mathcal{L}$.

Определение 14.1.1 *Отображение $q : U \to C_k(\mathbf{R}^k)$ назовём храном для действия L, если*

$$\forall u \in \mathrm{kla}\,(\mathcal{L}) \;\big|\; q(u) \in \mathrm{Sol}\,(\mathbf{R}^k). \tag{14.1.6}$$

Условие (14.1.6) можно записать в эквивалентной форме

$$\mathrm{kso}\,(q) \supset \mathrm{kla}\,(\mathcal{L}). \tag{14.1.7}$$

В случае, если $(\mathrm{kla}\,(\mathcal{L})) \subset C_k^{(1)}(\mathbf{R}^k)$ условие соленоидальности может быть записано в форме обращения в нуль дивергенции и условие (14.1.6) эквивалентно условию

$$\forall u \in \mathrm{kla}\,(\mathcal{L}) \;\big|\; div\,(q(u)) = 0, \tag{14.1.8}$$

называемому обычно *дифференциальным законом сохранения.*

Рассмотрим случай плотности лагранжиана $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, u, w)$, не зависящей явно от аргумента $u \in \mathbf{R}^k$, т.е. $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, w)$. Этот случай включает действие идеальной среды, действие идеальной среды в смещениях, действие Максвелла, действие Лоренца. В этом случае согласно формуле (14.1.2) уравнения Эйлера есть система n уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathcal{L}_{w_{ri}} \Big|_{\substack{u = u(x), \\ w = \frac{\partial u}{\partial x}(x)}} \right) = 0. \tag{14.1.9}$$

Введём n отображений $qaf^r(\mathcal{L}) : \mathbf{R}^k \times W \to \mathbf{R}^k$ вида

$$qaf_i^r(\mathcal{L})(x, w) = \mathcal{L}_{w_{ri}}(x, w), \ r \in \overline{1, n}, \ i \in \overline{1, k}. \tag{14.1.10}$$

Определим n операторов $qa^r(\mathcal{L}) : U \in C_k^{(1)}(\mathbf{R}^k), \ r \in \overline{1, n}$, формулами

$$qa^r(\mathcal{L})(u) \equiv qaf^r(\mathcal{L})(x, \frac{\partial u}{\partial x}(x)). \tag{14.1.11}$$

В данном случае ядро Эйлера плотности лагранжиана $\mathcal{L}$ есть пересечение n ядер соленоидальности

$$\mathrm{kla}\,(\mathcal{L}) = \cap_{r=1}^{n} \mathrm{kso}\,(qa^r(\mathcal{L})), \tag{14.1.12}$$

т.е. функция $u \in U$ есть решение уравнений Эйлера иф n векторных полей, $qa^r(\mathcal{L}), \ r \in \overline{1, n}$ соленоидальны. Поэтому каждый из операторов $qa^r(\mathcal{L})$ является храном действия L.

Рассмотрим подслучай, когда отображения $q^i : U \to C_k^{\infty}(\mathbf{R}^k), i \in I$, есть храны для действия L, тогда и подалгебра Ли $\mathrm{ali}\,(\{q^i\}_{i \in I}) \subset C_k^{(\infty)}(\mathbf{R}^k)$, порождённая векторными полями $q^i(u)(x), i \in I$, также состоит из хранов для действия L. Получаем *алгебру хранов.* В частности, если $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, w)$, $\mathcal{L} \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^k \times W)$ и $U \subset C_n^{(\infty)}(\mathbf{R}^k)$, то подалгебра Ли $\mathrm{ali}\,(\{qa^r(\mathcal{L})\}_{r=1}^{n}) \subset C_k^{(\infty)}(\mathbf{R}^k)$, порождённая n операторами $qa^r(\mathcal{L}), r \in \overline{1, n}$ вида (14.1.11) состоит из хранов действия L.

Замечание 14.1.1 *В литературе храны $q(u)(x)$ обычно называют "токами"и обозначают символом $j(x)$. Однако из соотношения (14.1.2) мы видим, что в нашей теории физический смысл плотности тока имеет величина $j(x) = L[u](x) \in C_n(\mathbf{R}^k)$, которая в случае, когда $\mathcal{L}$ — плотность лагранжиана Лоренца, есть 4-вектор плотности тока. Величина же "хран"$q(u)(x) \in C_k(\mathbf{R}^k)$ есть величина другого рода, как видно, например, из формулы (14.1.10).*

Замечание 14.1.2 *Построив некоторое множество хранов $\{q^i\}_{i \in I}$ для достаточно узкого подмножества $U \subset C_n^{(2)}(\mathbf{R}^k)$, например, для функций класса $C_n^{(\infty)}(\mathbf{R}^k)$, мы можем, задав некоторую топологию τ на более широком множестве $U' \supset U$, в которой отображения $q^i : (U, \tau) \to C_k(\mathbf{R}^k)$ непрерывны, распространить отображения q на замыкание подмножества U в топологическом пространстве (U', τ).*

14.1.3 Теорема Нётер.

Сохраняя предположения и обозначения предыдущего пункта, в этом и следующем пунктах мы в качестве класса функций U выберем класс всех функций из

$C_n^{(2)}(\mathbf{R}^k)$ для которых верно (14.1.1). Теорема Нётер даёт конкретный рецепт построения хранов для данной плотности лагранжиана $\mathcal{L}$.

Проведём следующее построение.

Пусть $\varphi : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$ диффеоморфизм класса $C^{(1)}$ пространства $\mathbf{R}^k$ на себя, а $\psi : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ отображение класса $C_n^{(1)}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n)$. Определим преобразование $T : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n$ вида $T(x,u) \equiv (\varphi(x), \psi(x,u))$. По функции $\mathcal{L}$ и преобразованию T построим функцию

$$\mathcal{L}^T(x,u,w) \equiv \mathcal{L}(\varphi(x), \psi(x,u), \left(\frac{\partial\psi(x,u)}{\partial x} + \frac{\partial\psi(x,u)}{\partial u} w\right) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\right)^{-1} \left|\det \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\right|. \tag{14.1.13}$$

Для любой основной области $D \subset \mathbf{R}^k$ и функции $u \in C_n^{(1)}(\mathbf{R}^k)$ удовлетворяющей соотношению (14.1.1), верно

$$\int\limits_D \mathcal{L}^T\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x)\right) dx = \int\limits_{\varphi(D)} \mathcal{L}\left(y, \psi(\varphi^{-1}(y), u(\varphi^{-1}(y))), \frac{\partial}{\partial y}\psi\left(\varphi^{-1}(y), u(\varphi^{-1}(y))\right)\right) dy. \tag{14.1.14}$$

Определение 14.1.2 *Преобразование T назовём инвариантным преобразованием действия L, если для любого $x \in \mathbf{R}^k$, любого $u \in \mathbf{R}^n$ и любого $w \in W$ выполнены два условия*

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,n) + \frac{\partial\psi}{\partial u}(x,u)w\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\right) \in W; \tag{14.1.15}$$

$$\mathcal{L}^T(x,u,w) = \mathcal{L}(x,u,w). \tag{14.1.16}$$

Рассмотрим теперь однопараметрическое семейство преобразований $F \equiv \{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $I = [0,\gamma], \gamma \in \mathbf{R}_+$, такое что задающие функции $\varphi(\alpha,x)$ и $\psi(\alpha,x,u)$ класса $C^{(2)}$ на $I \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n$ и T_0 — тождественное преобразование. Построим по плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ и семейству преобразований F функцию Нётер

$$qnf\ : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n \times W \to \mathbf{R}^k$$

вида

$$qnf\,(x,u,w) \equiv \tag{14.1.17}$$
$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial w}(x,u,w)\frac{\partial\psi(\alpha,x,u)}{\partial\alpha} + \mathcal{L}(x,u,w)\frac{\partial\varphi(\alpha,x)}{\partial\alpha} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial w}(x,u,w)w\frac{\partial\varphi(\alpha,x)}{\partial\alpha}\right)\Big|_{\alpha=0},$$

где производная скалярной функции $\mathcal{L}$ по матричному аргументу w понимается в смысле п. 6.1.2. Вектор-функция $qnf\ \in C_k^{(1)}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n \times W)$. Функция Нётер qnf строится по плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ и семейству преобразований F, что мы будем также отображать в обозначении $qnf\,(\mathcal{L}, F; x, u, w)$. По функции Нётер $qnf\,(\mathcal{L}, F; x, u, w)$ определим оператор Нётер $qn(\mathcal{L}, F) : U \to C_k^{(1)}(\mathbf{R}^k)$. А именно для $u \in U$

$$qn(\mathcal{L}, F; u)(x) \equiv qnf\,(\mathcal{L}, F; x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x)). \tag{14.1.18}$$

Теорема 14.1.1 *(Нётер, [2], с.208-210). Если F — семейство инвариантных преобразований действия L, то оператор Нётер является храном действия L.*

При фиксированной семействе преобразований F функция Нётер $qnf\,(\mathcal{L}, F)$ линейно зависит от плотности лагранжиана $\mathcal{L}$ согласно формуле (14.1.17), т.е. $qnf\,(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, F) = qnf\,(\mathcal{L}_1, F) + qnf\,(\mathcal{L}_2, F)$ и соответственным свойством обладает оператор Нётер: $qn(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, F) = qn(\mathcal{L}_1, F) + qn(\mathcal{L}_2, F)$.

Замечание 14.1.3 *Если выполнены условия теоремы Нётер и оператор Нётер $qn(\mathcal{L}, F)$ есть хран для действия L, то аппроксимируя плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ плотностью лагранжиана $\mathcal{L}'$, мы получаем, что оператор Нётер $qn(\mathcal{L}', F)$ есть аппроксимация к храну для действия L. Причём, если F есть семейство инвариантных преобразований и для действия L' также, то оператор Нётер $qn(\mathcal{L}', F)$ есть хран для действия L', не есть, вообще говоря, хран для L, а лишь — аппроксимация храна $qn(\mathcal{L}, F)$ для L.*

С философской точки зрения, то что мы строим, есть *модель* реальной среды и наше действие есть аппроксимация её *основных* свойств, а не всего бесконечного разнообразия её свойств . Это означает, что наше действие L есть всегда аппроксимация и соответственно оператор Нётер даёт аппроксимацию истинного храна. Мы пришли к выводу об *аппроксимативности законов сохранения.*

Далее мы будем применять теорему Нётер в случае, когда функции $\varphi(x)$ и $\psi(x,u)$ — полиномы степени 1 и $\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$. Тогда $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial u}$ — постоянные матрицы. Для плотности лагранжиана $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, u, w)$, не зависящего от x и u, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(w)$, условия инвариантности (14.1.15, 14.1.16) принимают вид следующих двух требований для любого $\alpha \in I$ и любого $w \in W$:

$$\frac{\partial\psi(\alpha, u)}{\partial u} w \left(\frac{\partial\varphi(\alpha, x)}{\partial x}\right)^{-1} \in W; \tag{14.1.19}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial\psi(\alpha, u)}{\partial u} w \left(\frac{\partial\varphi(\alpha, x)}{\partial x}\right)^{-1}\right) \left|\det \frac{\partial\varphi(\alpha, x)}{\partial x}\right| = \mathcal{L}(w). \tag{14.1.20}$$

Причём в случае $|\det \frac{\partial\varphi(\alpha,x)}{\partial x}| = 1$ второе условие принимает вид:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial\psi(\alpha, u)}{\partial u} w \left(\frac{\partial\varphi(\alpha, x)}{\partial x}\right)^{-1}\right) = \mathcal{L}(w). \tag{14.1.21}$$

14.1.4 Примеры: закон сохранения энергии.

Если действие инвариантно относительно семейства преобразований

$$\varphi(\alpha, x) = x - \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \varphi(\alpha, x, u) = u, \tag{14.1.22}$$

то согласно теореме Нётер получаем, что оператор Нётер есть хран, который назовём *храном энергии* или локальным законом сохранения энергии.

Замечание 14.1.4 *Если положить вместо функции $\varphi(\alpha, x)$ вида (22) функцию $\varphi(\alpha, x) = x + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, то согласно формуле (14.1.17) оператор Нётер поменяет знак* *и останется храном. В некоторых примерах нам удобно будет брать хран энергии с обратным знаком. В формулах (14.1.22) мы выбрали знак перед параметром α так, чтобы в классических примерах получить классические выражения для энергии.*

Одномерный случай $k = 1$. В этом случае функция Нётер энергии является скалярной и закон сохранения энергии принимает вид $qn(u)(x_0) = qn_0(u)(x_0) = Const$, где

$$qnf\,(x_0, u, w) = -\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} w = -\mathcal{L} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{io}} w_{io}. \tag{14.1.23}$$

Оператор Нётер в этом случае сопоставляет функции $u(x_0)$ функцию

$$qn(x_0) = -\mathcal{L} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \dot{u}_i, \tag{14.1.24}$$

если $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, u, \dot{u})$.

Пример 14.1.1

$\mathcal{L}(x_0, u, \dot{u}) = \frac{1}{2} m \cdot (\dot{u})^2 - g(u)$. Тогда

$$qn(x_0) = \frac{1}{2} m \cdot (\dot{u})^2 + g(u). \tag{14.1.25}$$

Пример 14.1.2

$\mathcal{L}(x_0, u, \dot{u}) = m\sqrt{1 - (\dot{u})^2} + g(u)$. Тогда

$$qn(x_0) = -\left(\frac{m}{\sqrt{1 - (\dot{u})^2}} + g(u) \right). \tag{14.1.26}$$

В этом примере удобно брать функцию Нётер с обратным знаком согласно замечанию 14.1.4.

Теперь рассмотрим многомерный случай $k = 3$, $n = 3$, $x \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}$, $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$, $\mathcal{L}(x, u, w) = \mathcal{L}(w)$. Согласно формуле (14.1.17) тогда

$$qnf\,(x, u, w) = -\mathcal{L} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} w_0, \tag{14.1.27}$$

где $w_0 \equiv \begin{pmatrix} w_{10} \\ w_{20} \\ w_{30} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.

Пример 14.1.3

$\mathcal{L}(w) = \frac{1}{2}(w_0)^2$. Тогда

$$qnf\,(w) = \frac{1}{2}(w_0)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Далее положим $w \equiv (w_0, \bar{w})$, где $w_0 \in \mathbf{R}^3, \bar{w} \in M(3)$.

Пример 14.1.4

$\mathcal{L}(w) = -\frac{1}{4}\langle \bar{w} - \bar{w}^\top, \bar{w} - \bar{w}^\top \rangle = -\frac{1}{2}(\langle \bar{w}, \bar{w} \rangle - \langle \bar{w}, \bar{w}^\top \rangle)$. Производная по матричному аргументу в этом случае

$$\frac{\partial \mathcal{L}(w)}{\partial w} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{w} - \bar{w}^\top & & \end{pmatrix} \tag{14.1.28}$$

Подставив (14.1.28) в (14.1.27), получаем

$$qnf = \frac{1}{4}\langle \bar{w} - \bar{w}^\top, \bar{w} - \bar{w}^\top \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (\bar{w} - \bar{w}^\top) w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\langle \bar{w} - \bar{w}^\top, \bar{w} - \bar{w}^\top \rangle \\ (\bar{w} - \bar{w}^\top) w_0. \end{pmatrix} \tag{14.1.29}$$

Пример 14.1.5

$\mathcal{L}(w) = s_2(\bar{w}) = \frac{1}{2}(\langle \bar{w}, E \rangle^2 - \langle \bar{w}, \bar{w}^\top \rangle)$, где $E \equiv E_3 \in M(3)$ единичная матрица, а $s_2(\bar{w})$ — инвариант вида (1.3.6). Производная

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \langle \bar{w}, E \rangle E - \bar{w}. & & \end{pmatrix} \tag{14.1.30}$$

Подставляя (14.1.30) в (14.1.27), получаем функцию Нётер энергии

$$qnf\,(w) = \begin{pmatrix} -s_2(\bar{w}) \\ (\langle \bar{w}, E \rangle E - \bar{w}) w_0 \end{pmatrix}. \tag{14.1.31}$$

14.1.5 Универсальные храны.

Согласно определению 14.1.1 для любого соленоидального векторного поля $f \in \mathrm{Sol}\,(\mathbf{R}^k)$ постоянное отображение $q_f : U \to \{f\}$ есть хран для любого действия L. Если q есть хран действия L, то согласно п. 14.1.2 и сумма $q + q_f$ есть хран L. Мы видим, что среди хранов L есть храны вида q_f никак не связанные с особенностями действия L. Чтобы отбросить такие храны, мы можем ввести условие центрированности отображения $q : U \to C_k(\mathbf{R}^k)$:

$$q(0) = 0. \tag{14.1.32}$$

Однако, существуют и не постоянные отображения $q : U \to C_k(\mathbf{R}^k)$ являющиеся хранами любого действия.

Определение 14.1.3 *Отображение $q : U \to \mathrm{Sol}\,(\mathbf{R}^k)$ назовём универсальным храном.*

Нетривиальные примеры универсальных хранов позволяет строить нам теорема Нётер в следующей ситуации.

Пусть действие L тривиально в смысле § 2.1, т.е. оператор Эйлера $\mathcal{L}[u]$ есть нулевой оператор

$$\mathrm{kla}\,(\mathcal{L}) = U. \tag{14.1.33}$$

Если теперь действие L инвариантно относительно семейства преобразований F, то по теореме Нётер оператор Нётер есть хран для L, а в силу (14.1.33) оператор Нётер будет универсальным храном. Итак, верна

Лемма 14.1.1 *Пусть F — семейство инвариантных преобразований тривиального действия L, тогда оператор Нётер $qn(\mathcal{L}, F)$ есть универсальный хран.*

Пример 14.1.5 предыдущего пункта в силу леммы 2.2.1 даёт нам теперь пример универсального храна $qn : C_3^{(2)}(\mathbf{R}^4) \to C_4^{(1)}$ вида

$$qn(u) = \begin{pmatrix} -s_2\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{x}}\right) \\ (\,div\, u)\frac{\partial u}{\partial x_0} - \frac{\partial u}{\partial \vec{x}}\frac{\partial u}{\partial x_0} \end{pmatrix}. \tag{14.1.34}$$

Наличие ненулевых универсальных хранов существенно расширяет линейное подпространство хранов данного действия L. Ибо если q — хран действия L, то прибавляя к храну q универсальный хран q' или беря скобку Ли $[q(u)(x), q'(u)(x)]$, мы снова получаем хран действия L. В силу существования ненулевых универсальных хранов условие неотрицательности плотности энергии легко нарушить, добавив к храну энергии универсальный хран, как это будет в следующем параграфе. Вообще, условия знакоопределённости энергии и плотности энергии при плотности лагранжиана общего вида не представляются вполне естественными.

14.1.6 Глобализация храна.

Далее в этом параграфе $k = 4$, $x \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}$, $x_0 \in \mathbf{R}$, $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$, Вводятся обозначения: $Q[R] \equiv \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 \;\big|\; |\vec{x}| \le R\}$, $S[R] \equiv \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 \;\big|\; |\vec{x}| = R\}$, $R \in \mathbf{R}_+$,

$$V.P. \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi(\vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 \equiv \lim_{R\to\infty} \iiint\limits_{Q[R]} \varphi(\vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3. \tag{14.1.35}$$

Лемма 14.1.2 *Пусть $f \in \mathrm{Sol}\,(\mathbf{R}^4), I \subset \mathbf{R}$ — связный интервал и выполнены условия:*

$1) \forall x_0 \in I \;\exists\; V.P. \iiint\limits_{\mathrm{R}^3} f_0(x_0, \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3;$

$2) \vec{f}(x_0, \vec{x}) = o\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$ *при* $|\vec{x}| \to \infty$*равномерно по* $x_0 \in I$,

Тогда на множестве I

$$V.P. \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} f_0(x_0, \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 = Const. \tag{14.1.36}$$

Доказательство. Пусть $[a, b] \subset I$ произвольный сегмент, $R \in \mathbf{R}_+$, тогда $D \equiv [a, b] \times Q[R] \subset \mathbf{R}^4$ — основная область. В силу условия соленоидальности $f \in \mathrm{Sol}\,(\mathbf{R}^4)$ поток векторного поля $f(x)$ через границу области D равен нулю, т.е.

$$\iiint\limits_{Q[R]} f_0(b, \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 - \iiint\limits_{Q[R]} f_0(a, \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 + \int\limits_a^b \iint\limits_{S[R]} \langle \vec{f}(x_0, \vec{x}), \vec{n}(\vec{x})\rangle d\sigma(\vec{x}) dx_0 = 0. \tag{14.1.37}$$

В силу условий 1),2) переходим в равенстве (14.1.37) к пределу при $R \to \infty$ и получаем

$$V.P. \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} f_0(b, \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 - V.P. \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} f_0(a, \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

$\Diamond$

Следствие 14.1.1 *Если $q : U \to C_4(\mathbf{R}^4)$ — хран действия L, $u \in$ kla$(\mathcal{L})$ и для любой точки $x_0 \in \mathbf{R}$ существует связная окрестность I, на которой векторное поле $f(x) \equiv q(u)(x)$ удовлетворяет требованиям 1), 2) леммы 14.1.2, то*

$$V.P. \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} q_0(u)(x_0, \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 = Const \tag{14.1.38}$$

при всех $x_0 \in \mathbf{R}$.

Соотношение (14.1.38) назовём *глобальным законом сохранения*, соответствующим храну q, а переход от храна q к соотношению (14.1.38) — *глобализацией* храна на элементе $u \in U$.

В пункте 14.1.2 мы установили, что если q^1 и q^2 храны действия L, то их сумма $q^1 + q^2$ и скобка Ли $[q^1(u)(x), q^2(u)(x)]$ будут снова хранами L. Однако, получим ли мы новые глобальные законы сохранения? Следующие два пункта дают ответ на этот вопрос.

14.1.7 Глобализация скобки Ли двух хранов.

Пусть $f^i \in C_4^{(1)}(\mathbf{R}^4)$, $i \in \overline{1,2}$ два векторных поля и $f \equiv [f^1, f^2]$ — их скобка Ли. Согласно определению скобка Ли векторных полей — формула (5.3.2) имеем

$$f_0 = \sum_{j=1}^{3} \left(f_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} f_0^1 - f_j^1 \frac{\partial}{\partial x_j} f_0^2 \right) = f_0^2 \frac{\partial}{\partial x_0} f_0^1 - f_0^1 \frac{\partial}{\partial x_0} f_0^2 + \langle \vec{f}^2, grad\, f_0^1 \rangle - \langle \vec{f}^1, grad\, f_0^2 \rangle = \tag{14.1.39}$$
$$f_0^2 \frac{\partial}{\partial x_0} f_0^1 - f_0^1 \frac{\partial}{\partial x_0} f_0^2 + div\, (f_0 \vec{f}^2) - f_0^1\, div\, (\vec{f}^2) - div\, (f_0^2 \vec{f}^1) + f_0^2\, div\, (\vec{f}^1).$$

Потребуем дополнительно соленоидальности полей $f^i \in \mathrm{Sol}^{(1)}(\mathbf{R}^4), i \in \overline{1,2}$, т.е.

$$\frac{\partial f_0^i}{\partial x_0} + div\, \vec{f}^i = 0, i \in \overline{1,2} \tag{14.1.40}$$

Тогда из формул (14.1.39, 14.1.40) получаем для соленоидальных полей

$$[f^1, f^2]_0 = div\, (f_0^1 \vec{f}^2 - f_0^2 \vec{f}^1). \tag{14.1.41}$$

Лемма 14.1.3 *Пусть $f^i \in \mathrm{Sol}^{(1)}(\mathbf{R}^4) \cap \bar{C}_{4,0}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3)$, $i \in \overline{1,2}$ и при каждом $x_0 \in \mathbf{R}$ верно*

$$\vec{f}^i(x_0, \vec{x}) = o\left(\frac{1}{|\vec{x}|^2}\right) \tag{14.1.42}$$

при $|\vec{x}| \to \infty$, $i \in \overline{1,2}$, Тогда при каждом $x_0 \in \mathbf{R}$ верно

$$V.P. \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} [f^1, f^2]_0(x_0, \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \tag{14.1.43}$$

Доказательство. Из условий $f^i \in \bar{C}_{4,0}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3), i \in \overline{1,2}$, следует, что при каждом $x_0 \in \mathbf{R}$ существует константа $C \in \mathbf{R}_+$, что

$$\forall i \in \overline{1,2}\ \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3 \;\Big|\; |f_0^i(x_0, \vec{x})| \le C.$$

Согласно формуле (14.1.41) при фиксированном $x_0 \in \mathbf{R}$ получаем

$$\iiint\limits_{Q[R]} [f^1, f^2]_0(x_0, \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint\limits_{S[R]} \langle (f_0^1 \vec{f}^2 - f_0^2 \vec{f}^1)(x_0, \vec{x}), \vec{n}(\vec{x}) \rangle d\sigma(\vec{x}).$$

Оценивая интеграл справа, получаем

$$\left| \iiint\limits_{Q[R]} [f^1, f^2](x_0, \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 \right| \leq 4\pi R^2 C \bar{O}\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

что доказывает (44). ♢

Итак, если хран q есть скобка Ли двух хранов q^1 и q^2 действия L, то в условиях леммы 14.1.3 его глобализация даёт нулевой глобальный закон сохранения.

14.1.8 Глобализация универсального храна.

В этом пункте сузим класс рассматриваемых отображений.

Определение 14.1.4 *Отображение $q : U \to C_4(\mathbf{R}^4)$ локальное, если для любого открытого подмножества $G \subset \mathbf{R}^4$ и любых функций $u^1, u^2 \in U$, совпадающих на множестве G, функции $q(u^1)$ и $q(u^2)$ также совпадает на множестве G.*

Оператор Нётер $qn(\mathcal{L}, F)$, по построению является локальным отображением или мы будем также говорить — локальным оператором.

Далее в этом пункте дополнительно предполагаем, что множество функций U содержит нулевую функцию.

Локальное отображение обладает следующим свойством.

Утверждение 14.1.1 *Если $q : U \to C_4(\mathbf{R}^4)$ центрированное локальное отображение, то для носителей функций $u \in U$ и $q(u) \in C_4(\mathbf{R}^4)$ справедливо включение*

$$\operatorname{supp} q(u) \subset \operatorname{supp} u. \tag{14.1.44}$$

Доказательство. На открытом множестве $G \equiv \mathbf{R}^4 \setminus \operatorname{supp} u$ функция $u(x) = 0$, поэтому в силу локальности отображения $q(u)\Big|_G = q(0)\Big|_G$. В силу центрированности отображения q верно $q(0) = 0$. Итак $q(u)(x) = 0$ при $x \in G$, т.е. $\operatorname{supp} q(u) \subset \mathbf{R}^4 \setminus G = \mathbf{R}^4 \setminus (\mathbf{R}^4 \setminus \operatorname{supp} u) = \operatorname{supp} u$. ♢

Через $C_{n,o}^{(m)}(\mathbf{R}^k)$ мы обозначаем линейное подпространство функций из $C_n^{(m)}(\mathbf{R}^k)$ с компактным носителем. Введём такое обозначение для интеграла

$$Iq(u)(x_0) \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} q_0(u)(x_0, \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3. \tag{14.1.45}$$

Лемма 14.1.4 *Пусть $q : U \to C_4(\mathbf{R}^4)$ локальное центрированное отображение, $u \in U \cap C_{n,o}^{(2)}(\mathbf{R}^4)$ и $q(u) \in \operatorname{Sol}(\mathbf{R}^4)$, тогда при всех $x_0 \in \mathbf{R}$ верно $Iq(u)(x_0) = 0$.*

Доказательство. Если $u \in C_{n,o}^{(2)}(\mathbf{R}^4)$, то по утверждению 14.1.1 верно $q(u) \in C_{4,o}(\mathbf{R}^4)$ и существует интеграл (14.1.45) при любом $x_0 \in \mathbf{R}$. При $f(x) = q(u)(x)$ тогда выполнены условия леммы 14.1.2 и величина $Iq(u)(x_0) = C$ постоянна при $x_0 \in \mathbf{R}$. Так как носитель функции $q(u)(x)$ компактен, то существует $a_0 \in \mathbf{R}$, что $q_0(u)(a_0, \vec{x}) = 0$ при всех $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$. Итак, $C = 0$. ♢

Теперь мы в состоянии дать следующее достаточное условие того, что глобализация универсального храна приведет к нулевому закону сохранения.

Лемма 14.1.5 *Пусть* $C^{(2)}_{n,o}(\mathbf{R}^4) \subset U \subset C^{(2)}_n(\mathbf{R}^4)$ *и* $q : U \to C_4(\mathbf{R}^4)$ *локальный центрированный универсальный хран со следующим свойством финитной аппроксимируемости:*

$$\forall u \in U \ \forall x_0 \in \mathbf{R} \ \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \ \exists v \in C^{(2)}_{n,o}(\mathbf{R}^4) \ \Big| \ |Iq(u)(x_0) - Iq(v)(x_0)| < \epsilon, \tag{14.1.46}$$

тогда верно

$$\forall u \in U \ \forall x_0 \in \mathbf{R} \ \Big| \ Iq(u)(x_0) = 0. \tag{14.1.47}$$

Лемма 14.1.5 непосредственно следует из леммы 14.1.4, так как в условиях леммы 14.1.5 по лемме 14.1.4 верно $Iq(v)(x_0) = 0$. Рассмотрим следующее применение леммы 14.1.5.

Пример 14.1.6

Пусть $U \subset C^{(2)}_n(\mathbf{R}^4)$ линейное пространство функций $u(x) \equiv u(x_0, \vec{x})$ удовлетворяющих при каждом $x_0 \in \mathbf{R}$ условиям

$$\lim_{|\vec{x}| \to \infty} u(x_0, \vec{x}) = 0; \tag{14.1.48}$$

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, \vec{x}), \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, \vec{x}) \right\rangle dx_1 dx_2 dx_3 < \infty. \tag{14.1.49}$$

Пусть $q : U \to C_4(\mathbf{R}^4)$ локальный центрированный универсальный хран, у которого

$$q_0(u) = \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{i,j=0}^{3} a^{kl}_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \tag{14.1.50}$$

с постоянным массивом чисел a^{kl}_{ij}. Покажем, что выполнено свойство финитной аппроксимируемости (14.1.46).

Пусть $\{\psi_\eta\}, \eta \in [3, \infty[$, построенное Соболевым [60, с.232] семейство финитных бесконечно дифференцируемых функций $\psi_\eta : \mathbf{R} \to [0, 1]$. Для них $\psi_\eta(r) = 1$ при $r < \eta^{\frac{1}{4}}$ и $\psi_\eta = 0$ при $r > \eta^{\frac{3}{4}}$. Введём функции $u_{[\eta]}(x_0, \vec{x}) \equiv \psi_\eta(|\vec{x}|) u(x_0, \vec{x})$, также принадлежащие множеству U. По теореме Соболева [60, с.232, теорема V.7], при $u \in U$ функции $\frac{\partial}{\partial x_i} u_{[\eta]} k(x_0, \vec{x})$, рассматриваемые при фиксированном $x_0 \in \mathbf{R}$ как элементы пространства $L_2(\mathbf{R}^3)$ по переменной $\vec{x}$, сходятся в $L_2(\mathbf{R}^3)$ к функции $\frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x_0, \vec{x})$. Но согласно формуле (14.1.51) величина

$$Iq(u)(x_0) = \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{i,j=0}^{3} a^{kl}_{ij} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x_0, \vec{x}) \frac{\partial u_l}{\partial x_j}(x_0, \vec{x}) \, dx_1 dx_2 dx_3$$

есть сумма скалярных произведений функций $\frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x_0, \vec{x})$ и $\frac{\partial u_l}{\partial x_j}(x_0, \vec{x})$ в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbf{R}^3)$ и по непрерывности скалярного произведения получаем

$$\forall x_0 \in \mathbf{R} \ \Big| \ \lim_{\eta \to \infty} Iq(u_{[\eta]})(x_0) = Iq(u)(x_0). \tag{14.1.51}$$

Введём финитную бесконечно дифференцируемую функцию $\omega : \mathbf{R} \to [0, 1]$, такую, что $\omega(t) = 1$ при $|t| \le 1$ и $\omega(t) = 0$ при $|t| \ge 2$. Зафиксируем произвольное число

$a_0 \in \mathbf{R}$ и положим $v_{[\eta]}(x_0, \vec{x}) \equiv \omega(x_0 - a_0) u_{[\eta]}(x_0, \vec{x})$. Тогда $v_{[\eta]} \in C^{(2)}_{n,o}(\mathbf{R}^4)$ при всех $\eta \in [3, \infty[$. Функция $v_{[\eta]}(x)$ совпадает с функцией $u_{[\eta]}(x)$ на открытом множестве $G \equiv x \in \mathbf{R}^4 \;\Big|\; |x_0 - a_0| < 1$, поэтому в силу локальности отображения q и функции $q(v_{[\eta]})(x)$ и $q(u_{[\eta]})(x)$ совпадают на множестве G, откуда

$$Iq(v_{[\eta]})(a_0) = Iq(u_{[\eta]})(a_0). \tag{14.1.52}$$

Соотношения (14.1.51), (14.1.52) доказывают финитную аппроксимируемость.

Итак, в данном примере

$$\forall u \in U \;\forall x_0 \in \mathbf{R} \;\Big|\; Iq(u)(x_0) = 0. \tag{14.1.53}$$

§14.2 Законы сохранения для идеальной среды и среды Максвелла

14.2.1 7-параметрическая группа инвариантных преобразований действия и 7 функций Нётер. В этом параграфе мы сохраняем предположения и обозначения предыдущего параграфа и рассматриваем плотность лагранжиана $\mathcal{L}(x, u, w)$, $x \in \mathbf{R}^4$, $u \in \mathbf{R}^3$, $w \in W \subset M(3\times 4)$. Предполагается, что функция $\mathcal{L}(x, u, w)$ не зависит от аргументов x и u, т.е. $\mathcal{L} = \mathcal{L}(w)$ и удовлетворяет условиям следующего вида. Для любой матрицы $Q \in SO(3)$ и матрицы $G \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^\top \end{pmatrix} \in M(4)$ выполнено

$$QWG \subset W; \tag{14.2.1}$$

$$\forall w \in W \;\Big|\; \mathcal{L}(QwG) = \mathcal{L}(w). \tag{14.2.2}$$

Такими свойствами обладают согласно §§ 1.2,1.3 плотность лагранжиана идеальной среды в смещениях $\mathcal{L}_t$, плотность лагранжиана Максвелла $\mathcal{M}$ и плотность укороченного лагранжиана Максвелла $\mathcal{M}s$.

В п. 1.2.8 мы ввели 7-параметрическую группу преобразований S_q 3-функций смещений $u(x)$ вида (1.2.44), т.е.

$$S_q(u)(x) \equiv Q^\top u(x_0 - a_0, Q(\vec{x} - \vec{a})), \quad Q \in SO(3), \quad a \in \mathbf{R}^4, \tag{14.2.3}$$

оставляющих действие L_t, неизменным, $L_t(S_q(u)) = L_t(u)$, т.е. инвариантных преобразований действия в смысле § 1.2. Преобразование S_q сопоставляет функции $u(x)$, определённой в основной области $D \subset \mathbf{R}^4$ функцию $u'(\xi)$ определённую в основной области $D' \subset \mathbf{R}^4$. При этом

$$u' = Q^\top u, \tag{14.2.4}$$

$$x = G^\top(\xi - a), \tag{14.2.5}$$

где $Q \in SO(3)$, $G \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^\top \end{pmatrix}$, $a \in \mathbf{R}^4$. Таким образом, каждому преобразованию S_q вида (14.2.3) соответствует преобразование $T : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^3$, введённое в п. 14.1.3, с функциями

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^\top \end{pmatrix} x + a, \tag{14.2.6}$$

$$\psi(x,u) = Q^\top u. \tag{14.2.7}$$

При этом $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^\top \end{pmatrix}$ и $\left| \det \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x) \right| = 1$. Для действия L тогда выполняются и более сильные условия инвариантности определения (14.1.2), выражаемые в данном случае формулами (14.1.19, 14.1.20), совпадающими с формулами (14.2.1, 14.2.2).

Согласно п. 14.1.3 мы используем формулу (14.1.17), по которой для построения функции Нётер $qnf\,(x,u,w)$ достаточно вычислить производную $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}$ и производные функций φ и ψ по параметру α при $\alpha = 0$, которые мы будем обозначать

$$\frac{\partial\varphi(\alpha,x)}{\partial\alpha}\ \Big|_{\ \alpha=0} \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(0), \tag{14.2.8}$$

$$\frac{\partial\psi(\alpha,x,u)}{\partial\alpha}\ \Big|_{\ \alpha=0} \equiv \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(0). \tag{14.2.9}$$

В наших условиях $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(0)$ есть 4-функция от $x \in \mathbf{R}^4$ первой степени, а $\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(0)$ — 3-функция от $u \in \mathbf{R}^3$ линейная. 7-параметрической группе инвариантных преобразований T вида (14.2.6, 14.2.7) мы сопоставим 7 функций Нётер.

Выделим три подсемейства инвариантных преобразований:

1)сдвиг по времени — $\alpha = a_0$ — 1 параметр;

2)сдвиг в пространстве, по оси $\beta \in \overline{1,3}$ — $\alpha = a_\beta$ — 3 параметра;

3)пространственный поворот вокруг оси $\beta \in \overline{1,3}$ — $\alpha = \varphi_\beta$ есть угол поворота — 3 параметра.

Вычислим $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(0)$ и $\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(0)$ во всех 7 случаях.

Сдвиг по времени.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(0) = 0. \tag{14.2.10}$$

Сдвиг в пространстве вдоль оси β.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(0)_r = \delta_{r\beta}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(0) = 0. \tag{14.2.11}$$

Пространственный поворот вокруг оси β.

В случае $\beta = 3$ матрица поворота $Q(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} Q^\top(\alpha)\Big|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u$$

или

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(0)_\nu = \sum_{\tau=1}^{3} e_{3\nu\tau} u_\tau.$$

При повороте вокруг оси β получаем

$$\frac{\partial\psi^\beta}{\partial\alpha}(0)_\nu = \sum_{\tau=1}^{3} e_{\beta\nu\tau}u_\tau, \tag{14.2.12}$$

$$\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial\alpha}(0)_r = \sum_{\tau=1}^{3} e_{\beta r\tau}x_\tau. \tag{14.2.13}$$

Здесь $e_{\beta r\tau}$ — символ Леви-Чивиты из п. 1.3.2, причём полагается $e_{\beta r\tau} = 0$, если хоть один из индексов выходит за пределы множества $\overline{1,3}$.

Выпишем теперь соответствующие 7 функций Нётер.

Функция Нётер энергии — соответствует сдвигу по времени.

По формуле (14.1.17) имеем, принимая замечание 14.1.4,

$$qnf\,(x,u,w) = -\mathcal{L}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial w}w\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{14.2.14}$$

Функция Нётер β-компоненты импульса — соответствует сдвигу в пространстве вдоль оси β. Мы берём эту функцию также как и в случае энергии с обратным знаком.

$$qnf^{\,\beta}(x,u,w) = -\mathcal{L}h^\beta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial w}wh^\beta, \tag{14.2.15}$$

где $h^\beta \in \mathbf{R}^4$ — единичный вектор вдоль оси β, т.е. $h^\beta_r = \delta_{r\beta}$.

Как мы видим, удобно записать четыре функции Нётер для энергии и импульса общей формулой

$$qnf^{\,s}_{\,r}(x,u,w) = -\mathcal{L}\delta_{rs} + \sum_{\tau=1}^{3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial w_{\tau r}}w_{\tau s}. \tag{14.2.16}$$

Или в матричном виде $(\,Qnf\,)_{rs} \equiv qnf^{\,s}_{\,r}$ получаем

$$Qnf\,(w) = -\mathcal{L}(w)E_4 + \frac{\partial\mathcal{L}(w)}{\partial w}w. \tag{14.2.17}$$

Функция Нётер β-компоненты момента — соответствует повороту вокруг оси β. Согласно формулам (14.1.17) и (14.2.12, 14.2.13) получаем

$$qnf^{\,\beta}_{\,r}(x,u,w) = \mathcal{L}\sum_{\tau=1}^{3} e_{\beta r\tau}x_\tau + \sum_{\tau=1}^{3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial w_{\tau r}}\left(\sum_{\theta=1}^{3} e_{\beta\tau\theta}u_\theta - \sum_{\nu=1}^{3} w_{\tau\nu}\sum_{\theta=1}^{3} e_{\beta\nu\theta}x_\theta\right). \tag{14.2.18}$$

14.2.2 Храны среды Максвелла.

Так как плотность лагранжиана среды Максвелла согласно п. 1.3.9 есть квадратичная аппроксимация плотности лагранжиана идеальной среды, то операторы Нётер среды Максвелла есть аппроксимации соответствующих операторов Нётер идеальной среды. Согласно предыдущему пункту для построения функций Нётер действия Максвелла осталось лишь вычислить матрицу $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial w}$ в этом случае.

Для плотности лагранжиана Максвелла согласно формуле (1.3.119) имеем

$$\mathcal{M}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - (\,rot\,u)^2\right) + 2s_2\left(\frac{\partial u}{\partial\vec{x}}\right).$$

Так же как в п. 14.1.4 матрицу $w \in M(3 \times 4)$ представим в виде $w = (w_0, \bar{w})$, где $w_0 \in \mathbf{R}^3$ — столбец с номером 0, а $\bar{w} \in M(3)$ матрица, составленная из остальных 3 столбцов. Тогда при $w \in M(3 \times 4)$

$$\mathcal{M}(w) = \frac{1}{2}\left(\langle w_0, w_0\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \bar{w} - \bar{w}^\top, \bar{w} - \bar{w}^\top\right\rangle\right) + 2s_2(\bar{w}). \tag{14.2.19}$$

Так как среда Максвелла консервативна, то согласно выводу 1.3.8 плотность её энергии деформации

$$\mathcal{M}d(\bar{w}) = \frac{1}{4}\left\langle \bar{w} - \bar{w}^\top, \bar{w} - \bar{w}^\top\right\rangle - 2s_2(\bar{w}) \tag{14.2.20}$$

должна зависеть лишь от матрицы $\bar{w}+\bar{w}^\top$. Но это следует из представления величины $s_2(\bar{w})$ примера 14.1.5 и преобразований

$$\mathcal{M}d(\bar{w}) = \frac{1}{2}\langle \bar{w}, \bar{w}\rangle - \frac{1}{2}\langle \bar{w}, \bar{w}^\top\rangle - \langle \bar{w}, E\rangle + \langle \bar{w}, \bar{w}^\top\rangle = \tag{14.2.21}$$

$$\frac{1}{2}(\langle \bar{w}, \bar{w}\rangle + \langle \bar{w}, \bar{w}^\top\rangle) - \langle \bar{w}, E\rangle^2 =$$

$$\frac{1}{4}\left(\langle \bar{w} + \bar{w}^\top, \bar{w} + \bar{w}^\top\rangle - \langle \bar{w} + \bar{w}^\top, E\rangle^2\right).$$

Согласно технике § 6.1 вычисляем дифференциал

$$d\mathcal{M}d(\bar{w}) = \frac{1}{4}\left(2\langle \bar{w} + \bar{w}^\top, d(\bar{w} + \bar{w}^\top)\rangle - 2\langle \bar{w} + \bar{w}^\top, E\rangle\langle E, d(\bar{w} + \bar{w}^\top)\rangle\right) =$$

$$\langle \bar{w} + \bar{w}^\top, d\bar{w}^\top\rangle - \langle \bar{w} + \bar{w}^\top, E\rangle\langle E, d\bar{w}^\top\rangle.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \mathcal{M}_d(\bar{w})}{\partial \bar{w}} = \bar{w} + \bar{w}^\top - \langle \bar{w} + \bar{w}^\top, E\rangle E. \tag{14.2.22}$$

Получаем следующую формулу для производной

$$\frac{\partial \mathcal{M}(w)}{\partial w} = \begin{pmatrix} w_0^\top \\ -(\bar{w} + \bar{w}^\top - \langle \bar{w} + \bar{w}^\top, E\rangle E) \end{pmatrix}. \tag{14.2.23}$$

Подставляя формулу (14.2.23) в формулы для функций Нётер предыдущего пункта, получаем следующие формулы.

Функции Нётер энергии-импульса образуют матрицу $Qnf\,(w) \in M(4)$ вида (14.2.17), а именно

$$Qnf\,(w) = -\mathcal{M}(w)E_4 + \frac{\partial \mathcal{M}(w)}{\partial w} = \tag{14.2.24}$$

$$-\mathcal{M}(w)E_4 + \begin{pmatrix} \langle w_0, w_0\rangle & w_0^\top \bar{w} \\ \langle \bar{w} + \bar{w}^\top, E_3\rangle w_0 - (\bar{w} + \bar{w}^\top)w_0 & \langle \bar{w} + \bar{w}^\top, E_3\rangle \bar{w} - (\bar{w} + \bar{w}^\top)\bar{w} \end{pmatrix}.$$

Функция Нётер β-компоненты момента даётся формулой (14.2.18) при подстановке в неё выражения (14.2.23) вместо $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}(w)$. В частности, для плотности момента получаем

$$qnf\,{}^\beta_0(x, u, w) = \sum_{\tau=1}^{3} w_{\tau 0}\left(\sum_{\theta=1}^{3} e_{\beta\tau\theta}u_\theta - \sum_{\nu=1}^{3} w_{\tau\nu}\sum_{\theta=1}^{3} e_{\beta\nu\theta}x_\theta\right), \quad \beta \in \overline{1,3}. \tag{14.2.25}$$

Рассматривая $w_0 \in \mathbf{R}^3$, $u \in \mathbf{R}^3$ как трёхмерные векторы, в векторных обозначениях запишем формулы (14.2.25) в виде

$$\overrightarrow{qnf}_0(x, u, w) = [w_0, u] - [\bar{w}^\top w_0, \vec{x}]. \tag{14.2.26}$$

14.2.3 Плотность укороченного лагранжиана Максвелла.

Плотность укороченного лагранжиана Максвелла $\mathcal{M}s(w)$ получается из плотности лагранжиана Максвелла $\mathcal{M}(w)$ отбрасыванием слагаемого $2s_2$, соответствующего тривиальному действию согласно лемме 2.1.1. Эквивалентные действия M и Ms имеют совпадающие храны, т.е. каждый хран действия M есть хран действия Ms и наоборот. Строя 7 функций Нётер, соответствующих тесной группе преобразований действия Ms, мы тем самым найдем 7 новых хранов действия M. Эти новые храны могут иметь более простой вид. Более того, плотность энергии оказывается неотрицательной величиной для действия Ms, в то время как для действия Максвелла она не является знакоопределённой. И оператор Нётер энергии для Ms совпадает с принятым в [41, с.105] храном энергии для электро-магнитного поля. Однако недостатком операторов Нётер действия Ms в отличие от аналогичных операторов Нётер для действия M является то, что они не являются аппроксимациями главного порядка исходных семь законов сохранения идеальной среды.

Согласно формуле (2.2.28) укороченный лагранжиан Максвелла задаётся функцией

$$\mathcal{M}s(w) = \frac{1}{2}\left(\langle w_0, w_0\rangle - \frac{1}{2}\langle \bar{w} - \bar{w}^\top, \bar{w} - \bar{w}^\top\rangle\right). \tag{14.2.27}$$

Её производная равна

$$\frac{\partial \mathcal{M}s(w)}{\partial w} = \begin{pmatrix} w_0^\top \\ \bar{w} - \bar{w}^\top \end{pmatrix} \tag{14.2.28}$$

Функция Нётер энергии получается подстановкой формулы (14.2.28) в формулу (14.2.14) и равна

$$qnf\,(x,u,w) = -\mathcal{M}s(w)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle w_0, w_0\rangle \\ (\bar{w} - \bar{w}^\top)w_0 \end{pmatrix} = \tag{14.2.29}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\langle w_0, w_0\rangle + \frac{1}{2}\langle \bar{w} - \bar{w}^\top, \bar{w} - \bar{w}^\top\rangle\right) \\ (\bar{w} - \bar{w}^\top)w_0 \end{pmatrix}.$$

На функции $u(x) \in U$ плотность энергии есть

$$qn_0(x) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 + (\,rot\, u)^2\right) = \frac{1}{2}\left(E^2 + H^2\right), \tag{14.2.30}$$

где $E(x) = -\frac{\partial u}{\partial x_0}(x_0, \vec{x})$ и $H(x) = rot\, u(x_0, \vec{x}_0)$ вектора напряженности электрического и магнитного полей согласно формулам (1.3.121, 1.3.122). Вектор же потока энергии может быть записан в векторном виде

$$\overrightarrow{qn}(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{x}} - \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{x}}\right)^\top\right)\frac{\partial u}{\partial x_0}. \tag{14.2.31}$$

Согласно (13.11.57) в обозначениях п. 11.3.5 верно

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{x}} - \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{x}}\right)^\top = \mathrm{Sw}\,(\,rot\, u).$$

И согласно (11.3.27) получаем для вектора потока энергии

$$\overrightarrow{qn}(x) = [\,rot\,u, \frac{\partial u}{\partial x_0}] = [E, H]. \tag{14.2.32}$$

Т.е. плотность потока энергии есть вектор Умова-Пойнтинга.

Сравним функции Нётер энергии qnf действия Максвелла — формула (14.2.24) и функции Нётер энергии $qnfs$ укороченного действия Максвелла — формула (14.2.29). Их разница равна

$$qnf \; - \; qnfs \; = -2 \begin{pmatrix} s_2(\bar{w}) \\ \bar{w}w_0 - \langle \bar{w}, E\rangle w_0 \end{pmatrix}, \tag{14.2.33}$$

т.е. и плотности энергий и плотности потоков энергий у действий M и Ms различны. Однако благодаря примеру 14.1.6 глобальные законы сохранения энергии для действий M и Ms совпадают

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} qn_0(u)(x_0, \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} qns_{\,0}(x_0, \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3,$$

если функции $u(x_0, \vec{x})$ удовлетворяют условиям (14.1.48, 14.1.49) примера 14.1.6. Таким образом, глобальный закон сохранения энергии для Ms сохраняет свойства аппроксимировать глобальный закон сохранения энергии идеальной среды.

Законы сохранения энергии-импульса согласно формулам (14.2.24) и (14.2.28) имеют в матричной форме вид

$$Qnf\,(x, u, w) = -\mathcal{M}s(w)E_4 + \frac{\partial \mathcal{M}s(w)}{\partial w} w = -\mathcal{M}s(w)E_4 + \begin{pmatrix} \langle w_0, w_0\rangle & w_0^\top \bar{w} \\ (\bar{w} - \bar{w}^\top)w_0 & (\bar{w} - \bar{w}^\top)\bar{w} \end{pmatrix}. \tag{14.2.34}$$

Сравнивая формулы (14.2.24) и (14.2.34), мы видим, что плотности импульсов для действий M и Ms совпадают и равны

$$\overrightarrow{qnf}\,(w) = \bar{w}^\top w_0, \tag{14.2.35}$$

т.е.

$$\overrightarrow{qn}(u)(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{x}}\right)^\top \frac{\partial u}{\partial x_0}. \tag{14.2.36}$$

Следовательно и глобальные законы сохранения импульса для действий M и Ms совпадают.

Законы сохранения момента задаются функциями Нётер (14.2.18) с подстановкой в них вместо $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}(w)$ величины $\frac{\partial \mathcal{M}s(w)}{\partial w}$ вида (14.2.28). Так как $\frac{\partial \mathcal{M}(w)}{\partial w_0} = \frac{\partial \mathcal{M}s(w)}{\partial w_0} = w_0^\top$, то плотности момента у действий M и Ms совпадают и, следовательно, совпадают глобальные законы сохранения момента.

Вывод 14.2.1 *7 глобальных законов сохранения энергии, импульса и момента у действия Максвелла и укороченного действия Максвелла совпадают.*

Итак, при изучении глобальных законов сохранения энергии, импульса и момента мы можем заменять действие Максвелла на укороченное действие Максвелла.

14.2.4 Глобализуемость хранов энергии и импульса для действия Максвелла M и укороченного действия Максвелла Ms.

Для установления глобализуемости храна мы пользуемся достаточным условием глобализуемости — леммой 14.1.2.

Введём в этом пункте дополнительное условие на поведении функции $u(x) \in C_3^{(2)}(\mathbf{R}^4)$ в пространственной бесконечности аналогичное условию 1-кулоновости определения 13.9.2.

Условие Y. *На любом компакте* $I \subset \mathbf{R}$ *равномерно по* $x_0 \in I$ *выполнено*

$$u^{(\alpha)}(x_0, \vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^{1+|\alpha|}}\right) \tag{14.2.37}$$

при $|\vec{x}| \to \infty$ *при любом* $\alpha \in \mathbf{N}_0^4, |\alpha| \le 1$.

При выполнения условия Y для матриц энергии-импульса действий M и Ms верна оценка

$$Qn(u)(x_0, \vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^4}\right)$$

при $|\vec{x}| \to \infty$ равномерно по $x_0 \in I \subset \mathbf{R}$, где I — компакт. Итак, выполнены условия 1) и 2) леммы 14.1.2 и храны энергии и импульса M и Ms глобализуемы. При этом сохраняющиеся величины

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} qn(u)(x_0, \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3$$

существуют как интегралы Лебега.

Для хранов компонент момента действий M и Ms согласно формуле (14.2.18) верна оценка

$$qn^{\beta}(u)(x_0, \vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right)$$

при $\vec{x} \to \infty$ равномерно по $x_0 \in I \subset \mathbf{R}$, где I — компакт. Таким образом, выполнено условие 2) леммы 14.1.2 и вопрос о применимости леммы сводится к вопросу о существовании интеграла в смысле главного значения

$$V.P. \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \overrightarrow{qn}(u)(x_0, \vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3,$$

где $\overrightarrow{qn}(u)(x_0, \vec{x})$ — плотность момента.

Наши рассуждения, начиная с § 2.2, ведутся в основном в терминах 4-функции состояния $u'(x) \in \bar{C}_{4,0}^{(2)}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3)$, через которую функция $u(x_0, \vec{x})$ выражается по формуле (2.2.4) замены переменных Максвелла, а именно

$$u(x_0, \vec{x}) = \vec{u}'(x_0, \vec{x}) - grad \int\limits_c^{x_0} u_0'(\xi, \vec{x})\, d\xi. \tag{14.2.38}$$

Из формулы (14.2.38) и определения 13.9.2 следует, что для кулоновости 3-функции $u(x)$ достаточно 2-кулоновости 4-функции $u'(x)$.

Замечание 14.2.1 *Для глобализуемости храна энергии укороченного действия Максвелла достаточно кулоновости 4-функции состояния* $u'(x)$.

В самом деле, в этом случае хран энергии по формулам (14.2.30, 14.2.32) равен

$$qn(u)(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E^2 + H^2) \\ [E, H] \end{pmatrix}, \tag{14.2.39}$$

а вектора $E(x_0, \vec{x})$ и $H(x_0, \vec{x})$ выражаются через первые производные компонент 4-функции $u'(x)$ по формулам (2.2.24, 2.2.25) и в силу условия кулоновости $u'(x)$ равномерно на любом компакте $I \subset \mathbf{R}$ верно

$$E(x_0, \vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^2}\right), \quad H(x_0, \vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^2}\right). \tag{14.2.40}$$

Итак, в силу (14.2.39, 14.2.40) выполнены условия леммы 14.1.2 о глобализации.

§14.3 Законы сохранения для действия Лоренца

14.3.1 Инвариантные преобразования действия Лоренца.

В этом параграфе $k = 4$, $n = 4$, $W = M(4)$. Рассматривается плотность лагранжиана Лоренца $\mathcal{N}(w)$, которая согласно формуле (2.2.5) с использованием обозначений § 6.1 для скалярного произведения матриц, может быть записана в виде

$$\mathcal{N}(w) = \frac{1}{2}(\langle w, \Theta w^\top \Theta\rangle - \langle w, \Theta w \Theta\rangle) = \frac{1}{2}\langle w, \Theta(w^\top - w)\Theta\rangle. \tag{14.3.1}$$

Дифференциал скалярной функции $\mathcal{N}(w)$ от матричного аргумента $w \in M(4)$ равен

$$d\mathcal{N}(w) = \langle \Theta w^\top \Theta, dw^\top\rangle - \langle \Theta w^\top \Theta, dw^\top\rangle = \langle \Theta(w^\top - w)\Theta, dw^\top\rangle$$

и производная

$$\frac{\partial \mathcal{N}(w)}{\partial w} = \Theta(w - w^\top)\Theta. \tag{14.3.2}$$

Напомним, что $\Theta \in M(4)$ — матрица специального вида (2.2.6).

В теореме 2.5.1 мы установили инвариантность действия Лоренца $N(u)$ относительно преобразований функции u вида

$$T_p(u)(x) = G^\top u(G(x - a)), \ a \in \mathbf{R}^4, \ G \in O_e(1, 3). \tag{14.3.3}$$

Покажем, что действие Лоренца удовлетворяет и более сильным требованиям инвариантности определения 14.1.2.

Аналогично п. 14.2.1 преобразования (14.3.3) принадлежат классу преобразований, введённому в п. 14.1.3, с функциями

$$\varphi(x) = G^{-1}x + a, \ a \in \mathbf{R}^4, \ G \in O_e(1, 3). \tag{14.3.4}$$

$$\psi(x, u) = G^\top u, \tag{14.3.5}$$

Поэтому,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = G^{-1}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} = G^\top. \tag{14.3.6}$$

Условия инвариантности (14.1.19, 14.1.21) действия N определения 14.1.2 принимают в данном случае вид двух условий для любой матрицы $w \in M(4)$

$$G^\top w G \in M(4); \tag{14.3.7}$$

$$\mathcal{N}(G^\top wG) = \mathcal{N}(w). \tag{14.3.8}$$

Выполнение первого условия тривиально, а второе условие выполнено, ибо для $G \in O_e(1,3)$ верно $G\Theta G^\top = \Theta$ и поэтому по свойствам скалярного произведения матриц

$$\mathcal{N}(G^\top wG) = \frac{1}{2}\langle G^\top wG, \Theta G^\top(w^\top - w)G\Theta\rangle =$$

$$\frac{1}{2}\langle w, (G\Theta G^\top)(w^\top - w)(G\Theta G^\top)\rangle = \frac{1}{2}\langle w, \Theta(w^\top - w)\Theta\rangle = \mathcal{N}(w).$$

Семейство преобразований T_p вида (14.3.3) 10-параметрическое и мы определим 10 функций Нётер, дающих 10 хранов действия Лоренца, следующим выбором параметра α:

Хран сохранения энергии — $\alpha = a_0$,

3 храна сохранения импульса — $\alpha = a_\beta, \beta \in \overline{1,3}$,

3 храна сохранения момента — $\alpha = \varphi_\beta, \beta \in \overline{1,3}$, где φ_β — угол поворота вокруг оси β,

3 специальных храна — $\alpha = \beta_\nu, \nu \in \overline{1,3}$, при этом $a = 0, G = G_t(\vec{\beta})$ — матрица вида (10.8).

14.3.2 Храны энергии-импульса.

Из четырех функций Нётер — энергии и трёх компонент импульса составим матрицу $Qnf\,(x,u,w)$. Причём эти 4 функции Нётер берём с обратным знаком согласно замечанию 14.1.4. Если $\alpha = a_s, s \in \overline{0,3}$, то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(0) = h^s, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(0) = 0, \tag{14.3.9}$$

где $h^s_r = \delta_{sr}$. Согласно формуле (14.1.17) для функций Нётер с учётом замечания о знаке тогда получаем

$$Qnf\,(w) = -\mathcal{N}(w)E_4 + \frac{\partial N}{\partial w}(w) = -\mathcal{N}(w)E_4 + \Theta(w - w^\top)\Theta w. \tag{14.3.10}$$

Если $u(x)$ — кулоновское состояние в смысле определения 13.9.2, то из (14.3.10) следует, что

$$Qn(u)(x_0, \vec{x}) = O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^4}\right) \tag{14.3.11}$$

при $|\vec{x}| \to \infty$ равномерно по $x_0 \to I$, где $I \subset \mathbf{R}$ любой компакт. Итак для кулоновского состояния u выполнены условия леммы 14.1.2 о глобализации и храны энергии и импульса глобализуемы и определяют глобальные законы сохранения энергии и импульса, причём сохраняющиеся интегралы существуют в смысле Лебега, а не только в смысле главного значения.

14.3.3 Сравнение законов сохранения энергии для действия Лоренца и укороченного действия Максвелла.

В этом пункте будем отмечать штрихом 4-функции состояния u' в отличие от 3-функций состояния $u = Bu'$, т.е. согласно формуле (2.2.4)

$$u(x) = \vec{u}'(x_0, \vec{x}) - grad\int\limits_c^{x_0} u'_0(x_0, \vec{x})dx_0 \equiv (Bu')(x). \tag{14.3.12}$$

Согласно формуле (2.2.34) следующие плотности лагранжиана равны

$$\mathcal{N}\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)(x) = \mathcal{M}s\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x). \tag{14.3.13}$$

Сравним теперь плотность энергии действия Лоренца, которая согласно формуле (14.3.10) есть

$$qnl_{\,0}(u') = -\mathcal{N}\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right) + \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{\partial u'_0}{\partial x_i} - \frac{\partial u'_i}{\partial x_0}\right)\theta_{ij}\frac{\partial u'_j}{\partial x_0} = \tag{14.3.14}$$

$$-\mathcal{N}\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right) - \sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{\partial u'_0}{\partial x_\nu} - \frac{\partial u'_\nu}{\partial x_0}\right)\frac{\partial u'_\nu}{\partial x_0},$$

и плотность энергии укороченного действия Максвелла, равную согласно формуле (14.2.29)

$$qns_{\,0}(u) = -\mathcal{M}s\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial u_\nu}{\partial x_0}\frac{\partial u_\nu}{\partial x_0}, \tag{14.3.15}$$

на одном и том же состоянии среды, т.е. при $u = Bu'$. В силу равенства (14.3.13) для разницы получаем

$$qnl_{\,0}(u') - qns_{\,0}(Bu') = -\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{\partial u'_0}{\partial x_\nu} - \frac{\partial u'_\nu}{\partial x_0}\right)\frac{\partial u'_\nu}{\partial x_0} - \sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{\partial u'_\nu}{\partial x_0} - \frac{\partial u'_0}{\partial x_\nu}\right)\left(\frac{\partial u'_\nu}{\partial x_0} - \frac{\partial u'_0}{\partial x_\nu}\right) = \tag{14.3.16}$$

$$\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{\partial u'_\nu}{\partial x_0} - \frac{\partial u'_0}{\partial x_\nu}\right)\frac{\partial u'_0}{\partial x_\nu}.$$

Последнее выражение мы уже получали в п. 12.1.1

Вывод 14.3.1 *Плотность энергии действия Лоренца не равна плотности энергии укороченного действия Максвелла.*

Следующий вопрос: если не равны храны энергии действий N и Ms, то не будут ли совпадать их глобальные законы сохранения энергии ? Отрицательный ответ мы даём в следующем параграфе.

§14.4 Энергия агвидной частицы для трёх действий: усеченного действия Максвелла, действия Лоренца, конденсированного действия

Пусть имеется некоторое состояние идеальной среды. Зададим это состояние с помощью 3-функции смещений, построим усечённый лагранжиан Максвелла $\mathcal{M}_s$ и по усечённому лагранжиану Максвелла построим оператор Нётер энергии и глобальный закон сохранения энергии. Получившуюся энергию мы будем называть *физической энергией* и обозначать далее $\mathcal{E}s$.

Зададим теперь состояние среды с помощью 4-функции состояния, построим лагранжиан Лоренца $\mathcal{N}$ и по лагранжиану Лоренца — оператор Нётер энергии и глобальный закон сохранения энергии. Получившуюся энергию будем называть *формальной энергией* и обозначать $\mathcal{E}f$.

Проведём теперь с той же 4-функцией состояния процедуру конденсации и построим конденсированное действие. Для конденсированного действия построим оператор Нётер энергии. Соответствующую величину энергии будем называть *конденсированной энергией* и обозначать далее $\mathcal{E}n$.

В предыдущем параграфе и в § 12.1 п. 12.1.1 мы сравнивали плотности физической и формальной энергий и убедились, что они различны. В этом параграфе мы убедимся, что и величины энергий различны. Мы продолжаем пользоваться обозначениями и терминологией §§ 14.1-14.3 отличными в некоторых деталях от обозначений § 12.1 плотностей физической и формальной энергий.

В этом параграфе и далее вводится снова тензорное соглашение о суммировании по повторяющимся индексам без написания знака суммы $\sum$.

14.4.1 Условие Лоренца для агвидов.

Для удобства дальнейших вычислений напомним в этом пункте некоторые свойства агвидов из §§ 13.2, 13.4.

Пусть $u(x) \equiv uf(\vec{x} - \vec{b}(x_0))$ 4-функция состояние агвидной частицы, $uf \in S_4'(\mathbf{R}^3)$, $\vec{b}(x_0) = \vec{l}x_0 + \vec{C}$, $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$, $\vec{C} \in \mathbf{R}^3$. В образах Фурье мы будем снова пользоваться функциями (13.4.10), а именно

$$\omega_k(\vec{\eta}) \equiv \begin{cases} -i\eta_k, & k \in \overline{1,3}; \\ i\langle \vec{l}, \vec{\eta} \rangle, & k = 0. \end{cases} \tag{14.4.1}$$

Условие Лоренца $\frac{\partial u_k}{\partial x_k}(x) = 0$ в образах Фурье принимает вид (13.2.57), т.е.

$$\langle \omega(\vec{\eta}), \Theta\widehat{uf}(\vec{\eta}) \rangle = 0. \tag{14.4.2}$$

В силу нечётности функции $\omega(-\vec{\eta}) = -\omega(\vec{\eta})$ условие (14.4.2) эквивалентно условию

$$\langle \omega(\vec{\eta}), \Theta\widehat{uf}(-\vec{\eta}) \rangle = 0. \tag{14.4.3}$$

Для функции $\omega(\vec{\eta})$ верно равенство

$$\langle \omega(\vec{\eta}), \Theta\omega(\vec{\eta}) \rangle = (\vec{\eta})^2 - \langle \vec{l}, \vec{\eta} \rangle^2 \equiv \operatorname{Pd}(\vec{l}, \vec{\eta}). \tag{14.4.4}$$

Для полинома Pd верно представление

$$\operatorname{Pd}(\vec{l}, \vec{\eta}) = \langle \vec{\eta}, \operatorname{Ks}(\vec{l})\vec{\eta} \rangle, \tag{14.4.5}$$

где $\operatorname{Ks}(\vec{l}) = E - \vec{l}\vec{l}^{\top}$ — матрица, введённая формулой (3.6.75).

Дифференцирование агвидной функции по времени следующим образом выражается через дифференцирование по пространственным координатам

$$\frac{\partial}{\partial x_0}u(x) = \frac{\partial}{\partial x_0}uf(\vec{x} - (\vec{l}x_0 + \vec{c})) = -\langle \vec{l}, \vec{\nabla} \rangle uf(\vec{x} - \vec{b}(x_0)) = -\langle \vec{l}, \nabla \rangle u(x) \tag{14.4.6}$$

где оператор $\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right)^{\top} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$.

Далее в этом параграфе рассматривается одиночная натуральная частица в смысле определения 13.3.1. Для натуральной частицы трансформации Фурье функции состояния и функции тока связаны формулой (13.2.58), а именно

$$\widehat{uf}(\vec{\eta}) = \frac{1}{\operatorname{Pd}(\vec{l}, \vec{\eta})}\Theta\widehat{jf}(\vec{\eta}). \tag{14.4.7}$$

14.4.2 Выражение физической энергии через трансформацию Фурье функции тока агвида.

Пусть $u(x)$ — 4-функция состояния натуральной агвидной частицы, B — оператор замены Максвелла. Тогда согласно формулам (14.2.29), (2.2.34), (2.2.4) имеем для плотности физической энергии

$$qns\,(Bu) = -\mathcal{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial x_0} - \frac{\partial u_0}{\partial x_\nu}\right)\left(\frac{\partial u_\nu}{\partial x_0} - \frac{\partial u_0}{\partial x_\nu}\right) = \tag{14.4.8}$$

$$-\mathcal{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^{\top}\right), \Theta\left(\frac{\partial u}{\partial x_0} - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^{\top}\right)\right\rangle.$$

В силу натуральности состояния существует интеграл физической энергии, не зависящий от времени

$$\mathcal{E}s = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} qns\,(Bu)\,dx_1dx_2dx_3 = -m - I, \tag{14.4.9}$$

где m-масса частицы, а

$$I \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^{\top}\right), \Theta\left(\frac{\partial u}{\partial x_0} - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^{\top}\right)\right\rangle dx_1dx_2dx_3. \tag{14.4.10}$$

Преобразуем последний интеграл, используя формулу Планшереля [24, с.108], применимую в силу натуральности состояния,

$$I = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left\langle \left(\omega_0(\vec{\eta})\widehat{uf}(\vec{\eta}) - \omega(\vec{\eta})\widehat{uf}_0(\vec{\eta})\right), \right. \tag{14.4.11}$$

$$\left. \Theta\left(\omega_0(-\vec{\eta})\widehat{uf}(-\vec{\eta}) - \omega(-\vec{\eta})\widehat{uf}_0(-\vec{\eta})\right)\right\rangle d\eta_1d\eta_2d\eta_3.$$

В силу Лоренцевости состояния и равенств (14.4.3), (14.4.4), (14.4.7) последний интеграл равен

$$I = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left(\frac{\langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle^2}{\mathrm{Pd}^{\,2}(\vec{l},\vec{\eta})}\left\langle\widehat{jf}(\vec{\eta}), \Theta\widehat{jf}(-\vec{\eta})\right\rangle - \frac{\widehat{jf}_0(\vec{\eta})\widehat{jf}_0(-\vec{\eta})}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l},\vec{\eta})}\right) d\eta_1d\eta_2d\eta_3. \tag{14.4.12}$$

Используя формулу для массы агвида (13.4.27), последнее выражение преобразуется к виду

$$I = -2m + \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left(\frac{(\vec{\eta})^2}{\mathrm{Pd}^{\,2}(\vec{l},\vec{\eta})}\left\langle\widehat{jf}(\vec{\eta}), \Theta\widehat{jf}(-\vec{\eta})\right\rangle - \frac{\widehat{jf}_0(\vec{\eta})\widehat{jf}_0(-\vec{\eta})}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l},\vec{\eta})}\right) d\eta_1d\eta_2d\eta_3.$$

Возвратимся к формуле (14.4.9) и получим следующее выражение для физической энергии агвида

$$\mathcal{E}s = m + \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left(\frac{\widehat{jf}_0(\vec{\eta})\widehat{jf}_0(-\vec{\eta})}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l},\vec{\eta})} - \frac{(\vec{\eta})^2}{\mathrm{Pd}^{\,2}(\vec{l},\vec{\eta})}\left\langle\widehat{jf}(\vec{\eta}), \Theta\widehat{jf}(-\vec{\eta})\right\rangle\right) d\eta_1d\eta_2d\eta_3. \tag{14.4.13}$$

14.4.3 Зависимость физической энергии агвида от состояния.

В любом состоянии агвидной частицы для её физической энергии верна формула (14.4.13). Зафиксируем некоторое состояние частицы как стандартное, т.е. сопоставим ему единичный элемент e группы Пуанкаре . Рассмотрим также другое состояние — текущее, которому сопоставим элемент p группы Пуанкаре P. Величины, относящиеся к стандартному состоянию, будем обозначать теми же символами что и в предыдущем пункте, т.е. $\widehat{jf}(\vec{\eta})$ — трансформация Фурье функции тока, $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ — скорость частицы. Величины, относящиеся к текущему состоянию, будем отмечать волной сверху, т.е. $\widetilde{\widehat{jf}}(\hat{\eta})$ — трансформация Фурье функции тока, $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ — вектор скорости частицы.

Согласно формуле (14.4.13) физическая энергия в текущем состоянии

$$\mathcal{E}s(p) = m(p) + \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left(\frac{\widetilde{\widehat{jf}}_0(\vec{\eta})\widetilde{\widehat{jf}}_0(-\vec{\eta})}{\operatorname{Pd}(\vec{l},\vec{\eta})} - \frac{(\vec{\eta})^2}{\operatorname{Pd}^2(\vec{l},\vec{\eta})} \left\langle \widetilde{\widehat{jf}}(\vec{\eta}), \Theta\widetilde{\widehat{jf}}(-\vec{\eta}) \right\rangle \right) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3. \tag{14.4.14}$$

Выразим трансформацию Фурье функции тока $\widetilde{\widehat{jf}}(\vec{\eta})$ в текущем состоянии через трансформацию Фурье функции тока в стандартном состоянии по формуле (13.2.60). Тогда

$$\widetilde{\widehat{jf}}_0(\vec{\eta})\widetilde{\widehat{jf}}_0(-\vec{\eta}) = \frac{1}{(\det R)^2} - G^{-1}_{0k}(p)\widehat{jf}_k(R^{-1\top}\vec{\eta})G^{-1}_{0l}(p)\widehat{jf}_l(-R^{-1\top}\vec{\eta}), \tag{14.4.15}$$

$$\left\langle \widetilde{\widehat{jf}}(\vec{\eta}), \Theta\widetilde{\widehat{jf}}(-\vec{\eta}) \right\rangle = \left\langle \widehat{jf}(R^{-1\top}\vec{\eta}), \Theta\widehat{jf}(-R^{-1\top}\vec{\eta}) \right\rangle \frac{1}{(\det R)^2}. \tag{14.4.16}$$

Подставим выражения (14.4.15, 14.4.16) в (14.4.14) и проведём в интеграле замену переменных $\vec{y} = R^{-1\top}\vec{\eta}$, получим

$$\mathcal{E}s(p) = m(p) + \frac{1}{|\det R|}\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left(\frac{G^{-1}_{0k}(p)G^{-1}_{0l}(p)\widehat{jf}_k(\vec{y})\widehat{jf}_l(-\vec{y})}{\operatorname{Pd}(\tilde{\vec{l}}, R^\top\vec{y})} \right. \tag{14.4.17}$$

$$\left. - \frac{(R^\top\vec{y})^2}{\operatorname{Pd}^2(\tilde{\vec{l}}, R^\top\vec{y})} \left\langle \widehat{jf}(\vec{y}), \Theta\widehat{jf}(-\vec{y}) \right\rangle \right) dy_1 dy_2 dy_3.$$

Согласно формуле (14.4.4) для полинома $\operatorname{Pd}(\vec{l},\vec{\eta})$ и формуле (3.6.73) имеем

$$\operatorname{Pd}(\tilde{\vec{l}}, R^\top\vec{y}) = \left\langle R^\top\vec{y}, \operatorname{Ks}(\tilde{\vec{l}})R^\top\vec{y} \right\rangle = \left\langle \vec{y}, R\operatorname{Ks}(\tilde{\vec{l}})R^\top\vec{y} \right\rangle = \left\langle \vec{y}, \operatorname{Ks}(\vec{l})\vec{y} \right\rangle = \operatorname{Pd}(\vec{l},\vec{y}). \tag{14.4.18}$$

Подставим (14.4.18) в (14.4.17) и заменим обозначение переменной $\vec{y}$ на $\vec{\eta}$, получим

$$\mathcal{E}s(p) = m(p) + \frac{1}{|\det R|}\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left(\frac{G^{-1}_{0k}(p)G^{-1}_{0l}(p)\widehat{jf}_k(\vec{\eta})\widehat{jf}_l(-\vec{\eta})}{\operatorname{Pd}(\vec{l},\vec{\eta})} \right. \tag{14.4.19}$$

$$\left. - \frac{\left\langle \vec{\eta}, RR^\top\vec{\eta} \right\rangle}{\operatorname{Pd}^2(\vec{l},\vec{\eta})} \left\langle \widehat{jf}(\vec{\eta}), \Theta\widehat{jf}(-\vec{\eta}) \right\rangle \right) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3.$$

Введём две симметричные матрицы Cen $\in Ms(4)$ и Ven $\in Ms(3)$, определяемые через трансформации Фурье функции тока $\widehat{jf}(\eta)$ в стандартном состоянии:

$$\mathrm{Cen}_{kl} \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\widehat{jf}_k(\vec{\eta})\widehat{jf}_l(-\vec{\eta})}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l},\vec{\eta})}\, d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3,\ k \in \overline{0,3},\ l \in \overline{0,3}; \tag{14.4.20}$$

$$\mathrm{Ven}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\eta_\alpha \eta_\beta}{\mathrm{Pd}^2(\vec{l},\vec{\eta})} \left\langle \widehat{jf}(\vec{\eta}), \Theta\widehat{jf}(-\vec{\eta}) \right\rangle d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3,\ \alpha \in \overline{1,3},\ \beta \in \overline{1,3}. \tag{14.4.21}$$

В этих обозначениях формула (14.4.19) записывается в виде

$$\mathcal{E}s(p) = m(p) + \frac{1}{|\det R|} \left(\mathrm{Cen}_{kl} G^{-1}_{0k}(p) G^{-1}_{0l}(p) - \left\langle RR^\top,\, \mathrm{Ven} \right\rangle \right). \tag{14.4.22}$$

или, зная зависимость массы от состояния агвидной частицы — формула (12.2.18), имеем

$$\mathcal{E}s(p) = \frac{1}{|\det R|} \left(m_0 + \mathrm{Cen}_{kl} G^{-1}_{0k}(p) G^{-1}_{0l}(p) - \left\langle RR^\top,\, \mathrm{Ven} \right\rangle \right). \tag{14.4.23}$$

Сравнивая формулу (13.4.27) для массы агвида с определением (14.4.21) матрицы Ven, мы видим следующую связь матрицы Ven с массой покоя стандартного состояния

$$2m_0 = \langle E,\, \mathrm{Ven} \rangle - \left\langle \vec{l},\, \mathrm{Ven}\,\vec{l} \right\rangle = \left\langle E - \vec{l}\vec{l}^{\tau},\, \mathrm{Ven} \right\rangle = \left\langle \mathrm{Ks}\,(\vec{l}),\, \mathrm{Ven} \right\rangle. \tag{14.4.24}$$

Далее в этом параграфе $p \in P_e$, т.е.рассматриваются состояния одной и той же частицы и для матрицы $G(p)$ используется левое представление. Тогда по формуле (3.2.59)

$$G^{-1}_{0k}(p) = \xi_k,\ k \in \overline{0,3}, \tag{14.4.25}$$

где $\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{1-|\vec{\beta}|^2}}$, $\vec{\xi} = \xi_0\vec{\beta}$, $\vec{\beta} \in \mathbf{R}^3$, $|\vec{\beta}| < 1$. По формуле (3.6.10)

$$\det R = \langle l, \xi \rangle. \tag{14.4.26}$$

По формуле (3.6.69) и формулам (3.2.15), (3.2.19) имеем

$$RR^\top = (B + \vec{l}\vec{\xi}^\top)(B + \vec{\xi}\vec{l}^\top) = B^2 + (\vec{\xi})^2\vec{l}\vec{l}^\top + \xi_0\vec{\xi}\vec{l}^\top + \xi_0\vec{l}\vec{\xi}^\top = \tag{14.4.27}$$

$$E + \vec{\xi}\vec{\xi}^\top + (\xi_0^2 - 1)\vec{l}\vec{l}^\top + \xi_0\vec{\xi}\vec{l}^\top + \xi_0\vec{l}\vec{\xi}^\top = \mathrm{Ks}\,(\vec{l}) + (\vec{\xi} + \xi_0\vec{l})(\xi + \xi_0\vec{l})^\top.$$

Подставив (14.4.25-14.4.27) в (14.4.23) и учитывая (14.4.24), получаем

$$\mathcal{E}s = \frac{1}{|\langle l, \xi \rangle|} \left(-m_0 + \langle \xi,\, \mathrm{Cen}\,\xi \rangle - \left\langle (\vec{\xi} + \xi_0\vec{l}),\, \mathrm{Ven}\,(\vec{\xi} + \xi_0\vec{l}) \right\rangle \right). \tag{14.4.28}$$

Или через вектор $\beta \in \mathbf{R}^3$, $|\vec{\beta}| < 1$ имеем

$$\mathcal{E}s(\vec{\beta}) = \frac{\sqrt{1 - |\vec{\beta}|^2}}{|\langle l, \beta \rangle|} \left(-m_0 + \frac{1}{1 - |\vec{\beta}|^2} \left(\langle \beta,\, \mathrm{Cen}\,\beta \rangle - \langle (\vec{\beta} + \vec{l}),\, \mathrm{Ven}\,(\vec{\beta} + \vec{l}) \rangle \right) \right), \tag{14.4.29}$$

где $\beta \in \mathbf{R}^4$, $\beta \equiv \binom{1}{\vec\beta}$. Итак, в левом представлении матрицы $G(p)$ физическая энергия агвида зависит лишь от вектора параметров $\vec\beta \in \mathbf{R}^3$, $|\vec\beta| < 1$.

В частном случае, когда стандартное состоянии — состояние покоя, т.е. $\vec l = 0$ и $\tilde{\vec l} = Q^\top \vec\beta$ получаем

$$\mathcal{E}s(\vec\beta) = \sqrt{1 - |\vec\beta|^2}\left(-m_0 + \frac{1}{1-|\vec\beta|^2}\Big(\langle\beta,\, \mathrm{Cen}\,\beta\rangle - \langle\vec\beta,\, \mathrm{Ven}\,\vec\beta\rangle\Big)\right), \tag{14.4.30}$$

14.4.4 Физическая энергия скалярной частицы.

В случае скалярной частицы $\widehat{jf}(\vec\eta) = l\widehat{jf}_0(\vec\eta)$, поэтому получаем следующий специальный вид матрицы $\mathrm{Cen} \in M(4)$ в этом случае

$$\mathrm{Cen} = r_0 l l^\top, \tag{14.4.31}$$

где

$$r_0 \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\widehat{jf}_0(\vec\eta)\widehat{jf}_0(-\vec\eta)}{\mathrm{Pd}\,(\vec l, \vec\eta)}\, d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3. \tag{14.4.32}$$

В случае скалярной частицы формула для массы (13.4.27) даёт соотношение между константами

$$m_0 = \frac{1}{2}(1 - |\vec l|^2) r_0. \tag{14.4.33}$$

Формула физической энергии (14.4.29) для скалярной частицы принимает теперь вид:

$$\mathcal{E}s(\vec\beta) = \frac{\sqrt{1-|\vec\beta|^2}}{|\langle l, \beta\rangle|}\left(-\frac{1}{2}(1-|\vec l|^2)r_0 + \frac{1}{1-|\vec\beta|^2}\Big(r_0\langle l,\beta\rangle^2 - \langle(\vec\beta + \vec l),\, \mathrm{Ven}\,(\vec\beta+\vec l)\rangle\Big)\right), \tag{14.4.34}$$

$$\vec\beta \in \mathbf{R}^3,\ |\vec\beta| < 1.$$

Световая скалярная частица, $|\vec l| = 1$.

В этом случае согласно (14.4.33) $m_0 = 0$ и $m(p) = 0$ в любом состоянии. Кроме того

$$\left\langle \widehat{jf}(\vec\eta), \Theta\widehat{jf}(-\vec\eta)\right\rangle = (1 - |\vec l|^2)\widehat{jf}_0(\vec\eta)\widehat{jf}_0(-\vec\eta) = 0, \tag{14.4.35}$$

поэтому $\mathrm{Ven} = 0$. Получаем для энергии скалярной световой частицы

$$\mathcal{E}s(\vec\beta) = \frac{|\langle l, \beta\rangle|}{\sqrt{1-|\vec\beta|^2}} r_0, \vec\beta \in \mathbf{R}^3, |\vec\beta| < 1. \tag{14.4.36}$$

Скалярная частица со сферически симметричным состоянием покоя как стандартным состоянием.

В этом случае $\vec l = 0$ и формула (14.4.21) принимает вид

$$\mathrm{Ven}_{\alpha\beta} = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\eta_\alpha\eta_\beta}{|\vec\eta|^4}\widehat{jf}_0(\vec\eta)\widehat{jf}_0(-\vec\eta)\, d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \tag{14.4.37}$$

и условие сферической симметрии функции $\widehat{jf}_0(\vec x)$ влечет сферическую симметрию функции $\widehat{jf}_0(\vec\eta)\widehat{jf}_0(-\vec\eta)$, а следовательно из формулы (14.4.37) получаем $\mathrm{Ven} =$

$\lambda E_3, \lambda \in \mathbf{R}$. Но в силу соотношения (14.4.24) тогда $\lambda = \frac{2}{3}m_0$. Итак формула (14.4.34) даёт следующий вид физической энергии

$$\mathcal{E}s(\vec{\beta}) = \sqrt{1-|\vec{\beta}|^2}\left(-m_0 + \frac{1}{1-|\vec{\beta}|^2}\left(2m_0 - \frac{2}{3}m_0|\vec{\beta}|^2\right)\right) = \frac{1+\frac{1}{3}|\vec{\beta}|^2}{\sqrt{1-|\vec{\beta}^2}}m_0. \qquad (14.4.38)$$

Осталось заметить, что в данном случае скорость $\tilde{\vec{l}} = Q^\top\vec{\beta}$ и $|\tilde{\vec{l}}| = |\vec{\beta}|$. Получаем следующую зависимость физической энергии скалярной спокойной сферически симметричной натуральной частицы от скорости $\tilde{\vec{l}}$:

$$\mathcal{E}s(\tilde{\vec{l}}) = \frac{1+\frac{1}{3}|\tilde{\vec{l}}|^2}{\sqrt{1-|\tilde{\vec{l}}|^2}}m_0. \qquad (14.4.39)$$

14.4.5 Формальная энергия агвида.

Плотность формальной энергии согласно формуле (14.3.14) следующим образом выражается через 4-функцию состояния $u(x)$;

$$qnl_0(u) = -\mathcal{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_\nu} - \frac{\partial u_\nu}{\partial x_0}\right)\frac{\partial u_\nu}{\partial x_0} = -\mathcal{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left\langle\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^\top - \frac{\partial u}{\partial x_0}\right), \Theta\frac{\partial u}{\partial x_0}\right\rangle. \qquad (14.4.40)$$

Отсюда формальная энергия равна

$$\mathcal{E}f = -m + J, \qquad (14.4.41)$$

где

$$J \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\left\langle\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^\top - \frac{\partial u}{\partial x_0}\right), \Theta\frac{\partial u}{\partial x_0}\right\rangle dx_1dx_2dx_3. \qquad (14.4.42)$$

Далее аналогично п. 14.4.2 применяем формулу Планшереля

$$J = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\left\langle(w(\vec{\eta})\widehat{uf}_0(\vec{\eta}) - w_0(\vec{\eta})\widehat{uf}(\vec{\eta})), \Theta w_0(-\vec{\eta})\widehat{uf}(-\vec{\eta})\right\rangle d\eta_1d\eta_2d\eta_3. \qquad (14.4.43)$$

В силу условия лоренцевости частицы в форме (14.4.3) интеграл (14.4.43) преобразуем к следующему виду

$$J = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{-\langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle^2}{\mathrm{Pd}^2(\vec{l},\vec{\eta})}\left\langle\widehat{jf}(\vec{\eta}), \Theta\widehat{jf}(-\vec{\eta})\right\rangle d\eta_1d\eta_2d\eta_3 =$$

$$2m + \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{(-(\vec{\eta})^2)}{\mathrm{Pd}^2(\vec{l},\vec{\eta})}\left\langle\widehat{jf}(\vec{\eta}), \Theta\widehat{jf}(-\vec{\eta})\right\rangle d\eta_1d\eta_2d\eta_3.$$

Получаем следующую формулу для формальной энергии агвида

$$\mathcal{E}f = m - \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{(\vec{\eta})^2}{\mathrm{Pd}^2(\vec{l},\vec{\eta})}\left\langle\widehat{jf}(\vec{\eta}), \Theta\widehat{jf}(-\vec{\eta})\right\rangle d\eta_1d\eta_2d\eta_3. \qquad (14.4.44)$$

В п. 14.4.3 мы уже вычислили интеграл, входящий в предыдущую формулу, как функцию состояния. При $p \in P_e$ в левом представлении матрицы $G(p)$ аналогично формуле (14.4.29) получаем для зависимости формальной энергии агвида от состояния

$$\mathcal{E}f(\vec{\beta}) = -\frac{\sqrt{1-|\vec{\beta}|^2}}{|\langle l, \beta\rangle|}\left(m_0 + \frac{\langle(\vec{\beta}+\vec{l}),\, \mathrm{Ven}\,(\vec{\beta}+\vec{l})\rangle}{1-|\vec{\beta}|^2}\right),\ \vec{\beta} \in \mathbf{R}^3,\ |\vec{\beta}| < 1, \qquad (14.4.45)$$

где m_0 — масса стандартного состояния. В случае скалярной спокойной сферически симметричной натуральной частицы согласно п. 14.4.4 верно $\vec{l} = 0$, $\mathrm{Ven} = \frac{2}{3}m_0 E_3$, $\tilde{\vec{l}} = Q^\top \vec{\beta}$, $|\tilde{\vec{l}}| = |\vec{\beta}|$. Получаем следующую зависимость формальной энергии от скорости

$$\mathcal{E}f(\tilde{\vec{l}}) = \frac{-(1-\frac{1}{3}|\tilde{\vec{l}}|^2)}{\sqrt{1-|\tilde{\vec{l}}|^2}} m_0. \qquad (14.4.46)$$

14.4.6 Сравнение физической, формальной и конденсированной энергии агвида.

Для натуральной досветовой частицы, стандартное состояние которой — состояние покоя, масса следующим образом зависит от скорости согласно формуле (12.2.2)

$$m = \sqrt{1-|\tilde{\vec{l}}|^2} m_0. \qquad (14.4.47)$$

В случае одной частицы при отсутствии других полей функция Лагранжа конденсированного лагранжиана $n = m$ и согласно примеру 14.1.2 конденсированная энергия, взятая по замечанию 14.1.4 с обратным знаком, равна

$$\mathcal{E}n = \frac{1}{\sqrt{1-|\tilde{\vec{l}}|^2}} m_0 \qquad (14.4.48)$$

В то же время для скалярной сферически симметричной частицы физическая энергия согласно формуле (14.4.39) равна

$$\mathcal{E}s = \frac{1+\frac{1}{3}|\tilde{\vec{l}}|^2}{\sqrt{1-|\tilde{\vec{l}}|^2}} m_0, \qquad (14.4.49)$$

а формальная энергия согласно формуле (14.4.46) равна

$$\mathcal{E}s = \frac{-(1-\frac{1}{3}|\tilde{\vec{l}}|^2)}{\sqrt{1-|\tilde{\vec{l}}|^2}} m_0, \qquad (14.4.50)$$

Итак, мы видим, что все три величины $\mathcal{E}s, \mathcal{E}f, \mathcal{E}n$ различны.

Мы ответили на вопрос, поставленный в п. 14.3.3, и убедились, что глобальный закон сохранения энергии для действия Лоренца не является аппроксимацией главного порядка глобального закона сохранения энергии для действия идеальной среды.

§14.5 О нулях и делимости полиномов

В этом и следующем параграфе мы рассмотрим математические вопросы, необходимые для изучения световых и сверхсветовых частиц в §§ 14.7, 14.8. В этом параграфе продолжается изучение свойств полиномов, проводившееся ранее в п. 5.1.3, п. 13.1.2 и п. 13.11.4.

В этом параграфе рассматриваются отображения $f : \Lambda_1^n \to \Lambda_2$, где Λ_1, Λ_2 принимают значения $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, причём $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$. Вводим обозначение

$$\mathrm{Nul}\,(f) \equiv \{x \in \Lambda_1^n \;\big|\; f(x) = 0\} \tag{14.5.1}$$

для множества нулей отображения f.

В этом параграфе в алгебраической терминологии мы следуем Ван дер Вардену [12].

14.5.1 О функциях, обращающихся в нуль на конусе.

Подмножество $K \subset \Lambda_1^n$ мы называем *конусом*, если

$$\forall x \in K \; \forall t \in \mathbf{R}_+ \;\big|\; tx \in K.$$

Если $f : \Lambda_1^n \to \Lambda_2$ однородная функция степени однородности $S \in \mathbf{R}$, то её множество нулей конус, ибо если $f(x) = 0$, то при $t \in \mathbf{R}_+$ верно $f(tx) = t^s f(x) = 0$. Причём, если $s \neq 0$, то конус $\mathrm{Nul}\,(f)$ содержит $0 \in \Lambda_1^n$, ибо $f(0) = f(t0) = t^s f(0)$ при всех $t \in \mathbf{R}_+$.

Лемма 14.5.1 *Пусть подмножество $K \subset \Lambda_1^n$ — конус, $W \subset \Lambda_1^n$ — окрестность нуля, $p : \Lambda_1^n \to \Lambda_2$ — однородная функция степени однородности $s \in \mathbf{R}$, отображение $g : \Lambda_1^n \to \Lambda_2$ удовлетворяет условию $g(tx) = o(t^s)$ при любом $x \in \Lambda_1^n$ и $t \to +0$. Если $\mathrm{Nul}\,(p + g) \supset W \cap K$, то $\mathrm{Nul}\,(p) \supset K$ и $\mathrm{Nul}\,(g) \supset W \cap K$.*

Доказательство. Пусть $x \in K$, тогда

$$\exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \; \forall t \in]0, \varepsilon] \;\big|\; tx \in W \cap K.$$

Если $tx \in W \cap K$, то по условию леммы

$$p(tx) + g(tx) = 0,$$

откуда

$$\forall t \in]0, \varepsilon] \;\big|\; p(x) = t^{-s} g(tx).$$

Тогда $\lim\limits_{t\to+0} t^{-s} g(tx) = \lim\limits_{t\to+0} t^{-s} o(t^s) = 0$ и $p(x) = 0$. Итак $\mathrm{Nul}\,(p) \supset K$, что в силу условия $\mathrm{Nul}\,(p + g) \supset K \cap W$ влечет $\mathrm{Nul}\,(g) \supset W \cap K$. $\diamondsuit$

Применим доказанную лемму в случае, когда $p(x)$ — полином.

Лемма 14.5.2 *Пусть подмножество $K \subset \Lambda_1^n$ — конус, подмножество $W \subset \Lambda_1^n$ — окрестность нуля $p_k(x)$ — однородные полиномы степени $k \in \overline{0, m}$, функция $f : \Lambda_1^n \to \Lambda_2$ допускает представление*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} p_k(x) + o(|x|^m) \tag{14.5.2}$$

при $|x| \to 0$ и $\mathrm{Nul}\,(f) \supset W \cap K$, тогда верно

$$\forall k \in \overline{0, m} \;\big|\; \mathrm{Nul}\,(p_k) \supset K.$$

Доказательство. Из представления (14.5.2) следует, что

$$f(x) = p_0(x) + o(|x|^0)$$

при $|x| \to 0$. Тогда по лемме 14.5.1 верно $\mathrm{Nul}\,(p_0) \supset K$. Далее по индукции, если верно $\mathrm{Nul}\,(p_k) \supset K$ при всех $k \in \overline{0, (r-1)}$, $r \in \mathbf{N}$, $r \leq m$, то функция

$$f_r(x) \equiv f(x) - \sum_{k=0}^{r-1} p_k(x) = p_r(x) + o(|x|^r),$$

удовлетворяет условиям леммы 14.5.1 и поэтому $\mathrm{Nul}\,(p_r) \supset K$. $\diamondsuit$

14.5.2 О делимости полиномов.

В этом пункте рассматриваются полиномы $p(x)$ от n переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ из поля Λ_1 с коэффициентами из поля Λ_2, т.е. полиномиальные отображения $p : \Lambda_1^n \to \Lambda_2$. Кольцо полиномов от n переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ с коэффициентами из Λ_2 обозначается $k[x_1, x_2, \ldots x_n]$. Гиперплоскостью в Λ_1^n мы называем линейное подпространство размерности $n-1$ над полем Λ_1.

Нас интересует связь множества нулей полинома $\mathrm{Nul}\,(p)$ с его свойствами делимости. Если полином $p(x)$ делится на полином $q(x)$, то

$$\mathrm{Nul}\,(p) \supset \mathrm{Nul}\,(q), \tag{14.5.3}$$

т.е. условие (14.5.3) необходимо для делимости полинома p на полином q. Нас интересует вопрос: для каких полиномов q условие (14.5.3) и достаточно для делимости? Естественно ограничиться неприводимыми полиномами q (имеется в виду неприводимость над полем Λ_2), ибо если $r(x)$ — непостоянный полином $p(x) = r(x)$, $q(x) = r^2(x)$, то $\mathrm{Nul}\,(p) = \mathrm{Nul}\,(q)$, и делимость не имеет места. Рассмотрим также следующий пример.

Пример 14.5.1

$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \mathbf{R}$, $n = 2$, $p(x) \equiv x_1$, $q(x) \equiv x_1^2 + x_2^2$. Над полем $\Lambda_2 = \mathbf{R}$ полином $q(x)$ неприводим и множество $\mathrm{Nul}\,(q)$ состоит лишь из нуля. В данном случае $\mathrm{Nul}\,(p) \supset \mathrm{Nul}\,(q)$ и полином q неприводим, но p не делится на q.

Пример 14.5.1 показывает, что в случае $\Lambda_1 = \mathbf{R}$ неприводимости полинома q недостаточно для того, чтобы включение (14.5.3) было критерием делимости полиномов. В связи с этим введём некоторые дополнительные понятия.

Определение 14.5.1 *Подмножество $A \subset \Lambda_1^n$ называется алгебраическим множеством [73, с.17], если существует конечное множество полиномов $p_1, p_2, \ldots p_r$, что*

$$A = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Nul}\,(p_i). \tag{14.5.4}$$

Если $A \neq \Lambda_1^n$, то алгебраическое множество A назовём *собственным.* Алгебраическое множество A собственное, если в представлении (14.5.4) хоть один полином p_i нетривиален. Для тривиального полинома p верно $\mathrm{Nul}\,(p) = \Lambda_1^n$, поэтому собственное алгебраическое множество имеет представление вида (14.5.4) в котором все полиномы p_i нетривиальные.

Каждому алгебраическому множеству $A \subset \Lambda_1^n$ сопоставим его степень $\mathrm{Deg}\,(A)$ — неотрицательное целое число $\mathrm{Deg}\,(A) \equiv \inf \max_i \{\deg(p_i)\}$, где точная нижняя грань берется по всем представлением вида (14.5.4) множества A. Степень алгебраического множества $\mathrm{Deg}\,(A)$ — это наименьшее такое число, что верно представление (14.5.4) и $\max_{i \in \overline{1,r}} \{\deg(p_i)\} \le \mathrm{Deg}\,(A)$. Непустое собственное алгебраическое множество A определяется условием $\mathrm{Deg}\,(A) > 0$.

Объединение конечного семейства алгебраических множеств — алгебраическое множество, пересечение любого семейства алгебраических множеств — алгебраическое множество ([73, с.17]).

Из утверждения 13.1.2 следует, что всякое собственное алгебраическое множество имеет меру Лебега нуль в Λ_1^n. Кроме того, аналогично утверждению 5.1.4 доказывается следующее утверждение.

Лемма 14.5.3 *Если $A \subset \Lambda_1^n$ алгебраическое множество и точка $y \in \Lambda_1^n \setminus A$, то на любой прямой проходящей через точку y может лежать не более $\mathrm{Deg}\,(A)$ точек множества A.*

Доказательство. Так как множество A собственное алгебраическое, то оно допускает представление вида (14.5.4), где $\deg(p_i) \le \mathrm{Deg}\,(A)$ при всех $i \in \overline{1,r}$. Так как $y \notin A$, то существует полином p_i, что $p_i(y) \ne 0$. Любая прямая, проходящая через точку y, представима в параметрической форме $x = y + tz$, где $z \in \Lambda_1^n$, а параметр t пробегает Λ_1^n. При фиксированных элементах $y \in \Lambda_1^n$ и $z \in \Lambda_1^n$ полином $p_i(y+tz)$ как функция одной переменной $t \in \Lambda_1$ нетривиален, ибо $p_i(y + 0 \cdot z) = p(y) \ne 0$ и имеет степень не более $\mathrm{Deg}\,(A)$. Поэтому полином $p_i(y+tz)$ имеет по переменной t не более $\mathrm{Deg}\,(A)$ нулей. $\diamondsuit$

Следствие 14.5.1 *Собственное алгебраическое множество $A \subset \Lambda_1^n$ замкнуто и ни где не плотно в Λ_1^n.*

Следствие 14.5.2 *Объединение конечного числа собственных алгебраических множеств есть собственное алгебраическое множество.*

Пересечение любого семейства собственных алгебраических множеств — собственное алгебраическое множество, ибо соответствующее свойство верно для алгебраических множеств.

Определение 14.5.2 *Подмножество $B \subset \Lambda_1^n$ назовём субалгебраическим, если существует нетривиальный полином $p \in k[x]$, что $\mathrm{Nul}\,(p) \supset B$.*

В нашем определении субалгебраические множества есть всевозможные подмножества собственных алгебраических множеств. Поэтому из вышеуказанных свойств собственных алгебраических множеств следует, что всякое алгебраическое множество имеет меру Лебега нуль и нигде не плотно в Λ_1^n. Поэтому далее мы будем доказывать несубалгебраичность множества в Λ_1^n, устанавливая, что оно всюду плотно в некотором непустом открытом подмножестве Λ_1^n. Из предыдущих свойств собственных алгебраических множеств следует, что объединение конечного числа субалгебраических множеств — субалгебраическое множество. Из определения следует, что любое подмножество субалгебраического множества — субалгебраическое множество.

В случае $n = 1$ собственно алгебраическое множество и субалгебраическое множество суть множества, состоящие из конечного числа элементов.

Пусть $I : \Lambda_1^n \to \Lambda_1^n$ линейный изоморфизм. Сопоставим каждому полиному $p \in k[x]$ полином $p' \in k(x)$ по правилу $p'(x) \equiv p(I(x))$. Тогда: 1)степени полиномов p и p' равны; 2)полином q делит полином p иф полином q' делит полином p'; 3)полином q неприводим иф полином q' неприводим. При этом верно

$$\mathrm{Nul}\,(p) = I(\,\mathrm{Nul}\,(p')). \tag{14.5.5}$$

Итак, свойства множества быть алгебраическим, собственным алгебраическим, субалгебраическим сохраняются при линейных изоморфизмах.

Пусть $P \subset \Lambda_1^n$ — линейное подпространство Λ_1^n, тогда существует линейный изоморфизм $I : P \to \Lambda_1^k,\ k \in \overline{0,n}$. Будем говорить, что множество $F \subset P$ есть субалгебраическое (алгебраическое, собственное алгебраическое) относительно P если множество $I(F) \subset \Lambda_1^k$ субалгебраическое (алгебраическое, собственное алгебраическое) в Λ_1^k.

Определение 14.5.3 *Множество $A \subset \Lambda_1^n$ несолидное, если для любой гиперплоскости $P \subset \Lambda_1^n$ и любого линейного проектора $T : \Lambda_1^n \to P$ проекция $T(A) \subset P$ есть субалгебраическое множество относительно P.*

Множество $A \subset \Lambda_1^n$, не являющееся несолидным, назовём *солидным.*

Определение 14.5.4 *Полином $p \in k[x]$ солидный, если его множество нулей $\mathrm{Nul}\,(p) \subset \Lambda_1^n$ солидно.*

Заметим, что в примере 14.5.1 полином p солидный, ибо его множество нулей есть прямая $\{x \in \mathbf{R}^2 \bigm| x_1 = 0\}$, а полином q несолидный, ибо его множество нулей состоит из одной точки.

Вернемся к вопросу о делимости полиномов.

Теорема 14.5.1 *Если неприводимый полином q не делит полином p, то множество $A \equiv \mathrm{Nul}\,(p) \cap \mathrm{Nul}\,(q)$ несолидно.*

Доказательство. Требуется доказать, что для любой гиперплоскости $P \subset \Lambda_1^n$ и любого линейного проектора $T : \Lambda_1^n \to P$ проекция множества A есть субалгебраическое относительно P множество.

Ядро оператора T одномерно и существует ненулевой элемент $e_n \in \Lambda_1^n$, что $T(e_n) = 0$. Выберем в гиперплоскости P базис из $(n-1)$-го элемента $e_1, e_2, \ldots e_{n-1}$. Построим базис $e_1, e_2, \ldots e_n$ в линейном пространстве Λ_1^n. Отображение $I(x) \equiv \sum_{i=1}^n x_i e_i$ есть, линейный изоморфизм $I : \Lambda_1^n \to \Lambda_1^n$. Оператор $T' \equiv I^{-1} T I$ есть проектор $T : \Lambda_1^n \to \Lambda_1^{n-1}$ на первые $(n-1)$ координат, т.е. $T'(x_1, x_2, \ldots x_n) = (x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$.

Введём полиномы $p'(x) \equiv p(I(x)), q'(x) \equiv q(I(x))$. Так как $I : \Lambda_1^n \to \Lambda_1^n$ линейный изоморфизм, то согласно вышесказанному в этом пункте: 1)полином q' не делит полином p', 2)полином q' неприводим, 3)верно равенство

$$\mathrm{Nul}\,(p) \cap \mathrm{Nul}\,(q) = I(\,\mathrm{Nul}\,(p') \cap \mathrm{Nul}\,(q')). \tag{14.5.6}$$

Положим $A' \equiv \mathrm{Nul}\,(p') \cap \mathrm{Nul}\,(q')$, тогда (14.5.6) примет вид $A = I(a')$. Условие, что множество $T(A) \subset P$ субалгебраическое относительно P, эквивалентно условию, что множество $I^{-1}T(A) = I^{-1}TI(A') = T'(A') \subset I^{-1}(P) = \Lambda_1^{n-1}$ субалгебраическое относительно Λ_1^{n-1}. Осталось доказать, что множество $T'(A') \subset \Lambda_1^{n-1}$ субалгебраическое относительно Λ_1^{n-1}.

Будем рассматривать полиномы $p'(x), q'(x)$ как элементы кольца $k(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})[x_n]$ полиномов от одной переменной x_n, коэффициенты которых рациональные функции от $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, и обозначим соответствующие полиномы $\mathit{pc}\,, \mathit{qc} \in k(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})[x_n]$. В кольце $k(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})[x_n]$ полином qc остается неприводимым и полином pc по-прежнему не делится на полином qc.

Идеал $J(\mathit{pc}\,, \mathit{qc})$, порожденный двумя полиномами pc и qc в кольце полиномов от одной переменной $k(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})[x_n]$ является главным идеалом. Так как полином qc неприводим и полином pc не делится на полином qc, то $J(\mathit{pc}\,, \mathit{qc}) = k(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})[x_n]$ и найдутся полиномы $\mathit{fc}\,, \mathit{gc} \in k(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})[x_n]$, что

$$1 = \mathit{fc}\;\mathit{pc} + \mathit{gc}\;\mathit{qc}\,. \tag{14.5.7}$$

Переходя к полиномам из $k[x_1, x_2, \ldots x_n]$ и умножая (14.5.7) на произведение знаменателей коэффициентов всех полиномов $\mathit{fc}\,, \mathit{pc}\,, \mathit{gc}\,, \mathit{qc}$, получим, что существует нетривиальный полином $h(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) \in k[x_1, x_2, \ldots x_n]$ и полиномы $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots x_n)$ из $k[x_1, x_2, \ldots x_n]$, что верно

$$h(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) = f(x_1, x_2, \ldots x_n)p'(x_1, x_2, \ldots x_n) + g(x_1, x_2, \ldots x_n)q'(x_1, x_2, \ldots x_n). \tag{14.5.8}$$

Отсюда следует, что проекция $T'(A')$ множества A' на гиперплоскость Λ_1^{n-1} есть субалгебраическое подмножество относительно Λ_1^n. $\diamondsuit$

Следствие 14.5.3 *Если p — полином и q — неприводимый полином и множество $\mathrm{Nul}\,(p) \cap \mathrm{Nul}\,(q)$ солидно, то полином q делит полином p.*

Следствие 14.5.4 *Неприводимый полином с точностью до умножения на константу определяется любым солидным подмножеством своих нулей.*

Из предыдущих рассуждений этого пункта и теоремы 14.5.1 получаем следующий критерий делимости полиномов.

Теорема 14.5.2 *Если полином q неприводим и солиден, то полином p делится на полином q иф $\mathrm{Nul}\,(p) \supset \mathrm{Nul}\,(g)$.*

В случае $\Lambda_1 = \mathbf{C}$ любой полином, не являющийся константой, — солиден, т.е. солидность не вносит в этом случае новых ограничений.

14.5.3 Примеры неприводимых солидных полиномов.

В этом пункте $\Lambda_1 = \mathbf{R}$.

Рассмотрим следующие примеры. Предварительно заметим, что любой полином первой степени неприводим, так как не представим в виде произведения констант.

Пример 14.5.2

$\Lambda_2 = \mathbf{R},\ p(x) = \langle a, x\rangle + b,\ b \in \mathbf{R},\ a \in \mathbf{R}^n,\ a \neq 0$. Множество нулей $\mathrm{Nul}\,(p) = \{x \in \mathbf{R}^n \bigm| \langle a, x\rangle + b = 0\}$ есть в силу условия $a \neq 0$ плоскость в $\mathbf{R}^n$. Итак, любой полином первой степени солиден и неприводим.

Пример 14.5.3

$\Lambda_2 = \mathbf{C},\ p(x) = \langle a, x\rangle + b,\ b \in \mathbf{C},\ a \in \mathbf{C}^n,\ a \neq 0$. Полагаем $a = a' + ia'',\ a' \in \mathbf{R}^n,\ a'' \in \mathbf{R}^n$ и $b = b' + ib'',\ b' \in \mathbf{R},\ b'' \in \mathbf{R}$. Уравнение

$$\langle a, x\rangle + b = 0$$

в комплексных числах, но с $x \in \mathbf{R}^n$ эквивалентно системе двух уравнений с действительными числами

$$\begin{cases} \langle a', x\rangle + b' = 0, \\ \langle a'', x\rangle + b'' = 0. \end{cases}$$

Так как по условию $a \neq 0$, то либо $a' \neq 0$, поэтому одно из множеств $\mathrm{Nul}\,(\langle a', x\rangle + b')$ и $\mathrm{Nul}\,(\langle a'', x\rangle + b'')$ есть гиперплоскость, а второе либо гиперплоскость, либо пусто, либо все $\mathbf{R}^n$. Итак, множество $\mathrm{Nul}\,(p)$ солидно иф оно является гиперплоскостью или иф существует число $\lambda \in \mathbf{C}$ и полином первой степени с действительными коэффициентами $q(x)$, что $p(x) = \lambda q(x)$.

Из примеров 14.5.2, 14.5.3 следует общий

Вывод 14.5.1 *Множество нулей полинома первой степени представимо в виде пересечения двух гиперплоскостей.*

Перейдем к рассмотрению полиномов второй степени. В силу вывода 14.5.1 верно

Утверждение 14.5.1 *Полином второй степени неприводим над полем Λ_2, если его множество нулей не представимо в виде объединения двух пересечений гиперплоскостей.*

Пример 14.5.4

$n = 2,\ \Lambda_1^n = \mathbf{R}^2$. Полиномы второго порядка: $x_1^2 + x_2^2 - 1,\ x_1^2 - x_2^2 - 1,\ x_2 - x_1^2$, — множества нулей которых есть соответствующие кривые второго порядка: окружность, гипербола, парабола, — солидны и по утверждению 14.5.1 неприводимы над полем $\mathbf{C}$.

Пример 14.5.5

$n = 3, \Lambda_1^n = \mathbf{R}^3$. Полиномы второго порядка: $x_1^2 + x_2^2 - \gamma^2 x_3^2\ (\gamma \in \mathbf{R}_+),\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1,\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1$, множества нулей которых есть соответствующие поверхности второго порядка: конус, сфера двуполостный гиперболоид, — солидны и в силу утверждения 14.5.1 неприводимы над полем $\mathbf{C}$. Аналогичное утверждение верно и для других полиномов второго порядка, задающих невырожденные поверхности второго порядка в $\mathbf{R}^3$.

14.5.4 Критерий делимости на степень неприводимого полинома.

Мы получим критерий делимости полинома на неприводимый солидный полином — теорема 14.5.2. Нетрудно из следствия 14.5.2 получить и критерий делимости на натуральную степень неприводимого солидного полинома.

Во-первых, заметим, что если полином $p(x)$ делится на m-тую степень полинома $q(x)$, т.е.

$$p(x) = u(x)q^m(x),\ m \in \mathbf{N},$$

где $u(x)$ — некоторый полином, то для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbf{N}_o{}^n$, $|\alpha| < m$, частная производная $p^{(\alpha)}(x) = 0$, если $q(x) = 0$ в этой точке $x \in \Lambda_1^n$. Итак, если полином $q^m(x)$ делит полином $p(x)$, то верно

$$\forall \alpha \in \mathbf{N}_o{}^n, |\alpha| < m \;\Big|\; \mathrm{Nul}\,(p^{(\alpha)}) \supset \mathrm{Nul}\,(q). \tag{14.5.9}$$

Остается показать, что необходимое условие делимости (14.5.9) и достаточно в случае неприводимого солидного полинома q.

Сначала установим следующее свойство неприводимого полинома.

Лемма 14.5.4 *Если $q(x)$ неприводимый полином степени $r \in \mathbf{N}$ и $k \in \overline{1, r}$, то множество*

$$\mathrm{Nul}\,(q) \bigcap \left(\bigcap_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}_o{}^n, \\ |\alpha| = k}} \mathrm{Nul}\,\left(q^{(\alpha)}\right) \right)$$

несолидно.

Доказательство. В противном случае при любом $\alpha \in \mathbf{N}_o{}^n$, $|\alpha| = k$ полином $q^{(\alpha)}(x)$ степени не выше $r - k$ делится на неприводимый полином $q(x)$ степени r по следствию 14.5.3, поэтому полином $q^{(\alpha)}(x)$ тривиален. Но если все производные $q^{(\alpha)}(x)$ порядка k полинома $q(x)$ равны нулю, то полином $q(x)$ имеет степень не выше $k - 1$. Получено противоречие, доказывающее лемму 14.5.4. ♢

Перейдем к критерию делимости. Справедливо следующее обобщение теоремы 14.5.2.

Теорема 14.5.3 *Пусть $p(x)$ — полином, $q(x)$ — неприводимый солидный полином, m — натуральное число. Тогда полином $p(x)$ делится на полином $q^m(x)$ иф верно (14.5.9).*

Доказательство. Согласно предыдущим рассуждениям этого пункта требует доказательства лишь достаточность.

Проведём доказательство индукцией по натуральному числу m. При $m = 1$ теорема 14.5.3 совпадает с теоремой 14.5.2. Пусть утверждение теоремы 14.5.3 верно при $m \in \overline{1, k}$, $k \in \mathbf{N}$, покажем, что оно будет тогда верно и при $m = k + 1$.

Пусть при любом индексе $\alpha \in \mathbf{N}_o{}^n$, $|\alpha| \le k$ выполнено

$$\mathrm{Nul}\,(p^{(\alpha)}) \supset \mathrm{Nul}\,(q), \tag{14.5.10}$$

тогда по предположению индукции существует полином $w(x)$, что

$$p(x) = w(x)q^k(x). \tag{14.5.11}$$

Если все частные производные $p^{(\alpha)}(x)$ порядка $|\alpha| = k$ обращаются в ноль на множестве $\mathrm{Nul}\,(q)$, то верно

$$\forall\alpha \in \mathbf{N_o}^n, |\alpha| = k \;\Big|\; \mathrm{Nul}\,(w(q^k)^{(\alpha)}) \supset \mathrm{Nul}\,(q). \tag{14.5.12}$$

Так как $\mathrm{Nul}\,(w(q^k)^{(\alpha)}) = \mathrm{Nul}\,(w) \cup \mathrm{Nul}\,((q^k)^{(\alpha)})$, то получим из (14.5.12)

$$\forall\alpha \in \mathbf{N_o}^n, |\alpha| = k \;\Big|\; \mathrm{Nul}\,(q) \cap \mathrm{Nul}\,((q^k)^{(\alpha)}) \supset \mathrm{Nul}\,(q) \setminus \mathrm{Nul}\,(w). \tag{14.5.13}$$

Полагая $\alpha = k\beta,\ \beta \in \mathbf{N_o}^n,\ |\beta| = 1$, получим из (14.5.13)

$$\forall\beta \in \mathbf{N_o}^n, |\beta| = 1 \;\Big|\; \mathrm{Nul}\,(q) \cap \mathrm{Nul}\,(q^{(\beta)}) \supset \mathrm{Nul}\,(q) \setminus \mathrm{Nul}\,(w).$$

Отсюда

$$\mathrm{Nul}\,(q) \bigcap \left(\bigcap_{\substack{\alpha\in\mathbf{N_o}^n,\\ |\alpha|=k}} \mathrm{Nul}\,\left(q^{(\beta)}\right) \right) \supset \mathrm{Nul}\,(q) \setminus \mathrm{Nul}\,(w). \tag{14.5.14}$$

По лемме 14.5.4 множество $\mathrm{Nul}\,(q) \setminus \mathrm{Nul}\,(w)$ тогда несолидно, но по условию множество $\mathrm{Nul}\,(q)$ солидно. Отсюда следует, что множество $\mathrm{Nul}\,(q) \cap \mathrm{Nul}\,(w)$ солидно. По теореме 14.5.2 тогда полином w делится на полином q, т.е. существует полином $u(x)$, что $w(x) = u(x)q(x)$. В силу (14.5.10) индукция проведена и теорема 14.5.3 доказана. $\diamondsuit$

14.5.5 Об условии солидности полинома.

В теореме 14.5.2 для того, чтобы включение $\mathrm{Nul}\,(p) \supset \mathrm{Nul}\,(q)$ было эквивалентно делимости полинома p на полином q, мы потребовали дополнительно, чтобы полином q был неприводимым и солидным. Возникает вопрос: насколько существенно ограничение солидности полинома q? Ответ на этот вопрос даёт следующее утверждение.

Утверждение 14.5.2 *Если $q(x_1, x_2, \dots x_n)$ непостоянный несолидный полином, то существует нетривиальный полином $p(x)$, который не делится на полином $q(x)$, но* $\mathrm{Nul}\,(p) \supset \mathrm{Nul}\,(q)$.

Доказательство. Так как полином $q(x_1, x_2, \dots x_n) \in k[x_1, x_2, \dots x_n]$ не постоянен, то существует переменная x_i, относительно которой он не постоянен. Без ограничения общности будем считать, что он не постоянен по переменной x_n.

Пусть $T : \Lambda_1^n \to \Lambda_1^{n-1}$ линейный проектор вида $T(x_1, x_2, \dots x_n) \equiv (x_1, x_2, \dots x_{n-1})$. По условию несолидности полинома q множество $T\,(\mathrm{Nul}\,(q)) \subset \Lambda_1^{n-1}$ субалгебраическое в Λ_1^{n-1}, т.е. существует нетривиальный полином $p(x_1, x_2, \dots x_{n-1}) \in k[x_1, x_2, \dots x_{n-1}]$, множество нулей которого в Λ_1^{n-1} таково, что $\mathrm{Nul}_{n-1}(p) \supset T\,(\mathrm{Nul}\,(q))$. Будем рассматривать полином $p(x_1, x_2, \dots x_{n-1})$ как полином от n переменных $x_1, x_2, \dots x_n$, тогда множество его нулей в Λ_1^n есть $\mathrm{Nul}\,(p) = T^{-1}\,(\mathrm{Nul}_{n-1}(p))$. Получаем, что $\mathrm{Nul}\,(p) \supset T^{-1}\,(T(\,\mathrm{Nul}\,(q))) \supset \mathrm{Nul}\,(q)$.

Полином q не делит полином p. В самом деле, в противном случае при любых фиксированных $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ полином от одной переменной x_n вида $q(x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n)$ делит константу $p(x_1, x_2, \dots x_{n-1})$ по переменной x_n, но это возможно лишь когда $p(x_1, x_2, \dots x_{n-1}) = 0$ или полином $q(x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n)$ — константа по x_n. Получаем тогда

$$\forall x_n \in \Lambda_1 \ \forall (x_1, x_2, \dots x_{n-1}) \in \left(\Lambda_1^{n-1} \setminus \operatorname{Nul}_{n-1}(p)\right) \ \Big| \ \frac{\partial}{\partial x_n} q(x_1, x_2, \dots x_n) = 0. \quad (14.5.15)$$

Полином $p(x_1, x_2, \dots x_{n-1})$ нетривиален и по следствию 14.5.1 множество $\Lambda_1^{n-1} \setminus \operatorname{Nul}_{n-1}(p)$ всюду плотно в Λ_1^{n-1}. Из соотношения (14.5.15) в силу непрерывности полинома $\frac{\partial}{\partial x_n} q(x_1, x_2, \dots x_n)$ на Λ_1^n следует, что

$$\forall x \in \Lambda_1^n \ \Big| \ \frac{\partial}{\partial x_n} q(x_1, x_2, \dots x_n) = 0. \quad (14.5.16)$$

Последнее соотношение означает, что полином q не зависит от переменной x_n. Получено противоречие, доказывающее утверждение 14.5.2. $\diamondsuit$

Итак, для любого непостоянного несолидного полинома q теорема 14.5.2 неверна.

Напомним, что неприводимым мы называем полином положительной степени, не представимый в виде произведения двух полиномов положительной степени. Через $\deg(p)$ обозначается степень полинома p.

Ввиду важной роли в данном параграфе неприводимых солидных полиномов дадим им специальное название.

Определение 14.5.5 *Неприводимый солидный полином назовём лаковым.*

Проведём локализацию понятия солидности.

Определение 14.5.6 *Точка $y \in \operatorname{Nul}(p)$ называется точкой солидности полинома p, если для любой окрестности U точки y в Λ_1^n множество $U \cap \operatorname{Nul}(p)$ солидно.*

Справедливо следующее достаточное условие солидности.

Утверждение 14.5.3 *Если верно*

$$p(y) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x}(x)\Big|_{x=y} \neq 0, \quad (14.5.17)$$

то y — точка солидности полинома p.

Доказательство. Если $\frac{\partial p}{\partial x}(x)\Big|_{x=y} \neq 0$, то существует номер $i \in \overline{1,n}$, что частная производная $\frac{\partial p}{\partial x_i}(x)\Big|_{x=y} \neq 0$. Без ограничения общности считаем, что $i = n$. По теореме о неявной функции [81, с.305] существует открытая окрестность W точки $(y_1, y_2, \dots y_{n-1}) \in \Lambda_1^{n-1}$ в Λ_1^{n-1} и функция $x_n = g(x_1, x_2, \dots x_{n-1})$, что

$$\forall (x_1, x_2, \dots x_{n-1}) \in W \ \Big| \ p(x_1, x_2, \dots x_{n-1}, g(x_1, x_2, \dots x_{n-1})) = 0.$$

Итак, проекция множества нулей $\operatorname{Nul}(p)$ на гиперплоскость $x_n = 0$ параллельно оси x_n содержит открытую окрестность W проекции точки y. Отсюда следует, что y — точка солидности полинома p. $\diamondsuit$

Нуль $y \in \operatorname{Nul}(p)$ полинома p назовём *регулярным*, если выполнено (14.5.17), в противном случае — *нерегулярным*. В силу утверждения 14.5.3 каждый регулярный нуль полинома солиден.

Утверждение 14.5.4 *Множество нерегулярных нулей неприводимого полинома несолидно.*

Доказательство. Множество нерегулярных нулей полинома есть алгебраическое множество, задаваемое условиями обращения в нуль следующих $(n+1)$ полиномов

$$\begin{cases} p(x) = 0; \\ \frac{\partial p}{\partial x_i}(x) = 0, \ i \in \overline{1,n}. \end{cases} \tag{14.5.18}$$

Так как полином p неприводим, то он непостоянен. Полиномы $\frac{\partial p}{\partial x_i}(x)$ имеют степень ниже степени полинома p и хоть один из них нетривиален и поэтому не делится на полином p. По теореме 14.5.1 множество, задаваемое системой уравнений (14.5.18), несолидно. $\diamondsuit$

Следствие 14.5.5 *Любое солидное множество нулей неприводимого полинома содержит регулярный нуль.*

Следствие 14.5.6 *Множество солидных нулей неприводимого полинома есть замыкание множества его регулярных нулей.*

Из следствия 14.5.5 и утверждения 14.5.3 получаем следующий критерий солидности.

Утверждение 14.5.5 *Неприводимый полином солиден иф у него есть регулярный нуль.*

В случае $\Lambda_1 = \mathbf{R}, \Lambda_2 = \mathbf{C}$ изучение лаковых полиномов сводится к случаю $\Lambda_1 = \mathbf{R}$, $\Lambda_2 = \mathbf{R}$ в силу леммы.

Лемма 14.5.5 *Пусть $\Lambda_1 = \mathbf{R}, \Lambda_2 = \mathbf{C}$ и q — лаковый полином. Тогда существует лаковый полином с действительным коэффициентами f и число $\lambda \in \mathbf{C}$, что $q = \lambda f$.*

Доказательство. Если $q(x)$ — полином степени r с комплексными коэффициентами от $x \in \mathbf{R}^n$, то $q(x) = q'(x) + iq''(x)$, где $q'(x)$ и $q''(x)$ — соответственно действительная и мнимая части — также полиномы степени не выше r, но с действительными коэффициентами. По условию множество $\mathrm{Nul}\,(q)$ солидно и

$$\mathrm{Nul}\,(q) = \mathrm{Nul}\,(q') \cap \mathrm{Nul}\,(q'').$$

По теореме 14.5.2 полиномы q' и q'' степени не выше $\deg(q)$ делятся на неприводимый солидный полином q. Поэтому существуют числа $\lambda' \in \mathbf{C}$ и $\lambda'' \in \mathbf{C}$, что

$$q' = \lambda' q, q'' = \lambda'' q.$$

Отсюда

$$\lambda' q + i\lambda'' q = q,$$

поэтому или $\lambda' \neq 0$ или $\lambda'' \neq 0$, т.е. или $q = \frac{1}{\lambda'}q'$ или $q = \frac{1}{\lambda''}q''$. $\diamondsuit$

Всякий полином, неприводимый над полем $\mathbf{C}$ неприводим и над полем $\mathbf{R}$. Для солидных полиномов верно и обратное.

Утверждение 14.5.6 *Пусть $\Lambda_1 = \mathbf{R}$. Для солидного полинома с вещественными коэффициентами неприводимость над полем $\mathbf{R}$ и полем $\mathbf{C}$ эквивалентны.*

Доказательство. В силу предыдущего требуется доказать, что солидный неприводимый над полем $\mathbf{R}$ полином q с вещественными коэффициентами неприводим и над полем $\mathbf{C}$.

Предположим противное, тогда существует неприводимый солидный полином g с комплексными коэффициентами и полином p положительной степени с комплексными коэффициентами, что $q(x) = p(x)g(x)$. По лемме 14.5.5 существует число $\lambda \in \mathbf{C}$ и неприводимый солидный полином с вещественными коэффициентами $f(x)$, что $g(x) = \lambda f(x)$.

Мы получаем при $x \in \mathbf{R}^n$

$$q(x) = f(x)(\lambda p(x)),$$

где полиномы $q(x)$ и $f(x)$ положительной степени с вещественными коэффициентами. Отсюда мнимая часть полинома $\lambda p(x)$ есть тождественный нуль и полином $\lambda g(x)$ также имеет вещественные коэффициенты. Получено противоречие. $\diamondsuit$

14.5.6 Проверка солидности и неприводимости полинома фиксацией части переменных.

Положим $y \equiv (y_1, y_2, \dots y_r) \in \Lambda_1^r$, $z \equiv (z_1, z_2, \dots z_l) \in \Lambda_1^l$, $r \in \mathbf{N}$, $l \in \mathbf{N}$, $r+l = n, x \equiv (y; z) = (y_1, y_2, \dots y_r, z_1, z_2, \dots z_l) \in \Lambda_1^n$. Возьмём полином $p(x) = p(y, z)$ и фиксируем в нём значение $z = b \in \Lambda_1^l$, получим полином $sp\,(y) \equiv p(y, b)$, $sp \in k[y_1, y_2, \dots y_r]$. Пусть полином $sp\,(y)$ оказался неприводимым. При каких условиях и полином $p(x)$ является неприводимым? Дадим достаточные условия при выполнении которых из неприводимости полинома sp вытекает неприводимость полинома p. Заметим предварительно, что по построению для любого полинома $p \in k[x]$ верно

$$\deg(sp\,) \le \deg(p). \tag{14.5.19}$$

Утверждение 14.5.7 *Пусть существует точка $b \in \Lambda_1^l$, что полином $sp\,(y)$ неприводим, тогда полином $p(x)$ неприводим при выполнении любого из двух дополнительных условий: а)$\deg(p) = \deg(sp\,)$; б)$p(y, z) = p_1(y) + p_2(z)$, где $p_1 \in k[y]$, $p_2 \in k[z]$.*

Доказательство. Если $\deg(p) = 1$, то утверждение 14.5.7 верно, поэтому далее считаем $\deg(p) \ge 2$.

Предположим противное, т.е. пусть существует два полинома $g \in k[x], f \in k[x]$, что $p = gf$ и $\deg(g) > 0, \deg(f) > 0$. Отсюда верно

$$\deg(p) = \deg(g) + \deg(f). \tag{14.5.20}$$

Но тогда $sp = sg \cdot sf$ и

$$\deg(sp\,) = \deg(sg\,) + \deg(sf\,). \tag{14.5.21}$$

В силу неравенства (14.5.19) верно

$$\begin{cases} \deg(sg\,) \le \deg(g), \\ \deg(sf\,) \le \deg(f). \end{cases} \tag{14.5.22}$$

В случае а) дано $\deg(sp\,) = \deg(p)$ и из (14.5.20-14.5.22) следует, что $\deg(sg\,) = \deg(g) > 0$ и $\deg(sf\,) = \deg(f) > 0$. Получаем приводимость полинома sp — противоречие.

В случае б) будем рассматривать полиномы p, g, f, как элементы кольца $k(z)[y]$ — полиномов от r переменных $y_1, y_2, \ldots y_r$, коэффициенты которых есть полиномы из кольца $k[z]$. Обозначим через $v\,p$, $v\,g$, $v\,f$ соответствующие элементы из $k(z)[y]$. По построению имеем

$$\deg(sp\,) \le \deg(v\,p) \le \deg(p),\ \deg(sg\,) \le \deg(v\,g) \le \deg(g),\ \deg(sf\,) \le \deg(v\,f) \le \deg(f). \tag{14.5.23}$$

и $v\,p = v\,g \cdot v\,f$. В силу условия б) верно

$$\deg(v\,p) = \deg(p_1) = \deg(sp\,). \tag{14.5.24}$$

Так как Λ_2 есть поле, то кольцо коэффициентов $k[z]$ — кольцо целостности и поэтому

$$\deg(v\,p) = \deg(v\,g) + \deg(v\,f). \tag{14.5.25}$$

Из (14.5.21),(14.5.23),(14.5.24),(14.5.25) следует, что

$$\deg(sg\,) = \deg(vg),\ \deg(sf\,) = \deg(vf). \tag{14.5.26}$$

В случае $\deg(v\,g) > 0$ и $\deg(v\,f) > 0$ утверждение 14.5.7 доказано. Рассмотрим случай $\deg(v\,g) = 0$. Это означает, что полином $g(y,z)$ не зависит от переменной y, т.е. $g(y,z) = g(z)$. Тогда получаем $p_1(y) + p_2(z) = g(z)f(y,z)$ и $\deg(g) > 0$. Отсюда ненулевые коэффициенты при любых степенях y не могут быть полиномами нулевой степени по z. Противоречие. ♢

Замечание 14.5.1 *Любой полином $sp\,(y)$ из $k[y]$ мы можем рассматривать также как полином $p(y)$ из $k[y,z]$, считая что переменные $z_1, z_2, \ldots z_l$ входят с нулевыми коэффициентами. Согласно утверждению 14.5.7 таким формальным добавлением переменных нельзя сделать неприводимый полином приводимым.*

Следующее утверждение в основном следует из утверждения 14.5.7.

Утверждение 14.5.8 *Пусть существует точка $b \in \Lambda_1^l$, что полином sp лаковый, тогда и полином p лаковый при выполнении любого из следующих дополнительных условий: а)$\deg(p) = \deg(sp\,)$; б)$p(y,z) = p_1(y) + p_2(z)$, где $p_1 \in k[y]$, $p_2 \in k[z]$.*

Доказательства требуют лишь солидность полинома $p(y,z)$ в силу утверждения 14.5.7.

Полином $sp\,(y)$ лаковый, поэтому по утверждению 14.5.5 у него существует регулярный нуль $y = a$, т.е.

$$p(a,b) = 0,\ \frac{\partial p}{\partial y}(y,z)\Big|_{(a,b)} \ne 0. \tag{14.5.27}$$

Но тогда и $\frac{\partial p}{\partial x}(x)\Big|_{x=(a,b)} \ne 0$, т.е. точка $(a,b) \in \Lambda_1^n$ есть регулярный нуль полинома $p(x)$. По утверждению 14.5.5 тогда полином $p(x)$ солиден. ♢

Проведём теперь два примера лаковых полиномов.

Пример 14.5.6

Полином $p(x_1, x_2) = x_1 + x_2^m$, $m \in \mathbf{N}_o$ — лаковый по утверждению 14.5.8 б), ибо $x_1 + c$ — лаковый полином при любом $c \in \Lambda_2$.

Пример 14.5.7

Однородный полином $p(x_1, x_2, x_3) = x_3^{m-1} x_1 + x_2^m$, $m \in \mathbf{N}$ — лаковый по утверждению 14.5.8 а), ибо полином $p(x_1, x_2, 1) = x_1 + x_2^m$ лаковый.

14.5.7 О множестве неприводимых полиномов.

Однородный полином степени $m \in \mathbf{N}_o$ от $n \in \mathbf{N}$ переменных задаётся $C(n + m - 1, m)$ коэффициентами. Коэффициенты однородных полиномов степени m от n переменных образуют линейное пространство $\mathrm{Lo}\,(n, m; \Lambda_2) = \Lambda_2^{C(n+m-1,m)}$ над полем Λ_2. Аналогично коэффициенты всех полиномов степени не выше m от n переменных образуют линейное пространство $\mathrm{Lg}\,(n, m; \Lambda_2) = \Lambda_2^{C(n+m,m)}$ над полем Λ_2.

В векторном пространстве однородных полиномов $\mathrm{Lo}\,(n, m; \Lambda_2)$ Введём два подмножества: множество $\mathrm{Pro}\,(n, m; \Lambda_2)$ всех приводимых однородных полиномов и дополнительное множество $\mathrm{NPro}\,(n, m; \Lambda_2) \equiv \mathrm{Lo}\,(n, m; \Lambda_2) \setminus \mathrm{Pro}\,(n, m; \Lambda_2)$ всех неприводимых полиномов. В векторном пространстве $\mathrm{Lg}\,(n, m; \Lambda_2)$ всех полиномов степени не выше m от n переменных введём четыре подмножества: множество всех приводимых полиномов — $\mathrm{Prg}\,(n, m; \Lambda_2)$, дополнительное множество всех неприводимых полиномов — $\mathrm{NPrg}\,(n, m; \Lambda_2) \equiv \mathrm{Lg}\,(n, m; \Lambda_2) \setminus \mathrm{Prg}\,(n, m; \Lambda_2)$, множество всех неприводимых полиномов степени m — $\mathrm{NPrga}\,(n, m; \Lambda_2)$ и дополнительное множество $\mathrm{Prga}\,(n, m; \Lambda_2) \equiv \mathrm{Lg}\,(n, m; \Lambda_2) \setminus \mathrm{NPrga}\,(n, m; \Lambda_2)$. По построению справедливы включения

$$\mathrm{NPrga}\,(n, m; \Lambda_2) \subset \mathrm{NPrg}\,(n, m; \Lambda_2), \tag{14.5.28}$$

$$\mathrm{Prg}\,(n, m; \Lambda_2) \subset \mathrm{Prga}\,(n, m; \Lambda_2). \tag{14.5.29}$$

Рассмотрим алгебраические свойства введенных множеств.

Определим для каждого $m \in \mathbf{N}_o$ линейный изоморфизм $w_m : \mathrm{Lg}\,(n, m; \Lambda_2) \to \mathrm{Lo}\,(n+1, m; \Lambda_2)$ следующим образом. Полином $p(x_1, x_2, \ldots x_n) \in k[x_1, x_2, \ldots x_n]$ степени не выше m запишем в виде суммы $m + 1$ однородного полинома

$$p(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{i=0}^{m} p_i(x_1, x_2, \ldots x_n), \tag{14.5.30}$$

где $p_i(x_1, \ldots x_n)$ однородный полином степени $i \in \overline{0, m}$ возможно тривиальный. Определим

$$w_m(p)(x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1}) \equiv \sum_{i=0}^{m} (x_{n+1})^{m-i} p_i(x_1, x_2, \ldots x_n). \tag{14.5.31}$$

Обратное отображение w_m^{-1} есть отображение фиксации $(n + 1)$-ой переменной вида

$$w_m^{-1}(q)(x_1, x_2, \ldots x_n) = q(x_1, x_2, \ldots x_n, 1). \tag{14.5.32}$$

Семейство изоморфизмов $\{w_m\}_{m \in \mathbf{N}_o}$ обладает следующим свойством.

Утверждение 14.5.9 *Если степени полиномов* $p(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $q(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *удовлетворяют неравенствам* $\deg(p) \leq r$, $\deg(q) \leq s$, *то*

$$w_r(p) w_s(q) = w_{r+s}(pq). \tag{14.5.33}$$

Доказательство. Запишем полиномы p и q в виде суммы однородных полиномов

$$p = \sum_{i=0}^{r} p_i(x_1, x_2, \ldots x_n), \ q = \sum_{i=0}^{s} q_j(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Тогда

$$pq = \sum_{i=0}^{r} p_i \sum_{i=0}^{s} q_j = \sum_{l=0}^{r+s} \sum_{i+j=l} p_i q_j = \sum_{l=0}^{r+s} (pq)_l,$$

где $(pq)_l \equiv \sum_{i+j=l} p_i q_j$ — однородный полином степени l от $x_1, x_2, \ldots x_n$. По определению отображений w_m:

$$w_r(p) = \sum_{i=0}^{r} (x_{n+1})^{r-i} p_i(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

$$w_s(q) = \sum_{j=0}^{s} (x_{n+1})^{s-j} q_j(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

$$w_{r+s}(pq) = \sum_{l=0}^{r+s} (x_{n+1})^{r+s-l} (pq)_l(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Отсюда

$$w_r(p) w_s(q) = \sum_{i=0}^{r} (x_{n+1})^{r-i} p_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \sum_{j=0}^{s} (x_{n+1})^{s-j} q_j(x_1, x_2, \ldots x_n) =$$

$$\sum_{l=0}^{r+s} (x_{n+1})^{r+s-l} \left(\sum_{i+j=l} p_i q_j \right) (x_1, x_2, \ldots x_n) = w_{r+s}(pq).$$

$\diamondsuit$

Установим теперь следующую связь между введёнными выше множествами.

Утверждение 14.5.10 *При* $m \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$ *верно*

$$\mathrm{NPro}\,(n+1, m; \Lambda_2) = w_m\,(\,\mathrm{NPrga}\,(n, m; \Lambda_2))\,. \tag{14.5.34}$$

Доказательство. Если полином $p \in \mathrm{NPrga}\,(n, m; \Lambda_2)$, то он неприводим и имеет степень m. Полином $w_m(p)(x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1})$ имеет степень m и $w_m(p)(x_1, x_2, \ldots x_n, 1) = p(x_1, x_2, \ldots x_n)$. По утверждению 14.5.7 полином $w_m(p)$ также неприводим. Доказано включение

$$\mathrm{NPro}\,(n+1, m; \Lambda_2) \supset w_m\,(\,\mathrm{NPrga}\,(n, m; \Lambda_2))\,. \tag{14.5.35}$$

Если полином p принадлежит дополнительному множеству $\mathrm{Prga}\,(n, m; \Lambda_2) = \mathrm{Lg}\,(n, m; \Lambda_2) \setminus \mathrm{NPrga}\,(n, m; \Lambda_2)$, то или $\deg(p) < m$ или $\deg(p) = m$ и полином p приводим. В случае $r \equiv \deg(p) < m$ имеем

$$w_m(p) = \sum_{i=0}^{r} (x_{n+1})^{m-i} p_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = (x_{n+1})^{m-r} \sum_{i=0}^{r} (x_{n+1})^{r-i} p_i(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

т.е. полином $w_m(p)$ приводим.

В случае $\deg(p) = m$ и полином p приводим существуют полиномы $g \in k[x], f \in k[x]$, что $p = gf$ и $r = \deg(g) > 0, s = \deg(f) > 0$. По утверждению 14.5.9 получаем

$$w_m(p) = w_r(g)w_s(f)$$

и $\deg(w_r(g)) = r > 0,\ \deg(w_s(f)) = s > 0$, т.е. полином $w_m(p) \in \mathrm{Pro}(n, m; \Lambda_2)$. Доказано включение

$$\mathrm{Pro}(n, m; \Lambda_2) \supset w_m(\mathrm{Prga}(n, m; \Lambda_2)). \tag{14.5.36}$$

Так как отображение $w_m : \mathrm{Lg}(n, m; \Lambda_2) \to \mathrm{Lo}(n + 1, m; \lambda_2)$ изоморфизм, из (14.5.35) и (14.5.36) следует (14.5.34). $\diamondsuit$

В случае $\Lambda_2 = \mathbf{C}$ согласно [77, с.79] множество приводимых однородных полиномов степени m от n переменных $\mathrm{Pro}(n, m; \mathbf{C})$ является алгебраическим множеством в $\mathrm{Lo}(n, m; \mathbf{C})$. Так как отображение w_m линейный изоморфизм, то согласно утверждению 14.5.10 и множество $\mathrm{Prga}(n-1, m; \mathbf{C})$ является алгебраическим множеством в $Lg(n-1, m; \mathbf{C})$. Нас интересует вопрос: при каких значениях индексов m, n множества $\mathrm{Pro}(n, m; \mathbf{C})$ и $\mathrm{Prga}(n, m; \mathbf{C})$ будут собственными алгебраическими?

Лемма 14.5.6 *Пусть* $n \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$. *При* $n \in \overline{1,2}$ *и* $m \geq 2$ *множество* $\mathrm{NPro}(n, m; \mathbf{C})$ *пусто, а при остальных значениях m и n непусто. При n = 1 и m ≥ 2 множество* $\mathrm{NPrga}(n, m; \mathbf{C})$ *пусто, при остальных значениях n и m непусто.*

Доказательство. При $n = 1$ каждый полином степени $m \geq 2$ над полем $\mathbf{C}$ разлагается на произведение m сомножителей первой степени, т.е. $\mathrm{NPrga}(1, m; \mathbf{C} = \emptyset$ при $m \geq 2$. Так как каждый полином первой степени неприводим, то $\mathrm{NPrga}(n, 1; \mathbf{C}) \neq \emptyset$ при любом $n \in \mathbf{N}$. Если $n \geq 2$ и $m \geq 2$, то существует неприводимый полином $p(x_1, x_2, \ldots x_n) = x_1 + x_2^m$ степени m — пример 14.5.6. Доказано второе утверждение леммы 14.5.6.

В силу утверждения 14.5.10 для доказательства первого утверждения леммы 14.5.6 осталось рассмотреть лишь случай множества $\mathrm{NPro}(1, m; \mathbf{C})$. Но однородный полином от одной переменной степени $m \geq 2$ приводим, а степени 1 неприводим. $\diamondsuit$

Рассмотрим теперь случай $\Lambda_2 = \mathbf{R}$.

При естественном вложении $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ мы получаем естественные вложения линейных пространств $\mathbf{R}^k \subset \mathbf{C}^k, k \in \mathbf{N}$, т.е. вложения $\mathrm{Lo}(n, m; \mathbf{R}) \subset \mathrm{Lo}(n, m; \mathbf{C})$ и $\mathrm{Lg}(n, m; \mathbf{R}) \subset \mathrm{Lg}(n, m; \mathbf{C})$. Каждый полином с действительными коэффициентами, приводимый над полем $\mathbf{R}$, приводим и над полем $\mathbf{C}$, т.е. верны включения

$$\mathrm{Pro}(n, m; \mathbf{R}) \subset \mathrm{Lo}(n, m; \mathbf{R}) \bigcap \mathrm{Pro}(n, m; \mathbf{C}), \tag{14.5.37}$$

$$\mathrm{Prg}(n, m; \mathbf{R}) \subset \mathrm{Lg}(n, m; \mathbf{R}) \bigcap \mathrm{Prg}(n, m; \mathbf{C}), \tag{14.5.38}$$

$$\mathrm{Prga}(n, m; \mathbf{R}) \subset \mathrm{Lg}(n, m; \mathbf{R}) \bigcap \mathrm{Prga}(n, m; \mathbf{C}). \tag{14.5.39}$$

Вернемся теперь к естественному вложению $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{C}^n$, $n \in \mathbf{N}$ и пусть $A \subset \mathbf{C}^n$ алгебраическое множество в $\mathbf{C}^n$ степени $\mathrm{Deg}(A)$. Покажем, что $A' \equiv \mathbf{R}^n \bigcap A$ есть алгебраическое множество в $\mathbf{R}^n$ и $\mathrm{Deg}(A') \leq \mathrm{Deg}(A)$.

В самом деле, существует конечное множество полиномов $p_1, p_2, \ldots p_r$ от n переменных с комплексными коэффициентами, что в $\mathbf{C}^n$ верно представление

$$A = \bigcap_{k=0}^{r} \mathrm{Nul}(p_k)$$

и $\deg(p_k) \leq \mathrm{Deg}\,(A)$ при всех $k \in \overline{1,r}$. Тогда верно

$$A' = \mathbf{R}^n \bigcap A = \bigcap_{k=0}^{n} \left(\mathbf{R}^n \bigcap \mathrm{Nul}\,(p_k)\right).$$

При $x \in \mathbf{R}^n$ верно разложение $p_k(x) = p'_k(x) + ip''_k(x)$, где $p'_k(x)$ и $p''_k(x)$ есть соответственно вещественная и мнимая части полинома. При этом, $\max\{\deg(p'_k), \deg(p''_k)\} = \deg(p_k)$. Мы получаем представление

$$A' = \bigcap_{k=0}^{r} \left(\mathrm{Nul}\,(p'_k) \bigcap \mathrm{Nul}\,(p''_k)\right),$$

доказывающее что множество A' алгебраическое в $\mathbf{R}^n$. $\diamondsuit$

Поскольку мы уже знаем, что множества $\mathrm{Pro}\,(n,m;\mathbf{C})$ и $\mathrm{Prga}\,(n,m;\mathbf{C})$ алгебраические из вышесказанного мы получаем, что и множества $\mathrm{Lo}\,(n,m;\mathbf{R}) \bigcap \mathrm{Pro}\,(n,m;\mathbf{C})$ и $\mathrm{Lg}\,(n,m;\mathbf{R}) \bigcap \mathrm{Prga}\,(n,m;\mathbf{C})$ алгебраические в $\mathrm{Lo}\,(n,m;\mathbf{R})$ и $\mathrm{Lg}\,(n,m;\mathbf{R})$ соответственно. В силу включений (14.5.37-14.5.39) для того, чтобы множества приводимых полиномов $\mathrm{Pro}\,(n,m;\mathbf{R})$ и $\mathrm{Prg}\,(n,m;\mathbf{R})$ были субалгебраическими, достаточно доказать, что множества $\mathrm{Lo}\,(n,m;\mathbf{R}) \bigcap \mathrm{Pro}\,(n,m;\mathbf{C})$ и $\mathrm{Lg}\,(n,m;\mathbf{R}) \bigcap \mathrm{Prga}\,(n,m;\mathbf{C})$ собственно алгебраические.

Лемма 14.5.7 *Пусть $n \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$. Множество $\mathrm{Lo}\,(n,m;\mathbf{R}) \bigcap \mathrm{NPro}\,(n,m;\mathbf{C}) \subset \mathrm{Lo}\,(n,m;\mathbf{R})$ при $n \in \overline{1,2}$ и $m \geq 2$ пусто, а при остальных значениях n и m непусто. Множество $\mathrm{NPro}\,(n,m;\mathbf{R})$ при $n = 1$ и $m \geq 2$ — пусто, при $n = m = 1$ — непусто, при $n = m = 2$ — непусто, при $n = 2$ и $m > 2$ — пусто. Множество $\mathrm{Lg}\,(n,m;\mathbf{R}) \bigcap \mathrm{NPrga}\,(n,m;\mathbf{C}) \subset \mathrm{Lg}\,(n,m;\mathbf{R})$ при $n = 1$ и $m \geq 2$ пусто, а при остальных значениях n и m непусто. Множество $\mathrm{NPrg}\,(n,m;\mathbf{R})$ непусто при любых n и m.*

Доказательство. Согласно лемме 14.5.6 при $n \in \overline{1,2}$ и $m \geq 2$ множество $\mathrm{NPro}\,(n,m;\mathbf{C})$ пусто, поэтому и множество $\mathrm{Lo}\,(n,m;\mathbf{R}) \bigcap \mathrm{NPro}\,(n,m;\mathbf{C})$ пусто. При остальных значениях чисел n и m множество $\mathrm{Lo}\,(n,m;\mathbf{R}) \bigcap \mathrm{NPro}\,(n,m;\mathbf{C})$ непусто, что показывается следующими примерами: 1)при $m = 1$ — это полином $p(x_1, x_2, \ldots x_n) = x_1$, 2)при $n \geq 3$ и $m \geq 2$ — это полином $p(x_1, x_2, \ldots x_n) = x_3^{m-1}x_1 + x_2^m$ из примера 14.5.7.

Согласно лемме 14.5.6 при $n = 1$ и $m \geq 2$ множество $\mathrm{NPrga}\,(n,m;\mathbf{C})$ пусто, поэтому и множество $\mathrm{Lg}\,(n,m;\mathbf{R}) \bigcap \mathrm{NPrga}\,(n,m;\mathbf{C})$ пусто. При остальных значениях чисел n и m множество $\mathrm{Lg}\,(n,m;\mathbf{R}) \bigcap \mathrm{NPrga}\,(n,m;\mathbf{C})$ непусто, что показывается следующими примерами: 1)при $m = 1$ — это полином $p(x_1, x_2, \ldots x_n) = x_1$, 2)при $n \geq 2$ и $m \geq 1$ — это полином $p(x_1, x_2, \ldots x_n) = x_1 + x_2^m$ из примера 14.5.6.

Множество $\mathrm{NPrg}\,(n,m;\mathbf{R})$ непусто при любых n и m , ибо содержит полином $p(x_1, x_2, \ldots x_n) = x_1$.

Множество $\mathrm{NPro}\,(n,m;\mathbf{R})$ при $n = 1$ и $m \geq 2$ пусто, ибо любой однородный полином от одной переменной степени m имеет вид $p(x_1) = c \cdot x_1^m$. Отсюда же видно, что $\mathrm{NPro}\,(1,1;\mathbf{R})$ содержит полином $p(x_1) = x_1$. При $n = m = 2$ полином $p(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ неприводим над полем $\mathbf{R}$. При $n = 2$ и $m > 2$ согласно утверждению 14.5.10 верно $\mathrm{NPro}\,(2,m;\mathbf{R}) = w_m(\,\mathrm{NPrga}\,(1,m;\mathbf{R})$. Но $\mathrm{NPrga}\,(1,m;\mathbf{R}) = \emptyset$ при $m > 2$, так как любой полином степени $m \geq 3$ с действительными коэффициентами приводим над полем $\mathbf{R}$. $\diamondsuit$

Справедливо следующее свойство неприводимых полиномов.

Лемма 14.5.8 *Пусть $p(x_1, x_2, \dots x_n)$ полином степени m от n переменных с коэффициентами из поля $\mathbf{C}$ неприводимый над полем $\mathbf{C}$, и $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ — полином степени не более m от n переменных с коэффициентами из поля $\mathbf{C}$. Пусть целое неотрицательное число $K \equiv \mathrm{Deg}\ (\mathrm{Prga}\,(n, m; \mathbf{C}))$ — степень алгебраического множества $\mathrm{Prga}\,(n, m; \mathbf{C})$ в $\mathrm{Lg}\,(n, m; \mathbf{C})$. Тогда при всех значениях константы $t \in \mathbf{C}$, кроме не более K исключительных значений, полином $p(x_1, x_2, \dots x_n) + tf(x_1, x_2, \dots x_n)$ неприводим над полем $\mathbf{C}$.*

Доказательство. Полином $p \in \mathrm{Lg}\,(n, m; \mathbf{C}) \setminus \mathrm{Prga}\,(n, m; \mathbf{C})$ и полином $f \in \mathrm{Lg}\,(n, m; \mathbf{C})$. Так как множество $\mathrm{Prga}\,(n, m; \mathbf{C})$ алгебраическое в $\mathrm{Lg}\,(n, m; \mathbf{C})$ утверждение леммы 14.5.8 вытекает из леммы 14.5.3. $\diamondsuit$

Следствие 14.5.7 *Если $p : \Lambda_1^n \to \Lambda_2$ лаковый полином степени m, и $f : \Lambda_1^n \to \Lambda_2$ полином степени не выше m, то при всех значениях константы $t \in \Lambda_2$, кроме не более $K = \mathrm{Deg}\ (\mathrm{Prga}\,(n, m; \mathbf{C}))$ исключительных значений, полином $p+tf$ неприводим над полем Λ_2.*

Доказательство. Если $\Lambda_2 = \mathbf{C}$, то следствие 7 непосредственно вытекает из леммы 14.5.8. Если $\Lambda_2 = \mathbf{R}$ и $\Lambda_1 = \mathbf{R}$, то по утверждению 14.5.6 солидный неприводимый над полем $\mathbf{R}$ полином p неприводим и над полем $\mathbf{C}$. Опять следствие 14.5.7 вытекает из леммы 14.5.8. $\diamondsuit$

14.5.8 Свойства неприводимости квадратичных форм.

Рассмотрим однородный полином $p : \Lambda_1^n \to \Lambda_2$. Нас интересуют те значения константы $c \in \Lambda_2$, при которой полином $p + c$ неприводим.

Утверждение 14.5.11 *Пусть $p(x_1, x_2, \dots x_n)$ — однородный полином с коэффициентами из поля $\mathbf{C}$ тогда:*

1) если существует константа $c \in \mathbf{C}$, $c \neq 0$, что полином $p + c$ неприводим над полем $\mathbf{C}$, то полином $p+c$ неприводим над полем $\mathbf{C}$ и при всех значениях $c \in \mathbf{C}, c \neq 0$;

2) если полином p неприводим над полем $\mathbf{C}$, то полином $p + c$ неприводим над полем $\mathbf{C}$ при всех $c \in \mathbf{C}$.

Доказательство. Пусть $a \in \mathbf{C}$, $b \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Пусть полином $p(x) + a$ неприводим над полем $\mathbf{C}$. Если $t \in \mathbf{C}$, $t \neq 0$, то отображение $I : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ вида $I(x) = tx$ — линейный изоморфизм и полином $p_I = t^m p(x) + a$, где m — степень однородного полинома p, также неприводим над полем $\mathbf{C}$. Тогда полином $p(x) + \frac{a}{t^m}$ неприводим над полем $\mathbf{C}$ и при $t = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ полином $p(x) + \frac{a}{t^m} = p(x) + b$ неприводим над полем $\mathbf{C}$. Доказано утверждение 1).

Если однородный полином $p(x_1, x_2, \dots x_n)$ неприводим, то его степень $m \geq 1$. По лемме 14.5.8 тогда лишь для конечного числа значений $c \in \mathbf{C}$ полином $p + c$ может быть приводим. Итак, существует $c \in \mathbf{C}, c \neq 0$, что полином $p+c$ неприводим. Теперь из доказанного в части 1) следует, что полином $p + c$ неприводим над полем $\mathbf{C}$ при всех $c \in \mathbf{C}$. $\diamondsuit$

Рассмотрим невырожденную квадратичную форму вида.

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j, \qquad (14.5.40)$$

где $B \in Ms(n; \Lambda_2)$ — невырожденная симметричная матрица.

В случае $\Lambda_2 = \mathbf{C}$ существует линейный изоморфизм $I : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$, при котором квадратичная форма $f(x)$ приводится к виду

$$f_I(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{14.5.41}$$

[46, с.346]. При этом полиномы $f(x)$ и $f_I(x)$эквивалентны по приводимости и солидности согласно п. 14.5.2. При $n = 1$ полином $f_I(x) = x_1^2$ приводим. При $n = 2$ полином $f_I(x) = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2)$ приводим. При $n \geq 3$ полином $f_I(x)$ неприводим по утверждению 14.5.7, ибо при фиксации $x_3 = i, x_4 = \dots = x_n = 0$ мы получаем $f_I(x_1, x_2, i, 0, 0, \dots 0) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ — неприводимый полином.

В случае $\Lambda_2 = \mathbf{R}$ вывод о неприводимости квадратичной формы $f(x)$ над полем $\mathbf{C}$ при $n \geq 3$ сохраняется. При $n = 1$ квадратичная форма $f(x) = \lambda_1 x_1^2$ приводима. Осталось рассмотреть случай $n = 2$. Так как по условию квадратичная форма $f(x_1, x_2)$ невырождена, то $\det(B) \neq 0$. При $\det(B) > 0$ квадратичная форма неприводима над полем $\mathbf{R}$ при $\det(B) < 0$ — разложима.

Квадратичная форма $f(x_1, x_2)$ имеет вид $f(x_1, x_2) = b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2$. При $b_{11} = 0$ получаем, что квадратичная форма приводима и $\deg(B) = -b_{12}^2$. В случае $b_{11} \neq 0$ верно представление

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{b_{11}}[(b_{11}x_1 + b_{12}x_2)^2 + \det(B)x_2^2]. \tag{14.5.42}$$

Отсюда при $\det(B) < 0$ полагаем $\det(B) = -c^2$ и получаем приводимость

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{b_{11}}[(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + cx_2)(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 - cx_2)].$$

В случае $\det(B) > 0$ из представления (14.5.42) следует, что полином $f(x_1, x_2)$ имеет лишь один нуль точку (0,0). Но в случае приводимости полинома $f(x_1, x_2)$ существовали бы вектора $a \in \mathbf{R}^2, d \in \mathbf{R}^2$, что

$$f(x_1, x_2) = \langle a, x \rangle \langle d, x \rangle$$

и множество нулей полинома содержало бы некоторую прямую. Итак, при $\det(B) > 0$ полином $f(x_1, x_2)$ неприводим. $\diamondsuit$

Вернемся к общему случаю и заметим, что градиент невырожденной квадратичной формы (14.5.40) равен $2Bx$ и обращается в нуль лишь в начале координат. Тогда из предыдущих рассуждений мы можем сделать следующий вывод.

Лемма 14.5.9 *Пусть $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ невырожденная квадратичная форма. Тогда при $n = 2$:*

1)при любой константе $c \in \mathbf{C}, c \neq 0$, полином $f + c$ неприводим над полем $\mathbf{C}$;

2)при любом $a \in \Lambda_1^2, a \neq 0$ полином от $x \in \Lambda_1^2$ вида $f(x) - f(a)$ солиден, а если и $f(a) \neq 0$, то и лаковый из Λ_1^2 в Λ_2.

При $n \geq 3$:

1) при любом $c \in \mathbf{C}$ полином $f + c$ неприводим над полем $\mathbf{C}$;

2) при любом $a \in \Lambda_1^n, a \neq 0$ полином от $x \in \Lambda_1^n$ вида $f(x) - f(a)$ лаковый из Λ_1^n в Λ_2.

Доказательство. Случай $n = 2$. В этом случае неприводимость полинома $f(x)+c$ над полем $\mathbf{C}$ эквивалентна неприводимости полинома $f_I(x)+c = x_1^2+x_2^2+c$ над полем $\mathbf{C}$. При $c = -1$ полином $f_I(x) + c = x_1^2 + x_2^2 - 1$ неприводим над полем $\mathbf{C}$. Согласно утверждению 14.5.11 полином $f(x) + c$ тогда неприводим при любом $c \in \mathbf{C}, c \neq 0$ над полем $\mathbf{C}$. Так как градиент невырожденной квадратичной формы $f(x)$ обращается в нуль лишь в нуле, то полином $f(x) - f(a)$ солиден при $a \neq 0$, а если $c = f(a) \neq 0$, то он согласно предыдущему и неприводим.

Случай $n = 3$. В этом случае невырожденная квадратичная форма $f(x)$ неприводима над полем $\mathbf{C}$ и по утверждению 14.5.11 и полином $f(x) + c$ неприводим над полем $\mathbf{C}$ при любой константе $c \in \mathbf{C}$. При $a \in \Lambda_1^n,\ a \neq 0$ полином $f(x) - f(a)$ солиден, а согласно предыдущему и неприводим. $\diamondsuit$

14.5.9 Функциональная зависимость полиномов.

Пусть полином $p(x)$ является функцией полинома $q(x)$, т.е. существует отображение $f : \Lambda_2 \to \Lambda_2$, что $p(x)$ есть суперпозиция $p(x) = f\left(q(x)\right)$. Обязано ли быть отображение f полиномом? Вообще говоря, нет как показывает.

Пример 14.5.8

$n = 1, p(x) = x_1^2, q(x) = x_1^4, f(x) = \sqrt{z}$ и $p(x_1) = f\left(q(x_1)\right)$ при всех $x \in \mathbf{R}$.

Однако, в приведенном примере полином q приводим.

Теорема 14.5.4 *Пусть $p(x_1, x_2, \ldots x_n)$ — полином, $q(x_1, x_2, \ldots x_n)$ — лаковый полином, $U \subset \Lambda_1^n$ непустое открытое множество и на множестве U полином p является функцией полинома q. Тогда существует полином $f : \Lambda_2 \to \Lambda_2$ от одного переменного, что*

$$\forall x \in \Lambda_1^n \;\Big|\; p(x) = f\left(q(x)\right). \tag{14.5.43}$$

Доказательство проведём индукцией по степени $m = \deg(p)$ полинома p. При $m = 0$ теорема тривиально верна. Предположим, что теорема верна при всех полиномах p степени $\deg(p) < m$ и покажем, что она верна и для любого полинома p степени m.

Неприводимый полином не постоянен, поэтому в непустом открытом множестве U найдется точка $a \in U$, в которой $\frac{\partial q}{\partial x}(x)\Big|_{x=a} \neq 0$. В силу непрерывности градиента полинома найдется открытая окрестность $V \subset U$ точки a, что $\frac{\partial q}{\partial x}(x) \neq 0$ во всех точках $x \in V$. Так как полином $q(x)$ непрерывен на множестве V, то он принимает континуальное множество различных значений на V. Так как полином $q(x)$ лаковый, то по следствию 14.5.7 для всех значений $c \in \Lambda_2$, кроме, быть может, конечного множества исключительных значений, полином $q(x)+c$ неприводим. Поэтому существует точка $b \in V$, что полином $g(x) \equiv q(x) - q(b)$ неприводим. Но точка b — регулярный нуль полинома $g(x)$, ибо $g(b) = 0$ и $\frac{\partial g}{\partial x}(x)\Big|_{x=b} = \frac{\partial q}{\partial x}(x)\Big|_{x=b} \neq 0$. поэтому полином $g(x)$ солиден в точке b по утверждению 14.5.3.

Полином $p(x)$ по условию постоянен на множествах уровня $\{x \in U \;\big|\; q(x) = c\}$ полинома $q(x)$, поэтому

$$\mathrm{Nul}\ (p(x) - p(b)) \bigcap \mathrm{Nul}\ (q(x) - q(b)) \bigcap V = \mathrm{Nul}\ (q(x) - q(b)) \bigcap V$$

есть солидное множество. По следствию 14.5.3 тогда полином $p(x) - p(b)$ делится на полином $q(x) - q(b)$, т.е. существует полином $s(x)$, что верно

$$p(x) - p(b) = (q(x) - q(b))\, s(x). \tag{14.5.44}$$

Множество $V \setminus \mathrm{Nul}\ (q(x) - q(b))$ — непустое открытое подмножество в Λ_1^n, на котором согласно (14.5.44) и условию теоремы полином $s(x)$ есть функция полинома $q(x)$. $\deg(s) = \deg(p) - \deg(q) < m$, поэтому по предположению индукции существует полином $t : \Lambda_2 \to \Lambda_2$, что $s(x) = t(q(x))$. Учитывая (14.5.44), получаем, что теорема доказана. $\diamondsuit$

Замечание 14.5.2 *Условие "полином $q(x)$ — лаковый"в теореме 14.5.4 может быть заменено условием: "существует константа $c \in \Lambda_2$, что полином $q(x) + c$ лаковый ", ибо полином от $q(x) + c$ является и полиномом от $q(x)$.*

Следствие 14.5.8 *Пусть $n \geq 2$ и $q : \Lambda_1^n \to \Lambda_2$ невырожденная квадратичная форма. Если полином $p(x_1, x_2, \dots x_n)$ на некотором непустом открытом множестве $U \subset \Lambda_1^n$ есть функция квадратичной формы q, то существует полином $f : \Lambda_2 \to \Lambda_2$, что верно (14.5.43).*

Следствие 14.5.9 *Если полином $p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, n \geq 2$ является в некоторой точке $a \in \mathbf{R}^n$ локальным инвариантом группы $\Omega_e(B)$, действующей слева на $\mathbf{R}^n$, где B — невырожденная симметричная вещественная матрица, то полином p является и глобальным инвариантом группы $\Omega(B)$ на всем $\mathbf{R}^n$ и существует вещественный полином $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, что*

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \;\Big|\; p(x) = f\left(\langle x, Bx\rangle\right). \tag{14.5.45}$$

Следствие 14.5.9 вытекает из теоремы 6.3.2 и следствия 14.5.8.

Итак, в классе полиномов для действия группы $\Omega_e(B)$ на $\mathbf{R}^n$ слева локальные и глобальные инварианты совпадают и даются формулой (14.5.45).

§14.6 О суммируемости функций вида $\frac{f(x)}{g(x)}$, знаменатели которых имеют нули

В световом и в сверхсветовом случае формула (13.4.27) для массы и формулы (14.4.9),(14.4.12) для физической энергии агвида содержат под интегралом отношение функций, знаменатель которых обращается в нуль на прямой или на конусе. В этом параграфе мы предварительно изучим существование интеграла Лебега от функций вида $\frac{f(x)}{g(x)}$ по $\mathbf{R}^3$, знаменатели которых обращаются в нуль на прямой или на конусе.

Итак, в этом параграфе рассматривается интеграл

$$\int\limits_G \frac{f(x)}{g(x)}\,dx \tag{14.6.1}$$

при $G = \mathbf{R}^2$ или $G = \mathbf{R}^3$. Интеграл всюду в этом параграфе есть интеграл Лебега.

14.6.1 Интеграл по плоскости, имеющий нуль знаменателя в начале координат.

Пусть $U_a \equiv \{x \in \mathbf{R}^2 \;\big|\; |x| \leq a\}$, $a \in \mathbf{R}_+$, $f : U_a \to \mathbf{C}$, $f \in C(U_a)$. Рассмотрим два интеграла

$$J_k \equiv \iint\limits_{U_a} \frac{f(x)}{|x|^{2k}}\,dx_1 dx_2. \;\; k \in \overline{1,2} \tag{14.6.2}$$

Числитель и знаменатель подинтегрального выражения в (14.6.2) непрерывные функции, поэтому подинтегральная функция $\frac{f(x)}{|x|^{2k}}$ непрерывна, всюду кроме нуля. Итак, существование интеграла J_k определяется локальным поведением функции $f(x)$ в нуле.

Далее дифференцируемость порядка $m \in \mathbf{N}_o$ в нуле мы понимаем согласно п. 13.11.1.

Лемма 14.6.1 *Для существования интеграла J_1:*

1) необходимо, чтобы $f(0) = 0$;

2) если функция f дифференцируема порядка 1 в нуле, необходимо и достаточно, чтобы $f(0) = 0$.

Доказательство. Для доказательства 1) предположим противное, т.е. $f(0) \neq 0$. В силу непрерывности функции $f(x)$ в нуле существуют число $C \in \mathbf{R}_+$ и число $\varepsilon \in]0, a]$, что

$$\forall x \in U_\varepsilon \;\Big|\; |f(x)| \geq C.$$

Тогда

$$\iint\limits_{U_a} \left| \frac{f(x)}{|x|^2} \right| dx_1 dx_2 \geq \iint\limits_{U_\varepsilon} \left| \frac{f(x)}{|x|^2} \right| dx_1 dx_2 \geq C \iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{1}{|x|^2} dx_1 dx_2 =$$

$$C 2\pi \int\limits_0^\varepsilon \frac{1}{r} dr = +\infty,$$

т.е. интеграл J_1 не существует. Доказано утверждение 1).

Пусть функция f дифференцируема порядка 1 в нуле и $f(0) = 0$, тогда существует $C \in \mathbf{R}_+$, что

$$\forall x \in U_a \;\Big|\; |f(x)| \leq C|x|.$$

Поэтому

$$\iint\limits_{U_a} \frac{|f(x)|}{|x|^2} dx_1 dx_2 \leq C \iint\limits_{U_a} \frac{1}{|x|} dx_1 dx_2 = C 2\pi a < +\infty.$$

$\diamondsuit$

Аналогично рассмотрим интеграл J_2.

Лемма 14.6.2 *Для существования интеграла J_2:*

1) необходимо, чтобы $f(0) = 0$;

2) если функция f дифференцируема порядка 1 в нуле, необходимо, чтобы для всех $\alpha \in {\mathbf{N}_o}^2$, $|\alpha| \leq 1$ было $f^{(\alpha)}(0) = 0$;

3) если функция f дифференцируема порядка 2 в нуле, необходимо, чтобы для всех $\alpha \in {\mathbf{N}_o}^2$, $|\alpha| \leq 2$ было $f^{(\alpha)}(0) = 0$;

4) если функция f дифференцируема порядка 3 в нуле, необходимо и достаточно, чтобы для всех $\alpha \in {\mathbf{N}_o}^2$, $|\alpha| \leq 2$ было $f^{(\alpha)}(0) = 0$.

Доказательство. Доказательство утверждения 1) вполне аналогично доказательству утверждения 1) предыдущей леммы и поэтому опускается.

Для доказательства утверждения 2) предположим противное, тогда с учётом верности утверждения 1) имеем при $|x| \to 0$ соотношение

$$f(x) = \langle h, x \rangle + o(|x|), \quad h \in \mathbf{C}^2, \quad h \neq 0. \tag{14.6.3}$$

Так как $h \neq 0$, на единичной окружности $S \equiv \{x \in \mathbf{R}^2 \bigm| |x| = 1\}$ существует непустое открытое подмножество $W \subset S$ и существует число $C \in \mathbf{R}_+$, что

$$\forall x \in W \Bigm| |\langle h, x\rangle| \geq C. \tag{14.6.4}$$

Существует $\varepsilon \in]0, a]$, что

$$\forall x \in U_\varepsilon \Bigm| |o(|x|)| \leq \frac{C}{2}|x|. \tag{14.6.5}$$

На открытом подмножестве $G \equiv \bigcup\limits_{t \in]0,\varepsilon[} tW \subset U_a$ получаем

$$\forall x \in G \Bigm| |f(x)| \geq |\langle h, x\rangle| - \frac{C}{2}|x| \geq \frac{C}{2}|x|. \tag{14.6.6}$$

Тогда справедлива оценка интеграла

$$\iint\limits_{U_a} \left|\frac{f(x)}{|x|^4}\right| dx_1 dx_2 \geq \iint\limits_{G} \frac{|f(x)|}{|x|^4}\, dx_1 dx_2 \geq \frac{C}{2} \iint\limits_{G} \frac{1}{|x|^3}\, dx_1 dx_2 =$$

$$\frac{C}{2} \int\limits_0^\varepsilon \frac{1}{r^2}\, dr\, \mu(W) = +\infty,$$

где $\mu(W)$ — угловая мера множества $W \subset S$. Получено противоречие, доказывающее утверждение 2).

Для доказательства утверждения 3) предположим противное, тогда с учётом верности утверждения 2) при $|x| \to 0$ имеем

$$f(x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}_o{}^2, \\ |\alpha| = 2}} \frac{f^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} x^\alpha + o(|x^2|).$$

Квадратичный полином $q(x) = \sum\limits_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}_o{}^2, \\ |\alpha| = 2}} \frac{f^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} x^\alpha$ по предположению нетривиален, поэтому существует открытое непустое подмножество W единичной окружности и число $C \in \mathbf{R}_+$, что верно

$$\forall x \in W \Bigm| |q(x)| \geq C. \tag{14.6.7}$$

Существует число $\varepsilon \in]0, a]$, что

$$\forall x \in U_\varepsilon \Bigm| |o(|x|^2) \Bigm| \leq \frac{C}{2}|x|^2.$$

На открытом множестве $G \equiv \bigcup\limits_{t \in]0,\varepsilon[} tW$ тогда верно

$$\forall x \in G \Bigm| |f(x)| \geq |q(x)| - |o(|x|^2)| \geq C|x|^2 - \frac{C}{2}|x|^2. \tag{14.6.8}$$

Получаем оценку интеграла

$$\iint\limits_{U_a} \left|\frac{f(x)}{|x|^4}\right| dx_1 dx_2 \geq \iint\limits_{G} \frac{|f(x)|}{|x|^4}\, dx_1 dx_2 \geq \frac{C}{2} \iint\limits_{G} \frac{1}{|x|^2}\, dx_1 dx_2 = \frac{C}{2} \int\limits_0^\varepsilon \frac{1}{r}\, dr\, \mu(W) = +\infty.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение 3).

В силу доказанности утверждения 3) для верности утверждения 4) достаточно доказать, что если функция f дифференцируема порядка 3 в нуле и при любом индексе $\alpha \in {\mathbf{N}_o}^2$, $|\alpha| \le 2$ верно $f^{(\alpha)}(0) = 0$, то существует интеграл J_2. Но в указанных условиях

$$f(x) = \sum_{\alpha \in {\mathbf{N}_o}^2, |\alpha|=3} \frac{f^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} x^\alpha + o(|x|^3).$$

Поэтому существует число $C \in \mathbf{R}_+$, что

$$\forall x \in U_a \;\Big|\; |f(x)| \le C|x|^3.$$

Тогда справедлива оценка

$$\iint\limits_{U_a} \frac{|f(x)|}{|x|^4}|\, dx_1 dx_2 \le \iint\limits_{U_a} \frac{1}{|x|}\, dx_1 dx_2 = C2\pi a < \infty.$$

◊

14.6.2 Интеграл по пространству, имеющий нули знаменателя на прямой.

Перейдем к рассмотрению интегралов

$$J_k \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{f(x_1, x_2, x_3)}{(x_1^2 + x_2^2)^k}\, dx_1 dx_2 dx_3, \quad k \in \overline{1,2}, \tag{14.6.9}$$

где $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{C}$ — непрерывное отображение. Введём прямую $L \equiv \{x \in \mathbf{R}^3 \;\Big|\; x_1 = 0, x_2 = 0\}$ в $\mathbf{R}^3$.

Лемма 14.6.3 *Если существует интеграл J_1, то верно*

$$f\Big|_L = 0. \tag{14.6.10}$$

Доказательство. Если существует интеграл Лебега J_1 по $\mathbf{R}^3$, то по теореме Фубини-Лебега ([20]с.664) при почти всех $x_3 \in \mathbf{R}$ существует интеграл Лебега

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{f(x_1, x_2, x_3)}{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1 dx_2. \tag{14.6.11}$$

Тогда по лемме 14.6.1 для почти всех $x_3 \in \mathbf{R}$ верно $f(0, 0, x_3) = 0$. В силу непрерывности функции f тогда верно (14.6.10).

Лемма 14.6.4 *Пусть $m \in \overline{0,2}$, $f \in C^{(m)}(\mathbf{R}^3)$ и существует интеграл J_2, тогда функция f и все её частные производные до порядка m включительно обращаются в нуль на прямой L.*

Доказательство. Если $f \in C^{(m)}(\mathbf{R}^3)$ и существует интеграл Лебега J_2 по $\mathbf{R}^3$, то по теореме Фубини-Лебега [81, с. 664] для почти всех $x_3 \in \mathbf{R}^3$ существует интеграл

Лебега (14.6.11). По лемме 14.6.2, тогда функция $f(x_1, x_2, x_3)$ и её частные производные по переменным x_1 и x_2 до порядка m включительно обращаются в нуль при $x_1 = 0, x_2 = 0$ для почти всех $x_3 \in \mathbf{R}$. В силу непрерывности функции и её частных производных, тогда они обращаются в нуль и при всех $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 \in \mathbf{R}$.

При $m = 0$ лемма доказана. При $m = 1$ мы доказали, что

$$f(0, 0, x_3) = 0, \tag{14.6.12}$$

$$f^{(1,0,0)}(0, 0, x_3) = 0, \tag{14.6.13}$$

$$f^{(0,1,0)}(0, 0, x_3) = 0. \tag{14.6.14}$$

Дифференцируя (12) по x_3 получим, что и

$$f^{(0,0,1)}(0, 0, x_3) = 0. \tag{14.6.15}$$

При $m = 2$ мы уже доказали соотношения (14.6.12-14.6.15) и кроме того, что

$$f^{(2,0,0)}(0, 0, x_3) = 0, \ f^{(1,1,0)}(0, 0, x_3) = 0, \ f^{(0,2,0)}(0, 0, x_3) = 0. \tag{14.6.16}$$

Дифференцируя соотношения (14.6.13-14.6.15) по x_3, мы получим

$$f^{(1,0,1)}(0, 0, x_3) = 0, \ f^{(0,1,1)}(0, 0, x_3) = 0, \ f^{(0,0,2)}(0, 0, x_3) = 0. \tag{14.6.17}$$

$\diamondsuit$

14.6.3 Интеграл по пространству, имеющий нуль знаменателя на конусе.

Пусть $f : \mathbf{R}^3 \to C$ непрерывное отображение, $\gamma \in \mathbf{R}_+$. Рассмотрим интегралы

$$J_k \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{f(x_1, x_2, x_3)}{(x_1^2 + x_2^2 - \gamma^2 x_3^2)^k} \, dx_1 dx_2 dx_3, \quad k \in \overline{1, 2}. \tag{14.6.18}$$

Введём множество нулей знаменателя — конус $\mathrm{Con} \equiv \{x \in \mathbf{R}^3 \bigm| x_1^2 + x_2^2 - \gamma^2 x_3^2 = 0\}$. Это множество, на котором может нарушаться непрерывность подинтегральной функции в (14.6.18).

Введём в $\mathbf{R}^3$ сферические координаты:

$$\begin{cases} x_1 = r \sin\theta \cos\varphi, \\ x_2 = r \sin\theta \sin\varphi, \\ x_3 = r \cos\theta, \end{cases} \tag{14.6.19}$$

$r \in [0, \infty[, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi[$. Положим $\gamma = \operatorname{tg}\theta_0$, $\forall 0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Тогда в сферических координатах

$$x_1^2 + x_2^2 - \gamma^2 x_3^2 = r^2(\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi - \operatorname{tg}^2\theta_0\cos^2\theta) = \tag{14.6.20}$$

$$\frac{r^2}{\cos^2\theta_0}(\sin^2\theta\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0\cos^2\theta) = \frac{r^2}{\cos^2\theta_0}\sin(\theta - \theta_0)\sin(\theta + \theta_0).$$

Возьмём точку $y \in \mathrm{Con}$ со сферическими координатами $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$, удовлетворяющими условиям $0 < r_0$, $0 < \varphi_0$, и выберем $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ так, чтобы

$$[r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon] \subset]0, \infty[,$$

$$[\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon] \subset]0, \frac{\pi}{2}[,$$

$$[\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon] \subset]0, 2\pi[.$$

Замкнутый параллелепипед $\Pi \equiv [r_0-\varepsilon, r_0+\varepsilon]\times[\theta_0-\varepsilon, \theta 0+\varepsilon]\times[\varphi_0-\varepsilon, \varphi 0+\varepsilon]$ в переменных (r, θ, φ) соответствует замкнутой области $G \subset \mathbf{R}^3$ в переменных (x_1, x_2, x_3), содержащей точку y своей внутренней точкой. Сферическая замена переменных (1.1.9) есть диффеоморфизм класса $C^{(\infty)}$ множества Π на множество G.

Предположим, что существует интеграл Лебега J_k, тогда существует и интеграл Лебега $\iiint\limits_G \frac{f(x_1,x_2,x_3)}{(x_1^2+x_2^2-\gamma^2 x_3^2)^k} dx_1 dx_2 dx_3$. Проведём сферическую замену переменных в последнем интеграле и получим, что существует интеграл Лебега

$$\int\limits_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon}\int\limits_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon}\int\limits_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} \frac{g(r,\theta,\varphi)}{(\theta-\theta_0)^k} v(r,\theta)\, dr d\theta d\varphi, \tag{14.6.21}$$

где

$$g(r, \theta, \varphi) \equiv f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi), \tag{14.6.22}$$

$$v(r,\theta) \equiv \frac{\sin\theta\,(\theta-\theta_0)^k}{\sin^k(\theta+\theta_0)\sin^k(\theta-\theta_0)}\cos^2\theta_0\, r^{2(1-k)}. \tag{14.6.23}$$

Функция $v(r, \theta)$ в параллелепипеде Π класса C^∞ и положительна, поэтому существование интеграла Лебега (14.6.21) эквивалентно существованию интеграла Лебега

$$\int\limits_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon}\int\limits_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon}\int\limits_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} \frac{g(r,\theta,\varphi)}{(\theta-\theta_0)^k} dr d\theta d\varphi. \tag{14.6.24}$$

По теореме Фубини-Лебега существование интеграла Лебега (14.6.24) по параллелепипеду Π влечет существование при почти всех $(r, \varphi) \in [r_0-\varepsilon, r0+\varepsilon]\times[\varphi_0-\varepsilon, \varphi_0+\varepsilon]$ интеграла Лебега

$$\int\limits_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon} \frac{g(r,\theta,\varphi)}{(\theta-\theta_0)^k} d\theta. \tag{14.6.25}$$

При $k = 1$ для существования интеграла Лебега (14.6.25) необходимо, чтобы $g(r, \theta_0, \varphi) = 0$. Так как функция $g(r, \theta, \varphi)$ непрерывна в параллелепипеде Π, то из обращения в нуль $g(r, \theta_0, \varphi) = 0$ при почти всех $(r, \varphi) \in [r_0-\varepsilon, r0+\varepsilon]\times[\varphi_0-\varepsilon, \varphi_0+\varepsilon]$, следует, что $g(r, \theta_0, \varphi) = 0$, а поэтому согласно (14.6.22) и $f(y) = 0$.

При $k = 2$ и функции $f \in C^{(1)}(\mathbf{R}^3)$ для существования интеграла (14.6.25) необходимо, чтобы

$$g(r, \theta_0, \varphi) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\theta} g(r, \theta, \varphi)\Big|_{\theta=\theta_0} = 0. \tag{14.6.26}$$

Тогда и

$$g(r_0, \theta_0, \varphi_0) = 0, \tag{14.6.27}$$

$$\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\Big|_{(r_0,\theta_0,\varphi_0)} = 0. \tag{14.6.28}$$

Условие (14.6.28) эквивалентно обращению в нуль производной функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по направлению нормали к поверхности конуса в точке $y \in \mathrm{Con}$.

Формулируем результаты приведенных рассуждений.

Лемма 14.6.5 *Если существует интеграл J_1, то*

$$f\Big|_{\text{Con}} = 0. \tag{14.6.29}$$

Доказательство. Мы доказали, что из существования интеграла J_1 вытекает, что $f(y) = 0$ для всех точек $y \in \text{Con}$, сферические координаты которых удовлетворяют условиям $o < r_0$, $0 < \varphi$. Но множество таких точек всюду плотно на конусе Con и функция f непрерывна, поэтому верно (14.6.29). $\diamondsuit$

Лемма 14.6.6 *Если $f \in C^{(1)}(\mathbf{R}^3)$ и существует интеграл J_2, то верно (29) и*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}\Big|_{\text{Con}} = 0. \tag{14.6.30}$$

Доказательство. В силу предыдущей леммы выполнено (14.6.29) и поэтому функция $g(r, \theta_0, \varphi) = 0$ при любых $r \in [0, \infty[$ и $\varphi \in [0, 2\pi[$ и её частные производные по r и φ равны нулю. Но мы уже убедились в предыдущем рассуждении, что и $\frac{\partial g(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\theta_0} = 0$, если $0 < r$ и $0 < \varphi$. Итак каждая точка $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ с $c < r_0$, $0 < \varphi$ есть критическая точка функции $g(r, \theta, \varphi)$. Поэтому каждая точка $y \in \text{Con}$, сферические координаты которой удовлетворяют условиям $0 < r_0$, $0 < \varphi_0$, — критическая точка функции $f(x)$. Но множество таких точек y всюду плотно на конусе Con, поэтому верно (14.6.30). $\diamondsuit$

14.6.4 Дифференциальные свойства функции $\widehat{jf}(\vec{\eta})$.

Рассмотрим натуральную частицу в смысле § 13.3 и п. 13.1.5, т.е. агвидную лоренцеву частицу с функцией состояния $uf \in W^{(1)}_{2,4}(\mathbf{R}^3) \bigcap \bar{C}^{(1)}_{4,0}(\mathbf{R}^3)$. Согласно § 13.3 для лоренцева агвида верно

$$jf(\vec{x}) = \Theta\Box(\vec{l})uf(\vec{x}). \tag{14.6.31}$$

Чтобы обобщённая функция $jf \in D'_4(\mathbf{R}^3)$ была регулярной обобщённой функцией медленного роста потребуем дополнительно здесь, чтобы $jf \in \bar{C}^{(2)}_{4,0}(\mathbf{R}^3)$.

Утверждение 14.6.1 *Пусть $uf \in W^{(1)}_{2,4}(\mathbf{R}^3) \bigcap \bar{C}^{(2)}_{4,0}(\mathbf{R}^3)$ и у функции $jf(\vec{x})$ вида (14.6.31) существуют все моменты до порядка $m \in \mathbf{N}_o$, тогда $\widehat{jf} \in \bar{C}^{(m)}_{4,0}(\mathbf{R}^3)$.*

Справедливость утверждения 14.6.1 следует из теорем 1.2 и 1.7 монографии [61].

Утверждение 14.6.2 *У измеримой функции $jf(\vec{x})$ существуют все моменты до порядка m иф*

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} (1 + |\vec{x}|^m)|jf(\vec{x})|\, dx_1 dx_2 dx_3 < \infty. \tag{14.6.32}$$

Доказательство. Справедливость утверждения вытекает из следующих трех неравенств:

$$\forall \alpha \in {\mathbf{N}_o}^3, |\alpha| \le m\ \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3\ \Big|\ |\vec{x}^\alpha| \le 1 + |\vec{x}|^m; \tag{14.6.33}$$

$$\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3\ \Big|\ 1 + |\vec{x}|^m \le 1 + \left(\sum_{\nu=1}^{3} |x_\nu|\right)^m = 1 + \sum_{\substack{\alpha \in {\mathbf{N}_o}^3, \\ |\alpha|=m}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |\vec{x}^\alpha|; \tag{14.6.34}$$

$$\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3 \;\Big|\; |jf(\vec{x})| \le \sum_{k=0}^{3} |jf_k(\vec{x})|. \qquad (14.6.35)$$

В самом деле, если существует интеграл (14.6.32), то при любом $\alpha \in {\mathbf{N}_o}^3$, $|\alpha| \le m$ и любом $k \in \overline{0,3}$ верно

$$|\vec{x}^{\alpha} jf_k(\vec{x})| \le |\vec{x}^{\alpha}||jf(\vec{x})| \le (1 + |\vec{x}|^m)|jf(\vec{x})|$$

и потому

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} |\vec{x}^{\alpha} jf_k(\vec{x}) \;\Big|\; dx_1 dx_2 dx_3 \le \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} (1 + |\vec{x}|^m)|jf(\vec{x})|\, dx_1 dx_2 dx_3 < \infty. \qquad (14.6.36)$$

Наоборот, если при любом $\alpha \in {\mathbf{N}_o}^3$, $|\alpha| \le m$ и любом $k \in \overline{0,3}$ существуют интегралы

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} |\vec{x}^{\alpha} jf_k(\vec{x})|\, dx_1 dx_2 dx_3 < \infty, \qquad (14.6.37)$$

то в силу (14.6.35) и

$$\forall \alpha \in {\mathbf{N}_o}^3, |\alpha| \le m \;\Big|\; \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} |\vec{x}^{\alpha}||jf(\vec{x})|\, dx_1 dx_2 dx_3 < \infty,$$

Тогда в силу (14.6.34) верно и (14.6.32). $\diamondsuit$

Нам удобно также будет пользоваться следующими общими утверждениями, аналогичными утверждениям 14.6.1 и 14.6.2 с тем же доказательством.

Утверждение 14.6.3 *Пусть измеримое отображение $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ имеет все моменты до порядка $m \in \mathbf{N}_o$, тогда образ Фурье $\hat{f} \in \bar{C}^{(m)}_{k,0}(\mathbf{R}^n)$.*

Утверждение 14.6.4 *Измеримое отображение $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ имеет все моменты до порядка $m \in \mathbf{N}_o$ иф*

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(\vec{x})|(1 + |x|^m)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n < \infty. \qquad (14.6.38)$$

§14.7 Условия конечности массы и энергии световой частицы

14.7.1 Формулы для массы и энергии световой частицы.

В этом параграфе рассматривается натуральная световая частица. Для вектора скорости $\vec{l}$ верно $|\vec{l}| = 1$. Ось η_3 выбираем по вектору $\vec{l}$.

Согласно формуле (13.4.27) для натуральной световой частицы массы равна

$$m = \frac{1}{2(2\pi)^3} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\langle \widehat{jf}(\vec{\eta}), \Theta \widehat{jf}(-\vec{\eta}) \rangle}{\eta_1^2 + \eta_2^2}\, d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \qquad (14.7.1)$$

где интеграл существует в смысле Лебега, т.е. подинтегральная функция абсолютно суммируема.

Согласно формулам (14.4.9),(14.4.12),(13.4.27) физическая энергия натуральной световой частицы равна

$$\mathcal{E}s = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left(\frac{\widehat{jf}_0(\vec{\eta})\widehat{jf}_0(-\vec{\eta}}{\eta_1^2+\eta_2^2} - \left(\frac{1}{2}+\frac{\eta_3^2}{\eta_1^2+\eta_2^2}\right) \frac{\langle \widehat{jf}(\vec{\eta}), \Theta\widehat{jf}(-\vec{\eta})\rangle}{(\eta_1^2+\eta_2^2)} \right) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \tag{14.7.2}$$

где интеграл существует в смысле Лебега, т.е. подинтегральная функция абсолютно суммируема.

Функция $\eta_1^2+\eta_2^2$ обращается в нуль на прямой $L(\vec{l}) \equiv \{\vec{\eta} \in \mathbf{R}^3 \mid \vec{\eta} \parallel \vec{l}\}$, поэтому существование интегралов (14.7.1) и (14.7.2) влечет некоторые дополнительные условия на поведение функций

$$g(\vec{\eta}) \equiv \widehat{jf}_0(\vec{\eta})\widehat{jf}_0(-\vec{\eta}), \tag{14.7.3}$$

$$f(\vec{\eta}) \equiv \langle \widehat{jf}(\vec{\eta}), \theta\widehat{jf}(-\vec{\eta})\rangle \tag{14.7.4}$$

на прямой $L(\vec{l})$ и, в частности, в точке 0. Отсюда, согласно § 13.11 мы получим дополнительные ограничения на величины характеристик частицы: заряда, дипольного момента, спина.

Далее в этом параграфе, чтобы согласно п. 14.6.4 гарантировать принадлежность $\widehat{jf} \in \bar{C}^{(k)}_{4,0}(\mathbf{R}^3)$, мы введём следующее подпространство $Mom(k) \subset Uf$, $k \in \mathbf{N}_o$. А именно, лоренцева функция состояния $uf \in Mom(k)$, если $uf \in W^{(1)}_{2,4}(\mathbf{R}^3) \bigcap \bar{C}^{(2)}_{4,0}(\mathbf{R}^3)$ и для функции тока $jf(\vec{x}) = \Theta\Box(\vec{l})uf(\vec{x})$ существует интеграл

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} (1+|\vec{x}|^k)|jf(\vec{x})|\, dx_1 dx_2 dx_3 < \infty. \tag{14.7.5}$$

Согласно утверждению 14.6.1 принадлежность $uf \in Mom(k)$ гарантирует принадлежность $\widehat{jf} \in \bar{C}^{(k)}_{4,0}(\mathbf{R}^3)$.

Всюду далее в этом параграфе предполагается, что $uf \in Mom(0)$, если не введено более сильное ограничение.

14.7.2 Условия конечности массы и энергии световой скалярной частицы.

Для световой скалярной частицы $\widehat{jf}(\vec{\eta}) = l\widehat{jf}_0(\vec{\eta})$, поэтому функция $f(\vec{\eta})$ вида (14.7.4) есть

$$f(\vec{\eta}) = \widehat{jf}_0(\vec{\eta})\widehat{jf}_0(-\vec{\eta})\langle l, \Theta l\rangle = 0. \tag{14.7.6}$$

По формуле (14.7.1) получаем, что масса $m = 0$.

Вывод 14.7.1 *Для любой световой скалярной частицы масса равна нулю.*

Итак, для световой скалярной частицы масса условие конечности массы выполняется автоматически и не даёт каких-либо ограничений на характеристики частицы.

Условие конечности физической энергии, т.е. конечности интеграла (14.7.2) принимает в данном случае вид существования интеграла

$$\mathcal{E}s = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\widehat{jf}_0(\vec{\eta})\widehat{jf}_0(-\vec{\eta})}{\eta_1^2+\eta_2^2}\, d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3. \tag{14.7.7}$$

Согласно лемме 14.6.3 конечность интеграла (14.7.7) влечет

$$\forall \vec{\eta} \in L(\vec{l}) \;\Big|\; \widehat{jf}_0(\vec{\eta})\widehat{jf}_0(-\vec{\eta}) = |\widehat{jf}_0(\vec{\eta})|^2 = 0 \tag{14.7.8}$$

(для действительнозначной функции $jf_0(\vec{x})$ число $\widehat{jf}_0(-\vec{\eta})$, есть комплексно сопряженное к $\widehat{jf}_0(\vec{\eta})$), т.е. влечет

$$\widehat{jsf}_0\Big|_{L(\vec{l})} = 0. \tag{14.7.9}$$

В частности, при $\vec{\eta} = 0$ получаем заряд $e = \widehat{jf}_0(0) = 0$.

Предположим дополнительно, что $uf \in Mom(1)$, тогда $\widehat{jf} \in \bar{C}^{(1)}_{4,0}(\mathbf{R}^3)$ и $\widehat{jf}_0 \in \bar{C}^{(1)}_0(\mathbf{R}^3)$. Учитывая, что $e = 0$, согласно п.13.11.5 имеем представление

$$\widehat{jsf}_0(\vec{\eta}) = i\langle \vec{d}, \vec{\eta}\rangle + o(|\vec{\eta}|) \tag{14.7.10}$$

при $|\vec{\eta}| \to 0$. Из (14.7.9) и (14.7.10) по лемме 14.5.2 следует, что

$$\forall \vec{\eta} \in L(\vec{l}) \;\Big|\; \langle \vec{d}, \vec{\eta}\rangle = 0,$$

что эквивалентно условию

$$\langle \vec{d}, \vec{l}\rangle = 0. \tag{14.7.11}$$

Вывод 14.7.2 *Для световой скалярной частицы с $uf \in Mom(1)$ условие конечности энергии влечет обращение в нуль заряда и ортогональности дипольного момента вектору скорости.*

14.7.3 Условие конечности массы световой частицы.

Рассмотрим условие конечности массы световой частицы в общем случае. Конечность интеграла (14.7.1) по лемме 14.6.3 влечет выполнение условия

$$f\Big|_{L(\vec{l})} = 0 \tag{14.7.12}$$

Потребуем дополнительно, чтобы $uf \in Mom(2)$, тогда $\widehat{jf} \in \bar{C}^{(2)}_{4,0}(\mathbf{R}^3)$ и $\widehat{jsf} \in \bar{C}^{(2)}_{4,0}(\mathbf{R}^3)$ и справедливо разложение функции $\widehat{jsf}(\vec{\eta})$ в нуле по формуле Тейлора вида (13.11.75),(13.11.76). Подставляя формулы (13.11.75),(13.11.76) в формулу (13.2.69) получим следующее представление функции $f(\vec{\eta})$ в окрестности нуля

$$f(\vec{\eta}) = -(e + i\langle \vec{d}, \vec{\eta}\rangle)\langle \vec{l}, -i[\vec{S}, \vec{\eta}] - [F\vec{\eta}, \vec{\eta}]\rangle - (e - i\langle \vec{d}, \vec{\eta}\rangle)\langle \vec{l}, +i[\vec{S}, \vec{\eta}] - [F\vec{\eta}, \vec{\eta}]\rangle -$$

$$i^2(-1)\langle [\vec{S}, \vec{\eta}], [\vec{S}, \vec{\eta}]\rangle + o(|\vec{\eta}|^2),$$

отсюда

$$f(\vec{\eta}) = 2e\langle \vec{l}, [F\vec{\eta}, \vec{\eta}]\rangle - 2\langle \vec{d}, \vec{\eta}\rangle\langle \vec{l}, [\vec{S}, \vec{\eta}]\rangle - \langle [\vec{S}, \vec{\eta}], [\vec{S}, \vec{\eta}]\rangle + o(|\vec{\eta}|^2). \tag{14.7.13}$$

По лемме 14.5.2 из (14.7.12) и (14.7.13) следует, что

$$2e\langle \vec{l}, [F\vec{l}, \vec{l}]\rangle - 2\langle \vec{d}, \vec{l}\rangle\langle \vec{l}, [\vec{S}, \vec{l}]\rangle - \langle [\vec{S}, \vec{l}], [\vec{S}, \vec{l}]\rangle = 0. \tag{14.7.14}$$

Но смешанное произведение трёх векторов, два из которых равны, есть нуль, поэтому (14.7.14) эквивалентно условию

$$[\vec{S}, \vec{l}] = 0, \tag{14.7.15}$$

т.е. коллинеарности векторов $\vec{S}$ и $\vec{l}$ $(\vec{S} \| \vec{l})$.

Вывод 14.7.3 *Для световой частицы с $uf \in Mom(2)$ условие конечности массы влечет коллинеарность спина $\vec{S}$ вектору скорости $\vec{l}$.*

Замечание 14.7.1 *Для нейтральной световой частицы с $uf \in Mom(1)$ условие конечности массы влечет $\vec{S} \| \vec{l}$.*

В самом деле, разложение в нуле функции $\widehat{jsf}(\vec{\eta})$ по формуле Тейлора первого порядка при $e = 0$ даёт разложение в нуле функции $f(\vec{\eta})$ с ошибкой $o(|\vec{\eta}|^2)$ в силу формулы (13.2.69).

14.7.4 Условие конечности энергии световой частицы.

Формулу (14.7.2) для энергии световой частицы запишем в виде

$$\mathcal{E}s = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{(g(\vec{\eta}) - \frac{1}{2}f(\vec{\eta}))(\eta_1^2 + \eta_2^2) - \eta_3^2 f(\vec{\eta})}{(\eta_1^2 + \eta_2^2)^2} \, d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3. \qquad (14.7.16)$$

Согласно лемме 14.6.4 существование интеграла (14.7.16) влечет

$$[(g(\vec{\eta}) - \frac{1}{2}f(\vec{\eta}))(\eta_1^2 + \eta_2^2) - \vec{\eta}_3^2 f(\vec{\eta})]\Big|_{L(\vec{l})} = 0, \qquad (14.7.17)$$

что эквивалентно условию

$$f\Big|_{L(\vec{l})} = 0. \qquad (14.7.18)$$

Потребуем далее в этом пункте дополнительно, чтобы $uf \in Mom(2)$. Тогда функции $\widehat{jsf}(\vec{\eta}), g(\vec{\eta}), f(\vec{\eta})$ дважды непрерывно дифференцируемы на $\mathbf{R}^3$. Применяем снова к интегралу (14.7.16) лемму 14.6.4 с $m = 2$ и получаем, что существование интеграла физической энергии (14.7.16) влечет для функции

$$(g(\vec{\eta}) - \frac{1}{2}f(\vec{\eta}))(\eta_1^2 + \eta_2^2) - \eta_3^2 f(\vec{\eta}) \qquad (14.7.19)$$

её обращение в нуль на прямой $L(\vec{l})$ вместе со всеми частными производными не выше второго порядка, что даёт условия:

$$f\Big|_{L(\vec{l})} = 0, \qquad (14.7.20)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\eta}}(\vec{\eta})]\Big|_{L(\vec{l})} = 0, \qquad (14.7.21)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta_1 \partial \eta_2}(\vec{\eta})\Big|_{L(\vec{l})} = 0, \qquad (14.7.22)$$

$$[2g(\vec{\eta}) - \eta_3^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta_1^2}(\vec{\eta})]\Big|_{L(\vec{l})} = 0, \qquad (14.7.23)$$

$$[2g(\vec{\eta}) - \eta_3^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta_2^2}(\vec{\eta})]\Big|_{L(\vec{l})} = 0. \qquad (14.7.24)$$

Из условия (14.7.23) при $\vec{\eta} = 0$ получаем $g(0) = e^2 = 0$, т.е. $e = 0$ и частица нейтральна. Из условия (14.7.20) согласно предыдущему пункту следует, что $\vec{S} \| \vec{l}$.

Согласно предыдущему пункту при $e = 0$ и $\vec{S} \| \vec{L}$ формула (14.7.13) даёт

$$f(\vec{\eta}) = -\langle [\vec{S}, \vec{\eta}], [\vec{S}, \vec{\eta}] \rangle + o(|\vec{\eta}|^2),$$

поэтому $\frac{\partial^2 f}{\partial \eta_1^2}(0) = -2|\vec{S}|^2$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial \eta_1^2}(\vec{\eta}) = -2|\vec{S}|^2 + o(1)$ при $|\vec{\eta}| \to 0$. В окрестности нуля получаем представление

$$2g(\vec{\eta}) - \eta_3^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta_1^2}(\vec{\eta}) = 2\langle \vec{d}, \vec{\eta} \rangle^2 + 2\eta_3^2 |\vec{S}|^2 + o(|\vec{\eta}|^2). \qquad (14.7.25)$$

Из (14.7.23) и (14.7.24) по лемме 14.5.2 получаем

$$\left(2\langle \vec{d}, \vec{\eta} \rangle^2 + 2\eta_3^2 |\vec{S}|^2\right)\Big|_{L(\vec{l})} = 0,$$

что эквивалентно условию

$$\langle \vec{d}, \vec{l} \rangle^2 + 2|\vec{S}|^2 = 0. \qquad (14.7.26)$$

Но (26) влечет $\vec{S} = 0$ и $\langle \vec{d}, \vec{l} \rangle = 0$.

Вывод 14.7.4 *Для световой частицы с $uf \in Mom(2)$ условие конечности энергии влечет обращение в нуль заряда и спина и ортогональности дипольного момента вектору скорости: $e = 0, \vec{S} = 0, \langle \vec{d}, \vec{l} \rangle = 0$.*

14.7.5 Аппроксимация световой частицы влавином. Власарм.

Рассмотрим световую частицу с $uf \in Mom(2)$ и конечной массой и энергией. Согласно выводу 14.7.4 в терминологии п. 13.5.6 мейн световой частицы тогда больше или равен 1. Если мейн равен 1, что эквивалентно условию $\vec{d} \neq 0$, то главк частицы имеет следующую трансформацию Фурье функции тока

$$\widehat{jf}(\vec{\eta}) = i\langle \vec{d}, \vec{\eta} \rangle l, \qquad (14.7.27)$$

где

$$\langle \vec{d}, \vec{l} \rangle = 0. \qquad (14.7.28)$$

Световой влавин вида (14.7.27,14.7.28) назовём *власармом.*

Определения власкайла, владипа, влаквазикипера, влакипера из п. 13.5.5 мы уточним теперь, включив в их определение дополнительное требование, чтобы эти влавины были *досветовыми.*

Итак, в случае $\vec{d} \neq 0$ главное взаимодействие световой частицы описывается власармом. Правило преобразования дипольного момента $\vec{d}$ при изменении состояния для власарма согласно лемме 13.11.3 имеет вид (13.11.88), а именно

$$\tilde{\vec{d}} = \sigma(R) R^{-1} \vec{d}, \qquad (14.7.29)$$

причём по лемме 3.7.3 условие $\langle \vec{d}, \vec{l} \rangle = 0$ эквивалентно условию $\langle \tilde{\vec{d}}, \tilde{\vec{l}} \rangle = 0$.

§14.8 Условия конечности массы и энергии сверхсветовой частицы

14.8.1 Формулы для массы и энергии натуральной сверхсветовой частицы.

Аналогично предыдущему параграфу рассмотрим случай сверхсветовой натуральной частицы. Величина вектора скорости $\vec{l}$ имеет в этом случае значение $|\vec{l}| > 1$. Направим ось η_3 по вектору $\vec{l}$ и положим $\gamma \equiv \sqrt{|\vec{l}|^2 - 1}$. Полином $\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta}) = |\vec{\eta}|^2 - \langle \vec{l}, \vec{\eta} \rangle^2$ запишется тогда в виде $\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta}) = \eta_1^2 + \eta_2^2 - \gamma^2 \eta_3^2$. Множество нулей полинома $\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta})$ есть конус

$$\mathrm{Con}\,(\vec{l}) \equiv \mathrm{Nul}\,(\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta})) = \{\vec{\eta} \in \mathbf{R}^3 \;\Big|\; \eta_1^2 + \eta_2^2 - \gamma^2 \eta_3^2 = 0\}.$$

Формула для массы натуральной сверхсветовой частицы (13.4.27) принимает вид

$$m = \frac{1}{2(2\pi)^3} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\left\langle \widehat{jf}(\vec{\eta}), \Theta \widehat{jf}(-\vec{\eta}) \right\rangle}{\eta_1^2 + \eta_2^2 - \gamma^2 \eta_3^2}\, d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \tag{14.8.1}$$

где интеграл существует в смысле Лебега, т.е. подинтегральная функция абсолютно суммируема.

Формула для физической энергии натуральной сверхсветовой частицы согласно (14.4.9),(14.4.12),(13.4.27) принимает вид

$$\mathcal{E}s = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left[\frac{\widehat{jf}_0(\vec{\eta}) \widehat{jf}_0(-\vec{\eta})}{\eta_1^2 + \eta_2^2 - \gamma^2 \eta_3^2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\eta_3^2 (1 + \gamma^2)}{\eta_1^2 + \eta_2^2 - \gamma^2 \eta_3^2} \right) \frac{\left\langle \widehat{jf}(\vec{\eta}), \Theta \widehat{jf}(-\vec{\eta}) \right\rangle}{\eta_1^2 + \eta_2^2 - \gamma^2 \eta_3^2} \right] d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \tag{14.8.2}$$

где интеграл существует в случае Лебега, т.е. подинтегральная функция абсолютно суммируема. Мы используем те же функции $g(\vec{\eta}), f(\vec{\eta})$, что и в формулах (14.8.3),(14.7.4) предыдущего параграфа.

Так как функция $\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta})$, стоящая в знаменателе подинтегральных выражений в (14.8.1),(14.8.2), обращается в нуль на конусе $\mathrm{Con}\,(\vec{l})$, то существование интегралов (14.8.1) и (14.8.2) накладывает дополнительные ограничения на поведение функций $g(\vec{\eta})$ и $f(\vec{\eta})$ на конусе $\mathrm{Con}\,(\vec{l})$ и, в частности, в точке 0. Согласно § 13.11 отсюда мы получаем дополнительные ограничения на характеристики частицы: заряд, дипольный момент, спин, квадр, квин.

Далее в этом параграфе в обозначениях п. 14.7.1 предполагается, что $uf \in Mom(0)$.

14.8.2 Об одном соотношении на поверхности конуса.

Пусть $s \in \mathbf{R}$, $\vec{b} \in \mathbf{R}^3$.

Утверждение 14.8.1 *Пусть* $\vec{\eta} \in \mathrm{Con}\,(\vec{l})$ *и выполнено*

$$(|\vec{l}|^2 - 1)s^2 + 2s\langle \vec{l}, [\vec{b}, \vec{\eta}] \rangle + [\vec{b}, \vec{\eta}]^2 = 0, \tag{14.8.3}$$

тогда

$$\langle \vec{b}, [\vec{\eta}, [\vec{l}, \vec{\eta}]] \rangle = 0, \tag{14.8.4}$$

$$(|\vec{l}|^2 - 1)s^2 + \langle \vec{l}, [\vec{b}, \vec{\eta}] \rangle = 0. \tag{14.8.5}$$

Доказательство. Так как квадратное уравнение (14.8.3) относительно s имеет по условию действительное решение, то его дискриминант

$$4\left(\langle\vec{l},[\vec{b},\vec{\eta}]\rangle^2-(|\vec{l}|^2-1)[\vec{b},\vec{\eta}]^2\right)\geq 0, \tag{14.8.6}$$

что эквивалентно

$$[\vec{b},\vec{\eta}]^2\geq \vec{l}^2[\vec{b},\vec{\eta}]^2-\langle\vec{l},[\vec{b},\vec{\eta}]\rangle^2. \tag{14.8.7}$$

Если φ-угол между векторами $\vec{l}$ и $[\vec{b},\vec{\eta}]$, то последнее неравенство эквивалентно

$$1\geq|\vec{l}|^2\sin^2\varphi$$

или

$$\sin\varphi\leq\frac{1}{|\vec{l}|}. \tag{14.8.8}$$

В случае $\vec{\eta}=0$ или $\vec{b}=0$ утверждение 14.8.1 тривиально верно, поэтому далее рассматриваем случай $\vec{\eta}\neq 0$ и $\vec{b}\neq 0$. Вектор $[\vec{b},\vec{\eta}]$ ортогонален вектору $\vec{\eta}$ и поэтому угол φ между векторами $\vec{l}$ и $[\vec{b},\vec{\eta}]$ может принимать значения

$$\frac{\pi}{2}-\psi\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}+\psi, \tag{14.8.9}$$

где $\psi=\operatorname{arctg}\gamma=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{|\vec{l}|^2-1}\right)=\arccos\left(\frac{1}{|\vec{l}|}\right)$. Поэтому

$$\frac{1}{|\vec{l}|}=\cos\psi\leq\sin\varphi. \tag{14.8.10}$$

Из соотношений (14.8.8) и (14.8.10) получаем, что

$$\sin\varphi=\frac{1}{|\vec{l}|}. \tag{14.8.11}$$

Но это означает, что вектор $[\vec{b},\vec{\eta}]$ лежит в плоскости векторов $\vec{\eta}$ и $\vec{l}$, что эквивалентно обращению в нуль смешанного произведения векторов $[\vec{b},\vec{\eta}]$, $\vec{\eta}$ и $\vec{l}$, т.е.

$$\langle[\vec{b},\vec{\eta}],[\vec{l},\vec{\eta}]\rangle=0. \tag{14.8.12}$$

Соотношение (14.8.12) эквивалентно соотношению (14.8.4).

В силу (14.8.11) в соотношении (14.8.8) имеет место равенство, тогда и в эквивалентных соотношениях (14.8.7) и (14.8.6) имеет место равенство. Итак, дискриминант квадратного уравнения (14.8.3) относительно s равен нулю и уравнение имеет единственный корень

$$s=-\frac{\langle\vec{l},[\vec{b},\vec{\eta}]\rangle}{(|\vec{l}|^2-1)}. \tag{14.8.13}$$

Равенство (14.8.13) эквивалентно равенству (14.8.5). ♢

14.8.3 Условие конечности массы.

Если масса конечна, т.е. существует интеграл Лебега (14.8.1), то по лемме 14.6.5 верно

$$\left\langle \widehat{jf}(\vec{\eta}), \Theta\widehat{jf}(-\vec{\eta}) \right\rangle \Big|_{\mathrm{Con}\,(\vec{l})} = 0. \tag{14.8.14}$$

Тогда $\langle \widehat{jf}(0), \Theta\widehat{jf}(0) \rangle = \widehat{jf}_0^2(0)\langle l, \Theta l \rangle = e^2(1-|\vec{l}|^2) = 0$, и заряд частицы $e = 0$.

Введём дополнительное условие $uf \in Mom(1)$.

В силу предыдущего $e = 0$ и согласно п. 13.11.5 имеем при $|\vec{\eta}| \to 0$ представление

$$\widehat{jsf}_0(\vec{\eta}) = i\langle \vec{d}, \vec{\eta} \rangle + o(|\vec{\eta}|),$$

$$\widehat{\vec{jsf}}(\vec{\eta}) = i[\vec{S}, \vec{\eta}] + o(|\vec{\eta}|).$$

Подставляя эти формулы в формулу (13.2.69), получаем

$$f(\vec{\eta}) = i^2(-1)\left[(1-|\vec{l}|^2)\langle \vec{d}, \vec{\eta} \rangle^2 - 2\langle \vec{d}, \vec{\eta} \rangle \langle \vec{l}, [\vec{S}, \vec{\eta}] \rangle - \langle [\vec{S}, \vec{\eta}], [\vec{S}, \vec{\eta}] \rangle\right] + o(|\vec{\eta}|^2) \tag{14.8.15}$$

при $|\vec{\eta}| \to 0$. Из соотношений (14.8.14) и (14.8.15) по лемме 14.5.2 следует, что

$$\forall \vec{\eta} \in \mathrm{Con}\,(\vec{l}) \;\Big|\; (|\vec{l}|^2 - 1)\langle \vec{d}, \vec{\eta} \rangle^2 + 2\langle \vec{d}, \vec{\eta} \rangle \langle \vec{l}, [\vec{S}, \vec{\eta}] \rangle + \langle [\vec{S}, \vec{\eta}], [\vec{S}, \vec{\eta}] \rangle = 0. \tag{14.8.16}$$

По утверждению 14.8.1 из соотношения (14.8.16) следует:

$$\forall \vec{\eta} \in \mathrm{Con}\,(\vec{l}) \;\Big|\; \langle \vec{S}, [\vec{\eta}, [\vec{l}, \vec{\eta}]] \rangle = 0, \tag{14.8.17}$$

$$\forall \vec{\eta} \in \mathrm{Con}\,(\vec{l}) \;\Big|\; (|\vec{l}|^2 - 1)\langle \vec{d}, \vec{\eta} \rangle + \langle \vec{l}, [\vec{S}, \vec{\eta}] \rangle = 0. \tag{14.8.18}$$

Итак, квадратичный полином $p(\vec{\eta}) \equiv \langle \vec{S}, [\vec{\eta}, [\vec{l}, \vec{\eta}]] \rangle$ обращается в нуль на множестве $\mathrm{Con}\,(\vec{l}) = \mathrm{Nul}\,(\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta}))$, поэтому он делится на лаковый полином $\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta})$ по теореме 14.5.2 и существует число $\lambda \in \mathbf{R}$, что

$$\langle \vec{S}, [\vec{\eta}, [\vec{l}, \vec{\eta}]] \rangle = \lambda(|\vec{\eta}|^2 - \langle \vec{l}, \vec{\eta} \rangle^2), \tag{14.8.19}$$

или эквивалентно

$$\langle \vec{S}, \vec{l} \rangle |\vec{\eta}|^2 - \langle \vec{S}, \vec{\eta} \rangle \langle \vec{l}, \vec{\eta} \rangle = \lambda(|\vec{\eta}|^2 - \langle \vec{l}, \vec{\eta} \rangle^2). \tag{14.8.20}$$

Из соотношения (14.8.20) при $\eta_3 = 0$ получаем $\lambda = \langle \vec{S}, \vec{l} \rangle$ и равенство (14.8.20) принимает вид

$$\langle \vec{l}, \vec{\eta} \rangle \Big(\langle \vec{S}, \vec{\eta} \rangle - \langle \vec{S}, \vec{l} \rangle \langle \vec{l}, \vec{\eta} \rangle\Big) = 0.$$

Откуда следует

$$\vec{S} = \langle \vec{S}, \vec{l} \rangle \vec{l}. \tag{14.8.21}$$

Умножая последнее равенство скалярно на $\vec{l}$, получим

$$\langle \vec{S}, \vec{l} \rangle (1 - |\vec{l}|^2) = 0,$$

т.е.

$$\langle \vec{S}, \vec{l} \rangle = 0, \tag{14.8.22}$$

что в силу (14.8.21) влечет $\vec{S} = 0$.

При $\vec{S}=0$ соотношение (14.8.18) по теореме 14.5.2 означает делимость полинома первой степени $\langle \vec{d},\vec{\eta}\rangle$ на полином второй степени $\operatorname{Pd}(\vec{l},\vec{\eta})$, что возможно лишь при $\vec{d}=0$.

Наложим теперь следующее дополнительное ограничение $uf\in Mom(2)$. Учитывая предыдущее, представления (13.11.75),(13.11.76) принимают вид

$$\widehat{jsf}_0(\vec{\eta}) = -\langle\, Qv\,\vec{\eta},\vec{\eta}\rangle + o(|\vec{\eta}|^2), \tag{14.8.23}$$

$$\widehat{\overline{jsf}}(\vec{\eta}) = -[F\vec{\eta},\vec{\eta}] + o(|\vec{\eta}|^2). \tag{14.8.24}$$

Подставляя эти выражения в формулу (13.2.69), получим что функция

$$f(\vec{\eta}) = -\Big[(|\vec{l}|^2-1)\langle\, Qv\,\vec{\eta},\vec{\eta}\rangle^2 + 2\langle\, Qv\,\vec{\eta},\vec{\eta}\rangle\langle\vec{l},[F\vec{\eta},\vec{\eta}]\rangle + \langle[F\vec{\eta},\vec{\eta}],[F\vec{\eta},\vec{\eta}]\rangle\Big] + o(|\vec{\eta}|^4) \tag{14.8.25}$$

при $|\vec{\eta}|\to 0$. Из (14.8.14) и (14.8.25) по лемме 14.5.2 следует, что

$$\forall\vec{\eta}\in\operatorname{Con}(\vec{l})\;\Big|\;(|\vec{l}|^2-1)\langle\, Qv\,\vec{\eta},\vec{\eta}\rangle^2+2\langle\, Qv\,\vec{\eta},\vec{\eta}\rangle\langle\vec{l},[F\vec{\eta},\vec{\eta}]\rangle+\langle[F\vec{\eta},\vec{\eta}],[F\vec{\eta},\vec{\eta}]\rangle = 0. \tag{14.8.26}$$

Из соотношения (14.8.26) по утверждению 14.8.1 следует

$$\forall\vec{\eta}\in\operatorname{Con}(\vec{l})\;\Big|\;\langle F\vec{\eta},[\vec{\eta},[\vec{l},\vec{\eta}]]\rangle = 0, \tag{14.8.27}$$

$$\forall\vec{\eta}\in\operatorname{Con}(\vec{l})\;\Big|\;(|\vec{l}|^2-1)\langle\, Qv\,\vec{\eta},\vec{\eta}\rangle + \langle\vec{l},[F\vec{\eta},\vec{\eta}]\rangle = 0. \tag{14.8.28}$$

Из соотношений (14.8.27) и (14.8.28) по теореме 14.5.2 следует, что существует постоянный вектор $\vec{b}\in\mathbf{R}^3$ и постоянное число $\lambda\in\mathbf{R}$, что при любом $\vec{\eta}\in\mathbf{R}^3$ верно

$$\langle F\vec{\eta},[\vec{\eta},[\vec{l},\vec{\eta}]]\rangle = \langle\vec{b},\vec{\eta}\rangle\operatorname{Pd}(\vec{l},\vec{\eta}), \tag{14.8.29}$$

$$(|\vec{l}|^2-1)\langle\, Qv\,\vec{\eta},\vec{\eta}\rangle + \langle\vec{l},[F\vec{\eta},\vec{\eta}]\rangle = \lambda\operatorname{Pd}(\vec{l},\vec{\eta}). \tag{14.8.30}$$

Но $[\vec{\eta},[\vec{l},\vec{\eta}]] = \vec{l}|\vec{\eta}|^2-\vec{\eta}\langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle$, поэтому из (14.8.29) получаем

$$\langle F\vec{\eta},\vec{l}\rangle|\vec{\eta}|^2 - \langle F\vec{\eta},\vec{\eta}\rangle\langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle = \langle\vec{b},\vec{\eta}\rangle(|\vec{\eta}|^2\langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle^2)$$

или

$$\langle F^{\top}\vec{l}-\vec{b},\vec{\eta}\rangle|\vec{\eta}|^2 = \langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle(\langle F\vec{\eta},\vec{\eta}\rangle\langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle\langle\vec{b},\vec{\eta}\rangle). \tag{14.8.31}$$

Чтобы левая часть равенства (14.8.31) делилась на лаковый полином $\langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle$, необходимо, чтобы существовало число $c\in\mathbf{R}$, что

$$F^{tau}\vec{l}-\vec{b} = c\vec{l}. \tag{14.8.32}$$

Тогда соотношение (14.8.31) переходит в соотношение

$$c|\vec{\eta}|^2 = \langle F\vec{\eta},\vec{\eta}\rangle\langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle\langle\vec{b},\vec{\eta}\rangle$$

или

$$\langle F\vec{\eta},\vec{\eta}\rangle = c|\vec{\eta}|^2 + \langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle\langle\vec{b},\vec{\eta}\rangle. \tag{14.8.33}$$

При $\vec{\eta}=\vec{b}$ из соотношения (14.8.33), учитывая (14.8.32), получаем

$$\langle\vec{l},c\vec{l}+\vec{b}\rangle = c|\vec{l}|^2 + |\vec{l}|^2\langle\vec{b},\vec{l}\rangle,$$

откуда

$$\langle\vec{b},\vec{l}\rangle = 0. \qquad (14.8.34)$$

Равенство квадратичных форм (14.8.33) определяет матрицу $F \in M(3)$ с точностью до кососимметрической матрицы, т.е. существует вектор $\vec{h} \in \mathbf{R}^3$, что

$$F = cE + \vec{b}\vec{l}^{\top} + \mathrm{Sw}\,(\vec{h}). \qquad (14.8.35)$$

В силу выбора осей координат $\vec{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{pmatrix}$, тогда соотношение (14.8.34) влечет

$$\langle\vec{b}\vec{l}^{\top}, E\rangle = b^3 l^3 = \langle\vec{b},\vec{l}\rangle = 0$$

и поэтому

$$\langle F, E\rangle = 3c.$$

По определению матрицы квина F должно быть $\langle F, E\rangle = 0$, итак, $c = 0$ и получаем представление

$$F = \vec{b}\vec{l}^{\top} + \mathrm{Sw}\,(\vec{h}). \qquad (14.8.36)$$

Подставляя (14.8.36) в (14.8.32), получаем в силу (14.8.34)

$$\vec{b} = F^{\top}\vec{l} = \vec{l}\vec{b}^{\top}\vec{l} - \mathrm{Sw}\,(\vec{h})\vec{l} = \vec{l}\langle\vec{b},\vec{l}\rangle - [\vec{h},\vec{l}] = [\vec{l},\vec{h}]. \qquad (14.8.37)$$

Мы пришли к следующему выражению для матрицы квина

$$F = [\vec{l},\vec{h}]\vec{l}^{\top} + \mathrm{Sw}\,(\vec{h}),\ \ \vec{h} \in \mathbf{R}^3. \qquad (14.8.38)$$

Отсюда

$$F\vec{\eta} = [\vec{l},\vec{h}]\langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle + [\vec{h},\vec{\eta}] = [\vec{h},\vec{\eta} - \vec{l}\langle\vec{l}\vec{\eta}\rangle] = \mathrm{Sw}\,(\vec{h})\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\eta},$$

т.е. верно представление матрицы Е квина

$$F = \mathrm{Sw}\,(\vec{h})\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l}), \vec{h} \in \mathbf{R}^3. \qquad (14.8.39)$$

Из представления (14.8.39) следует, что

$$[F\vec{\eta},\vec{\eta}] = \Big[[\vec{h},\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\eta}],\vec{\eta}\Big] = -\vec{h}\langle\vec{\eta},\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\eta\rangle + \mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\eta}\langle\vec{h},\vec{\eta}\rangle = -\vec{h}\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l},\vec{\eta}) + \langle\vec{h},\vec{\eta}\rangle\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\eta} \qquad (14.8.40)$$

и далее

$$\langle\vec{l},[F\vec{\eta},\vec{\eta}]\rangle = -\langle\vec{l},\vec{h}\rangle\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l},\vec{\eta}) - (|\vec{l}|^2 - 1)\langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle\langle\vec{h},\vec{\eta}\rangle. \qquad (14.8.41)$$

Из равенства (14.8.30) теперь мы находим квадратичную формулу

$$\langle\ Qv\,\vec{\eta},\vec{\eta}\rangle = \frac{\lambda + \langle\vec{l},\vec{h}\rangle}{|\vec{l}|^2 - 1}\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l},\vec{\eta}) + \langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle\langle\vec{h},\vec{\eta}\rangle. \qquad (14.8.42)$$

Введём число $r \in \mathbf{R}$ вида

$$r = \frac{\lambda + \langle\vec{l},\vec{h}\rangle}{|\vec{l}|^2 - 1}. \qquad (14.8.43)$$

Тогда из (42) следует, что матрица квадра равна

$$Qv = \frac{1}{2}(\vec{l}\vec{h}^{\top} + \vec{h}\vec{l}^{\top}) + r\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l}). \qquad (14.8.44)$$

Вывод 14.8.1 *Для натуральной сверхсветовой частицы конечной массы: 1)если* $uf \in Mom(0)$, *то заряд* $e = 0$; *2)если* $uf \in Mom(1)$, *то кроме того дипольный момент* $\vec{d} = 0$ *и спин* $\vec{S} = 0$; *3)если* $uf \in Mom(2)$, *то кроме того существуют число* $r \in \mathbf{R}$ *и вектор* $\vec{h} \in \mathbf{R}^3$, *что*

$$F = \mathrm{Sw}\,(\vec{h})\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l}),$$

$$Qv = \frac{1}{2}(\vec{l}\vec{h}^\top + \vec{h}\vec{l}^\top) + r\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l}).$$

14.8.4 Условие конечности энергии.

Запишем интеграл физической энергии (14.8.2) в виде

$$\mathcal{E}s = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{p(\vec{\eta})}{\mathrm{Pd}^{\,2}(\vec{l},\vec{\eta})} d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \qquad (14.8.45)$$

где функция

$$p(\vec{\eta}) \equiv \left(g(\vec{\eta}) - \frac{1}{2}f(\vec{\eta})\right)\mathrm{Pd}\,(\vec{l},\vec{\eta}) - \eta_3^2(1+\gamma^2)f(\vec{\eta}). \qquad (14.8.46)$$

В силу условия $uf \in Mom(0)$ функция $p \in C(\mathbf{R}^3)$ и существование интеграла (14.8.45) влечет по лемме 14.6.5 выполнение соотношения

$$p\Big|_{\mathrm{Con}\,(\vec{l})} = 0, \qquad (14.8.47)$$

что эквивалентно соотношению

$$f\Big|_{\mathrm{Con}\,(\vec{l})} = 0, \qquad (14.8.48)$$

Все рассуждения предыдущего пункта мы проводили, исходя из условия (14.8.48), поэтому все утверждения вывода 14.8.1 верны и при условии конечности энергии вместо условия конечности массы.

Далее в этом пункте вводим условие $uf \in Mom(2)$. Тогда $p \in C^{(2)}(\mathbf{R}^3)$ и по лемме 14.6.6 из существования интеграла (14.8.45) вытекают соотношения (14.8.47) и

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{\eta}}(\vec{\eta})\Big|_{\mathrm{Con}\,(\vec{l})} = 0. \qquad (14.8.49)$$

Согласно предыдущему пункту из условий $uf \in Mom(2)$ и (14.8.48) следует согласно формулам (13.11.75, 13.11.76) представление

$$\widehat{usf}_0(\vec{\eta}) = -\langle\, Qv\,\vec{\eta},\vec{\eta}\rangle + o(|\vec{\eta}|^2), \qquad (14.8.50)$$

$$\widehat{\vec{jsf}}(\vec{\eta}) = -[F\vec{\eta},\vec{\eta}] + o(|\vec{\eta}|^2), \qquad (14.8.51)$$

где выражения $\langle\, Qv\,\vec{\eta},\vec{\eta}\rangle$ и $[F\vec{\eta},\vec{\eta}]$ задаются формулами (14.8.42) и (14.8.40). Подставив (14.8.50) и (14.8.51) в (13.2.69), получим

$$f(\vec{\eta}) = fm(\vec{\eta}) + o(|\vec{\eta}|^4), \qquad (14.8.52)$$

где

$$fm(\vec{\eta}) \equiv -[(|\vec{l}|^2 - 1)\langle\, Qv\,\vec{\eta},\vec{\eta}\rangle^2 + 2\langle\, Qv\,\vec{\eta},\vec{\eta}\rangle\langle\vec{l},[F\vec{\eta},\vec{\eta}]\rangle + [F\vec{\eta},\vec{\eta}]^2]. \qquad (14.8.53)$$

Аналогично

$$g(\vec{\eta}) = gm(\vec{\eta}) + o(|\vec{\eta}|^4), \qquad (14.8.54)$$

где

$$gm(\vec{\eta}) \equiv \langle\, Qv\,\vec{\eta}, \vec{\eta}\rangle^2. \qquad (14.8.55)$$

Подставляя (14.8.52) и (14.8.54) в (14.8.46), получим

$$p(\vec{g}) = pm(\vec{\eta}) + o(|\vec{\eta}|^6), \qquad (14.8.56)$$

где однородный полином шестой степени

$$pm(\vec{\eta}) \equiv \left(gm(\vec{\eta}) - \frac{1}{2}fm(\vec{\eta})\right) \mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta}) - \eta_3^2(1+\gamma^2)fm(\vec{\eta}). \qquad (14.8.57)$$

В силу принадлежности $\widehat{jsf} \in \bar{C}^{(2)}_{4,0}(\mathbf{R}^3)$ верно равенство при $|\vec{\eta}| \to 0$

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{\eta}}(\vec{\eta}) = \frac{\partial pm}{\partial \vec{\eta}}(\vec{\eta}) + o(|\vec{\eta}|)^5, \qquad (14.8.58)$$

Условие (14.8.47) и представление (14.8.56) по лемме 14.5.2 влекут

$$pm\Big|_{\mathrm{Con}\,(\vec{l})} = 0. \qquad (14.8.59)$$

Условие (14.8.49) и представление (14.8.58) по лемме 14.5.2 влекут

$$\frac{\partial pm}{\partial \vec{\eta}}(\vec{\eta})\Big|_{\mathrm{Con}\,(\vec{l})} = 0. \qquad (14.8.60)$$

По теореме 14.5.3 выполнение условий (14.8.59) и (14.8.60) эквивалентно делимости полинома $pm(\vec{\eta})$ на полином $\mathrm{Pd}^{\,2}(\vec{l}, \vec{\eta})$.

Проверим прямой подстановкой, что если верно (14.8.40) и (14.8.42), то полином $pm(\vec{\eta})$ делится на полином $\mathrm{Pd}^{\,2}(\vec{l}, \vec{\eta})$.Сначала подставим выражения (14.8.40),(14.8.41) и (14.8.42) в формулу (14.8.53)

$$fm(\vec{\eta}) = -\Big[(|\vec{l}|^2-1)\left(r\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta}) + \langle\vec{l}, \vec{\eta}\rangle\langle\vec{h}, \vec{\eta}\rangle\right)^2 - 2\left(r\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta}) + \langle\vec{l}, \vec{\eta}\rangle\langle\vec{h}, \vec{\eta}\rangle\right)\times \qquad (14.8.61)$$

$$\left(\langle\vec{l}, \vec{h}\rangle(\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta}) + (|\vec{l}|^2-1)\langle\vec{l}, \vec{\eta}\rangle\langle\vec{h}, \vec{\eta}\rangle\right) + \left(\langle\vec{h}, \vec{\eta}\rangle\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\eta} - \vec{h}\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta})\right)^2\Big] =$$

$$-\Big[\left(r^2(|\vec{l}|^2-1) - 2r\langle\vec{l}, \vec{h}\rangle + |\vec{h}|^2\right)\mathrm{Pd}^{\,2}(\vec{l}, \vec{\eta}) + \Big(2(|\vec{l}|^2-1)r\langle\vec{l}, \vec{\eta}\rangle\langle\vec{h}, \vec{\eta}\rangle -$$

$$2r(|\vec{l}|^2-1)\langle\vec{l}, \vec{\eta}\rangle\langle\vec{h}, \vec{\eta}\rangle - 2\langle\vec{l}, \vec{h}\rangle\langle\vec{l}, \vec{\eta}\rangle\langle\vec{h}, \vec{\eta}\rangle - 2\langle\vec{h}, \vec{\eta}\rangle\langle\vec{h}, \,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\eta}\rangle\Big)\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta}) +$$

$$\Big((|\vec{l}|^2-1)\langle\vec{l}, \vec{\eta}\rangle^2\langle\vec{h}, \vec{\eta}\rangle^2 - 2(|\vec{l}|^2-1)\langle\vec{l}, \vec{\eta}\rangle^2\langle\vec{h}, \vec{\eta}\rangle^2 + \langle\vec{h}, \vec{\eta}\rangle^2\left\langle\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\eta}, \,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\eta}\right\rangle\Big)\Big] =$$

$$-\Big[\left((r\vec{l}-\vec{h})^2 - r^2\right)\mathrm{Pd}^{\,2}(\vec{l}, \vec{\eta}) - 2\langle\vec{h}, \vec{\eta}\rangle^2\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta}) + \langle\vec{h}, \vec{\eta}\rangle^2\left(\left\langle\vec{\eta}, \left(E - 2\vec{l}\vec{l}^{\top} + |\vec{l}|^2\vec{l}\vec{l}^{\top}\right)\vec{\eta}\right\rangle -$$

$$(|\vec{l}|^2-1)\langle\vec{l}, \vec{h}\rangle^2\right)\Big] = \Big[\langle\vec{h}, \vec{\eta}\rangle^2 - \left((r\vec{l}-\vec{h})^2 - r^2\right)\mathrm{Pd}^{\,2}(\vec{l}, \vec{\eta})\Big]\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta}).$$

Подставляя (14.8.42) в (14.8.55), получаем

$$gm(\vec{\eta}) = r^2\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta}) + 2r\langle\vec{l}, \vec{\eta}\rangle\langle\vec{h}, \vec{\eta}\rangle\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta}) + \langle\vec{l}, \vec{\eta}\rangle^2\langle\vec{h}, \vec{\eta}\rangle^2. \qquad (14.8.62)$$

Подставляя (14.8.61),(14.8.62) в (14.8.57), получаем

$$pm(\vec{\eta}) = \Big[r^2 \operatorname{Pd}^2(\vec{l},\vec{\eta}) + 2r\langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle\langle\vec{h},\vec{\eta}\rangle \operatorname{Pd}(\vec{l},\vec{\eta}) + \langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle^2\langle\vec{h},\vec{\eta}\rangle^2 - \frac{1}{2}\langle\vec{h},\vec{\eta}\rangle^2 \operatorname{Pd}(\vec{l},\vec{\eta}) + \tag{14.8.63}$$
$$\frac{1}{2}\Big((r\vec{l}-\vec{h})^2 - r^2\Big) \operatorname{Pd}^2(\vec{l},\vec{\eta}) - \langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle^2 \Big(\langle\vec{h},\vec{\eta}\rangle^2 - \Big((r\vec{l}-\vec{h})^2 - r^2\Big) \operatorname{Pd}(\vec{l},\vec{\eta})\Big)\Big] \operatorname{Pd}(\vec{l},\vec{\eta}) =$$
$$\Big[\frac{1}{2}\Big((r\vec{l}-\vec{h})^2 + r^2\Big) \operatorname{Pd}(\vec{l},\vec{\eta}) + 2r\langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle\langle\vec{h},\vec{\eta}\rangle - \frac{1}{2}\langle\vec{h},\vec{\eta}\rangle^2 + \Big((r\vec{l}-\vec{h})^2 - r^2\Big)\langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle^2\Big] \times$$
$$\operatorname{Pd}^2(\vec{l},\vec{\eta}).$$

Итак, полином $pm(\vec{\eta})$ делится на полином $\operatorname{Pd}^2(\vec{l},\vec{\eta})$, если квадр и квин задаются формулами (14.8.44) и (14.8.39).

Условие конечности энергии влечет два условия: (14.8.48) и (14.8.49). Все выводы предыдущего пункта следует лишь из первого условия. Мы убедились, что второе условие не дало дополнительных ограничений на характеристики частицы в рамках проведенных рассуждений.

Вывод 14.8.2 *Для натуральной сверхсветовой частицы конечной физической энергии: 1) если* $uf \in Mom(0)$, *то заряд* $e = 0$*; 2)если* $uf \in Mom(1)$, *то кроме того дипольный момент* $\vec{d}$ *и спин* $\vec{S} = 0$*; 3)если* $uf \in Mom(2)$, *то кроме того существуют число* $r \in \mathbf{R}$ *и вектор* $\vec{h} \in \mathbf{R}^3$, *что*

$$F = \operatorname{Sw}(\vec{h}) \operatorname{Ks}(\vec{l}),$$

$$Qv = \frac{1}{2}(\vec{l}\vec{h}^\top + \vec{h}\vec{l}^\top) + r \operatorname{Ks}(\vec{l}).$$

14.8.5 Аппроксимация сверхсветовой частицы влавином.

Рассмотрим сверхсветовую натуральную частицу с $uf \in Mom(2)$ конечной массы и физической энергии. На основании предыдущих пунктов, тогда мейн частицы не менее 2 и если мейн равен 2, то главк частицы есть сверхсветовой влавин, имеющий следующую трансформацию Фурье функции псевдотока

$$\widehat{jsf}_0 = -r \operatorname{Pd}(\vec{l},\vec{\eta}) - \langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle\langle\vec{h},\vec{\eta}\rangle, \tag{14.8.64}$$

$$\widehat{\vec{jsf}}(\vec{\eta}) = \vec{h} \operatorname{Pd}(\vec{l},\vec{\eta}) - \langle\vec{h},\vec{\eta}\rangle \operatorname{Ks}(\vec{l})\vec{\eta}, \tag{14.8.65}$$

где $r \in \mathbf{R}$, $\vec{h} \in \mathbf{R}^3$. Все характеристики этого элементарного влавина второго порядка нулевые кроме квина, задаваемого формулой (14.8.39) и квадра, задаваемого формулой (14.8.44).

Разложим этот элементарный влавин на сумму скалярной и квазикиперной составляющих. Согласно лемме 13.11.5 у квазикиперной составляющей квин F тот же самый, а квадр Qv задаётся формулой

$$Qv = \frac{1}{2(1-|\vec{l}|^2}\Big(\operatorname{Sw}(\vec{l})F + (\operatorname{Sw}(\vec{l})F)^\top\Big). \tag{14.8.66}$$

Заметим, что при любом $\vec{h} \in \mathbf{R}^3$ и любом $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ верно

$$\operatorname{Sw}(\vec{l}) \operatorname{Sw}(\vec{h}) = \vec{h}\vec{l}^\top - \langle\vec{l},\vec{h}\rangle E. \tag{14.8.67}$$

В самом деле, для произвольного вектора $\vec{h} \in \mathbf{R}^3$

$$\mathrm{Sw}\,(\vec{l})\ \mathrm{Sw}\,(\vec{h})\vec{\eta} = [\vec{l}, [\vec{h}, \vec{\eta}]] = \vec{h}\langle \vec{l}, \vec{\eta}\rangle - \vec{\eta}\langle \vec{l}, \vec{h}\rangle = (\vec{h}\vec{l}^\top - \langle \vec{l}, \vec{h}\rangle E)\vec{\eta}.$$

Используя формулу (14.8.67), получаем

$$\mathrm{Sw}\,(\vec{l})F = \mathrm{Sw}\,(\vec{l})\ \mathrm{Sw}\,(\vec{h})\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l}) = \left(\vec{h}\vec{l}^\top - \langle \vec{l}, \vec{h}\rangle E\right)\left(E - \vec{l}\vec{l}^\top\right) = \tag{14.8.68}$$

$$\vec{h}\vec{l}^\top - \langle \vec{l}, \vec{h}\rangle E - \vec{h}\vec{l}^\top|\vec{l}|^2 + \langle \vec{l}, \vec{h}\rangle \vec{l}\vec{l}^\top = (1 - |\vec{l}|^2)\vec{h}\vec{l}^\top - \langle \vec{l}, \vec{h}\rangle\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l}).$$

Подставляем (14.8.68) в (14.8.66) и получаем

$$Qv = \frac{1}{2(1 - |\vec{l}|^2}\left((1 - |\vec{l}|^2)(\vec{h}\vec{l}^\top + \vec{l}\vec{h}^\top) - 2\langle \vec{l}, \vec{h}\rangle\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\right) = \frac{1}{2}(\vec{h}\vec{l}^\top + \vec{l}\vec{h}^\top) + \frac{\langle \vec{l}, \vec{h}\rangle}{|\vec{l}|^2 - 1}\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l}). \tag{14.8.69}$$

Итак, если

$$r = \frac{\langle \vec{l}, \vec{h}\rangle}{|\vec{l}|^2 - 1}, \tag{14.8.70}$$

то влавин квазикиперный.

Для сверхсветовой натуральной частицы конечной массы и энергии с $uf \in Mom(2)$, как мы убедились, квин F не является произвольной матрицей из множества $Mt(3)$, а выражается через свободный вектор $\vec{h} \in \mathbf{R}^3$ по формуле (14.8.39), квадр Qv также не является произвольной матрицей из множества $Ms(3)$, а выражается через свободный вектор $\vec{h} \in \mathbf{R}^3$ и число $r \in \mathbf{R}$ по формуле (14.8.44). Вектор $\vec{h}$ мы назовём *веквином* . Введём число

$$c \equiv r - \frac{\langle \vec{l}, \vec{h}\rangle}{|\vec{l}|^2 - 1}, \tag{14.8.71}$$

которое назовём *сквадром*. Введём два элементарных сверхсветовых влавина: скалярный — *вланюр* с $Qv = c\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})$ и квазикиперный — *вламар*, у которого квин F задаётся формулой (14.8.39), а квадр-формулой (14.8.69). Тогда главк сверхсветовой частицы однозначно разлагается на сумму вланюра и вламара. Вланюр имеет только 1 числовую характеристику — сквадр c, а вламар имеет 3 числовых характеристики, объединенные в вектор веквина.

Лемма 14.8.1 *При изменении состояния сквадр и веквин преобразуются по формулам*

$$\tilde{c} = \sigma(R)c, \tag{14.8.72}$$

$$\tilde{h} = \frac{1}{|\det R|}R^{-1}\vec{h}. \tag{14.8.73}$$

Доказательство. По формуле (13.11.89) при $F = 0$ получаем

$$\tilde{Qv} = \sigma(R)R^{-1}\ QvR^{-1\top} = \sigma(R)cr^{-1}\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})R^{-1\top}.$$

По формуле (14.73) $R^{-1}\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})R^{-1\top} = \mathrm{Ks}\,(\tilde{\vec{l}})$, поэтому получаем

$$\tilde{Qv} = \sigma(R)c\,\mathrm{Ks}\,(\tilde{\vec{l}}),$$

что доказывает (14.8.72).

По формуле (13.11.91) имеем

$$\tilde{F} = \frac{\sigma(R)}{(\det R)^2} R^\top F R^{-1\top} = \frac{\sigma(R)}{(\det R)^2} R^\top \operatorname{Sw}(\vec{h}) \operatorname{Ks}(\vec{l}) R^{-1\top} = \tag{14.8.74}$$

$$\frac{\sigma(R)}{(\det R)^2} R^\top \operatorname{Sw}(\vec{h}) R R^{-1} \operatorname{Ks}(\vec{l}) R^{-1\top} = \frac{\sigma(R)}{(\det R)^2} R^\top \operatorname{Sw}(\vec{h}) R \operatorname{Ks}(\tilde{\vec{l}}).$$

Для $\tilde{F}$ должно быть

$$\tilde{F} = \operatorname{Sw}(\tilde{\vec{h}}) \operatorname{Ks}(\tilde{\vec{l}}),$$

откуда получаем

$$\operatorname{Sw}(\tilde{\vec{h}}) = \frac{\sigma(R)}{(\det R)^2} R^\top \operatorname{Sw}(\vec{h}) R. \tag{14.8.75}$$

Для любого вектора $\vec{\eta} \in \mathbf{R}^3$ имеем

$$R^\top \operatorname{Sw}(\vec{h}) R\vec{\eta} = R^\top [\vec{\eta}, R\vec{\eta}] = R^\top [R R^{-1} \vec{h}, R\vec{\eta}]. \tag{14.8.76}$$

Согласно формуле (3.6.88) для векторного произведения преобразованных векторов

$$R^\top [R R^{-1} \vec{h}, R\vec{\eta}] = (\det R)[R^{-1}\vec{h}, \vec{\eta}] = (\det R) \operatorname{Sw}(R^{-1}\vec{h})\vec{\eta}. \tag{14.8.77}$$

Из (14.8.75-14.8.77) следует (14.8.73). $\diamondsuit$

Итак, мы видим, что сквадр сверхсветовой частицы преобразуется по тому же правилу, что и заряд досветовой частицы. Так как при изменении состояния самой частицы без перехода в другую частицу $\det R > 0$ и $\sigma(R) = 1$, то сквадр сверхсветовой частицы одинаков во всех её состояниях.

Глава 15

Техника обобщённых функций

§ 15.1. Замена переменных в обобщённой функции

§ 15.2. Повторные обобщённые функции

§ 15.3. Вспомогательные функции. Производные $\ln|x|$ как обобщённой функции.

§ 15.4. Трансформация Фурье однородной рациональной обобщённой функции

Для вычисления поля влавинов и потенциала взаимодействия влавинов мы нуждаемся в вычислении трансформаций Фурье однородных рациональных функций на $\mathbf{R}^3$. В данной главе мы получаем формулы для трансформаций Фурье локально суммируемых однородных рациональных функций (§ 15.4). Для получения этих формул требуется развитие техники действий с обобщёнными функциями, чему и посвящены §§ 15.1–15.2.

Основным новым инструментом, вводимым здесь, является замена переменных в обобщённых функциях. А именно, если $g : X \to Y$ диффеоморфизм класса $C^{(\infty)}$ открытых подмножеств X и Y пространства $\mathbf{R}^n$, $f(y)$ – обобщённая функция из $D'(Y)$, то обобщённая функция $f\left(g(x)\right)$ из $D'(X)$ определяется равенством

$$(f(y), \varphi(y)) = \left(f\left(g(x)\right), \left|\det \frac{\partial g(x)}{\partial x}\right| \varphi\left(g(x)\right)\right), \tag{15.0.1}$$

выполняемым для любой основной функции $\varphi(y) \in D(Y)$. Пользуясь заменой переменных в обобщённых функциях, мы определяем, в частности, обобщённые функции вида $\delta\left(g_1(x)\right)$, где $\delta(t) \in D'(\mathbf{R})$ — одномерная δ-функция, $g_1 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ отображение класса $C^{(\infty)}\left(\mathbf{R}^n\right)$ и их произведение в количестве не более n. Таким образом в § 15.1 мы вводим замену переменных и определяем произведение обобщённых функций.

§ 15.2 посвящен развитию аналога повторного интеграла для обобщённых функций. А именно, если $X_1 \subset \mathbf{R}^{m_1}$ и $X_2 \subset \mathbf{R}^{m_2}$ открытые подмножества, $X \equiv X_1 \times X_2, \quad X \subset \mathbf{R}^n, \quad n = m_1 + m_2$, то рассматривается выражение

$$\left(f(x_1, x_2), \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\right), \tag{15.0.2}$$

где $(x_1, x_2) \in D'(X_1 \times X_2)$ — обобщённая функция, а $\varphi_1(x_1) \in D(X_1)$ и $\varphi_2(x_2) \in D(X_2)$ — основные функции. Если мы зафиксируем в (15.0.2) элементы f и φ_2, то получим функционал или обобщённую функцию $\Pi^{**}(+, \varphi_2)f \in D'(X_1)$, а если зафиксируем элементы f и φ_1 и будем менять φ_2, то получим обобщённую функцию $\Pi^{**}(\varphi_1, +)f \in D'(X_2)$. Обобщенные функции $\Pi^{**}(+, \varphi_2)f$ и $\Pi^{**}(\varphi_1, +)f$ мы называем повторными и § 15.2 посвящен технике их вычисления.

§ 15.3 является технической подготовкой к § 15.4.

§15.1 Замена переменных в обобщённой функции

В этом параграфе мы определим общую замену переменных в обобщённой функции и распространим на обобщённые функции правило дифференцирования сложной функции. Мы определим также обобщённые функции $f \in D'(\mathbf{R}^n)$ вида $f = f_1(g_1(x))f_2(g_2(x))\dots f_m(g_m(x))$, где $f_i \in D'(\mathbf{R}^{k(i)})$, $i \in \overline{1,m}$, а $g_i : \mathbf{R}^{k(i)} \to \mathbf{R}^{k(i)}$, $i \in \overline{1,m}$ отображения класса $C^{(\infty)}$. Если $\delta(t)$ — одномерная δ-функция , то обобщённая функция $\delta(g_1(x))\delta(g_2(x))\dots\delta(g_m(x))$ есть интегрирование по площади поверхности $S \equiv \bigcap\limits_{i=2}^{m} g_i^{-1}(0)$ коразмерности m в $\mathbf{R}^n$ основной функции $\varphi(x)$ с некоторым весом $\rho(x) > 0$.

15.1.1 Оператор замены переменных.

Пусть G, G_1, G_2, G_3 — открытые подмножества $\mathbf{R}^n$. Через $C_+^{(\infty)}(G)$ обозначим множество бесконечно-дифференцируемых отображений $a : G \to \mathbf{R}_+$. Через $\mathrm{Diff}\,(G_1, G_2)$ обозначим множество диффеоморфизмов множеств G_1 и G_2 $g : G_1 \to G_2$ класса $C^{(\infty)}$. $D(G)$ — локально-выпуклое линейное топологическое пространство обобщённых функций на открытом множестве G, $D'(G)$ — выпуклое линейное топологическое пространство, сопряжённое к $D(G)$, т.е. пространство обобщённых функций. Мы будем постоянно использовать в этом параграфе следующее утверждение, вытекающее из предложения 7.4 страницы 201 книги [78].

Утверждение 15.1.1 *Пусть X, Y — локально выпуклые линейные топологические пространства , X^*, Y^* — сопряжённые локально выпуклые линейные топологические пространства. Если $A : X \to Y$ линейное непрерывное отображение, то сопряжённое линейное отображение $A^* : Y^* \to X^*$ определено на всём Y^* и непрерывно. В частности, если $A : X \to Y$ линейный топологический иэоморфизм, то и A^* линейный топологический изоморфизм.*

Мы будем применять утверждение 15.1.1 в случаях $X = D(G_1)$, $Y = D(G_2)$ и $X = S(\mathbf{R}^m)$, $Y = S(\mathbf{R}^n)$, где $G_1 \subset \mathbf{R}^m$, $G_2 \subset \mathbf{R}^n$ — открытые подмножества. Тогда $X^* = D'(G_1)$, $Y^* = D'(G_2)$ и $X^* = S'(\mathbf{R}^m)$, $Y^* = S'(\mathbf{R}^n)$ соответственно.

Каждой функции $a \in C^{(\infty)}(G)$ сопоставим линейный оператор $M_a^* : D(G) \to D(G)$ по правилу $M_a^* = a(x)\varphi(x)$, т.е. оператор умножения на функцию $a(x)$. Операторы M_a^* при $a \in C_+^{(\infty)}(G)$ есть операторы изоморфизма. При этом единичной функции соответствует тождественный оператор, $(M_a^*)^{-1} = M_{a'}^*$, где $a'(x) = \frac{1}{a(x)}$ и операторы коммутируют, т.е.

$$\forall a_1 \in C^{(\infty)}(G)\ \forall a_2 \in C^{(\infty)}(G) \ \Big|\ M_{a_1}^* M_{a_2}^* = M_{a_1 a_2}^* = M_{a_2}^* M_{a_1}^*. \qquad (15.1.1)$$

Согласно утверждению 15.1.1 тогда сопряжённые операторы $(M_a^*)^* \equiv M_a^{**}$ при $a \in C_+^{(\infty)}(G)$, $M_a^{**} : D'(G) \to D'(G)$ также есть операторы изоморфизма ("изоморфизм"в этом пункте есть линейный топологический изоморфизм локально выпуклых линейных топологических пространств).

Пусть $g \in \mathrm{Diff}\,(G_1, G_2)$ Введём линейный оператор $g^* : D(G_2 \to D(G_2)$ правилом

$$(g^*\psi)(x) \equiv \psi(g(x)). \tag{15.1.2}$$

Линейный оператор g^* непрерывен. Тождественному отображению $g : G \to G$ соответствует тождественное отображение $g^* : D(G) \to D(G)$. Если $g_2 \in \mathrm{Diff}\,(G_1, G_2)$, $g_2 \in \mathrm{Diff}\,(G_2, G_3)$, то определена суперпозиция диффеоморфизмов $g_3 \equiv g_2 \circ g_1$, $g_3 \in \mathrm{Diff}\,(G_1, G_3)$ и

$$(g_2 \circ g_1)^* = g_1^* g_2^*. \tag{15.1.3}$$

Отсюда следует, что так как отображения $g \in \mathrm{Diff}\,(G_1, G_2)$ есть диффеоморфизмы класса $C^{(\infty)}$, то линейные отображения $g^* : D'(G_2) \to D'(G_1)$ есть диффеоморфизмы локально выпуклых линейных топологических пространств.

Операторы M_a^* и g^* удовлетворяют следующему соотношению

$$\forall a \in C^{(\infty)}(G_2)\ \forall g \in \mathrm{Diff}\,(G_1, G_2) \;\Big|\; g^* M_a^* = M_{g^*(a)}^* g^*. \tag{15.1.4}$$

В самом деле, если $\varphi \in D(G_2)$, то

$$g^* M_a^* \varphi = g^*(a(y)\varphi(y) = a(g(x))\varphi(g(x)) = M_{g^*(a)}^* g^*.$$

Переходя к сопряжённым операторам, получим из (15.1.2), (15.1.3), (15.1.4) следующие свойства:

$$\forall a_1 \in C^{(\infty)}(G)\ \forall a_2 \in C^{(\infty)}(G) \;\Big|\; M_{a_2}^{**} M_{a_1}^{**} = M_{a_1 a_2}^{**} = M_{a_1}^{**} M_{a_2}^{**}; \tag{15.1.5}$$

$$\forall g_1 \in \mathrm{Diff}\,(G_1, G_2)\ \forall g_2 \in \mathrm{Diff}\,(G_2, G_3) \;\Big|\; (g_2 \circ g_1)^{**} = g_2^{**} g_1^{**}; \tag{15.1.6}$$

$$\forall a \in C^{(\infty)}(G_2)\ \forall g \in \mathrm{Diff}\,(G_1, G_2) \;\Big|\; M_a^{**} g^{**} = g^{**} M_{g^*(a)}^{**}. \tag{15.1.7}$$

Введём отображение $p : \mathrm{Diff}\,(G_1, G_2) \to C_+^{(\infty)}(G_1)$ по правилу

$$p(g)(x) = \left|\det \frac{\partial g}{\partial x}(x)\right|^{-1} \tag{15.1.8}$$

Это отображение обладает свойством

$$\forall g_1 \in \mathrm{Diff}\,(G_1, G_2)\ \forall g_2 \in \mathrm{Diff}\,(G_2, G_3) \;\Big|\; p(g_2 \circ g_1) = p(g_1) g_1^*(p(g_2)). \tag{15.1.9}$$

В самом деле

$$p(g_2 \circ g_1)(x) = \left|\det \frac{\partial g_2(g_1(x))}{\partial x}\right|^{-1} = \left|\det \left(\left.\frac{\partial g_2(y)}{\partial y}\right|_{y=g_1(x)} \cdot \frac{\partial g_1(x)}{\partial x}\right)\right|^{-1} =$$

$$p(g_1)(x) \cdot p(g_2)(g_1(x)) = \left(p(g_1) g_1^*\left(p(g_2)\right)\right)(x).$$

Теперь введём следующий оператор изоморфизма для каждого $g \in \mathrm{Diff}\,(G_1, G_2)$

$$S_g^* \equiv g^{-1*} M_{p(g)}^*. \tag{15.1.10}$$

Покажем, что выполнены свойства:

$$\forall g_1 \in \operatorname{Diff}(G_1, G_2)\ \forall g_2 \in \operatorname{Diff}(G_2, G_3)\ \Big|\ S^*_{g_2 \circ g_1} = S^*_{g_2} S^*_{g_1}; \qquad (15.1.11)$$

$$\forall a \in C^{(\infty)}(G_1)\ \forall g \in \operatorname{Diff}(G_1, G_2)\ \Big|\ S^*_g M^*_a = M_{g^{-1*}(a)} S^*_g. \qquad (15.1.12)$$

В самом деле, согласно определению (15.1.10) и свойству (15.1.9)

$$S^*_{g_2 \circ g_1} = (g_2 \circ g_1)^{-1*} M^*_{p(g_2 \circ g_1)} = g_2^{-1*} g_1^{-1*} M^*_{p(g_1) g_1^*(p(g_2))} = g_2^{-1*} g_1^{-1*} M^*_{g_1^*(p(g_2))} M^*_{p(g_1)} =$$

$$g_2^{-1*} M^*_{p(g_2)}\, g_1^{-1*} M^*_{p(g_1)} = S^*_{g_2} S^*_{g_1},$$

т.е. верно соотношение (15.1.11). Далее согласно определяющей формуле (15.1.10) и свойству (15.1.4) имеем

$$S^*_g M^*_a = g^{-1*} M^*_{p(g)} M^*_a = g^{-1*} M^*_a M^*_{p(g)} = M^*_{g^{-1*}(a)} g^{-1*} M^*_{p(g)} = M^*_{g^{-1*}(a)} S^*_g.$$

♢

Пусть $f \in D'(G_2)$ — регулярная обобщённая функция , представимая с помощью локально суммируемой функции $f \in L_{loc}(G_2)$, и $g \in \operatorname{Diff}(G_1, G_2)$. Найдём вид обобщённой функции $(S^{**}_g f) \in D'(G_2)$. Для $\varphi \in D(G_1)$ имеем

$$(S^{**}_g(f), \varphi) = (f, S^*_g \varphi) = \int\limits_{G_2} f(y) \varphi(g^{-1}(y)) \left| \det \frac{\partial g}{\partial x}(x) \right|^{-1} \Bigg|_{x = g^{-1}(y)} dy =$$

$$\int\limits_{G_2} f(y) \varphi(x(y)) \left| \det \frac{\partial x}{\partial y}(y) \right| dy = \int\limits_{G_1} f(y(x)) \varphi(x)\, dx.$$

Итак

$$S^{**}_g(f)(x) = f(g(x)), \qquad (15.1.13)$$

т.е. обобщённая функция $S^{**}_g(f)$ также регулярна и представима с помощью локально суммируемой функции $f(g(x))$ из класса $L_{loc}(G_1)$. Для регулярных обобщённых функций оператор $S_g|^{**}$, таким образом, есть оператор *замены переменных*. Поэтому по определению оператор S^{**}_g назовём *оператором замены переменных* в обобщённой функции.

Оператор замены переменных следующим естественным образом преобразует носители обобщённых функций.

Утверждение 15.1.2 *Если* $g \in \operatorname{Diff}(G_1, G_2)$, $f \in D'(G_2)$, *то*

$$\operatorname{supp}(S^{**}_g f) = g^{-1}(\operatorname{supp}(f)). \qquad (15.1.14)$$

Доказательство. Пусть $Q \subset G_1$ произвольное открытое множество. Оператор изоморфизма $S^*_g : D(G_1) \to D(G_2)$ при сужении на подпространство $D(Q)$ даёт оператор изоморфизма $D(Q)$ на $D(g(Q))$. Поэтому условие

$$\forall \varphi \in D(Q)\ \Big|\ (f, S^*_g \varphi) = 0 \qquad (15.1.15)$$

эквивалентно условию

$$\forall \psi \in D(g(Q))\ \Big|\ (f, \psi) = 0 \qquad (15.1.16)$$

С другой стороны условие (15.1.15) эквивалентно условию

$$\forall \varphi \in D(Q) \;\Big|\; (S_g^{**} f, \varphi) = 0 \tag{15.1.17}$$

На языке носителей условие (15.1.16) эквивалентно условию

$$\operatorname{supp}(f) \subset G_2 \setminus g(Q) = g(G_1 \setminus Q), \tag{15.1.18}$$

а условие (15.1.17) эквивалентно условию

$$\operatorname{supp}(S_g^{**} f) \subset G_1 \setminus Q. \tag{15.1.19}$$

Эквивалентность условий (15.1.18) и (15.1.19) доказывает утверждение 15.1.2. $\diamondsuit$

15.1.2 Формула дифференцирования сложной функции. Пусть X, Y — открытые подмножества $\mathbf{R}$. Введём оператор $\frac{\partial^*}{\partial x_i} : D(X) \to D(X)$, $i \in \overline{1,n}$ взятия частной производной основой функции по переменной x_i, т.е. $\left(\frac{\partial^*}{\partial x_i}\varphi\right)(x) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$. Оператор $\frac{\partial^*}{\partial x_i}$ линейный и непрерывный. При этом

$$\forall i \in \overline{1,n}\ \forall j \in \overline{1,n} \;\Big|\; \frac{\partial^*}{\partial x_i}\frac{\partial^*}{\partial x_j} = \frac{\partial^*}{\partial x_j}\frac{\partial^*}{\partial x_i}, \tag{15.1.20}$$

т.е. операторы $\frac{\partial^*}{\partial x_i}$, $i \in \overline{1,n}$ коммутируют между собой. Сопряжённый оператор $\left(\frac{\partial^*}{\partial x_i}\right)^* :$ $D'(x) \to D'(x)$ также по утверждению 15.1.1 есть линейный непрерывный оператор. По определению оператор $\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv -\left(\frac{\partial^*}{\partial x_i}\right)^*$ называют оператором взятия i-той частной производной обобщённой функции.

Пусть $g \in \operatorname{Diff}(X, Y)$. Будем обозначать отображение $y = g(x)$ как $y = y(x)$. Справедлива следующая формула дифференцирования сложной функции.

Лемма 15.1.1 *Для* $g \in \operatorname{Diff}(X,Y)$, $i \in \overline{1,n}$ *верно*

$$S_g^* \frac{\partial^*}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^*}{\partial y_j} S_g^* M^*_{\frac{\partial y_j}{\partial x_i}}. \tag{15.1.21}$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in D(X)$, тогда

$$S_g^* \frac{\partial^*}{\partial x_i}\varphi = S_g^*\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\right) = g^{-1*}\left(p(g)(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\right) = \left(p(g)(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\right)\Big|_{x=x(y)}. \tag{15.1.22}$$

С другой стороны

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^*}{\partial y_j} S_g^* M^*_{\frac{\partial y_j}{\partial x_i}}\varphi = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^*}{\partial y_j} g^{-1*}\left(p(g)\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\varphi\right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\left(p(g)\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\varphi\right)(x(y))\right) =$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial y_j}(y)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left(p(g)\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\varphi\right)(x)\right)\Big|_{x=x(y)} \equiv \varphi(x(y))B + p(g)(x(y))C, \tag{15.1.23}$$

где

$$B \equiv \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial y_j}(y)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left(p(y)\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)\right)(x(y)), \tag{15.1.24}$$

$$C \equiv \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial y_j}(y)\left(\frac{\partial y_j}{\partial xi}(x)\bigg|_{x=x(y)}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\bigg|_{x=x(y)}\right). \qquad (15.1.25)$$

Но

$$C = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)\bigg|_{x=x(y)}\right)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial y_j}(y)\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x)\bigg|_{x=x(y)}\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)\bigg|_{x=x(y)}\right)\delta_{ki} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\bigg|_{x=x(y)}.$$

Поэтому в силу (15.1.22) равенство (15.1.21) будет доказано, если мы покажем, что $B = 0$. Введём матрицу $A(x) \equiv \frac{\partial y}{\partial x}(x)$, $A \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbf{R})$ и запишем величину B в виде

$$B = p(g)(x(y))\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial y_j}(y)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}(x)\bigg|_{x=x(y)}\right) +$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}p(g)(x)\right)\bigg|_{x=x(y)}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial y_j}(y)\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x)\bigg|_{x=x(y)}\right) =$$

$$\left(p(g)(x)\left\langle A^{-1\top}(x), \frac{\partial}{\partial x_i}A(x)\right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_i}p(g)(x)\right)\bigg|_{x=x(y)}.$$

(Мы используем символ Кронекера δ_{ki} и скалярное произведение матриц из п. 6.1.1.)

Согласно определяющей формуле (15.1.8) $p(g)(x) = |\det A(x)|^{-1}$. Согласно формуле (6.1.35)

$$\langle A^{-1\top}(x), \frac{\partial}{\partial x_i}A(x)\rangle = \langle E, A^{-1}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}A(x)\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i}(\ln\det A(x)).$$

Поскольку $A(x) \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbf{R})$, то

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\ln\det A(x)) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\ln|\det A(x)|).$$

С учётом этих отношений

$$p(g)(x)\left\langle A^{-1\top}(x), \frac{\partial}{\partial x_i}A(x)\right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_i}p(g)(x) =$$

$$|\det A(x)|^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}(\ln|\det A(x)|) - |\det A(x)|^{-2}\frac{\partial}{\partial x_i}|\det A(x)| =$$

$$|\det A(x)|^{-2}\frac{\partial}{\partial x_i}|\det A(x)| - (\det A(x))^{-2}\frac{\partial}{\partial x_i}|\det A(x)| = 0,$$

т.е. $B = 0$. $\diamondsuit$

Следствие 15.1.1 *(Формула дифференцирования сложной функции).*

$$\frac{\partial^{**}}{\partial x_i}S_g^{**} = \sum_{j=1}^{n}M^{**}_{\frac{\partial y_j}{\partial x_i}}S_g^{**}\frac{\partial^{**}}{\partial y_j}. \qquad (15.1.26)$$

Формула (15.1.26) получается из формулы (15.1.21) переходом к сопряжённым операторам.

Согласно формуле (15.1.12)

$$S_g^* M^*_{\frac{\partial y_j}{\partial x_i}} = M^*_{g^{-1*}\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)} S_g^*,$$

поэтому формулу (15.1.21) можно записать в эквивалентном виде

$$\frac{\partial^*}{\partial x_i} = S_g^{-1*}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^*}{\partial y_j} M^*_{g^{-1*}(\frac{\partial y_j}{\partial x_i})}\right) S_g^*. \tag{15.1.27}$$

Соответственно, переходя к сопряжённым операторам, получаем

$$\frac{\partial^{**}}{\partial x_i} = S_g^{**}\left(\sum_{j=1}^{n} M_{g^{-1*}\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)} \frac{\partial^{**}}{\partial y_j}\right) S_g^{-1**}. \tag{15.1.28}$$

Замечание 15.1.1 *Имея в руках операцию замены переменных в обобщённых функциях и формулу дифференцирования сложной функции можно построить теорию обобщённых функций на многообразиях.*

15.1.3 Оператор замены переменных для случая диффеоморфного вложения.

Распространим часть построений пунктов 15.1.1 и 15.1.2 на случай, когда $g : G_1 \to G_2$ есть диффеоморфное вложение открытого множества $G_1 \subset \mathbf{R}^n$ в открытое множество $G_2 \subset \mathbf{R}^n$.

Через $\mathrm{Diffin}\,(D_1, G_2)$ обозначим множество диффеоморфных вложений $g : G_1 \to G_2$, т.е. отображений g класса $C^{(\infty)}$, что: 1) множество $g(G_1) \subset G_2$ открыто, 2) отображение g есть диффеоморфизм класса $C^{(\infty)}$ открытых множеств G_1 и $g(G_1)$. Далее в этом пункте для диффеоморфного вложения $g \in \mathrm{Diffin}\,(G_1, G_2)$ через $g' \in \mathrm{Diff}\,(G_1, g(G_1)$ будем обозначать соответствующий диффеоморфизм $g' : G_1 \to g(G_1)$.

Для $g \in \mathrm{Diffin}\,(G_1, G_2)$ определено линейное непрерывное отображение локально выпуклых линейных топологических пространств $g^* : D(G_2) \to D(G_1)$ по правилу: если $\varphi \in D(G_2)$, то $(g^*\varphi)(x) \equiv \varphi(g(x))$. Справедливо свойство ,аналогичное свойству (15.1.3)

$$\forall g_1 \in \mathrm{Diffin}\,(G_1, G_2)\ \forall g_2 \in \mathrm{Diffin}\,(G_2, G_3) \;\Big|\; (g_1 \circ g_2)^* = g_1^* g_2^*. \tag{15.1.29}$$

Если $g \in \mathrm{Diffin}\,(G_1, G_2)$, то $g' \in \mathrm{Diff}\,(G_2, g(G_1))$ и поэтому определена функция $p(g) \in C_+^{(\infty)}(G_1)$ вида

$$p(g)(x) \equiv p(g')(x) = \left(\det \frac{\partial g'(x)}{\partial x}\right)^{-1} = \left(\det \frac{\partial g(x)}{\partial x}\right)^{-1}. \tag{15.1.30}$$

В отличии от случая $g \in \mathrm{Diff}\,(G_1, G_2)$ для случая $g \in \mathrm{Diffin}\,(G_1, G_2)$ отображение g^{-1} уже может не быть из класса $\mathrm{Diffin}\,(G_1, G_2)$ и возникает трудность в непосредственном перенесении формулы (15.1.10) для оператора S_g^* . Тем не менее мы определим линейное непрерывное отображение $S_g^* : D(G_1) \to D(G_2)$ для $g \in \mathrm{Diffin}\,(G_1, G_2)$ по правилу: если $\varphi \in D(G_2)$, то $\psi = S_g^*(\varphi)$ равно

$$\psi(y) = \begin{cases} S_{g'}^*(\varphi) & , y \in g(G_1); \\ 0 & , y \in G_2 \setminus g(G_1). \end{cases} \tag{15.1.31}$$

Таким образом, определено и сопряжённое линейное непрерывное отображение $S_g^{**}: D'(G_2) \to D'(G_1)$.

Рассмотрим случай, когда множество G_1 есть подмножество G_2, $G_1 \subset G_2$ и диффеоморфное вложение $i : G_1 \to G_2$ есть тождественное вложение. Тогда отображение $S_i^* : D(G_1) \to D(G_2)$ есть просто продолжение нулём каждой основной функции $\varphi \in D(G_2)$ на множество $G_2 \setminus G_1$, а отображение $S_i^{**} : D'(G_2) \to D'(G_1)$ сопоставляет каждой обобщённой функции $f \in D'(G_2)$ её сужение $f|_{G_1} = S_i^{**} f$ на множество G_1. Для любого отображения $g \in \operatorname{Diffin}(G_1), (G_2)$ имеем $g = i \circ g'$, где $g' \in \operatorname{Diff}(G_1, g(G_1))$, а $i : g(G_1) \to G_2$ — тождественное вложение. Для соответствующих операторов справедливо равенство
$$S_g^* = S_{i \circ g'}^* = S_i^* S_{g'}^* \tag{15.1.32}$$

Для диффеоморфных вложений $g \in \operatorname{Diffin}(G_1, G_2)$ справедливо и утверждение 15.1.2, т.е.

Утверждение 15.1.3 *Если $g \in \operatorname{Diffin}(G_1, G_2)$, $\varphi \in D(G_1)$, $f \in D'(G_2)$, то верно*
$$\operatorname{supp}(S_g^*(\varphi)) = g(\operatorname{supp}(\varphi)), \tag{15.1.33}$$
$$\operatorname{supp}(S_g^{**}(f)) = g^{-1}(\operatorname{supp}(f)). \tag{15.1.34}$$

Доказательство. По определению оператора S_g^*
$$S_g^*(\varphi)(y) = \begin{cases} \varphi(g^{-1}(y)) & , y \in g(G_1); \\ 0 & , y \in G_2 \setminus g(G_1). \end{cases}$$

Поэтому верны эквивалентности
$$(S_g^*(\varphi)(y) \neq 0) \Leftrightarrow (\varphi(g^{-1}(y)) \neq 0) \Leftrightarrow (y \in g(\operatorname{supp}(\varphi))),$$
доказывающие (15.1.33).

Согласно (15.1.32)
$$S_g^{**} f = S_{g'}^{**} S_i^{**} f = S_{g'}^{**} f\Big|_{g(G_1)} \tag{15.1.35}$$
и
$$g^{-1}(\operatorname{supp}(f)) = g'^{-1}\left(\operatorname{supp}(f\Big|_{g(G_2)})\right). \tag{15.1.36}$$

По утверждению 15.1.2 верно
$$\operatorname{supp}\left(S_{g'}^{**} f\Big|_{g(G_1)}\right) = g'^{-1}\left(\operatorname{supp}\left(f|_{g(G_1)}\right)\right). \tag{15.1.37}$$

Соотношения (15.1.35-15.1.37) влекут (15.1.34). $\diamondsuit$

Справедливы для диффеоморфных вложений и следующие три свойства, аналогичные свойствам (15.1.4), (15.1.12), (15.1.11) для диффеоморфизмов.

Утверждение 15.1.4 *Верны утверждения*
$$\forall a \in C^{(\infty)}(G_2)\ \forall g \in \operatorname{Diffin}(G_1, G_2) \Bigm| g^* M_a^* = M_{g^*(a)} g^*; \tag{15.1.38}$$
$$\forall a \in C^{(\infty)}(G_2)\ \forall g \in \operatorname{Diffin}(G_1, G_2) \Bigm| M_a^* S_g^* = S_g^* M_{g^*(a)}; \tag{15.1.39}$$
$$\forall g_1 \in \operatorname{Diffin}(G_1, G_2)\ \forall g_2 \in \operatorname{Diffin}(G_2, G_3) \Bigm| S_{g_2 \circ g_1} = S_{g_2}^* S_{g_1}^*. \tag{15.1.40}$$

Доказательство. Если $\varphi \in D(G_2)$, то

$$(g^* M_a^* \varphi)(x) = a(g(x))\varphi(g(x))$$

и

$$(M_{g^*(a)}^* g^* \varphi)(x) = a(g(x))\varphi(g(x)),$$

т.е. верно (15.1.38).

Если $\varphi \in D(G_1)$, то

$$(M_a^* S_g^* \varphi)(y) = \begin{cases} a(y)\varphi(g^{-1}(y)) & , y \in g(G_1); \\ 0 & , y \in G_2 \setminus g(G_1); \end{cases}$$

и

$$(S_g^* M_{g^*(a)} \varphi)(y) = S_g^*(a(g(x))\varphi(x))(y) = \begin{cases} a(y)\varphi(g^{-1}(y)) & , y \in g(G_1); \\ 0 & , y \in G_2 \setminus g(G_1); \end{cases}$$

т.е. верно (15.1.39).

Если $\varphi \in D(G_1)$, то

$$(S_{g_2 \circ g_1} \varphi)(z) = \begin{cases} \varphi\left((g_2 \circ g_1)^{-1}(z)\right) & , z \in g_2(g_1(G_1)) \\ 0 & , z \in G_3 \setminus g_2(g_1(G_1)). \end{cases} \qquad (15.1.41)$$

С другой стороны

$$(S_{g_1}^* \varphi)(y) = \begin{cases} \varphi(g_1^{-1}(y)) & , y \in g_1(G_1); \\ 0 & , y \in G_2 \setminus g_1(G_1) \end{cases}$$

и

$$(S_{g_2}^*(S_{g_1}^* \varphi))(z) = \begin{cases} (S_{g_1}^* \varphi)(g_2^{-1}(z)) & , z \in g_2(G_2); \\ 0 & , z \in G_3 \setminus g_2(G_2); \end{cases}$$

т.е.

$$(S_{g_2}^*(S_{g_1}^* \varphi))(z) = \begin{cases} \varphi(g_1^{-1}(g_2^{-1}(z))) & , z \in g_2(g_1(G_1)); \\ 0 & , z \in G_3 \setminus g_2(g_1(G_1)). \end{cases} \qquad (15.1.42)$$

Из (15.1.41), (15.1.42) следует (15.1.40). $\diamondsuit$

Для диффеоморфного вложения сохраняется и формула дифференцирования сложной функции в виде (15.1.21).

Утверждение 15.1.5 *Если* $g \in \mathrm{Diffin}\,(X, Y)$, $i \in \overline{1, n}$, *то*

$$S_g^* \frac{\partial^*}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^*}{\partial y_j} S_g^* M_{\frac{\partial y_j}{\partial x_i}}. \qquad (15.1.43)$$

Доказательство. Пусть $b : g(X) \to Y$ тождественное вложение, тогда $g = b \circ g'$, где $g' \in \mathrm{Diff}\,(X, g(X))$ и согласно формуле (15.1.32)

$$S_g^* = S_b^* S_{g'}^*.$$

Для диффеоморфизма $g' \in \mathrm{Diff}\,(X, g(X))$ верна лемма 15.1.1 и

$$S_{g'}^* \frac{\partial^*}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^*}{\partial y_j}\Big|_{g(x)} S_{g'}^* M^*_{\frac{\partial y_j}{\partial xi}}. \qquad (15.1.44)$$

Но для любого $j \in \overline{1,n}$ верно

$$S_b^* \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{g(x)} = \frac{\partial^*}{\partial y_j} S_b^*. \tag{15.1.45}$$

В самом деле, для $\varphi \in D(g(X))$

$$\left(S_b^* \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{g(X)} \varphi\right)(y) = \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(y) & , y \in g(X); \\ 0, & y \in Y \setminus g(X); \end{cases}$$

и

$$\left(\frac{\partial^*}{\partial y_j} S_b^* \varphi\right)(y) = \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(y) & , y \in g(X); \\ 0 & , y \in Y \setminus g(X). \end{cases}$$

Умножим равенство (15.1.44) на оператор S_b^* слева и с учётом (15.1.45), получим (15.1.43). $\diamondsuit$

15.1.4 Построение обобщённой функции высшей размерности из обобщённой функции низшей размерности.

Пусть $\delta(y_1) \in D'(\mathbf{R})$ — одномерная δ-функция и $g_1 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ отображение класса $C^{(\infty)}(\mathbf{R}^3)$ Интуитивно естественным представляется, что выражение $\delta(g_1(x))$ должно представлять обобщённую функцию из $D'(\mathbf{R}^3)$ "сосредоточенную на поверхности" $S \equiv \{x \in \mathbf{R}^3 \bigm| g_1(x) = 0\}$. Задача данного пункта — придать точный смысл этим представлениям.

Предварительно заметим, что если $g_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ есть диффеоморфное вложение пространства $\mathbf{R}$ той же размерности 1 в $\mathbf{R}$, то определение $\delta(g_1(x))$ уже построено в пунктах 1 и 3, а именно $\delta(g_1(x)) \equiv (S_{g_1}^{**}\delta)(x)$. Чтобы свести рассматриваемый случай к случаю равных размерностей мы будем рассматривать обобщённую функцию $\delta(y_1)1(y_2, y_3) \in D'(\mathbf{R}^3)$. Достроим отображение $g_1 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ до диффеоморфного вложения $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ вспомогательным отображением $g_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ и положим

$$v(x) \equiv \delta(g_1(x)) \equiv (S_g^{**}(\delta(y_1)1(y_2, y_3)))(x).$$

Однако, в этом определении имеется произвол, ибо кроме заданного отображения g_1 мы произвольно ввели вспомогательное отображение g_2. Оказывается, полученная обобщённая функция $v \in D'(\mathbf{R}^3)$ не зависит от вспомогательного отображения g_2.

Перейдем к строгому изложению. Пусть $k(1) \in \mathbf{N}$, $k(2) \in \mathbf{N}$, $n \equiv k(1) + k(2)$, $Y_1 \subset \mathbf{R}^{k(1)}$ непустое открытое множество, $Y_2 \equiv \mathbf{R}^{k(2)}$, $Y \equiv Y_1 \times Y_2$, Y — непустое открытое подмножество $\mathbf{R}^n$, $X \subset \mathbf{R}^n$ — непустое открытое множество, $g \in \operatorname{Diffin}(X, Y)$. Пусть $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$, где $g_1 : X \to Y_1$, $g_2 : X \to Y_2$ — составляющие отображения. Каждой обобщённой функции $f \in D'(Y_1)$ сопоставим обобщённую функцию $v \in D'(X)$ по правилу

$$v \equiv S_g^{**}(f(y_1)1(y_2)), \tag{15.1.46}$$

которую обозначим

$$v(x) \equiv f(g_1(x)). \tag{15.1.47}$$

В обозначение (15.1.47) не входит функция $g_2(x)$, а в определение (15.1.46) — входит. Покажем, что обобщённая функция $v \in D'(X)$ не зависит от выбора отображения g_2.

Лемма 15.1.2 *Пусть $g \in \operatorname{Diffin}(X, Y)$, $h \in \operatorname{Diffin}(X, Y)$ и проекции на Y_1 отображений g и h совпадают $g_1 = h_1$. Тогда для $f \in D'(Y_1)$*

$$S_g^{**}(f(y_1)1(y_2)) = S_h^{**}(f(y_1)1(y_2)). \tag{15.1.48}$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in D(X)$, тогда

$$(S_g^{**}(f(y_1)1(y_2)),\varphi) = (f(y_1)1(y_2),(S_g^{*}\varphi)(y_1,y_2)) = (f(y_1),(1(y_2),(S_g^{*}\varphi)(y_1,y_1))) \equiv \\ (f(y_1),\chi(y_2)) \tag{15.1.49}$$

и

$$(S_h^{**}(f(y_1)1(y_2)),\varphi) = (f(y_2)1(y_2),(S_h^{*}\varphi)(y_2,y_2)) = (f(y_1),(1(y_2),(S_h^{*}\varphi)(y_1,y_2))) \equiv \\ (f(y_1),\mu(y_1)), \tag{15.1.50}$$

где согласно [24, с.53] функции

$$\chi(y_1) \equiv (1(y_2),(S_g^{*}\varphi)(y_1,y_2)), \tag{15.1.51}$$

$$\mu(y_1) \equiv (1(y_2),(S_h^{*}\varphi)(y_1,y_2)) \tag{15.1.52}$$

из пространства $D(Y_1)$. Лемма будет доказана, если мы покажем, что $\chi = \mu$.

Согласно (15.1.51, 15.1.52) верно

$$\chi(y_1) = \int\limits_{Y_2} (S_g^{*}\varphi)(y_1,y_2)\,dy_2,$$

$$\mu(y_1) = \int\limits_{Y_2} (S_h^{*}\varphi)(y_1,y_2)\,dy_2.$$

Подмножества $g(X)$, $h(X)$ открыты в произведении $Y_1 \times Y_2$, поэтому при любом $y_1 \in Y_1$ их сечения

$$G(y_1) \equiv \{y_2 \in Y_2 \bigm| (y_1,y_2) \in g(X)\}, \quad H(y_1) \equiv \{y_2 \in Y_2 \bigm| (y_1,y_2) \in h(X)\}$$

— открытые подмножества в Y_2. Так как функции $S_g^{*}(\varphi)$ и $S_h^{*}(\varphi)$ могут быть отличны от нуля лишь на множестве $g(X)$ и $h(X)$ соответственно, то

$$\chi(y_1) = \int\limits_{G(y_1)} \varphi(g^{-1}(y_1,y_2)) \left(\left| \det \frac{\partial g}{\partial x}(x) \right| \Bigg|_{x=g^{-1}(y)} \right)^{-1} dy_2, \tag{15.1.53}$$

$$\mu(y_2) = \int\limits_{H(y_1)} \varphi(h^{-1}(y_1,y_2)) \left(\left| \det \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right| \Bigg|_{x=h^{-1}(y)} \right)^{-1} dy_2. \tag{15.1.54}$$

Обозначим через $gb : X \to g(X)$ и $hb : X \to h(X)$ диффеоморфизмы $gb \in \mathrm{Diff}\,(X, g(X))$, $hb \in \mathrm{Diff}\,(X, h(X))$, соответствующие диффеоморфным вложениям g и h. Введём диффеоморфизм $q \equiv hb \circ gb^{-1}$, $q \in \mathrm{Diff}\,(g(X), h(X))$. Положим $q(y) \equiv (q_1(y), q_2(y))$, где отображения $q_i : g(X) \to Y_i$, $i \in \overline{1,2}$, есть составляющие отображения q. Согласно определению диффеоморфизма q верно

$$\forall y \in g(X) \bigm| gb^{-1}(y) = (hb^{-1} \circ q)(y). \tag{15.1.55}$$

Покажем , что

$$\forall (y_1,y_2) \in g(X) \bigm| q_1(y_1,y_2) = y_1. \tag{15.1.56}$$

В самом деле, равенство $q(y) = hb(gb^{-1}(y))$ означает, что для $x = gb^{-1}(y)$ верно

$$y = gb(x),$$

$$q(y) = hb(x).$$

Но $hb_1(x) = gb_1(x)$ по условию леммы, т.е. $y_1 = q_1(y_1, y_2)$.

Так как отображение $q : g(X) \to h(X)$ диффеоморфизм, то при фиксированном $y_1 \in Y_1$ отображение $q(y_1, y_2)$ по y_2 есть диффеоморфизм $q(y_1, +) \in \mathrm{Diff}\,(G(y_2), H(y_2))$. В силу (15.1.56)

$$\det \frac{\partial q(y_1, y_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} E_{k(1)} & 0 \\ \frac{\partial q_2(y_1,y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial q_2(y_1,y_2)}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \det \frac{\partial q_2(y_1, y_2)}{\partial y_2}. \qquad (15.1.57)$$

С другой стороны, по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial q(y_1, y_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \frac{\partial q(y)}{\partial y} = \frac{\partial hb(gb^{-1}(y))}{\partial y} = \left.\frac{\partial hb(x)}{\partial x}\right|_{x=gb^{-1}(y)} \frac{\partial gb^{-1}(y)}{\partial y} =$$

$$\left.\left(\frac{\partial hb(x)}{\partial x}\left(\frac{\partial gb(x)}{\partial x}\right)^{-1}\right)\right|_{x=gb^{-1}(y)}.$$

Поэтому

$$\det \frac{\partial q(y_1, y_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \left.\left(\left(\det \frac{\partial hb(x)}{\partial x}\right)\left(\det \frac{\partial gb(x)}{\partial x}\right)^{-1}\right)\right|_{x=gb^{-1}(y)}. \qquad (15.1.58)$$

Проведём теперь в интеграле (15.1.54) замену переменных $y_2 = q_2(y_1, y_2')$, $y_2' \in G(y_1)$, получим

$$\mu(y_1) = \int\limits_{G(y_1)} \varphi(h^{-1}(q(y_1, y_2'))) \left.\left|\det \frac{\partial h(x)}{\partial x}\right|^{-1}\right|_{x=h^{-1}(q(y_1,y_2'))} \left|\det \frac{\partial q_2(y_1, y_2')}{\partial y_2'}\right| dy_2'. \quad (15.1.59)$$

В силу (15.1.55) и (15.1.57), (15.1.58) получаем, опуская штрих у переменной интегрирования,

$$\mu(y_1) = \int\limits_{G_1(y_1)} \varphi(g^{-1}(y_1, y_2)) \left.\left|\det \frac{\partial g(x)}{\partial x}\right|^{-1}\right|_{x=g^{-1}(y)} dy_2. \qquad (15.1.60)$$

Из (15.1.60) и (15.1.53) следует, что $\chi = \mu$. $\diamondsuit$

Мы убедились, что формула (15.1.46) корректно определяет обобщённую функцию $v(x) = f(g_1(x))$, $v \in D'(X)$.

Сопоставляя обобщённой функции $f \in D'(Y_2)$ прямое произведение обобщённых функций $f(y_1)1(y_2) \in D'(Y_1 \times Y_2)$, мы получаем непрерывное линейное отображение $D'(Y_1) \to D'(Y_1 \times Y_2)$ ([24, с.55]). Отображение $S_g^{**} : D'(Y) \to D'(X)$ также линейно и непрерывно. Итак , сопоставление $f \mapsto v$ обобщённой функции $f \in D'(Y_2)$ обобщённой функции $f(g_2(x)) \in D'(X)$ при фиксированном отображении $g_1 : X \to Y_1$ задаёт линейное непрерывное отображение $D'(Y_1) \to D'(X)$.

15.1.5 Построение обобщённой функции высшей размерности из обобщённой функции низшей размерности. Глобальный случай.

Для построения обобщённой функции на открытом множестве $X \subset \mathbf{R}^n$ достаточно её определить локально в некоторой окрестности U_a каждой точке $a \in X$ согласованным образом. Построения предыдущего пункта определяют обобщённую функцию $v(x) = f(g_1(x))$ на всём открытом множестве X, но при ограничениях на отображении g_1, которые можно ослабить. В этом пункте мы будем применять построения предыдущего пункта локально, тогда вне носителя функции $v(x)$ нет необходимости накладывать сильные ограничения на отображение g_1. В этом пункте мы позволим величине $k(2)$ принимать значение 0, кроме натуральных значений. Если $k(2) = 0$, то $k(1) = n$ и мы полагаем $Y_1 \equiv Y$, $g_1 \equiv g$. Пространство Y_2 в этом случае отсутствует.

Что требуется в пункте 15.1.4 от заданного отображения g_1? Требуется, чтобы оно достраивалось до диффеоморфного вложения $g : X \to Y$ класса $\mathrm{Diffin}\,(X, Y)$. При каких условиях существует окрестность U_a точки $a \in X$, в которой заданное отображение g_1 достраивается до диффеоморфного вложения? Иф отображение $g_1 : X \to Y_2$ класса $C^{(\infty)}$ и $\mathrm{rank}\,\frac{\partial g_1(x)}{\partial x}|_{x=a} = k(1)$, т.е. отображение g_1 полного ранга в точке a. В этом случае отображение $g_1(x)$ может быть достроено в некоторой окрестности точки a до диффеоморфного вложения добавлением, например, $k(2)$ линейных функций.

Итак, пусть $X \subset \mathbf{R}^n$ — непустое открытое множество. Сохраняя обозначения предыдущего пункта, сформулируем следующие условия на обобщённую функцию $f \in D'(Y_1)$ и отображение $g_2 : X \to Y_1$.

Условия A. *1) Множество $S \equiv g_1^{-1}(\,\mathrm{supp}\,(f))$ — замкнутое подмножество X.*

2)Существует открытое множество $US \subset X$, $US \supset S$, что сужение $G_1\Big|_{US}$ отображение класса $C^{(\infty)}$.

3)Во всех точках $x \in S$ верно $\mathrm{rank}\,\frac{\partial g_1(x)}{\partial x} = k(1)$, т.е. отображение g_1 полного ранга.

Замечание 15.1.2 *Для замкнутости множества $S \subset X$ достаточно непрерывности на X отображения g_1.*

Определим при выполнении условий A обобщённую функцию $v(x) = f(g_1(x))$, $v \in D'(X)$. Определение проведём локально, т.е. для каждой точки $a \in X$ возьмём некоторую её окрестность $U_a \subset X$ (в этой главе окрестность $\equiv$ открытая окрестность) и определим сужение $v|_{U_a}$.

Если $a \in X \backslash S$, то существует окрестность U_a, находящаяся на положительном расстоянии от замкнутого множества S. Выберем такую окрестность и положим $v\Big|_{U_a} \equiv 0$. Если $a \in S$, то выберем окрестность U_a, в которой существует диффеоморфное вложение $g : U_a \to Y$, $g \in \mathrm{Diffin}\,(U_a, Y)$ с заданным составляющим отображением g_1. Положим $v\Big|_{U_a} \equiv S_g^{**}(f(y_1)1(y_2))$.

Покажем, что мы задали обобщённую функцию $v \in D'(X)$, т.е. что локальные элементы $v\Big|_{U_a}$ согласованы. Пусть $W = U_a \bigcap U_{a'}$ и $W \neq \emptyset$, покажем что на множестве W обобщённые функции $v\Big|_{U_a}$ и $v\Big|_{U_{a'}}$ совпадают. Рассмотрим три случая: 1) $a \in X \setminus S$, $a' \in X \setminus S$; 2) $a \in X \setminus S$, $a' \in S$; 3) $a \in S$, $a' \in S$. В случае 1) $v|_{U_a} = 0$ и $v|_{U_{a'}} = 0$ и совпадение их на множестве W очевидно. В случае 3) совпадение следует из леммы 15.1.2. В случае 2) совпадение следует из утверждения 15.1.3.

Построенная обобщённая функция $v \in D'(X)$ обладает следующим носителем.

Утверждение 15.1.6

$$\operatorname{supp}(v) = S = g_1^{-1}(\operatorname{supp}(f)). \tag{15.1.61}$$

Доказательство. Включение $\operatorname{supp}(v) \subset S$ следует из построения. С другой стороны, если $a \in S$, то по построению $v|_{U_a} = S_g^{**}(f(y_1)1(y_2))$ и по утверждению 15.1.3

$$\operatorname{supp}(v|_{U_a}) = g^{-1}(\operatorname{supp}(f(y_1)1(y_2))) = g^{-1}(\operatorname{supp}(f) \times Y_2) = U_a \bigcap g_1^{-1}(\operatorname{supp}(f)) \ni a.$$

Поэтому $a \in \operatorname{supp}(v)$. $\diamondsuit$

15.1.6 Линейная замена переменных. Однородные функции.

Пусть $l(x) \equiv Ax$, $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$, тогда отображение $l : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ есть линейный изоморфизм. Положим $l^\top(x) \equiv A^\top x$, $l^{-1}(x) \equiv A^{-1}x$.

Отображение $S_l^* : D(\mathbf{R}^n) \to D(\mathbf{R}^n)$ — линейный изоморфизм линейного пространства $D(\mathbf{R}^n)$ на себя в этом случае продолжается по непрерывности до топологического изоморфизма $S_l^* : S(\mathbf{R}^n) \to S(\mathbf{R}^n)$ локально выпуклого линейного топологического пространства основных функций медленного роста на себя и соответственно сопряжённый оператор S_l^{**} согласно утверждению 15.1.1 есть топологический изоморфизм $S_l^{**} : S'(\mathbf{R}^n) \to S'(\mathbf{R}^n)$ локального выпуклого линейного топологического пространства обобщённых функций медленного роста на себя. Пусть $F^* : S(\mathbf{R}^n) \to S(\mathbf{R}^n)$ — оператор трансформации Фурье. Тогда F^* линейный топологический изоморфизм.

Утверждение 15.1.7 *При* $A \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ *верно*

$$F^* = |\det A| S_{l^\top}^* F^* S_l^*. \tag{15.1.62}$$

Доказательство. Для диффеоморфизма $l(x)$ согласно формуле (15.1.8) имеем $p(l) = |\det A|^{-1}$, $p(l^\top) = p(l)$, $p(l^{-1}) = |\det A|$. Пусть $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$. По формуле (15.1.10)

$$S_l^*\varphi = l^{-1*} M_{p(l)}^* \varphi = |\det A|^{-1} l^{-1*}\varphi = |\det A|^{-1}\varphi(l^{-1}(x)).$$

Далее

$$\begin{gathered}(F^* S_l^*\varphi)(\eta) = |\det A|^{-1} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(l^{-1}(x)) \exp(i\langle \eta, x\rangle)\, dx = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(y) \exp(i\langle \eta, l(y)\rangle)\, dy = \\ \int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(y) \exp(\langle l^\top(\eta), y\rangle)\, dy = l^{\top *} F^*(\varphi)(\eta).\end{gathered} \tag{15.1.63}$$

Но согласно формуле (15.1.10)

$$S_{l^\top}^* = l^{-1\top *} M_{p(l^\top)}^* = |\det A|^{-1} l^{-1\top *}. \tag{15.1.64}$$

Из (15.1.63) и (15.1.64) следует (15.1.62). $\diamondsuit$

Следствие 15.1.2 *При* $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ *верно*

$$F^{**} = |\det A| S_l^{**} F^{**} S_{l^\top}^{**}. \tag{15.1.65}$$

Формула (15.1.65) получается из формулы (15.1.62) переходом к сопряжённым операторам.

Пусть $t \in \mathbf{R}_+$ и $lt(x) \equiv tx$ — отображение гомотетии. Тогда $A = tE$ и $\det A \equiv t^n$.

Определение 15.1.1 *Обобщённая функция $f \in D'(\mathbf{R}^n)$ однородная степени $s \in \mathbf{R}$, если*

$$\forall t \in \mathbf{R}_+ \;\Big|\; S^{**}_{lt}(f) = t^s f. \tag{15.1.66}$$

Из следствия 15.1.2 вытекает формула

$$F^{**} = t^n S^{**}_{lt} F^{**} S^{**}_{lt}, \tag{15.1.67}$$

из которой получаем

Утверждение 15.1.8 *Если обобщённая функция медленного роста $f \in S'(\mathbf{R}^n)$ однородна степени s, то её трансформация Фурье $F^{**}f \in S'(\mathbf{R}^n)$ есть обобщённая функция медленного роста однородная степени $s' = -(n+s)$.*

Доказательство. По условию $S^{**}_{lt}f = t^s f$. Поэтому в силу (15.1.67)

$$F^{**}f = t^n S^{**}_{lt} F^{**} S^{**}_{lt} f = t^{n+s} S^{**}_{lt}(F^{**}f).$$

$\diamondsuit$

Пример 15.1.1

n-мерная δ-функция $\delta(x) \in D'(\mathbf{R}^n)$ однородна степени $s = -n$. В самом деле, для $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ имеем

$$(S^{**}_{lt}\delta, \varphi) = (\delta, S^{*}_{lt}\varphi) = (\delta, (lt)^{-1*}p(lt)\varphi) = \frac{1}{t^n}\left(\delta(x), \varphi((lt)^{-1}(x))\right) = \frac{1}{t^n}\varphi(0) = \left(\frac{1}{t^n}\delta, \varphi\right).$$

При дифференцировании обобщённой функции однородность сохраняется, а степень однородности понижается.

Утверждение 15.1.9 *Если $f \in D'(\mathbf{R}^n)$ однородная обобщённая функция степени s, то при любом $i \in \overline{1,n}$ функция $\frac{\partial^{**}}{\partial x_i}f$ — однородная обобщённая функция степени $s-1$.*

Доказательство. Согласно формуле (15.1.28)

$$\frac{\partial^{**}}{\partial x_i}f = S^{**}_{lt}\left(\sum_{j=1}^{n} M^{**}_{lt^{-1*}\left(\frac{\partial lt_j}{\partial x_i}\right)} \frac{\partial^{**}}{\partial y_j}\right) S^{-1**}_{lt} f = tS^{**}_{lt}\frac{\partial^{**}}{\partial x_i}t^{-s}f = t^{-(s-1)}S^{**}_{lt}\left(\frac{\partial^{**}}{\partial x_i}f\right).$$

$\diamondsuit$

Пример 15.1.2

Если $\delta^{(\alpha)}(x)$ — производная n-мерной δ-функции , то $\delta^{(\alpha)}(x)$ — однородная обобщённая функция степени $s = -(n+|\alpha|)$, $\alpha \in {\mathbf{N}_o}^n$.

Пусть теперь в обозначениях предыдущего пункта $f_i \in D'(\mathbf{R}^{k(i)})$ $i \in \overline{1,m}$ и функция f_1 однородна степени s. Тогда верна формула

$$\forall t \in \mathbf{R}_+ \;\Big|\; f_1(tg_1(x))f_2(g_2(x)\ldots f_m(g_m(x)) = t^s f_2(g_1(x))f_2(g_2(x))\ldots f_m(g_m(x)). \tag{15.1.68}$$

В самом деле, отображение $bt(x)$ вида $bt(x) = (tg_1(x), g_2(x), \dots g_m(x), g_{m+1}(x))$ есть суперпозиция двух диффеоморфизмов $bt = ht \circ g$, где $ht(y) \equiv (ty_1, y_2, \dots y_m, y_{m+1})$. Для функции $v_t \equiv S^{**}_{bt}(f_1(y_1)f_2(y_2)\dots f_m(y_m)1(y_{m+1}))$ по свойству (15.1.11) оператора S^*_g получаем

$$S^{**}_{bt} = S^{**}_{ht\circ g} = S^{**}_g S^{**}_{ht}.$$

Поэтому

$$v_t = S^{**}_{bt}(f_1(y_1)f_2(y_2)\dots f_m(y_m)1(y_{m+1})) = S^{**}_g S^{**}_{ht}(f_1(y_1)f_2(y_2)\dots f_m(y_m)1(y_{m+1})) =$$

$$S^{**}_g(f_1(ty_1)f_2(y_2)\dots f_m(y_m)1(y_{m+1})) = t^s S^{**}_g(f_1(y_1)f_2(y_2)\dots f_m(y_m)1(y_{m+1})) = t^s v_1.$$

$\diamondsuit$

15.1.7 Определение произведения обобщённых функций.

В пунктах 15.1.4 и 15.1.5 мы придали смысл выражению $v(x) = f(g_1(x))$ как обобщённой функции $v \in D'(X)$, где $f(y_1) \in D'(Y_1)$ $k(1)$-мерная обобщённая функция. Построение пунктов 15.1.4 и 15.1.5 дают нам возможность определить и произведение таких обобщённых функций.

Проведём переобозначение по сравнению с пунктами 15.1.4 и 15.1.5. Обозначим $\bar{Y}$ вместо Y_1, Y_0 вместо Y_2, $\bar{n}$ вместо $k(1)$, $k(0)$ вместо $k(2)$, $\bar{g}$ вместо g_1, g_0 вместо g_2. Как и в пункте 15.1.5 допускается случай $k(0) = 0$, тогда $\bar{Y} \equiv Y$, $\bar{g} \equiv g$.

Пусть $\bar{Y} = \prod\limits_{i=1}^{m} Y_i$, где $Y_i \subset \mathbf{R}^{k(i)}$, $i \in \overline{1,m}$ — открытые подмножества и $\bar{n} = \sum\limits_{i=1}^{m} k(i)$. Пусть $f_i \in D'(Y_i)$, $i \in \overline{1,m}$, $f \in D'(Y)$ есть прямое произведение обобщённых функций

$$f(\bar{y}) = f_1(y_1)f_2(y_2)\dots f_m(y_m), \quad \bar{y} \equiv (y_1, y_2, \dots y_m).$$

Пусть для обобщённой функции f и отображения $\bar{g} : X \to \bar{Y}$ выполнены условия A. Тогда согласно пункту 15.1.5 определена обобщённая функция $v(x) \equiv f(\bar{g}(x))$. Если ввести составляющие отображения $g_i : X \to Y_i$, $i \in \overline{1,m}$, $\bar{g}(x) \equiv (g_1(x), g_2(x), \dots g_m(x))$, то

$$v(x) = f_1(g_1(x))f_2(g_2(x))\dots f_m(g_m(x)). \tag{15.1.69}$$

Формула (15.1.69) определяет произведение обобщённых функций $f_i(g_i(x))$, $i \in \overline{1,m}$. При этом количество сомножителей подчиняется условию

$$\sum_{i=1}^{m} k(i) \leq n,$$

в частности, не более n.

Носитель обобщённой функции $f(\bar{g}(x))$ согласно утверждению 15.1.6 равен

$$\operatorname{supp}(v) = S = \bar{g}^{-1}(\operatorname{supp}(f)).$$

Но для прямого произведения обобщённых функций

$$\operatorname{supp}(f) = \prod_{i=1}^{m} \operatorname{supp}(f_i).$$

Поэтому

$$\operatorname{supp}(v) = S \equiv \bigcap_{i=1}^{m} g_i^{-1}(\operatorname{supp}(f_i)). \tag{15.1.70}$$

Мы определим произведение обобщённых функций (15.1.69) при выполнении условий A и указали носитель обобщённой функции-произведения.

В качестве примера рассмотрим теперь произведение одномерных δ-функций.

15.1.8 Произведение одномерных δ-функций.

Пусть $\delta(y) \in D'(\mathbf{R})$ — одномерная δ-функция . В обозначениях п. 15.1.5 полагаем $X = \mathbf{R}^n$ и определим обобщённую функцию $v(x) \in D'(\mathbf{R}^n)$

$$v(x) = \delta(g_1(x))\delta(g_2(x))\dots\delta(g_m(x)), \tag{15.1.71}$$

где $\bar{n} = m \le n$, $g_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i \in \overline{1,m}$, $S = \bigcap\limits_{i=1}^{m} g_i^{-1}(0)$ и выполнены условия A. В силу условий A множество $S \subset \mathbf{R}^n$ будет замкнутой регулярной поверхностью класса$C^{(\infty)}$ в $\mathbf{R}^n$ коразмерности m. Покажем как обобщённая функция $v(x)$ выражается через интеграл по поверхности S.

Возьмём точку $a \in S$ и такую её достаточно малую окрестность $U_a \subset \mathbf{R}^n$, в которой существует диффеоморфное вложение $g : U_a \to Y$, описанное в п. 15.1.5 $Y = \prod\limits_{i=1}^{m+1} Y_i$, $\bar{Y} = \prod\limits_{i=1}^{m} Y_i$, $Y_0 \equiv Y_{m+1}$, $Y = \bar{Y} \times Y_0$. m функций $g_1(x), g_2(x), \dots g_m(x)) \equiv \bar{g}(x)$ задают отображение $\bar{g} : U_a \to \bar{Y}$, соответственно $g_0 : U_a \to Y_0$, $g_0 \equiv g_{m+1}$. Пусть $\varphi \in D(U_a)$. Согласно п. 15.1.5 тогда

$$\begin{gathered}(v, \varphi) = (S_g^{**}(\delta(y_1)\delta(y_2)\dots\delta(y_m)1(y_0)), \varphi) = (\delta(y_1)\delta(y_2)\dots\delta(y_m)1(y_0), S_g^{*}\varphi) = \\ (1(y_0), (\delta(y_1)\delta(y_2)\dots\delta(y_m), S_g^{*}(\varphi)(y_1, y_2, \dots y_m, y_0))).\end{gathered} \tag{15.1.72}$$

Согласно определению оператора $S_g^{*}(\varphi)$ для $g \in \operatorname{Diffin}(U_a, Y)$ — формула (15.1.31) имеем

$$(\delta(y_1)\delta(y_2)\dots\delta(y_m), S_g^{*}(\varphi)(y_1, y_2, \dots y_m, y_0)) = \left(\left| \det \frac{\partial y(x)}{\partial x} \right|_{-1} \varphi(x) \right) \Bigg|_{x = x(0, y_0)}. \tag{15.1.73}$$

Из (15.1.72, 15.1.73) получаем

$$(v, \varphi) = \int\limits_{Y} \left(\left| \det \frac{\partial y}{\partial x}(x) \right|^{-1} \Bigg|_{x = x(0, y_0)} \right) \varphi(x(0, y_0))\, dy_{m+1} dy_{m+2} \dots dy_n. \tag{15.1.74}$$

Согласно правилам интегрирования по площади поверхности [81, с. 763]

$$\int\limits_{S \bigcap U_a} \psi(x) d\sigma(x) = \int\limits_{Y_0} \psi(x(0, y_0)) D(y_0) dy_{m+1} dy_{m+2} \dots dy_n, \tag{15.1.75}$$

где

$$D(y_0) \equiv \left(\det \left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial y_i}, \frac{\partial x}{\partial y_j} \right\rangle \right) \Bigg|_{m+1 \le i, j \le n} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{15.1.76}$$

Из (15.1.74, 15.1.76) получаем

$$(v, \varphi) = \int\limits_{Y_0} \varphi(x(0, y_0)) \left(\left| \det \frac{\partial y}{\partial x}(x) \right| \Bigg|_{x = x(0, y_0)} D(y_0) \right)^{-1} D(y_0) dy_{m+1} dy_{m+2} \dots dy_n. \tag{15.1.77}$$

Согласно формуле (6.1.44) для миноров определителя Грама верно равенство

$$\left| \det \frac{\partial y}{\partial x}(x) \right|^2 \left(\det \left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial y_i}(y), \frac{\partial x}{\partial y_j}(y) \right\rangle \right) \Bigg|_{m+1 \le i, j \le n} \right) \Bigg|_{y = y(x)} = \tag{15.1.78}$$

$$\det\left(\left\langle \frac{\partial y_i}{\partial x}(x), \frac{\partial y_j}{\partial x}(x)\right\rangle\right)\Big|_{1\le i,j\le m}.$$

Из формул (15.1.75), (15.1.77), (15.1.78) получаем следующий результат

$$(v,\varphi) = \int\limits_{S\cap U_a} \varphi(x)\rho(x)\,d\sigma(x), \tag{15.1.79}$$

где

$$\rho(x) \equiv \left(\det\left(\left\langle \frac{\partial y_i}{\partial x}(x), \frac{\partial y_j}{\partial x}(x)\right\rangle\right)\Big|_{1\le i,j\le m}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{15.1.80}$$

В частном случае $m = n$ из (15.1.72), (15.1.73) следует, что

$$(v,\varphi) = \left|\det\frac{\partial g}{\partial x}(x)\right|^{-1}_{x=g^{-1}(0)} \varphi(g^{-1}(0)) = \rho(g^{-1}(0))\varphi(g^{-1}(0)), \tag{15.1.81}$$

т.е. в этом случае интеграл (15.1.79) следует понимать как взятие значения подынтегральной функции в точке $x = g^{-1}(0)$, в которую в этом случае вырождается поверхность $S\cap U_a$.

Общее выражение для действия обобщённой функции $v \in D'(\mathbf{R}^n)$ на основную функцию $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ в силу формулы (15.1.79) будет

$$(v,\varphi) = \int\limits_{S} \varphi(x)\rho(x)\,d\sigma(x). \tag{15.1.82}$$

В частном случае $m = 1$ будет $\bar{g} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ и $\bar{g}(x) = g_1(x)$. Обозначим в этом случае $g(x) \equiv g_1(x)$. Тогда $S = \mathrm{Nul}\,(g) \equiv \{x \in \mathbf{R}^n \;\big|\; g(x) = 0\}$. Условия A принимают вид: 1) множество $S \subset \mathbf{R}^n$ замкнуто; 2) в некоторой открытой окрестности $U\,S \subset \mathbf{R}^n$ множества S функция $g \in C^{(\infty)}(U\,S)$; 3) при $x \in S$ верно $\frac{\partial g}{\partial x}(x) \neq 0$. В этом частном случае $\rho(x) = |\frac{\partial g}{\partial x}(x)|^{-1}$ и формула (15.1.82) принимает вид

$$(\delta(g(x)),\varphi) = \int\limits_{S} \frac{\varphi(x)}{|\frac{\partial g}{\partial x}(x)|}\,d\sigma(x). \tag{15.1.83}$$

Тогда при выполнении условий A получаем

$$\left(\delta\left(\frac{g(x)}{|\frac{\partial g}{\partial x}(x)|}\right),\varphi\right) = \int\limits_{S} \varphi(x)\,d\sigma(x). \tag{15.1.84}$$

Формула (15.1.83) позволяет естественно определить обобщённую функцию $\delta(g(x))$ и в случае, когда производная $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ обращается в нуль в некоторых точках поверхности S. Рассмотрим соответствующий пример, когда $g(x)$ — квадратичная форма.

15.1.9 Суперпозиция 1-мерной δ-функции с квадратичной формой.

Пусть $q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ есть квадратичная форма, т.е. существует матрица $B \in Ms(n,\mathbf{R})$, что $q(x) = \langle x, Bx\rangle$. Потребуем в этом пункте выполнения трёх условий: 1) $n \geq 3$; 2) квадратичная форма невырождена, т.е. $B \in \mathrm{GL}\,(n,\mathbf{R})$; 3)квадратичная форма знакопеременная. Покажем, что при выполнении этих условий формула (15.1.83) задаёт обобщённую функцию $\delta(g(x)) \in D'(\mathbf{R}^n)$.

Проводя, если необходимо, линейную невырожденную замену переменных, приведём квадратичную форму к виду

$$q(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2, \tag{15.1.85}$$

$k \in \overline{1,(n-1)}$. Тогда $\frac{\partial q(x)}{\partial x} = 2(x_1, x_2, \dots x_k, -x_{k+1}, -x_{k+2}, \dots - x_n)$ и $|\frac{\partial q}{\partial x}(x)| = 2|x|$. В силу построения п. 15.1.5 у любой точки $a \neq 0$, $a \in \mathbf{R}^n$ существует открытая окрестность $U_a \subset \mathbf{R}^n$ что для $\varphi \in D(U_a)$ определено действие обобщённой функции $\delta(q(x))$ формулой

$$(\delta(q(x)), \varphi) = \int\limits_{U_a \cap S} \frac{\varphi(x)}{2|x|}\, d\sigma(x). \tag{15.1.86}$$

Однако, формула (15.1.86) определяет обобщённую функцию порядка 0 и в окрестности нуля.

В самом деле, пусть $U_0 \equiv \{x \in \mathbf{R}^n \bigm| |x| < 1\}$, $\varphi \in D(U_0)$, тогда

$$\int\limits_{S} \frac{\varphi(x)}{2|x|}\, d\sigma(x) = \frac{1}{2} \int\limits_{S \cap U_0} \frac{\varphi(x)}{|x|}\, d\sigma(x) \tag{15.1.87}$$

и справедлива оценка

$$\left| \frac{1}{2} \int\limits_{S \cap U_0} \frac{\varphi(x)}{|x|}\, d\sigma(x) \right| \leq \left(\sup_{x \in U_0} |\varphi(x)| \right) \frac{1}{2} \int\limits_{S \cap U_0} \frac{1}{|x|}\, d\sigma(x). \tag{15.1.88}$$

Сосчитаем величину $\int\limits_{S \cap U_0} \frac{1}{|x|}\, d\sigma(x)$. Для этого введём на поверхности S параметризацию $x = (x', x'')$, где $x' \equiv (x_1, x_2, \dots x_k)$, $x'' \equiv (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots x_n)$ и

$$x' = rn', \quad n' \in \Omega_{k-1}, \tag{15.1.89}$$

$$x'' = rn'', \quad n'' \in \Omega_{n-k-1}, \tag{15.1.90}$$

$r \in [0, \infty]$. Здесь Ω_m — единичная сфера в$\mathbf{R}^{m+1}$. Тогда $d\sigma(x) = r^{k-1} d\sigma'\, r^{n-k-1}\, d\sigma'' dr = r^{n-2}\, d\sigma' d\sigma''$, где $d\sigma'$ и $d\sigma''$ есть элементы площади единичных сфер Ω_{k-1} и Ω_{n-k-1} соответственно. Получаем для интеграла

$$\int\limits_{S \cap U_0} \frac{1}{|x|}\, d\sigma(x) = \int\limits_0^1 \frac{r^{n-2}}{r} \int\limits_{\Omega_{k-1}} d\sigma' \int\limits_{\Omega_{n-k-1}} d\sigma'' dr = \frac{1}{n-2} \sigma(\Omega_{k-1}) \sigma(\Omega_{n-k-1}) < \infty, \tag{15.1.91}$$

здесь $\sigma(\Omega_m)$ — площадь m-мерной сферы. В случае $m = 0$ по определению полагаем $\sigma(\Omega_0) = 2$ для справедливости равенства (15.1.91).

Итак, мы определили обобщённую функцию $\delta(q(x))$ при указанных условиях на квадратичную форму и доказали что она имеет порядок 0. Согласно п. 15.1.6 при $t \in \mathbf{R}_+$ имеем $\delta(q(tx)) = \delta(t^2 q(x)) = \frac{1}{t^2} \delta(q(x))$, т.е. построенная обобщённая функция однородна степени $s = -2$. Покажем также что $\delta(q(x)) \in S'(\mathbf{R}^n)$. Но это следует из неравенства

$$|(\delta(q(x)), \varphi(x))| \leq C(p) \cdot \sup_{\substack{x \in \mathbf{R}^n \\ \alpha \in \mathbf{N}_o{}^n, |\alpha| \leq p}} \left\{ \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{p}{2}} |\varphi^{(\alpha)}(x)| \right\}, \tag{15.1.92}$$

где $p > n-2$, $p \in \mathbf{N}$ и

$$C(p) = \frac{1}{2}\int\limits_S \frac{1}{|x|\,(1+|x|^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\sigma(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{r^{n-3}}{(1+r^2)^{\frac{p}{2}}}dr\cdot\sigma(\Omega_{k-1})\sigma(\Omega_{n-k-1}). \qquad (15.1.93)$$

15.1.10 Пример вычислений произведения обобщённых функций.

Применим построение п. 15.1.8 в случае $X = \mathbf{R}^n$, $m = 2$, $k(1) = k(2) = 1$, $f_1 \in D'(\mathbf{R})$, $f_1(y) = \delta^{(k)}(y)$, $k \in \mathbf{N}_o$, $f_2 \in D'(\mathbf{R})$, $f_2(y) = \delta(y)$. А функции: $g_1(x) \equiv \langle z, x\rangle$, $z \in \mathbf{R}^n$, $z \neq 0$; $g_2(x) = |x| - 1$. Получаем обобщённую функцию

$$v_k(x) \equiv \delta^{(k)}(\langle z, x\rangle)\delta(|x|-1) \qquad (15.1.94)$$

с компактным носителем

$$S = \{x \in \mathbf{R}^n \;\big|\; (|x| = 1) \wedge (\langle z, x\rangle = 0)\}, \qquad (15.1.95)$$

поскольку выполнены условия A.

Положим $p \equiv \frac{z}{|z|}$, $z = |z|p$. Функция $\delta^{(k)}(y) \in D'(\mathbf{R})$ однородная степени $s = -(k+1)$ (пример 15.1.2). Согласно п. 15.1.6 тогда

$$v_k(x) = \delta^{(k)}(|z|\langle p, x\rangle)\delta(|x|-1) = \frac{1}{|z|^{k+1}}\delta^{(k)}(\langle p, x\rangle)\delta(|x|-1)$$

или

$$v_k(x) = \frac{1}{|z|^{k+1}} vn_k(x), \qquad (15.1.96)$$

где

$$vn_k(x) \equiv \delta^{(k)}(\langle p, x\rangle)\delta(|x|-1), \quad |p| = 1. \qquad (15.1.97)$$

Пусть $a \in S$ и $U_a \subset \mathbf{R}^n$ достаточно малая окрестность точки a, в которой определён локальный диффеоморфизм $g : U_a \to Y_1 \times Y_2 \times Y_3$, $g \in \operatorname{Diff}(U_a, Y_1 \times Y_2 \times Y_3)$. Здесь $Y_1 \subset \mathbf{R}$ и $Y_2 \subset \mathbf{R}$ открытые интервалы, содержащие точку 0, $Y_3 \subset \mathbf{R}^{n-2}$ — открытое множество. Согласно построению п. 15.1.5

$$v_k\Big|_{U_a} = S_g^{**}(\delta^{(k)}(y_1)\delta(y_2)1(y_3)) = S_g^{**}\left(\left(\frac{\partial^{**}}{\partial y_1}\right)^k \delta(y_1)\delta(y_2)1(y_3)\right) = \qquad (15.1.98)$$

$$S_g^{**}\left(\frac{\partial^{**}}{\partial y_1}\right)^k S_g^{**-1} S_g^{**}(\delta(y_1)\delta(y_2)1(y_3)) = S_g^{**}\left(\frac{\partial^{**}}{\partial y_1}\right)^k S_g^{**-1} v_0|_{U_a}.$$

Поэтому для $\varphi \in D(U_a)$ получаем

$$(v_k, \varphi) = \left(S_g^{**}\left(\frac{\partial^{**}}{\partial y_1}\right)^k S_g^{**-1} v_0, \varphi\right) = \left(v_0, S_g^{*-1}\left(\frac{\partial^{*}}{\partial y_1}\right)^k S_g^{*}\varphi\right). \qquad (15.1.99)$$

Согласно п. 15.1.8, тогда

$$(vn_k, \varphi) = \int\limits_{S\cap U_a} \left(S_g^{*-1}\left(\frac{\partial^{*}}{\partial y_1}\right)^k S_g^{*}\varphi\right)(x)\,d\sigma(x), \qquad (15.1.100)$$

ибо согласно формуле (15.1.80)

$$\rho(x)|_S = \left(\left| \begin{matrix} \langle p,p\rangle & \langle p, \frac{x}{|x|}\rangle \\ \langle p, \frac{x}{|x|}\rangle & \langle \frac{x}{|x|}, \frac{x}{|x|}\rangle \end{matrix} \right| \right)^{-\frac{1}{2}} \Bigg|_S = 1. \qquad (15.1.101)$$

Пусть $\Omega_k = x \in \mathbf{R}^k + 1 \;\Big|\; |x| = 1$ единичная сфера размерности $k \in \mathbf{N}_o$. Ω_k есть дифференцируемое многообразие класса C^∞ и $S = \Omega_{n-2}$. Пусть $p \in \mathbf{R}^n$, $|p| = 1$ и $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$. Введём открытое множество

$$G_\varepsilon \equiv \{x \in \mathbf{R}^n \;\Big|\; (|\langle p, x\rangle| < \varepsilon) \wedge (||x| - 1| < \varepsilon)\} \qquad (15.1.102)$$

и три отображения $g_1 : G \to I_\varepsilon$, $g_2 : G \to I_\varepsilon$, $g_3 : G \to S$, где $I_\varepsilon \equiv]-\varepsilon, \varepsilon[$, а отображения задаются формулами

$$y_1 = g_1(x) \equiv \langle p, x\rangle, \qquad (15.1.103)$$

$$y_2 = g_2(x) \equiv |x| - 1, \qquad (15.1.104)$$

$$h = g_3(x) \equiv \frac{x - p\langle p, x\rangle}{|x - p\langle p, x\rangle|}. \qquad (15.1.105)$$

В силу равенства

$$|x - p\langle p, x\rangle|^2 = \langle x - p\langle p, x\rangle, x - p\langle p, x\rangle\rangle = |x|^2 - \langle p, x\rangle^2, \qquad (15.1.106)$$

если $x \in G_\varepsilon$, то

$$|x - p\langle p, x\rangle| > (1-\varepsilon)^2 - \varepsilon^2 = 1 - 2\varepsilon > 0.$$

Поэтому отображения g_1, g_2, g_3 класса $C^{(\infty)}(G_\varepsilon)$. Отображение $g(x) \equiv (g_1(x), g_2(x), g_3(x))$ есть отображение $g : G_\varepsilon \to I_\varepsilon^2 \times S$ класса $C^{(\infty)}$ многообразия G_ε на произведение многообразий $I_\varepsilon^2 \times S$. В силу (15.1.106) обратное отображение $g^{-1} : I_\varepsilon^2 \times S \to G_\varepsilon$ есть

$$x = y_1 p + \sqrt{(y_2+1)^2 - y_1^2}\, h \equiv g^{-1}(y_1, y_2, h). \qquad (15.1.107)$$

Таким образом и отображение класса $C^{(\infty)}$. Мы построим диффеоморфизм $g \in \mathrm{Diff}\,(G_\varepsilon, I_\varepsilon^2 \times S)$ многообразия G_ε и многообразия $I_\varepsilon^2 \times S$.

В силу формул (15.1.96) и (15.1.100) для основной функции $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ справедливо равенство

$$(v_k, \varphi) = \frac{1}{|z|^{k+1}} \int\limits_S \left(S_g^{*-1} \left(\frac{\partial^*}{\partial y_1} \right)^k S_g^* \varphi \right)(x)\, d\sigma(x) = \qquad (15.1.108)$$

$$\frac{1}{|z|^{k+1}} \int\limits_S \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)^k \varphi(y_1 p + \sqrt{1 - y_1^2}\, h) \right) \Bigg|_{y_1=0} d\sigma(h).$$

В частном случае $n = 2$ множество S состоит из 2 точек $S = \{a, -a\}$, где $a \equiv (-p_2, p_1)$ и интеграл (15.1.108) понимается как сумма значений в этих двух точках

$$(v_k, \varphi) = \qquad (15.1.109)$$

$$\frac{1}{|z|^{k+1}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)^k \varphi(y_1 p + \sqrt{1 - y_1^2}\, h) \Bigg|_{\substack{y_1=0 \\ h=a}} + \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)^k \varphi(y_2 p + \sqrt{1 - y_1^2}\, h) \Bigg|_{\substack{y_1=0 \\ h=-a}} \right).$$

15.1.11 Умножение произведения δ-функций на локально суммируемую функцию.

Пусть выполнены предположения п. 15.1.8 и определена обобщённая функция $v \in D'(X)$ вида (15.1.71). Тогда для основной функции $\varphi \in D(X)$ верна формула (15.1.82). Из формулы (15.1.82) следует, что если $f(x)$ локально суммируемая функция $F \in L_{loc}(X)$, допускающая локализацию на носителе S обобщённой функции v до локально-суммируемой функции $f_S \in L_{loc}(S)$, то определена обобщённая функция-произведение $u(x) \equiv f(x)v(x)$, $u \in D'(X)$ формулой

$$\forall \varphi \in D(X) \;\Big|\; (fv, \varphi) \equiv \int\limits_S f(x)\rho(x)\varphi(x)dx. \tag{15.1.110}$$

15.1.12 Простой вид формулы замены переменных.

Возвратимся к пункту 15.1.1. Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$ и $Y \subset \mathbf{R}^n$ открытые множества и $g \in \operatorname{Diff}(X, Y)$ диффеоморфизм $y = g(x)$ множеств X и Y. Если функция $f(y)$ локально суммируема на Y, т.е. $f \in L_{loc}(Y)$ а функция $\varphi(y) \in D(Y)$, то существует интеграл $\int\limits_Y f(y)\varphi(y)\,dy$ и справедлива формула замены переменных в интеграле Лебега [81, с. 746]

$$\int\limits_Y f(y)\varphi(y)\,dy = \int\limits_X f(g(x))\left|\det\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right|\varphi(g(x))dx. \tag{15.1.111}$$

После того как в п. 15.1.1 мы для обобщённой функции $f(y) \in D'(Y)$ и диффеоморфизма $g \in \operatorname{Diff}(X, Y)$ придали смысл символу $f(g(x)) \equiv (S_g^{**}f)(x)$ мы можем записать формулу замены переменных для обобщённых функций в форме, аналогичной (15.1.111). А именно, для любого диффеоморфизма $g \in \operatorname{Diff}(X, Y)$, для любой обобщённой функции $f \in D'(Y)$ и любой основной функции $\varphi \in D(Y)$ верно равенство

$$(f(y), \varphi(y)) = \left(f(g(x)), \left|\det\frac{\partial g}{\partial x}(x)\right|\varphi(g(x))\right). \tag{15.1.112}$$

В самом деле

$$(f, \varphi) = (f, S_g^* S_{g^{-1}}^* \varphi) = (S_g^{**}f, S_{g^{-1}}^*\varphi) = \left(S_g^{**}f, g^*\left(\left|\det\frac{\partial x}{\partial y}(y)\right|^{-1}\varphi(y)\right)\right) =$$

$$\left(f(g(x)), \left|\det\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right|\varphi(g(x))\right).$$

При фиксированных $g \in \operatorname{Diff}(X, Y)$ и $f \in D'(Y)$ выполнение формулы (15.1.112) для всех $\varphi \in D(Y)$ является определением обобщённой функции $f(g(x)) \in D'(X)$.

15.1.13 Разбиение единицы.

Пусть $G \subset \mathbf{R}^n$ открытое множество.

Определение 15.1.2 *Множество функций $\varphi_j \in D(G)$, занумерованных индексом $j \in J$, называется разбиением единицы на открытом множестве G, если выполнены условия:*

1)Для всякого индекса $j \in J$ функция φ_j есть отображение $\varphi_j : G \to [0, 1]$;

2)Система множеств $\{\operatorname{supp}(\varphi_j)\}_{j\in J}$ локально конечна, т.е. для любой точки $x \in G$ существует её окрестность U_x, что $\operatorname{supp}(\varphi_j)\bigcap U_x \neq \phi$ лишь для конечного числа индексов $j \in J$;

3) $\forall x \in G \;\Big|\; \sum\limits_{j\in J}\varphi_j(x) = 1$.

Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ система открытых подмножеств $U_i \subset G$ множества G, такая что $G = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, т.е. открытое покрытие множества G. Разбиение единицы $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ *подчинено* открытому покрытию $\{U_i\}_{i\in I}$, если существует отображение $\alpha : J \to I$, что для любого $j \in J$ верно включение $\mathrm{supp}\,(\varphi_j) \subset U_{\alpha(j)}$.

Утверждение 15.1.10 *([62, с.66]) Для любого непустого открытого множества $G \subset \mathbf{R}^n$ и любого его открытого покрытия $\{U_i\}_{i\in I}$ существует подчинённое ему разбиение единицы на G.*

Пусть $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ разбиение единицы на открытом множестве G и $K \subset G$ компакт. Конечную подсистему функций $\{\varphi_j\}_{j\in F}$, где $F \subset J$ конечное подмножество, назовём *ассоциированной с компактом* K , если $\sum_{j\in F} \varphi_j(x) = 1$ для всех точек x из некоторой окрестности компакта K.

Утверждение 15.1.11 *Если $\{\varphi_j\}_{i\in J}$ разбиение единицы на открытом множестве $G \subset \mathbf{R}^n$ и подмножество $K \subset G$ компакт, то существует конечная подсистема функций $\{\varphi_j\}_{j\in F}$, ассоциированная с компактом K.*

Доказательство. Так как множество $K \subset G$ компакт и множество $\mathbf{R}^n \setminus G$ замкнуто, то существует число $\varepsilon > 0$, что множество $K_\varepsilon \equiv \{x \in \mathbf{R}^n \,\big|\, \rho(x,K) \le \varepsilon\} \subset G$, где $\rho(x,K)$ — расстояние от точки $x \in \mathbf{R}^n$ до множества K. Множество K_ε также компакт, ибо замкнуто и ограничено. У каждой точки $x \in K_\varepsilon$ существует окрестность $U_x \subset G$, пересекающаяся лишь с конечным числом носителей $\mathrm{supp}\,(\varphi_j), j \in J$. Из открытого покрытия компакта K_ε множествами $\{U_x\}_{x\in K_\varepsilon}$ выделим конечное подпокрытие $\{U_{x_s}\}_{s\in\overline{1,m}}$. Итак, лишь для конечного множества индексов $F \subset J$ верно $K_\varepsilon \cap \mathrm{supp}\,(\varphi_j) \ne \emptyset$. Тогда для $x \in K_\varepsilon$ верно $\sum\limits_{j\in F} \varphi_j(x) = 1$. $\diamondsuit$

15.1.14 Два свойства однородных функций.

Пусть $f \in D'(\mathbf{R}^n)$ однородная обобщённая функция с носителем в нуле. Тогда существует $m \in \mathbf{N}_o$, и существует массив чисел $C_\alpha \in \mathbf{C}$, $\alpha \in {\mathbf{N}_o}^n$, $|\alpha| \le m$, что для любой основной функции $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ верно

$$(f,\varphi) = \sum_{\substack{\alpha\in{\mathbf{N}_o}^n \\ |\alpha|\le m}} C_\alpha \varphi^{(\alpha)}(0).$$

Пусть степень однородности f равна $s \in \mathbf{R}$, тогда для любого $t \in \mathbf{R}_+$ и любой основной функции $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$

$$(S_{lt}^{**} f, \varphi) = t^s (f,\varphi) = t^s \sum_{k=0}^{m} \sum_{\substack{\alpha\in{\mathbf{N}_o}^n \\ |\alpha|=k}} C_\alpha \varphi^{(\alpha)}(0). \tag{15.1.113}$$

С другой стороны

$$(S_{lt}^{**} f, \varphi) = (f, S_{lt}^{*}\varphi) = (f(x), t^{-n} lt^{-1*}\varphi) = t^{-n}\left(f(x), \varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right) = \tag{15.1.114}$$

$$t^{-n} \sum_{k=0}^{m} t^{-k} \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha \varphi^{(\alpha)}(0).$$

Из (15.1.113, 15.1.114) получаем, что при всех $t \in \mathbf{R}_+$ верно

$$t^{m+n+s}\sum_{k=0}^{m}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{N}_o{}^n\\|\alpha|=k}} C_\alpha\varphi^{(\alpha)}(0)=\sum_{k=0}^{m}t^{m-k}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{N}_o{}^n\\|\alpha|=k}} C_\alpha\varphi^{(\alpha)}(0), \tag{15.1.115}$$

где справа стоит полином от аргумента t. Из равенства (15.1.115) следует, что: 1) при некотором $k \in \mathbf{N}_o$ $n+s=-k$ или $s=-(n+k)$; 2) $(f,\varphi)=\sum\limits_{\substack{\alpha\in\mathbf{N}_o{}^n\\|\alpha|=k}} C_\alpha\varphi^{(\alpha)}(0)$.

Доказано

Утверждение 15.1.12 *Если $f \in D'(\mathbf{R}^n)$ однородная обобщённая функция с точечным носителем в нуле, то:*

1)существует число $k \in \mathbf{N}_o$, что степень однородности $s=-(n+k)$;

2)существует набор констант $C_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbf{N}_o{}^n$, $|\alpha|=k$, что для любой основной функции $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ верно

$$(f,\varphi)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{N}_o{}^n\\|\alpha|=k}} C_\alpha\varphi^{(\alpha)}(0).$$

Следствие 15.1.3 *Если степень однородности s однородной обобщённой функции $f \in D'(\mathbf{R}^n)$ с носителем в нуле $s \notin \{-(n+\mathbf{N}_o)\}$, то $f=0$.*

Однородность сохраняется при взятии свёртки двух однородных обобщённых функций.

Утверждение 15.1.13 *Пусть f_1 и f_2 обобщённые функции из $D'(\mathbf{R}^n)$ однородные степени s_1 и s_2 и существует свёртка $f_1 * f_2$ из $D'(\mathbf{R}^n)$, тогда свёртка – однородна степени s_1+s_2+n.*

Доказательство. По определению свёртки обобщённых функций (см.[24, с. 63]) для основной функции $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ существует предел

$$(f_1*f_2,\varphi)=\lim_{k\to\infty}(f_1(x)f_2(y),\eta_k(x,y)\varphi(x+y))$$

для любой последовательности $\{\eta_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ функций $\eta_k \in D(\mathbf{R}^{2n})$ сходящейся к 1 в $\mathbf{R}^{2n}$ в смысле ([24, с.63]). Тогда для любого $t \in \mathbf{R}_+$

$$(S_{lt}^{**}(f_1*f_2),\varphi)=(f_1*f_2,S_{lt}^{*}\varphi)=\lim_{k\to\infty}(f_1(x)f_2(y),\eta_k(x,y)S_{lt}^{*}\varphi\Big|_{x+y}). \tag{15.1.116}$$

Преобразуем последнее выражение

$$A\equiv(f_1(x)f_2(y),\eta_k(x,y)S_{lt}^{*}\varphi\Big|_{x+y})=\left(f_1(x),\left(f_2(y),\eta_k(x,y)t^{-n}\varphi\left(\frac{x+y}{t}\right)\right)\right)= \tag{15.1.117}$$

$$\left(f_1(x),\left(f_2(y),S_{lt,y}^{*}\eta_k(x,ty)\varphi\left(\frac{x}{t}+y\right)\right)\right)=\left(f_1(x),\left(S_{lt,y}^{**}f_2(y),\eta_k(x,ty)\varphi\left(\frac{x}{t}+y\right)\right)\right)=$$

$$t^{s_2}\left(f_1(x)f_2(y),\eta_k(x,ty)\varphi\left(\frac{x}{t}+y\right)\right).$$

Аналогичным образом используем теперь однородность обобщённой функции $f_1(x)$:

$$A=t^{s_2}\left(f_1(x)f_2(y),\eta_k(x,ty)\varphi\left(\frac{x}{t}+y\right)\right)=t^{s_2+n}(f_2(y),(f_1(x),S^{*}_{lt,x}\eta_k(tx,ty)\varphi(x+y)))=$$
$$t^{s_2+n}(f_2(y),(S^{**}_{lt,x}f_1(x),\eta_k(tx,ty)\varphi(x+y)))=t^{s_1+s_2+n}(f_1(x)f_2(y),\eta_k(tx,ty)\varphi(x+y)). \quad (15.1.118)$$

Последовательность $\{\eta_k(tx,ty)\}_{k\in\mathbf{N}}$ также сходится к 1 в $\mathbf{R}^{2n}$, поэтому

$$(S^{**}_{lt}(f_1*f_2),\varphi)=t^{s_1+s_2+n}\lim_{k\to\infty}(f_1(x)f_2(y),\eta_k(tx,ty)\varphi(x+y))=t^{s_1+s_2+n}(f_1*f_2,\varphi).$$

♢

§15.2 Повторные обобщённые функции

В этом параграфе мы перейдем к построению повторных обобщённых функций — аналога теоремы Фубини-Лебега для обобщённых функций.

Пусть $X_1\subset\mathbf{R}^{m_1}$ и $X_2\subset\mathbf{R}^{m_2}$ — непустые открытые множества, $n=m_1+m_2$ и $X\equiv X_1\times X_2$. $X\subset\mathbf{R}^n$ — также открытое множество. Пусть $f\in C(X)$ непрерывная функция со значениями в $\mathbf{C}$, тогда f задаёт регулярную обобщённую функцию из $D'(X)$, которую мы обозначаем тем же символом $f\in D'(X)$.

Введём обозначение точки над переменной, соответствующей её фиксации. Если $f(x_1,x_2)$ есть отображение $f:X_1\times X_2\to\mathbf{C}$, то $f(x_1,\dot{x}_2)$ обозначает отображение X_1 в $\mathbf{C}$ при фиксированном $x_2\in X_2$. Мы используем также и второе обозначение фиксации одной переменной в этой главе. А именно $f(+,x_2):X_1\to\mathbf{C}$ есть отображение, определенное правилом $f(+,x_2)(x_1)\equiv f(x_1,x_2)$.

Для функции $f\in C(X_1\times X_2)$ мы для любого фиксированного $x_2\in X_2$ получаем функцию $f(x_1,\dot{x}_2)$ из $C(X_1)$, а для любого фиксированного $x_1\in X_1$ получаем функцию $f(\dot{x}_1,x_2)$ из $C(X_2)$. Пусть $\varphi_1\in D(X_1),\varphi_2\in D(X_2)$, тогда произведение $\varphi_1\varphi_2\in C(X_1\times X_2)$ и $(f,\varphi_1\varphi_2)=\int\limits_{X_1\times X_2}\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\,dx_1dx_2$. По теореме Фубини-Лебега получаем

$$(f,\varphi_1\varphi_2)=\int\limits_{X_1}\varphi_1(x_1)\left(\int\limits_{X_2}f(x_1,x_2)\varphi_2(x_2)\,dx_2\right)dx_1=$$

$$\int\limits_{X_2}\varphi_2(x_2)\left(\int\limits_{X_1}f(x_1,x_2)\varphi_1)\,dx_1\right)dx_2$$

Итак, имеют место два свойства.

Свойство 15.2.1 *При любой фиксированной основной функции $\varphi_1\in D(X_1)$ существует обобщённая функция $f_{\varphi_1}\in D(X_2)$, что верно*

$$\forall\varphi_2\in D(X_2)\;\Big|\;(f,\varphi_1\varphi_2)=(f_{\varphi_1},\varphi_2). \quad (15.2.1)$$

Свойство 15.2.2 *$f_{\varphi_1} \in D'(X_2)$ есть регулярная обобщённая функция, представимая непрерывной функцией $\chi(x_2)$ вида*

$$\chi(x_2) \equiv \int\limits_{X_2} f(x_1, x_2)\varphi_1(x_1)\, dx_1 = (f(x_1, \dot{x}_2), \varphi_1(x_1))\,, \tag{15.2.2}$$

где $f(x_1, \dot{x}_2) \in D'(X_1)$ при любых фиксированных $x_2 \in X_2$.

Задача данного параграфа — перенести свойство 15.2.1, а в ряде случаев и свойство 15.2.2 на более широкий класс обобщённых функций на произведении $X_1 \times X_2 = X$.

Замечание 15.2.1 *Соотношение (15.2.2) даёт нам пример употребления точки над переменной. Она действует лишь в первом применении, фиксируя в функции $f(x_1, \dot{x}_2)$ переменную x_2, далее величина $\chi(x_2)$ уже рассматривается как функция меняющейся переменной $x_2 \in X_2$.*

15.2.1 Определение повторных обобщённых функций.

Введём отображение $\Pi^* : D(X_1) \times D(X_2) \to D(X_1 \times X_2)$ формулой

$$\forall \varphi_1 \in D(X_1)\ \forall \varphi_2 \in D(X_2)\ \Big|\ \Pi^*(\varphi_1, \varphi_2) \equiv \varphi_1\varphi_2, \tag{15.2.3}$$

сопоставляющее двум основным функциям $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_2(x_2)$ их произведение $\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$. Тогда при любом фиксированном элементе $\varphi_2 \in D(X_2)$ отображение

$$\Pi^*(+, \varphi_2) : D(X_1) \to D(X_1 \times X_2)$$

линейно и непрерывно и при любом фиксированном элементе $\varphi_1 \in D(X_1)$ отображение

$$\Pi^*(\varphi_1, +) : D(X_2) \to D(X_1 \times X_2)$$

линейно и непрерывно. По утверждению 15.1.1 определены сопряженные линейные непрерывные отображения

$$\Pi^{**}(+, \varphi_2) : D'(X_1 \times X_2) \to D'(X_1),$$

$$\Pi^{**}(\varphi_2, +) : D'(X_1 \times X_2) \to D'(X_2).$$

Итак, для обобщённой функции $f \in D'(X_1, X_2)$ определены две *повторные обобщённые функции* $\Pi^{**}(+, \varphi_2)f \in D'(X_1)$ и $\Pi^{**}(\varphi_1, +)f \in D'(X_2)$.

По определению отображений Π^*, $\Pi^*(+, \varphi_2)$, $\Pi^*(\varphi_1, +)$, если $\varphi_1 \in D(X_1)$ и $\varphi_2 \in D(X_2)$, то

$$\Pi^*(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1\varphi_2 = \Pi^*(+, \varphi_2)\varphi_1 = \Pi^*(\varphi_1, +)\varphi_2. \tag{15.2.4}$$

Кроме того, если $f \in D'(X_1, X_2)$, то верны равенства

$$(\Pi^{**}(+, \varphi_2)f, \varphi_1) = (f, \Pi^*(+, \varphi_2)\varphi_1) = (f, \varphi_1\varphi_2)\,, \tag{15.2.5}$$

$$(\Pi^{**}(\varphi_1, +)f, \varphi_2) = (f, \Pi^*(\varphi_1, +)\varphi_2)) = (f, \varphi_1\varphi_2)\,. \tag{15.2.6}$$

Наша задача в этом параграфе — построение обобщённых функций $\Pi^{**}(+, \varphi_2)f$ и $\Pi^{**}(\varphi_1, +)f$.

Предварительно дадим оценку носителя повторной обобщённой функции $\Pi^{**}(\varphi_1, +)f$ через носители элементов φ_1 и f. Для любых множеств $A \subset X_1$ и $S \subset X_1 \times X_2$ Введём множество $B \subset X_2$, обозначаемое $B \equiv A \circ S$ и определяемое формулой

$$A \circ S \equiv \Big\{ x_2 \in X_2\ \Big|\ \exists x_1 \in A\ \Big|\ (x_1, x_2) \in S \Big\}\,. \tag{15.2.7}$$

Утверждение 15.2.1 *Если множество $A \subset X_1$ — компакт, и множество $S \subset X_1 \times X_2$ замкнуто, то множество $B = A \circ S$ замкнуто.*

Доказательство. Пусть $x_{2n} \in B$ при любом $n \in \mathbf{N}$ и последовательность $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ сходится к элементу $x_{20} \in X_2$. Согласно определяющей формуле (15.2.7) тогда существует последовательность элементов $x_{1n} \in A, n \in \mathbf{N}$, что $(x_{1n}, x_{2n}) \in S$. Так как множество A — компакт, существует подпоследовательность $\{x_{1n_k}\}_{k\in\mathbf{N}}$ последовательности $\{x_{1n}\}_{n\in\mathbf{N}}$, сходящаяся к некоторой точке $x_{10} \in A$. Так как множество S замкнуто в произведении $X_1 \times X_2$, то последовательность $\{(x_{1nk}, x_{2nk}\}_{k\in\mathbf{N}}$ сходится к точке $(x_{10}, x_{20}) \in S$. Получаем согласно (15.2.7), что $x_{20} \in B$. $\diamondsuit$

Перейдем к оценке носителя повторной функции.

Лемма 15.2.1 *Для* $f \in D'(X_1 \times X_2), \varphi_1 \in D(X_1)$ *верно включение*

$$\operatorname{supp}\,(\Pi^{**}(\varphi_1, +)f) \subset \operatorname{supp}\,(\varphi_1) \circ \operatorname{supp}\,(f). \tag{15.2.8}$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что носитель обобщённой функции $S \equiv \operatorname{supp}\,(f) \subset X_1 \times X_2$ есть замкнутое множество, а носитель основной функции $A \equiv \operatorname{supp}\,(\varphi_1) \subset X_1$ есть компакт и по утверждению 15.2.1 множество $B \equiv A\circ S$ замкнуто в X_2. Далее, согласно определяющему соотношению (15.2.7) принадлежность $a_2 \in A \circ S$ эквивалентна соотношению

$$(A \times \{a_2\}) \cap S \neq \emptyset.$$

Поэтому условие $a_2 \notin A \circ S$ эквивалентно соотношению

$$(A \times \{a_2\}) \cap S = \emptyset. \tag{15.2.9}$$

Множество $S \subset X_1 \times X_2$ замкнуто, а множества $A \subset X_1$ и $\{a_2\} \subset X_2$ — компакты. По теореме Уоллеса [84, с. 220] найдутся открытые множества $G_1 \subset X_1$ и $G_2 \subset X_2$, что $A \subset G_1, \{a_2\} \subset G_2$ и $(G_1 \times G_2) \cap S = \emptyset$.

Для любой основной функции $\varphi_2 \in D(G_2)$ будет

$$(f, \varphi_1\varphi_2) = 0, \tag{15.2.10}$$

ибо $\operatorname{supp}\,(f) = S, \operatorname{supp}\,(\varphi_1\varphi_2) = \operatorname{supp}\,(\varphi_1) \times \operatorname{supp}\,(\varphi_2) \subset G_1 \times G_2$ и $(G_1 \times G_2) \cap S = \emptyset$. Выполнение равенства (15.4.10) для любого элемента $\varphi_2 \in D(G_2)$ означает, что $\Pi^{**}(\varphi_1, +)f|_{G_2} = 0$, т.е. $a_2 \notin \operatorname{supp}\,(\Pi^{**}(\varphi_1, +)f)$. $\diamondsuit$

15.2.2 Связь локальных и глобальных свойств повторных функций.

Для обобщённой функции $v \in D'(X_1 \times X_2)$ и для любого открытого подмножества $G \subset X_1 \times X_2$ определено сужение обобщённой функции v на множество G — $v|_G \in D'(G)$. Введём обозначение для сужения

$$v|_G(x) \equiv v[G](x) \tag{15.2.11}$$

Если $U_1 \subset X_1$, $U_2 \subset X_2$ — открытые подмножества, то определено сужение оператора $\Pi^* : D(X_1) \times D(X_2) \to D(X_1 \times X_2)$ на линейное подпространство $D(U_1) \times D(U_2) \subset D(X_1) \times D(X_2)$ и

$$\Pi^*\,(D(U_1) \times D(U_2)) \subset D(U_1 \times U_2) \subset D(X_1 \times X_2). \tag{15.2.12}$$

Обозначим это сужение $\Pi^*[U_1, U_2] : D(U_1) \times D(U_2) \to D(U_1 \times U_2)$.

Пусть $v \in D'(X)$. Покажем, как зная локально повторную функцию, восстановить её глобально.

Пусть для каждой точки $a \in X$, $a \equiv (a_1, a_2)$ заданы открытая окрестность $U_1(a) \subset X_1$ точки a_1 в X_1 и открытая окрестность $U_2(a) \subset X_2$ точки a_2 в X_2. Пусть задана основная функция $\varphi_1 \in D(X_1)$.

Построение 1. Фиксируем точку $a_2 \in X_2$ Открытые множества $\{U_1(a_1, a_2)\}_{a_1 \in X_1}$ образуют открытое покрытие множества X_1. Согласно утверждению 15.1.10 существует разбиение единицы $\{e_j\}_{j\in J}$ на X_1 функциями $e_j \in D(X_1)$, подчинённое покрытию $\{U_1(a_1, a_2)\}_{a_1 \in X_1}$. Для компакта $\operatorname{supp}(\varphi_1) \subset X_1$ по утверждению 15.1.11 существует ассоциированная с ним конечная система функций $e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1m}$ из разбиения единицы $\{e_j\}_{j\in J}$, что $\operatorname{supp}(e_{1s}) \subset U_1(a_{1s}, a_2)$, $s \in \overline{1,m}$ и

$$\sum_{s=1}^{m} e_{1s}(x) = 1 \tag{15.2.13}$$

для всех точек x из некоторой окрестности множества $\operatorname{supp}(\varphi_1)$. Поэтому

$$\varphi_1 = \sum_{s=1}^{m} e_{1s}\varphi_1 \equiv \sum_{s=1}^{m} \varphi_{1s}, \tag{15.2.14}$$

где

$$\varphi_{1s} \equiv e_{1s}\varphi_1,\ \varphi_{1s} \in D\left(U_1(a_s)\right),\ a_s \equiv (a_{1s}, a_2),\ s \in \overline{1,m}. \tag{15.2.15}$$

Пусть $G_2(a_2) \equiv \bigcap\limits_{s=1}^{m} U_2(a_{1s})$ — открытая окрестность точки $a_2 \in X_2$, тогда

$$\forall s \in \overline{1,m} \ \Big|\ U_1(a_{1s}, a_2) \times G_2(a_2) \subset U_1(a_{1s}, a_2) \times U_2(a_{1s}, a_2). \tag{15.2.16}$$

Для любой основной функции $\varphi_2 \in D\left(G_2(a_2)\right)$ имеем

$$(v, \varphi_1\varphi_2) = \left(v, \left(\sum_{s=1}^{m} \varphi_{1s}\right)\varphi_2\right) = \sum_{s=1}^{m}(v, \varphi_{1s}\varphi_2). \tag{15.2.17}$$

Далее вводим сужения функций и операторов

$$\sum_{s=1}^{m}(v, \varphi_{1s}\varphi_2) = \sum_{s=1}^{m}\left(v[U_1(a_s) \times U_2(a_s)], \Pi^*[U_1(a_s), U_2(a_s)](\varphi_{1s}, \varphi_2)\right) = \tag{15.2.18}$$

$$\sum_{s=1}^{m}\left(\Pi^{**}[U_1(a_s), U_2(a_s)](\varphi_{1s}, +)v[U_1(a_s) \times U_2(a_s)], \varphi_2\right).$$

Формулы (15.4.17, 15.4.18) означают, что для функции $\varphi_1 \in D(X_1)$ и точки $a_2 \in X_2$ существует открытая окрестность $G_2(a_2) \subset X_2$ точки a_2, такая, что

$$\left(\Pi^{**}(\varphi_1, +)v\right)|_{G_2(a_2)} = \left(\sum_{s=1}^{m} \Pi^{**}[U_1(a_s), U_2(a_s)](\varphi_{1s}, +)v[U_1(a_s) \times U_2(a_s)]\right)\Bigg|_{G_2(a_2)}. \tag{15.2.19}$$

15.2.3 Повторные обобщённые функции для обобщённой функции $v(x) = f\left(g_1(x_1, x_2)\right)$.

Пусть $k(0) \in \mathbf{N}_0$, $\quad k(1) \equiv m_1 - k(0)$, $\quad k(1) \geq 1$, $\quad k(2) \equiv m_2$. Пусть $Y_1 \subset \mathbf{R}^{k(1)}$ открытое множество, $Y_0 \equiv \mathbf{R}^{k(0)}$ при $k(0) > 0$ и $\bar{Y} \equiv Y_0 \times Y_1$ при $k(0) > 0$ и $\bar{Y} \equiv Y_1$ при $k(0) = 0$. Пусть $\bar{g} : X_1 \times X_2 \to \bar{Y}$ отображение класса $C^{(\infty)}$ такое, что

$$\forall x_2 \in X_2 \;\Big|\; \bar{g}(+, x_2) \in \operatorname{Diffin}(X_1, \bar{Y}). \tag{15.2.20}$$

При этом $\bar{g}(x) \equiv (g_0(x), g_1(x))$, где $g_0 : X \to Y_0$ и $g_1 : X \to Y_1$ — составляющие отображения. Определим отображение $g_2 : X_1 \times X_2 \to Y_2$, где $Y_2 \equiv \mathbf{R}^{k(2)}$, формулой $g_2(x_1, x_2) \equiv x_2$. Определим отображение $g : X \to Y$ по правилу $g(x) = y \equiv (y_0, y_1, y_2)$, где $y_0 \equiv g_0(x)$, $\quad y_1 \equiv g_1(x)$, $\quad y_2 \equiv g_2(x)$. Мы получили диффеоморфное вложение $g \in \operatorname{Diffin}(X, Y)$.

Утверждение 15.2.2 *Справедливо равенство*

$$p(g)(x_1, x_2) = p\left(\bar{g}(+, x_2)\right)(x_1). \tag{15.2.21}$$

Доказательство. Для $g \in \operatorname{Diffin}(X, Y)$ согласно определяющей формуле (15.1.30)

$$p(g)(x) = \left|\det \frac{\partial g}{\partial x}(x)\right|^{-1} = \left|\det \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial(x_1, x_2)}\right|^{-1}. \tag{15.2.22}$$

Но определитель

$$\left|\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial(x_1, x_2)}\right| = \left|\begin{array}{cc} \frac{\partial \bar{g}(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{g}(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} \frac{\partial \bar{g}(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{g}(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ 0 & E_{k(2)} \end{array}\right| = \det \frac{\partial \bar{g}(x_1, x_2)}{\partial x_1}. \tag{15.2.23}$$

Для диффеоморфизма $\bar{g}(+, x_2) \in \operatorname{Diffin}(X_1, Y_0 \times Y_1)$ согласно определяющей формуле (15.1.30)

$$p\left(\bar{g}(+, x_2)\right)(x_1) = \left|\det \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_1}(x_1, x_2)\right|^{-1}. \tag{15.2.24}$$

Соотношения (15.2.22–15.2.24) доказывают равенство (15.2.21). $\diamondsuit$

Из формулы (15.2.21) получаем следующее свойство операторов.

Утверждение 15.2.3

$$\forall \varphi \in D(X) \;\Big|\; S_g^*(\varphi)(y_0, y_1, y_2) = \Big(S_{\bar{g}}^*(+, x_2)(\varphi(+, x_2))\Big)(y_0, y_1)\Big|_{x_2 = y_2}. \tag{15.2.25}$$

Доказательство. $g(X) \subset Y$ открытое множество.Через $G(y_2) \equiv \{\bar{y} \in \bar{Y} \;\big|\; (\bar{y}, y_2) \in g(X)\}$ обозначим сечение открытого множества $g(X)$, $\quad y_2 \in Y_2$. Множество $G(y_2) \subset \bar{Y}$ открыто.

По определению оператора S_g^* из п. 15.1.3

$$(S_g^* \varphi)(y) = \begin{cases} p(g)\left(g^{-1}(y)\right) \varphi\left(g^{-1}(y)\right) & , y \in g(X); \\ 0 & , y \in Y \setminus g(x) \end{cases} \tag{15.2.26}$$

Аналогично

$$\left(S_{\bar{g}(+, y_2)}^* \varphi(+, y_2)\right)(\bar{y}) = \begin{cases} p\left(\bar{g}(+, y_2)\right)\left(g^{-1}(\bar{y}, y_2)\right) \varphi\left(g^{-1}(\bar{y}, y_2)\right) & , y \in g(X); \\ 0 & , \bar{y} \in \bar{Y} \setminus G(y_2). \end{cases} \tag{15.2.27}$$

Из (15.2.26) и (15.2.27) и учётом (15.2.21) получаем (15.2.25). $\diamondsuit$

Следствие 15.2.1

$$\forall\varphi_1 \in D(X_1)\ \forall\varphi_2 \in D(X_2) \ \Big|\ S_g^*(\varphi_1\varphi_2)(y_0, y_1, y_2) = \varphi_2(y_2)\left(S_{\bar g(+,\varphi_2)}\varphi_1\right)(y_0, y_1). \quad (15.2.28)$$

Возьмём обобщённую функцию $f \in D'(Y_1)$. Согласно п. 15.1.5 определена обобщённая функция $v(x) \equiv f\left(g_1(x)\right) \in D(X)$ формулой

$$v \equiv S_g^{**}\left(1(y_0)f(y_1)1(y_2)\right). \quad (15.2.29)$$

Согласно п. 15.1.5 определена при каждом $x_2 \in X_2$ обобщённая функция $v(x_1, \dot x_2) \in D'(X_1)$ формулой

$$v(x_1, \dot x_2) \equiv S_{\bar g(+,x_2)}^{**}\left(1(y_0)f(y_1)\right)(x_1). \quad (15.2.30)$$

Лемма 15.2.2 *Для любой фиксированной функции $\varphi_2 \in D(X_2)$ сопоставление функции $\varphi_1 \in D(X_1)$ функции $\chi(x_2)$ вида*

$$\left(v(x_1, \dot x_2), \varphi_1(x_1)\right)\varphi_2(x_2) \equiv \chi(x_2) \quad (15.2.31)$$

задаёт линейное непрерывное отображение $D(X_1) \to D(X_2)$.

Доказательство. В силу (15.2.30)

$$\begin{aligned}\chi(x_2) = &\left(S_{\bar g(+,x_2)}^{**}(1(y_0)f(y_1))(x_1), \varphi_1(x_1)\right)\varphi_2(x_2) = \\ &= \left(1(y_0)f(y_1), (S_{\bar g(+,x_2)}^{*}\varphi_1)(y_0, y_1)\right)\varphi_2(x_2).\end{aligned}$$

По следствию 15.2.1 получаем

$$\chi(x_2) = \left(1(y_0)f(y_1), S_g^*(\varphi_1\varphi_2)(y_0, y_1, x_2)\right).$$

Итак,

$$\chi(x_2) = \left.\left(1(y_0)f(y_1), S_g^*\Pi^*(+,\varphi_2)\varphi_1\right)\right|_{y_2=x_2}. \quad (15.2.32)$$

Отображение $\Pi^*(+,\varphi_2) : D(X_1) \to D(X)$ линейно и непрерывно. Отображение $S_g^* : D(X) \to D(Y)$ также линейно и непрерывно. Для любой фиксированной обобщённой функции $u \in D'(Y_0 \times Y_1)$ отображение, сопоставляющее функции $\omega \in D(Y_0 \times Y_1 \times Y_2)$ функцию

$$\chi(y_2) \equiv \left(u(y_0, y_1), \omega(y_0, y_1, \dot y_2)\right)$$

линейно и непрерывно отображает локально выпуклое линейное топологическое пространство $D(Y)$ в локально выпуклое линейное топологическое пространство $D(Y_2)$ [24, с. 53]. Итак, сопоставление $\varphi_1 \mapsto \chi$ даёт линейное непрерывное отображение $D(X_1)$ в $D(X_2)$. $\diamondsuit$

Следствие 15.2.2 *Для любой основной функции $\varphi_1 \in D(X_1)$ функция $\chi(x_2) \equiv (v(x_1, \dot x_2), \varphi_1(x_1))$ принадлежит классу $C^{(\infty)}(X_2)$.*

Укажем теперь повторную обобщённую функцию $\Pi^{**}(\varphi_1, +)v \in D'(X_2)$.

Лемма 15.2.3 *Для всякой основной функции $\varphi_1 \in D(X_1)$ обобщённая функция $\Pi^{**}(\varphi_1, +)v \in D'(X_2)$ регулярна и представляется функцией $\chi(x_2) \equiv \left(f\left(g_1(x_1, \dot x_2)\right), \varphi_1(x_1)\right)$ класса $C^{(\infty)}(X_2)$.*

Доказательство. Для любой основной функции $\varphi_2 \in D(X_2)$ согласно определению функции $v(x) = f(g_1(x))$ — формула (15.2.29) верно

$$(v, \varphi_1\varphi_2) = \left(S_g^{**}\left(1(y_0)f(y_1)1(y_2)\right), \varphi_1\varphi_2\right) = \left(1(y_0)f(y_1)1(y_2), S_g^*(\varphi_1\varphi_2)\right). \qquad (15.2.33)$$

По следствию 15.2.1

$$\left(1(y_0)f(y_1)1(y_2), S_g^*(\varphi_1\varphi_2)\right) = \left(1(y_0)f(y_1)1(y_2), \varphi_2(y_2)S_{g(+,y_2)}^*(\varphi_1)\right) =$$

$$\left(1(y_2), \left(1(y_0)f(y_1), S_{g(+,y_2)}^*(\varphi_1)\right)\varphi_2(y_2)\right).$$

Но в силу следствия 15.2.2 и формулы (15.2.30)

$$\left(1(y_2), \left(1(y_0)f(y_1), S_{g(+,y_2)}^*(\varphi_1)\right)\varphi_2(y_2)\right) = \left(1(y_2), \left(S_{g(+,y_2)}^{**}\left(1(y_0)f(y_1)\right), \varphi_1\right)\varphi_2(y_2)\right) =$$

$$\left(1(y_2), \left(v(x_1, \dot{x}_2), \varphi_1(x_1)\right)\varphi_2(x_2)\big|_{x_2=y_2}\right) = \left(\left(v(x_1, \dot{x}_2), \varphi_1(x_1)\right), \varphi(x_2)\right).$$

♢

15.2.4 Повторные обобщённые функции для обобщённой функции $w(x) = f(g_1(x_1, x_2))\, h(x_2)$.

Сохраняя все обозначения и предположения предыдущего пункта, возьмём обобщённую функцию $h \in D'(X_2)$ и введём обобщённую функцию

$$w(x) \equiv f(g_1(x_1, x_2))\, h(x_2). \qquad (15.2.34)$$

Обобщённая функция $w \in D'(X)$ определена, поскольку выполнены условия п. 15.1.5.

Лемма 15.2.4 *Для любого $h \in D'(X_2)$ обобщённая функция $w \in D'(X)$ определена и для любой основной функции $\varphi_1 \in D(X_1)$ повторная обобщённая функция $\Pi^{**}(\varphi_1, +)w \in D'(X_2)$ равна*

$$\Pi^{**}(\varphi_1, +)w = \chi(x_2)h(x_2), \qquad (15.2.35)$$

где $\chi(x_2) \in C^{(\infty)}(X_2)$ функция вида

$$\chi(x_2) = \left(v(x_1, \dot{x}_2), \varphi_1(x_1)\right). \qquad (15.2.36)$$

Доказательство. Для любой основной функции $\varphi(x_2) \in D(X_2)$ согласно предыдущему верны равенства

$$(w, \varphi_1\varphi_2) = \left(S_g^{**}\left(1(y_0)f(y_1)h(y_2)\right), \varphi_1\varphi_2\right) = \left(1(y_0)f(y_1)h(y_2), S_g^*(\varphi_1\varphi_2)\right) =$$

$$\left(h(y_2), \left(1(y_0)f(y_1), \varphi_2(y_2)S_{g(+,y_2)}^*(\varphi_1)\right)\right) = \left(h(y_2), \left(S_{g(+,y_2)}^{**}\left(1(y_0)f(y_1)\right), \varphi_1\right)\varphi_2(y_2)\right) =$$

$$\left(h(x_2), \left(v(x_1, \dot{x}_2), \varphi_1(x_1)\right)\varphi_2(x_2)\right) = \left(\chi(x_2)h(x_2), \varphi_2(x_2)\right).$$

♢

15.2.5 Повторная обобщённая функция. Глобальный случай.

Определим теперь повторную обобщённую функцию в менее ограничительных условиях, чем в п. 15.1.3, пользуясь построением п. 15.1.5.

Введём следующие условия. Пусть $m_1 \in \mathbf{N}$, $m_2 \in \mathbf{N}$, $n \equiv m_1 + m_2$. Пусть $X_1 \subset \mathbf{R}^{m_1}$, $X_2 \subset \mathbf{R}^{m_2}$ открытые множества и $X \equiv X_1 \times X_2$, $X \subset \mathbf{R}^n$. Задано отображение $g_1 : X \to \mathbf{R}^{k(1)}$, $k(1) \in \mathbf{N}$, $k(1) \leq m_1$. Задана обобщённая функция $f \in D'\left(\mathbf{R}^{k(1)}\right)$. Полагаем

$$S \equiv g_1^{-1}\left(\mathrm{supp}\,(f)\right). \tag{15.2.37}$$

Пусть выполнены условия A п. 15.1.5 и следующее условие.

Условие С. Для любого $x \in S$ верно

$$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial g_1(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right) = k(1).$$

При выполнении условия A определена обобщённая функция $v(x_1, x_2) \equiv f\left(g_1(x_1, x_2)\right)$, $v \in D'(X)$. При выполнении условий A и C определена при каждом фиксированном $x_2 \in X_2$ обобщённая функция $v(x_1, \dot{x}_2) \in D'(X)$.

Теорема 15.2.1 *Если выполнены условия A и C, то для любой основной функции $\varphi_1 \in D(X_1)$ повторная обобщённая функция $\Pi^{**}(\varphi_1, +)v \in D'(X_2)$ регулярна и представима функцией*

$$\chi(x_2) \equiv \left(v(x_1, \dot{x}_2), \varphi_1(x_1)\right) \tag{15.2.38}$$

класса $C^{(\infty)}(X_2)$.

Теорема 15.2.2 *Пусть для $f \in D'\left(\mathbf{R}^{k(1)}\right)$ и $g_1 : X \to \mathbf{R}^{k(1)}$ выполнены условия A и C и $h \in D'\left(\mathbf{R}^{m_2}\right)$. Тогда определена обобщённая функция $w(x_1, x_2) \equiv f\left(g_1(x_1, x_2)\right) h(x_2) \in D'(X)$ и для любой основной функции $\varphi_1 \in D(X_1)$ повторная обобщённая функция*

$$\left(\Pi^{**}(\varphi_1, +)w\right)(x_2) = \chi(x_2)h(x_2),$$

где $\chi \in C^{(\infty)}\left(X_2\right)$ — функция вида (15.2.38).

Доказательство теорем 1 и 2. Согласно утверждению 15.1.6 носитель обобщённой функции $v \in D(X)$ есть множество S вида (15.2.37).

Для построения обобщённой функции $w(x)$ согласно п. 15.1.5 заметим, что функция $g_1(x_1, x_2)$ та же, что и при построении обобщённой функции $v(x)$, а функция $g_2(x_1, x_2) = x_2$. Поэтому

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ 0 & E_{k(2)} \end{pmatrix}$$

и в силу выполнения условия A для $v(x) = f\left(g_1(x_1, x_2)\right)$ и условия C следует, что выполнено условие A для $w(x) = f\left(g_1(x_1, x_2)\right) h(x_2)$. Итак, обобщённая функция $w(x) \in D'(X)$ определена и её носитель по утверждению 15.1.6 равен

$$\mathrm{supp}\,(w) = g_1^{-1}\left(\mathrm{supp}\,(f)\right) \cap g_2^{-1}\left(\mathrm{supp}\,(h)\right) = S \cap \left(X_1 \times \mathrm{supp}\,(h)\right). \tag{15.2.39}$$

Обозначим $\mathrm{supp}\,(w) \equiv S_h$.

Проведём теперь следующее построение, аналогичное построению п. 15.2.5. Выберем для каждой точки $a \in X$ окрестности $U_1(a) \subset X_1$ и $U_2(a) \in X_2$ точек $a_1 \in X_1$ и $a_2 \in X_2, \quad a \equiv (a_1, a_2)$ следующим образом. Если $a \in X \setminus S$, то так, чтобы окрестность $U_1(a) \times U_2(a)$ была на положительном расстоянии до замкнутого множества S.

Если $a \in S$, то согласно условию C существует линейное отображение $g_0 : X \to Y_0$, что

$$\operatorname{rank} \frac{\partial \bar{g}(x_1, x_2)}{\partial x_1}\bigg|_{x=a} = m_1, \tag{15.2.40}$$

где $\bar{g}(x) \equiv (g_0(x), g_1(x))$. Определим отображение $g_2 : X \to Y_2$ формулой $g_2(x_1, x_2) \equiv x_2$ и определим составное отображение $g : X \to Y$ формулой $g(x) \equiv (g_0(x), g_1(x), g_2(x))$. Тогда

$$\operatorname{rank} \frac{\partial g}{\partial x}(x)\bigg|_{x=a} = n. \tag{15.2.41}$$

В силу (15.2.40) (15.2.41) для точки $a \equiv (a_1, a_2), \quad a_1 \in X_1, \quad a_2 \in X_2$ существуют окрестности $U_1(a) \subset X_1$ точки a_1 и $U_2(a) \subset X_2$ точки a_2, что сужение $g_a \equiv g|_{U_1(a)\times U_2(a)}$ есть диффеоморфное вложение $g_a \in \operatorname{Diffin}(U_1(a) \times U_2(a), Y)$, причём при любом фиксированном $x_2 \in U_2(a)$ отображение $\bar{g}_a(+, x_2) \in \operatorname{Diffin}\left(U_1(a), \bar{Y}\right)$.

Возьмём теперь произвольную точку $a \in X$ и покажем, что для сужения $v_a \equiv v|_{U_1(a)\times U_2(a)}$ верно утверждение теоремы 15.2.1.

При $a \notin S$ по построению $v_a = 0$ и

$$\forall x_2 \in U_2(a) \;\Big|\; v_a(x_1, \dot{x}_2) = 0, \tag{15.2.42}$$

ибо

$$\operatorname{supp}\,(v_a(x_1, \dot{x}_2)) = \Big\{x_1 \in U(a_1) \;\Big|\; (x_1, \dot{x}_2) \in S\Big\} = 0$$

при $x_2 \in U_2(a)$.

Следовательно, утверждение теоремы 15.2.1 для v_a при $a \in X \setminus S$ тривиально верно.

В случае $a \in S$ для функции v_a выполнены все условия п. 15.2.3 и поэтому по лемме 15.2.3 для любой основной функции $\varphi_1 \in D(U_1(a))$ обобщённая функция $\Pi^{**}[U_1(a), U_2(a)](\varphi_1, +)\, v_a \in D'(U_2(a))$ регулярна и представляется функцией $\chi(x_2) \equiv (v(x_1, \dot{x}_2), \varphi_1(x_1))$ класса $C^{(\infty)}(U_2(a))$.

Применим теперь построение п. 15.2.2. Тогда для фиксированной функции $\varphi_1 \in D(X_1)$ и фиксированной точки $a_2 \in X_2$ существует окрестность $G_2(a_2) \subset X_2$ точки a_2, в которой

$$(\Pi^{**}(\varphi_1, +)v)\Big|_{G_2(a_2)} = \left(\sum_{s=1}^{m} \Pi^{**}[U_1(a_s), U_2(a_s)](\varphi_{1s}, +)\, v\,[U_1(a_s) \times U_2(a_s)]\right)\Bigg|_{G_2(a_2)} =$$

$$\left(\sum_{s=1}^{m} \Pi^{**}[U_1(a_s), U_2(a_s)](\varphi_{1s}, +)\, v_{as}\right)\Bigg|_{G_2(a_2)}$$

согласно формуле (15.4.19). В силу предыдущего получаем, что для любой точки $a_2 \in X_2$ существует окрестность $G_2(a_2) \subset X_2$, что обобщённая функция $\Pi^{**}(\varphi_1, +)\, v|_{G_2(a_2)} \in D'(G_2(a_2))$ регулярна и представляется функцией

$$\sum_{s=1}^{m} (v(x_1, \dot{x}_2), \varphi_{1s}(x_2)) = \left(v(x_1, \dot{x}_2), \sum_{s=1}^{m} \varphi_{1s}(x_1)\right) = (v(x_1, \dot{x}_2), \varphi_1(x_1))$$

класса $C^{(\infty)}(G_2(a_2))$. Что доказывает теорему 15.2.1.

Перейдем теперь к соответствующим рассуждениям для доказательства теоремы 15.2.2. Пусть $a \in X$ произвольная точка и $w_a \equiv w|_{U_1(a)\times U_2(a)}$.

В случае $a \in X \setminus S$ верно $w_a = 0$ и по доказанному ранее верно (15.2.42). Поэтому

$$\forall \varphi_1 \in D\left(U_1(a)\right) \;\Big|\; \Pi^{**}\left[U_1(a), U_2(a)\right](\varphi_1, +)\, w_a = 0 = \left.\left(\left(v(x_1, \dot{x}_2), \varphi(x_1)\right) h(x_2)\right)\right|_{U_2(a)}. \tag{15.2.43}$$

В случае $a \in S$ для функции w_a выполнены все условия п. 15.2.4 и по лемме 15.2.4

$$\forall \varphi_1 \in D\left(U_1(a)\right) \;\Big|\; \Pi^{**}\left[U_1(a), U_2(a)\right](\varphi_1, +)\, w_a = \left(\left(v(x_1, \dot{x}_2), \varphi_1(x_1)\right) h(x_2)\right) |\, U_2(a). \tag{15.2.44}$$

Возьмём теперь основную точку $\varphi_1 \in D(X_1)$ и точку $a_2 \in X_2$ и применим построение пункта 15.2.2. Тогда существует окрестность $G_2(a_2) \subset X_2$ точки a_2, для которой согласно формуле (15.4.19)

$$\left(\Pi^{**}(\varphi_1, +) w\right)|_{G_2(a_2)} = \left.\left(\sum_{s=1}^{m} \Pi^{**}\left[U_1(a_s), U_2(a_s)\right](\varphi_{1s}, +)\, w_{as}\right)\right|_{G_2(a_2)} = \tag{15.2.45}$$

$$\left.\left(\sum_{s=1}^{m}\left(v(x_1, \dot{x}_2), \varphi_{1s}(x_1)\right) h(x_2)\right)\right|_{G_2(a_2)} = \left.\left(\left(v(x_1, \dot{x}_2), \sum_{s=1}^{m}\varphi_{1s}(x_1)\right) h(x_2)\right)\right|_{G_2(a_2)} =$$

$$\left.\left(\left(v(x_1, \dot{x}_2), \varphi_1(x_1)\right) h(x_2)\right)\right|_{G_2(a_2)}.$$

Так как $a_2 \in X_2$ — произвольная точка, то соотношение (15.2.45) доказывает теорему 15.2.2. $\diamondsuit$

Замечание 15.2.2 *В условиях теоремы 15.2.1 обобщённую функцию* $v(x_1, \dot{x}_2) \in D'(X_1)$ *можно рассматривать как обобщённую функцию по переменной* $x_1 \in X_1$, *зависящую от параметра* $x_2 \in X_2$. *Таким образом теорема 15.2.1 даёт достаточные условия бесконечной дифференцируемости по параметру* $x_2 \in X_2$. *Пользуясь формулой дифференцирования сложной функции п. 15.1.2, можно вычислять производные обобщённой функции* $v(x_1, \dot{x}_2)$ *по параметру* $x_2 \in X_2$.

15.2.6 Примеры построения повторных функций.

Пример 15.2.1

Свёртка.

Пусть $k \in \mathbf{N}$, $k(0) = 0$, $k(1) = k(2) = k$, $n = 2k$, $X_1 = X_2 = \mathbf{R}^k$, $X = X_1 \times X_2 = \mathbf{R}^{2k}$, $Y_1 = \mathbf{R}^k$. Пусть отображение $g_1 : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$ есть $g_1(x_1, x_2) \equiv x_2 - x_1$ и $f \in D'\left(\mathbf{R}^k\right)$.

Отображение $g_1 \in C^{(\infty)}\left(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k\right)$ и

$$\frac{\partial g_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -E_k. \tag{15.2.46}$$

Поэтому выполнены условия A и условие C для обобщённой функции $f \in D'\left(\mathbf{R}^k\right)$ и отображения g_1. Следовательно, согласно п. 15.2.5 определены обобщённая функция $v(x_1, x_2) = f(x_2 - x_1)$, $v \in D'\left(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k\right)$ и при каждом $x_2 \in \mathbf{R}^k$ определена обобщённая функция $v(+,x_2) \in D'(\mathbf{R}^k)$. Согласно теореме 15.2.1 для любой функции $\varphi_1(x_1) \in D(\mathbf{R}^k)$ функция $\chi(x_2) \equiv (v(x_1,\dot{x}_2),\varphi_1(x_1))$ из класса $C^{(\infty)}\left(\mathbf{R}^k\right)$.

Но $(v(x_1,\dot{x}_2),\varphi_1(x_1)) = (f(\dot{x}_2 - x_1),\varphi_1(x_1))$ есть свёртка обобщённой функции $f \in D'(\mathbf{R}^k)$ и основной функции $\varphi_2 \in D(\mathbf{R}^k)$. Итак, для любой обобщённой функции $f \in D'(\mathbf{R}^k)$ и любой основной функции $\varphi_2 \in D(\mathbf{R}^k)$ определена свёртка

$$\chi(x_2) = (f*\varphi)(x_2) \equiv (f(\dot{x}_2 - x_1),\varphi_1(x_1)) \tag{15.2.47}$$

и является функцией класса $C^{(\infty)}\left(\mathbf{R}^k\right)$.

Согласно лемме 15.2.1 носитель свёртки удовлетворяет включению

$$\operatorname{supp}(f*\varphi) \subset \operatorname{supp}(\varphi) \circ g_1^{-1}(\operatorname{supp}(f)) =$$

$$\{x_2 \in \mathbf{R}^k \,\Big|\, \exists x_1 \in \operatorname{supp}(\varphi) \,\Big|\, (x_2 - x_1) \in \operatorname{supp}(f)\} = \operatorname{supp}(\varphi) + \operatorname{supp}(f).$$

Получаем включение

$$\operatorname{supp}(f*\varphi) \subset \operatorname{supp}(\varphi) + \operatorname{supp}(f). \tag{15.2.48}$$

Пример 15.2.2

Трансформация Фурье.

Пусть $k(1) = 1$, $k(2) = k \in \mathbf{N}$, $k(0) = k-1$, $n = 2k$, $,X_1 = X_2 = \mathbf{R}^k$, $X = X_1 \times X_2 = \mathbf{R}^{2k}$, $Y_1 = \mathbf{R}$. Пусть отображение $g_1 : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ есть

$$g_1(x_1,x_2) \equiv \langle x_1,x_2\rangle. \tag{15.2.49}$$

Пусть $f \in D'(\mathbf{R})$ регулярная обобщённая функция $f(t) \equiv \exp(it)$.

Положим $v(x_1,x_2) \equiv f(g_1(x)) = \exp(i\langle x_1,x_2\rangle)$, тогда $v \in D'(\mathbf{R}^{2k})$ регулярная обобщённая функция медленного роста, представимая функцией $\exp(i\langle x_1,x_2\rangle)$ ограниченной и класса $C^{(\infty)}(\mathbf{R}^{2k})$. При любом фиксированном $x_2 \in \mathbf{R}^k$ мы получаем, что $v(x_1,\dot{x}_2) \in D'(\mathbf{R}^k)$ есть регулярная обобщённая функция медленного роста, представимая ограниченной функцией класса $C^{(\infty)}(\mathbf{R}^k)$.

Производная $\frac{\partial g_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} = x_2$, поэтому

$$\operatorname{rank}\frac{\partial g_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \operatorname{rank} x_2 = 1 \tag{15.2.50}$$

при $x_2 \neq 0$. Но в точке $x_2 = 0$ $\operatorname{rank}\frac{\partial g_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0$ и не выполнено условие C, что не позволяет применить прямо теорему 15.2.1.

Пусть $\varphi_1 \in D(\mathbf{R}^k)$, тогда повторная функция

$$(\Pi^{**}(\varphi_1,+)v)(x_2) = \int\limits_{\mathbf{R}^k} \exp(i\langle x_1,x_2\rangle)\,\varphi_1(x_1)dx_1 = \widehat{\varphi_1}(x_2) \tag{15.2.51}$$

есть трансформация Фурье функции $\varphi_1(x_1)$. Заменим множество $X_2 = \mathbf{R}^k$ на множество $X_2 = {\mathbf{R}_0}^k \equiv \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$. Тогда будут выполнены условия A и C и согласно теореме 15.2.1 функция

$$\widehat{\varphi_1}(x_2) = (v(x_1,\dot{x}_2),\varphi_1(x_1)) = (\Pi^{**}(\varphi_1,+)v)(x_2)$$

из класса $C^{(\infty)}\left(\mathbf{R}_0{}^k\right)$. Итак, применение теоремы 15.2.1 даёт результат, что трансформация Фурье любой основной функции φ_1 есть функция класса $C^{(\infty)}\left(\mathbf{R}_0{}^k\right)$. Но для $a_2 \in \mathbf{R}^k, \quad a_2 \neq 0$ функция

$$\psi_1(x_1) \equiv \exp\left(i\langle x_1, a_2\rangle\right)\varphi_1(x_1)$$

также из $D\left(\mathbf{R}^k\right)$ и

$$\widehat{\psi_1}(x_2) = \widehat{\psi_1}(x_2 + a_2).$$

Поэтому функция $\widehat{\psi_1}(x_2) \in C^{(\infty)}\left(\mathbf{R}_0{}^k\right)$ и функция $\widehat{\varphi_1}(x_2)$ класса $C^{(\infty)}$ и в некоторой окрестности нуля.

Таким образом, применение теоремы 15.2.1 даёт результат, что трансформация Фурье любой основной функции $\varphi_1 \in D(\mathbf{R}^k)$ есть функция $\widehat{\varphi_1} \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^k)$.

Пример 15.2.3

Зависимость от элементов группы Ли.

Пусть $k(1) = k \in \mathbf{N}, \quad k(0) = 0, \quad k(2) = k^2, \quad X_1 = \mathbf{R}^k, \quad X_2 = \mathrm{GL}\,(k, \mathbf{R}), \quad X = X_1 \times X_2, \quad Y_1 = \mathbf{R}^k$. Пусть отображение $g_1 : \mathbf{R}^k \times \mathrm{GL}\,(k, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}^k$ есть

$$g_1(x_1, x_2) \equiv x_2 x_1. \tag{15.2.52}$$

Производная $\frac{\partial g_1(x_1 x_2)}{\partial x_1} = x_2$. Поэтому из $x_2 \in \mathrm{GL}\,(k, \mathbf{R})$ следует, что

$$\forall\,(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \;\Big|\; \operatorname{rank}\frac{\partial g_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} = k, \tag{15.2.53}$$

т.е. для любой обобщённой функции $f \in D'(\mathbf{R}^k)$ выполнены условия A и C. Таким образом, определена обобщённая функция $v(x_1, x_2) = f(x_2 x_1), \quad v \in D'(X)$ и при каждом $x_2 \in \mathrm{GL}\,(k, \mathbf{R})$ определена обобщённая функция $v(x_1, \dot{x}_2) \in D'\left(\mathbf{R}^k\right)$.

Применяя теорему 15.2.1, получим, что для любой основной функции $\varphi_1 \in D\left(\mathbf{R}^k\right)$ повторная функция $\Pi^{**}\left(\varphi_1, +\right)v$ регулярна и класса $C^{(\infty)}\left(\mathrm{GL}\,(k, \mathbf{R})\right)$, т.е. функция

$$\chi(x_2) \equiv \left(f(\dot{x}_2 x_1), \varphi_1(x_1)\right) \tag{15.2.54}$$

есть функция класса $C^{(\infty)}\left(\mathrm{GL}\,(k, \mathbf{R})\right)$.

Рассмотрим теперь более конкретный пример.

Пример 15.2.4

Пусть $k(1) = 1, \quad k(2) = k \in \mathbf{N}, \quad k \geq 2, \quad k(0) = k - 1, \quad n = 2k, \quad X_1 = \mathbf{R}^k, \quad X_2 = \mathbf{R}^k, \quad X = \mathbf{R}^{2k}$.

Сначала, используя конструкции пп. 15.1.7 и 15.1.8, определим обобщённую функцию $w(x_1, x_2) = f\left(\langle x_1, x_2\rangle\right)\delta\left(|x_2| - 1\right), \quad w \in D'(X)$, где $f \in D'(\mathbf{R})$, а $\delta \in D'(\mathbf{R})$ — одномерная δ–функция. В самом деле, полагаем $\bar{g} : X \to \mathbf{R}^2$ есть отображение с компонентами

$$g_1(x_1, x_2) \equiv \langle x_1, x_2\rangle; \tag{15.2.55}$$

$$g_2(x_1, x_2) \equiv |x_2| - 1. \tag{15.2.56}$$

Тогда отображение $\bar{g}$ непрерывно и множество

$$S \equiv \bar{g}^{-1}\left(\operatorname{supp}(f) \times \operatorname{supp}(\delta)\right) = g_1^{-1}\left(\operatorname{supp}(f)\right) \bigcap \left(X_1 \times \Omega_{k-1}\right) \tag{15.2.57}$$

замкнуто. Для производной имеем

$$\frac{\partial\left(g_1(x_1,x_2), g_2(x_1,x_2)\right)}{\partial(x_1,x_2)} = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ x_1 & \frac{x_2}{|x_2|} \end{pmatrix}^{\top}. \tag{15.2.58}$$

На множестве S верно $x_2 \neq 0$, поэтому

$$\operatorname{rank} \left.\frac{\partial\bar{g}(x_1,x_2)}{\partial(x_1,x_2)}\right|_{x\in S} = 2. \tag{15.2.59}$$

Выполнено условие A п.15.1.5 и определена обобщённая функция $w \in D'(\mathbf{R}^{2k})$ с носителем S вида (15.2.57).

Для носителей повторных обобщённых функций согласно лемме 15.2.1 справедливы включения:

$$\forall\varphi_1 \in D(X_1) \;\Big|\; \operatorname{supp}\left(\Pi^{**}(\varphi_1,+)w\right) \subset \operatorname{supp}(\varphi_1) \circ S; \tag{15.2.60}$$

$$\forall\varphi_2 \in D(X_2) \;\Big|\; \operatorname{supp}\left(\Pi^{**}(+,\varphi_2)w\right) \subset S \circ \operatorname{supp}(\varphi_2). \tag{15.2.61}$$

Из формулы (15.2.57) получаем

$$\operatorname{supp}(\varphi_1) \circ S \subset X_1 \circ (X_1 \times \Omega_{k-1}) = \Omega_{k-1}.$$

Откуда следует включение

$$\forall\varphi_1 \in D(X_1) \;\Big|\; \operatorname{supp}\left(\Pi^{**}(\varphi_1,+)w\right) \subset \Omega_{k-1}. \tag{15.2.62}$$

Для применения теоремы 15.2.2 теперь заменим $X_2 = \mathbf{R}^k$ на $X_2 = {\mathbf{R}_0}^k \equiv \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$. Тогда

$$\frac{\partial g_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} = x_2^{\top}$$

и так как $x_2 \neq 0$, то получим

$$\forall x \in g_1^{-1}\left(\operatorname{supp}(f)\right) \;\Big|\; \operatorname{rank}\frac{\partial g_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 1. \tag{15.2.63}$$

Полагая $h(x_2) = \delta\left(|x_2| - 1\right), \quad h \in D'(X_2)$, применяем теорему 15.2.2 и получаем, что

$$\forall\varphi_1 \in D(X_1) \;\Big|\; \left(\Pi^{**}(\varphi_1,+)w\right)(x_2) = \left(f\left(\langle x_1, \dot{x}_2\rangle\right), \varphi_1(x_1)\right)\delta\left(|x_2| - 1\right) \tag{15.2.64}$$

при $x_2 \neq 0$ и верна оценка носителя (15.2.62). Функция $\chi(x_2) \equiv \left(f\left(\langle x_1, \dot{x}_2\rangle\right), \varphi_1(x_1)\right)$ класса $C^{(\infty)}\left({\mathbf{R}_0}^k\right)$.

Для вычисления повторной функции $\Pi^{**}(+,\varphi_2)w \in D'(X_1)$ попытаемся применить теорему 15.2.1. Возьмём отображение $\bar{g} : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^2$, введённое формулами (15.2.55, 15.2.56) и вычислим производную

$$\frac{\partial\bar{g}(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \left(x_1, \frac{x_2}{|x_2|}\right)^{\top}. \tag{15.2.65}$$

Итак,

$$\operatorname{rank}\frac{\partial\bar{g}(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \operatorname{rank}\{x_1,x_2\} \tag{15.2.66}$$

при $x_1\in\mathbf{R}^k,\quad x_2\in\mathbf{R}^k$ и $x_2\neq 0$. Условие

$$\operatorname{rank}\frac{\partial\bar{g}(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 2 \tag{15.2.67}$$

нарушается в точках с $x_1\parallel x_2$ и теорема 15.2.1 непосредственно не применима. Чтобы уточнить вид повторной функции $\Pi^{**}(+,\varphi_2)w\in D'(X_1)$, мы введём дополнительные ограничения на вид обобщённой функции $f\in D'(\mathbf{R})$ и рассмотрим следующий пример.

Пример 15.2.5

Пусть выполнены все предположения примера 15.2.4 и $f=\delta^{(r)},\quad r\in\mathbf{N}_o$, где δ — одномерная δ-функция. Тогда носитель функции w согласно формуле (15.2.57) будет равен

$$S=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^{2k}\;\middle|\;(\langle x_1,x_2\rangle=0)\bigwedge(|x_2|=1)\right\}. \tag{15.2.68}$$

Теперь, если $x\in S$, то $|x_2|=1$ и $x_1\perp x_2$. Поэтому неравенство $\operatorname{rank}\{x_2,x_2\}<2$ для точки $(x_1,x_2)\in S$ может иметь место лишь при $x_1=0$. Если мы теперь заменим множество $X_1=\mathbf{R}^k$ на множество $X_1={\mathbf{R}_0}^k$, то сможем применить к обобщённой функции $w|_{\mathrm{R}_0^k\times\mathrm{R}^k}$ теорему 15.2.1, так как условие (15.2.67) будет выполнено при $(x_1,x_2)\in S$. Получаем, что для обобщённой функции $w\in D'\left(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^k\right)$ вида $w(x_1,x_2)=\delta^{(r)}(\langle x_1,x_2\rangle)\,\delta(|x_2|-1)$ для любой основной функции $\varphi_2\in D\left(\mathbf{R}^k\right)$ повторная функция $(\Pi^{**}(+,\varphi_2)w)\in D'(\mathbf{R}^k)$ регулярна в области ${\mathbf{R}_0}^k$ и представима в этой области функцией

$$\chi(x_1)=\left(\delta(r)\left(\langle\dot{x}_1,x_2\rangle\right)\delta\left(|x_2|-1\right),\varphi_2(x_2)\right) \tag{15.2.69}$$

класса $C^{(\infty)}\left({\mathbf{R}_0}^k\right)$.

15.2.7 Свойства операции перехода к повторной функции.

В п. 15.2.1 для каждой основной функции $\varphi_2\in D(X_2)$ мы ввели линейное непрерывное отображение $\Pi^{**}(+,\varphi_2)\;:\;D'(X_1\times X_2)\;\to\;D'(X_1)$, которое сопоставляет обобщённой функции $f(x_1,x_2)\in D'(X_1\times X_2)$ обобщённую функцию $\Pi^{**}(+,\varphi_2)f\in D'(X_1)$, названную нами повторной обобщённой функцией. Переменную x_2 мы будем в этой ситуации называть связанной, а переменную x_1 — свободной. Для повторной обобщённой функции мы будем использовать также обозначения

$$\left(\Pi^{**}(+,\varphi_2)f\right)(x_1)\equiv\left(f(x_1,x_2),\varphi_2(x_2)\right)\equiv f_{\varphi_2}. \tag{15.2.70}$$

Отображение $\Pi^{**}(+,\varphi_2)$ назовём операцией φ_2-связывания переменной x_2 или просто операцией связывания второй переменной.

Отображение $\Pi^{*}(+,\varphi_2):D(X_1)\to D(X_1\times X_2)$ обладает двумя важными свойствами коммутации. Во–первых, если x_i — переменная координата из группы переменных x_1, то

$$\frac{\partial^*}{\partial x_i}\Pi^*(+,\varphi_2)=\Pi^*(+,\varphi_2)\frac{\partial^*}{\partial x_i}. \tag{15.2.71}$$

Во–вторых, если функция $a(x_1) \in C^{(\infty)}(X_1)$, то

$$\Pi^*(+,\varphi_2)\, M_a^* = M_{a\times 1}^* \Pi^*(+,\varphi_2)\,, \tag{15.2.72}$$

где $a\times 1 \in C^{(\infty)}(X_1\times X_2)$ есть функция $(a\times 1)(x_1,x_2) \equiv a(x_1)1(x_2)$. Переходя к сопряжённым операторам, мы получим соотношения коммутирования

$$\Pi^{**}(+,\varphi_2)\frac{\partial^{**}}{\partial x_i} = \frac{\partial^{**}}{\partial x_i}\Pi^{**}(+,\varphi_2), \tag{15.2.73}$$

$$M_a^{**}\Pi^{**}(+,\varphi_2) = \Pi^{**}(+,\varphi_2)\, M_{a\times 1}^{**}. \tag{15.2.74}$$

Из линейности оператора $\Pi^{**}(+,\varphi_2)$ следует, что если $f=0$, то

$$\forall \varphi_2 \in D(X_2) \;\Big|\; f_{\varphi_2} = 0. \tag{15.2.75}$$

Верно и обратное, что мы будем использовать далее.

Утверждение 15.2.4 *Для $f \in D'(X_1\times X_2)$ условия $f=0$ и (15.2.75) эквивалентны.*

Доказательство. Если верно (15.2.75), то

$$\forall \varphi_1 \in D(X_1)\ \forall \varphi_2 \in D(X_2) \;\Big|\; (f,\varphi_1\varphi_2) = 0.$$

Но линейные комбинации произведений $\varphi_1\varphi_2$ всюду плотны в $D(X_1\times X_2)$ [24, с. 54]. ♢

§15.3 Вспомогательные функции. Обобщённые производные функции $\ln|x|$.

В этом параграфе мы рассмотрим вспомогательную обобщённую функцию $\operatorname{wil}(k,s,a,\xi) \in D'(\mathbf{R})$, нужную в следующем параграфе для вычисления трансформации Фурье однородной рациональной функции. Кроме того, мы рассмотрим производные регулярной обобщённой функции из $D'(\mathbf{R})$, представимой функцией $\ln|x|$, также с целью использования в следующем параграфе.

15.3.1 Функции $\operatorname{ham}(s,t)$ и $\operatorname{wil}(k,s,a,\xi)$.

Введём функцию $\operatorname{ham}(s,t)$ от переменных $s\in\mathbf{Z}$, $t\in\mathbf{R}$ вида

$$\operatorname{ham}(s,t) \equiv \frac{1}{2}\left(\exp(it) + (-1)^s\exp(-it)\right), \tag{15.3.1}$$

т.е.

$$\operatorname{ham}(s,t) = \begin{cases} \cos(t) & , s \text{ — чётно;} \\ i\sin(t) & , s \text{ — нечётно.} \end{cases} \tag{15.3.2}$$

В силу (15.3.1) справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}\operatorname{ham}(s,t) = i\operatorname{ham}(s+1,t). \tag{15.3.3}$$

Введём функцию $\mathrm{wil}\,(k, s, a, \xi)$ от аргументов $k \in \mathbf{N}_o$, $s \in \mathbf{Z}$, $a \in \mathbf{R}$, $\xi \in \mathbf{R}$ вида

$$\mathrm{wil}\,(k, s, a, \xi) \equiv \int\limits_0^a t^k \,\mathrm{ham}\,(s, t\xi)\, dt. \tag{15.3.4}$$

В силу (15.3.2) и (15.3.3) справедливы свойства:

$$\mathrm{wil}\,(k, s, a, \xi) = \mathrm{wil}\,(k, s', a, \xi), \tag{15.3.5}$$

если $(s - s')$ — чётно;

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\,\mathrm{wil}\,(k, s, a, \xi) = i\,\mathrm{wil}\,(k+1, s+1, a, \xi). \tag{15.3.6}$$

В частности, из (15.3.6) следует представление

$$\mathrm{wil}\,(k, s, a, \xi) = \left(-i\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^k \mathrm{wil}\,(0, s-k, a, \xi). \tag{15.3.7}$$

При $k = 0$ согласно (15.3.4) и (15.3.3) получаем

$$\mathrm{wil}\,(0, s, a, \xi) = \int\limits_0^a \mathrm{ham}\,(s, t\xi)\, dt = \frac{1}{\xi}\int\limits_0^{a\xi} \mathrm{ham}\,(s, \alpha)\, d\alpha = \tag{15.3.8}$$

$$\frac{1}{i\xi}\left(\mathrm{ham}\,(s+1, a\xi) - \mathrm{ham}\,(s+1, 0)\right) = \begin{cases} \frac{\sin(a\xi)}{\xi} & , s \text{ — чётно;} \\ i\frac{1-\cos(a\xi)}{\xi} & , s \text{ — нечётно.} \end{cases}$$

Будем рассматривать при фиксированных аргументах k, s, a функцию $\mathrm{wil}\,(k, s, a, \xi)$ от аргумента ξ как регулярную обобщённую функцию из $D'(\mathbf{R})$. Найдём в пространстве $D'(\mathbf{R})$ предел

$$\mathrm{wil}\,(k, s, \infty, \xi) \equiv \lim_{a \to +\infty} \mathrm{wil}\,(k, s, a, \xi). \tag{15.3.9}$$

В силу представления (15.3.7) достаточно найти предел в $D'(\mathbf{R})$ при $k = 0$.

Пусть $\varphi \in D(\mathbf{R})$ и $\mathrm{supp}\,(\varphi) \subset [-A, A]$, тогда

$$(\,\mathrm{wil}\,(0, s, a, \xi), \varphi(\xi)) = \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(\xi)\,\mathrm{wil}\,(0, s, a, \xi) d\xi = \int\limits_{-A}^{A} \varphi(\xi)\,\mathrm{wil}\,(0, s, a, \xi) d\xi.$$

Согласно (15.3.8), если s — чётно, то

$$(\,\mathrm{wil}\,(0, s, a, \xi), \varphi(\xi)) = \int\limits_{-A}^{A} \varphi(\xi)\frac{\sin(a\xi)}{\xi} d\xi = \int\limits_{-A}^{A} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(0)}{\xi}\sin(a\xi) d\xi + \varphi(0)\int\limits_{-A}^{A} \frac{\sin(a\xi)}{\xi} d\xi. \tag{15.3.10}$$

Поэтому

$$\forall a \in \mathbf{R} \;\Big|\; |(\,\mathrm{wil}\,(0, s, a, \xi), \varphi(\xi))| \le 2A\|\varphi\|_{C^{(1)}} + \pi\|\varphi\|_{C^{(1)}} = (2A + \pi)\|\varphi\|_{C^{(1)}}, \tag{15.3.11}$$

так как по формуле конечных приращений Лагранжа

$$\frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi}=\varphi'(\theta\xi),\quad \theta\in[0,1]$$

и по формуле 8.231.3 из [29]

$$\left|\int\limits_0^A\frac{\sin(a\xi)}{\xi}d\xi\right|=\left|\int\limits_0^{aA}\frac{\sin(t)}{t}dt\right|\le\frac{\pi}{2}.$$

Функция $\frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi}$ суммируема на $[-A,A]$, потому по теореме Римана-Лебега

$$\lim_{a\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A}\frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi}\sin(a\xi)d\xi=0. \qquad (15.3.12)$$

Существует предел

$$\lim_{a\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A}\frac{\sin(a\xi)}{\xi}d\xi=\pi. \qquad (15.3.13)$$

Итак, из (15.3.10, 15.3.12,15.3.13) получаем

$$\lim_{a\to+\infty}(\,\mathrm{wil}\,(0,s,a,\xi),\varphi(\xi))=\pi\varphi(0)=(\pi\delta(\xi),\varphi(\xi)),$$

что означает существование при чётном s предела в $D'(\mathbf{R})$

$$\lim_{a\to+\infty}\,\mathrm{wil}\,(0,s,a,\xi)=\pi\delta(\xi). \qquad (15.3.14)$$

Если s — нечётно, то

$$(\,\mathrm{wil}\,(0,s,a,\xi),\varphi(\xi))=i\int\limits_{-A}^{A}\frac{1-\cos(a\xi}{\xi}\varphi(\xi)d\xi= \qquad (15.3.15)$$

$$i\int\limits_{-A}^{A}(\varphi(\xi)-\varphi(0))\frac{(1-\cos(a\xi))}{\xi}d\xi+i\varphi(0)\int\limits_{-A}^{A}\frac{1-\cos(a\xi)}{\xi}d\xi=$$

$$i\int\limits_{-A}^{A}\frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi}d\xi-i\int\limits_{-A}^{A}\frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi}\cos(a\xi)d\xi.$$

По теореме Римана-Лебега

$$\lim_{a\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A}\frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi}\cos(a\xi)d\xi=0. \qquad (15.3.16)$$

Поэтому

$$\lim_{a\to\infty}(\,\mathrm{wil}\,(0,s,a,\xi),\varphi(\xi))=i\int\limits_{-A}^{A}\frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi}d\xi. \qquad (15.3.17)$$

Из (15.3.15) также следует оценка

$$\forall_a \in \mathbf{R} \; \Big| \; |(\,\mathrm{wil}\,(0,s,a,\xi),\varphi(\xi))| \le 4A\|\varphi\|_{C^{(1)}}. \tag{15.3.18}$$

Из (15.3.18) следует, что предел (15.3.17) есть обобщённая функция из $D'(\mathbf{R})$. Введём обобщённую функцию $\mathrm{ra}\,(\xi) \in D'(\mathbf{R})$, действующую на основную функцию $\varphi \in D(\mathbf{R})$ по правилу

$$(\,\mathrm{ra}\,,\varphi) = \int\limits_{-A}^{A} \frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi} d\xi, \tag{15.3.19}$$

где сегмент $[-A,A] \supset \mathrm{supp}\,(\varphi)$. Тогда в силу (15.3.18)

$$|(\,\mathrm{ra}\,,\varphi)| \le 4A\|\varphi\|_{C^{(1)}} \tag{15.3.20}$$

и существует предел в $D'(\mathbf{R})$

$$\lim_{a\to+\infty} \mathrm{wil}\,(0,s,a,\xi) = i\,\mathrm{ra}\,(\xi). \tag{15.3.21}$$

Подведём итоги наших рассуждений.

Лемма 15.3.1 *Существует предел в* $D'(\mathbf{R})$

$$\lim_{a\to+\infty} \mathrm{wil}\,(k,s,a,\xi) \equiv \mathrm{wil}\,(k,s,\infty,\xi) = (-i)^k \begin{cases} \pi\delta^{(k)}(\xi) & ,(s-k) - \textit{чётно}, \\ i\,\mathrm{ra}^{(k)}(\xi) & ,(s-k) - \textit{нечётно}. \end{cases} \tag{15.3.22}$$

Для любой основной функции $\varphi \in D(\mathbf{R})$, *любого сегмента* $[-A,A] \supset \mathrm{supp}\,(\varphi)$ *и любого* $a \in \mathbf{R}$, *а также* $a = \infty$ *верно неравенство*

$$|(\,\mathrm{wil}\,(k,s,a,\xi),\varphi(\xi))| \le 4A\|\varphi\|_{C^{(k+1)}}. \tag{15.3.23}$$

15.3.2 Обобщённая функция $\mathrm{wil}\,(k,s,a,\langle p,x\rangle)$.

Пусть $p \in \mathbf{R}^n, |p| = 1$ — фиксированный единичный вектор и $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — ортогональное отображение с $g_1(x) = \langle p,x\rangle$. Тогда $S_g^* : D(\mathbf{R}^n) \to D(\mathbf{R}^n)$ линейный изоморфизм локально выпуклых линейных топологических пространств, также как и сопряженное отображение $S_g^{**} : D'(\mathbf{R}^n) \to D'(\mathbf{R}^n)$. Для $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ нормой $C^{(k)}$, $k \in \mathbf{N}_o$ мы называем

$$\|\varphi\|_{C^{(k)}} \equiv \max_{\alpha\in\mathbf{N}_o^n,|\alpha|\le k} \sup_{x\in\mathbf{R}^n} |\varphi^{(\alpha)}(x)|. \tag{15.3.24}$$

При ортогональной замене переменных

$$\|S_g^*(\varphi)\|_{C^{(k)}} \le n^{\frac{k}{2}}\|\varphi\|_{C^{(k)}}. \tag{15.3.25}$$

Так как в пространстве $D'(\mathbf{R})$ имеет место сходимость $\mathrm{wil}\,(k,s,a,\xi) \to \mathrm{wil}\,(k,s,\infty,\xi)$ при $a \to \infty$, то согласно п. 15.1.4 обобщённые функции $\mathrm{wil}\,(k,s,a,\langle p,x\rangle) = S_g^{**}(\,\mathrm{wil}\,(k,s,a,\xi))(x)$ сходятся в $D'(\mathbf{R}^n)$ к обобщённой функции $\mathrm{wil}\,(k,s,\infty\langle p,x\rangle) = S_g^{**}(\,\mathrm{wil}\,(k,s,\infty,\xi))(x)$.

Для $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ и замкнутого шара $U_A \equiv \{x \in (\mathbf{R}^n) \;\Big|\; |x| \le A\}$, содержащего носитель функции φ, справедливы равенства

$$(\,\mathrm{wil}\,(k,s,a,\langle p,x\rangle),\varphi(x)) = (S_g^{**}(\,\mathrm{wil}\,(k,s,a,y_1))(x),\varphi(x)) = \tag{15.3.26}$$

$$(\,\mathrm{wil}\,(k,s,a,y_1),(S^*_g(\varphi))(y)) = (1(y_2,y_3,\dots y_n),(\,\mathrm{wil}\,(k,s,a,y_1),S^*_g(\varphi)(y_1,y_2,\dots y_n))).$$

Поэтому в силу леммы 15.3.1 получаем оценку

$$|(\,\mathrm{wil}\,(k,s,a,\langle p,x\rangle),\varphi(x))| \le \underbrace{\int\limits_{-A}^{A}\int\limits_{-A}^{A}\dots\int\limits_{-A}^{A}}_{n-1} 4A\|S^{**}_g(\varphi)\|_{C^{(k+1)}}\,dy_2dy_3\dots dy_n \tag{15.3.27}$$

$$\le 2(2A)^n n^{\frac{k+1}{2}}\|\varphi\|_{C^{(k+1)}}.$$

Доказана следующая лемма.

Лемма 15.3.2 *Если* $p\in\mathbf{R}^n$, $|p|=1$, *то в* $D'(\mathbf{R})$ *существует предел* $\lim\limits_{a\to+\infty}\mathrm{wil}\,(k,s,a,\langle p,x\rangle) = \mathrm{wil}\,(k,s,\infty,\langle p,x\rangle)$. *Для любой основной функции* $\varphi\in D(\mathbf{R}^n)$, *замкнутого шара* $U_A\equiv\{x\in\mathbf{R}^n||x|\le A\}$, *содержащего носитель функции* φ *и любого* $a\in\mathbf{R}$, *а также* $a=\infty$ *верно неравенство*

$$|(\,\mathrm{wil}\,(k,s,a,\langle p,x\rangle),\varphi(x))| \le 2(2A)^n n^{\frac{k+1}{2}}\|\varphi\|_{C^{(k+1)}}. \tag{15.3.28}$$

15.3.3 Однородность обобщённой функции $\mathrm{wil}\,(k,s,\infty,\xi)$.

Обобщённая функция $\mathrm{wil}\,(k,s,\infty,\xi)\in D'(\mathbf{R})$ однородна степени $r=-(k+1)$. Так как в силу (15.3.7) верно

$$\mathrm{wil}\,(k,s,\infty,\xi) = \left(-i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^k \mathrm{wil}\,(0,s-k,\infty,\xi), \tag{15.3.29}$$

то в силу утверждения 15.1.9 для справедливости сказанного достаточно убедиться, что обобщённая функция $\mathrm{wil}\,(0,s,\infty,\xi)$ однородна степени $r=-1$. При s чётном согласно лемме 15.3.1 $\mathrm{wil}\,(0,s,\infty,\xi)=\pi\delta(\xi)$, и согласно примеру 15.1.2 однородна степени $r=-1$. При s нечётном согласно п. 15.1.6 имеем для основной функции $\varphi\in D(\mathbf{R})$ с $\mathrm{supp}\,(\varphi)\subset[-A,A]$

$$(S^{**}_{lt}(\,\mathrm{ra}\,),\varphi) = (\,\mathrm{ra}\,,S^*_{lt}\varphi) = \left(\mathrm{ra}\,(\xi),\frac{1}{t}\varphi\left(\frac{\xi}{t}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{t}\int\limits_{-At}^{At}\frac{\varphi\left(\frac{\xi}{t}\right)-\varphi(0)}{\xi}d\xi = \frac{1}{t}\int\limits_{-A}^{A}\frac{\varphi(\eta)-\varphi(0)}{\eta}d\eta = \frac{1}{t}(\,\mathrm{ra}\,,\varphi),$$

т.е. $S^{**}_{lt}(\,\mathrm{ra}\,)=\frac{1}{t}\,\mathrm{ra}$ при $t\in\mathbf{R}_+$. Однородность проверена.

15.3.4 Производные регулярной обобщённой функции $\ln|x|$ в $D'(\mathbf{R})$.

Введём отображение $\mathrm{lnm}\,:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ по правилу

$$\mathrm{lnm}\,(x) = \begin{cases}\ln|x| & ,x\ne0;\\ 0 & ,x=0.\end{cases} \tag{15.3.30}$$

Функция $\mathrm{lnm}\,(x)$ локально суммируема на $\mathbf{R}$ и задаёт регулярную обобщённую функцию $\mathrm{lnm}\in D'(\mathbf{R})$. Рассмотрим её производные. Пусть $\varphi\in D(\mathbf{R})$ и $\mathrm{supp}\,(\varphi)\subset[a,b]$.

Если $0 \notin [a,b]$, то на сегменте $[a,b]$ производная понимается классическим образом, т.е.

$$\operatorname{lnm}^{(k)}(x) = (\ln|x|)^{(k)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{k-1} = (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{x^k}, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{15.3.31}$$

В этом случае

$$(\operatorname{lnm}^{(k)}, \varphi) = \int\limits_a^b \operatorname{lnm}^{(k)}(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_a^b \left((-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{x^k}\right)\varphi(x)\,dx \tag{15.3.32}$$

Если $0 \in]a,b[$, то

$$(\operatorname{lnm}^{(k)}, \varphi) = (-1)^k \int\limits_a^b \operatorname{lnm}(x)\varphi^{(k)}(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}(-1)^k \left(\int\limits_a^{-\varepsilon} + \int\limits_\varepsilon^b\right) \operatorname{lnm}(x)\varphi^{(k)}(x)\,dx. \tag{15.3.33}$$

Согласно п. 12.4.2 через

$$tk(\varphi)(x) \equiv \sum_{m=0}^{k} \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}x^m \tag{15.3.34}$$

обозначим сумму Тейлора порядка k функции $\varphi(x)$ с центром в нуле. Тогда

$$\varphi^{(k)}(x) = (\varphi - t_{k-1}(\varphi))^{(k)}(x). \tag{15.3.35}$$

Подставим (15.3.35) в интеграл

$$\left(\int\limits_a^{-\varepsilon} + \int\limits_\varepsilon^b\right) \operatorname{lnm}(x)\varphi^{(k)}(x)\,dx = \left(\int\limits_a^{-\varepsilon} + \int\limits_\varepsilon^b\right) \operatorname{lnm}(x)(\varphi - t_{k-1}(\varphi))^{(k)}\,dx$$

и проведём k раз интегрирование по частям, получим

$$\left(\int\limits_a^{-\varepsilon} + \int\limits_\varepsilon^b\right) \operatorname{lnm}(x)\varphi^{(k)}(x)\,dx = (-1)^k \left(\int\limits_a^{-\varepsilon} + \int\limits_\varepsilon^b\right) \operatorname{lnm}^{(k)}(x)(\varphi - t_{k-1}(\varphi))(x)\,dx + \tag{15.3.36}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \operatorname{lnm}^{(i)}(x)(\varphi - t_{k-1}(\varphi))^{(k-1-i)}(x)\left(\Big|_a^{-\varepsilon} + \Big|_\varepsilon^b\right).$$

Далее

$$(\varphi - t_{k-1}(\varphi))^{(k-1-i)} = \varphi^{(k-1-i)} - t_i(\varphi^{(k-1-i)}). \tag{15.3.37}$$

Поэтому при $i \in \overline{0,(k-1)}$ верно $\operatorname{lnm}^{(i)}(x)(\varphi - t_{k-1}(\varphi))^{(k-1-i)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^i}\right) \cdot O\left(|x|^{i+1}\right)$ при $|x| \to 0$. Следовательно

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \operatorname{lnm}^{(i)}(x)(\varphi - t_{k-1}(\varphi))^{(k-1-i)}(x)\Big|_\varepsilon^{-\varepsilon} = 0. \tag{15.3.38}$$

Кроме того $(\varphi - t_{k-1}(\varphi))(x) = O\left(|x|^k\right)$ при $|x| \to 0$ поэтому существует интеграл Лебега

$$\int\limits_a^b \operatorname{lnm}^{(k)}(x)(\varphi - t_{k-1}(\varphi))(x)\,dx.$$

В силу формул (15.3.33,15.3.36,15.3.38) получаем

$$(\,\mathrm{lnm}^{(k)},\varphi)=\int\limits_a^b \mathrm{lnm}^{(k)}(x)(\varphi)-t_{k-1}\varphi))(x)\,dx+ \tag{15.3.39}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{(k-i)}\,\mathrm{lnm}^{(i)}(x)(\varphi-t_{k-1}(\varphi))^{(k-1-i)}(x)\Big|_a^b.$$

Но по условию $\mathrm{supp}\,(\varphi)\subset[a,b]$, поэтому из (15.3.39) вытекает

$$(\,\mathrm{lnm}^{(k)},\varphi)=\int\limits_a^b \mathrm{lnm}^{(k)}(x)(\varphi-t_{k-1}(\varphi))(x)\,dx+ \tag{15.3.40}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1}-i\,\mathrm{lnm}^{(i)}(x)t_{k-1}(\varphi)^{(k-1-i)}(x)\Big|_a^b.$$

Определим $t_{-1}(\varphi)\equiv 0$, тогда доказана

Лемма 15.3.3 *Для $k\in\mathbf{N}_o$, $\varphi\in D(\mathbf{R})$ и $\mathrm{supp}\,(\varphi)\subset[a,b]$ и $0\in]a,b[$ верна формула (15.3.40).*

При $k=1$ и $a=b=A$ получаем, в частности,

$$(\,\mathrm{lnm}^{(1)},\varphi)=\int\limits_a^b\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx=(\,\mathrm{ra}\,,\varphi),$$

т.е. $\mathrm{lnm}^{(k)}=\ \mathrm{ra}$. Поэтому при $k\in\mathbf{N}_o$ верно равенство

$$ra^{(k)}=\ \mathrm{lnm}^{(k+1)} \tag{15.3.41}$$

в $D'(\mathbf{R})$.

15.3.5 Регулярные и сингулярные точки обобщённой функции.

Уточним нашу терминологию.

Пусть $f\in D'(G)$, где $G\subset\mathbf{R}^n$ открытое множество.

Определение 15.3.1 *Обобщённая функция $f\in D'(G)$ регулярна в точке $a\in G$, если существует окрестность $U_a\subset G$ точки a, что сужение $f\Big|_{U_a}\in D'(U_a)$ — регулярная обобщённая функция.*

Множество всех точек, в которых обобщённая функция f регулярна(точек регулярности), обозначим через $\mathrm{regul}\,(f)$. В силу определения 15.3.1 множество точек регулярности $\mathrm{regul}\,(f)\subset G$ — открытое подмножество в G. Точку $a\in G$, не являющуюся точкой регулярности, назовём точкой сингулярности или сингулярной точкой. Множество точек сингулярности обобщённой функции f обозначим через $\mathrm{singul}\,(f)$. По определению множество точек сингулярности $\mathrm{singul}\,(f)=G\setminus\mathrm{regul}\,(f)$ и поэтому замкнуто.

Если для каждой точки $a\in G$ определена окрестность $U_a\subset G$ и сужение обобщённой функции $f\in D'(G)$ на множество U_a вида $f|_{U_a}\equiv f_a$ то мы говорим, что задана система локальных элементов $\{f_a\}_{a\in G}$ обобщённой функции f. При этом локальные элементы согласованы, если при $U_a \cap U_{a'} = W \neq \emptyset$ верно $f_a|_W = f_{a'}|_W$. Обобщённая функция $f \in D'(G)$ определяет согласованную систему локальных элементов $\{fa\}_{a\in G}$. Наоборот,любая согласованная система локальных элементов $\{fa\}_{a\in G}$ однозначно определяет обобщённую функцию $f \in D'(G)$, для которой $fa = f|_{Ua}$ при любом $a \in G$ (см. [24, с. 25]).

Итак, для построения обобщённой функции f на множестве G достаточно построить её локальные элементы во всех регулярных и сингулярных точках.

В п. 15.1.1 мы установили, что если $g \in \operatorname{Diff}(G_1, G_2)$ и $f \in D'(G_2)$ — регулярная обобщённая функция , то обобщённая функция $S_g^{**} \in D'(G_1)$ также регулярна и представима функцией $f(g(x)) \in L_{loc}(G_1)$. Отсюда следует в силу построения п. 15.1.5, что если обобщённая функция $f \in D'(Y_1)$ и отображение $g_2 : X \to Y_1$ удовлетворяют условиям A и условию C, то для обобщённой функции $v(x) = f(g_1(x))$, $v \in D'(X)$ верно

$$\operatorname{supp}(v) \cap \operatorname{regul}(v) = g_1^{-1}(\operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{regul}(f)) \tag{15.3.42}$$

и

$$\operatorname{supp}(v) \cap \operatorname{singul}(v) = g_1^{-1}(\operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{singul}(f)), \tag{15.3.43}$$

т.е. регулярные точки носителя обобщённой функции $v \in D'(X)$ являются прообразами регулярных точек носителя обобщённой функции $f \in D'(Y_2)$.

15.3.6 Обобщённая функция $\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin(\varphi))$ на единичной окружности.

Пусть Ω_1 — единичная окружность, рассматриваемая как многообразие, и $D'(\Omega_1)$ пространство обобщённых функций на окружности Ω_1. Определим обобщённую функцию $\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin(\varphi)) \in D'(\Omega_1)$, где $\varphi \in [0, 2\pi]$ угол на окружности, $k \in \mathbf{N}$.

Поскольку обобщённая функция $\operatorname{lnm}^{(k)}(\xi) \in D'(\mathbf{R})$ уже определена, то для проведения замены переменных $\xi = \sin(\varphi)$ согласно п. 15.1.5 требуется, чтобы $\frac{d\xi}{d\varphi} = \cos(\varphi) \neq 0$. Это условие выполнено во всех точках окружности, кроме двух точек $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$. Итак, на открытом подмножестве $\Omega_1 \setminus \{\varphi_1, \varphi_2\}$ определена обобщённая функция $\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin(\varphi)) \in D'(\Omega_1 \setminus \{\varphi_1, \varphi_2\})$. Во всех точках множества $\Omega_1 \setminus \{\varphi_1, \varphi_2\}$ кроме двух точек $\varphi_3 = 0$ и $\varphi_4 = \pi$ обобщённая функция $\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin(\varphi))$ согласно формулам (15.3.42) и (15.3.43) регулярна и представима функцией

$$\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi) = (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{(\sin\varphi)^{k-1}} \tag{15.3.44}$$

согласно формуле (15.3.31). Из формулы (15.3.44) видно, что обобщённая функция $\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi)$ продолжается однозначно по регулярности и непрерывности в точки $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi_2 = \frac{3}{2}\pi$ той же формулой (15.3.44). Итак, мы определили обобщённую функцию $\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi) \in D'(\Omega_1)$ регулярную и бесконечно дифференцируемую всюду на Ω_1 кроме двух точек $\varphi_3 = 0$ и $\varphi_4 = \pi$.

Покажем теперь как вычисляется действие обобщённой функции $\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi) \in D'(\Omega_1)$ на произвольную основную функцию $v(\varphi) \in D(\Omega_1)$.

Лемма 15.3.4 *Для действия обобщённой функции $\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi)$ на произвольную основную функцию $v(\varphi) \in D(\Omega_1)$ справедлива формула*

$$(\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi), v(\varphi)) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi)(v(\varphi) - (\cos\varphi)p_{k-2}(\sin\varphi))\, d\varphi + \tag{15.3.45}$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi)(v(\varphi)+(\cos\varphi)q_{k-1}(\sin\varphi))\,d\varphi+$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\operatorname{lnm}^{(i)}(\xi)\left(p_{k-1}^{(k-1-i)}(\xi)+q_{k-1}^{(k-1-i)}(\xi)\right)\Big|_{-1}^{1},$$

где $p_{k-1}(\xi)\equiv t_{k-1}\left(\frac{v(\arcsin\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}},0\right)(\xi)$ *и* $q_{k-1}(\xi)\equiv t_{k-1}\left(\frac{v(\pi-\arcsin\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}},0\right)(\xi)$ *— суммы Тейлора порядка* $k-1$ *от функций* $\frac{v(\arcsin\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}$ *и* $\frac{v(\pi-\arcsin\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}$ *соответственно с центром в нуле.*

Доказательство. Для каждого числа $\varepsilon\in]0,\frac{\pi}{6}[$ возьмём покрытие единичной окружности Ω_1 четырьмя открытыми интервалами $I_1(\varepsilon)\equiv]-\frac{\pi}{2}+\varepsilon,\frac{\pi}{2}-\varepsilon[$, $I_2(\varepsilon)=]\frac{\pi}{2}+\varepsilon,\frac{3\pi}{2}-\varepsilon[$, $I_3(\varepsilon)\equiv]\frac{\pi}{2}-2\varepsilon,\frac{\pi}{2}+2\varepsilon[$, $I_4(\varepsilon)\equiv]\frac{3\pi}{2}-2\varepsilon,\frac{3\pi}{2}+2\varepsilon[$. Возьмём разбиение единицы, соответствующее данному открытому покрытию, из четырёх функций $\chi_{1\varepsilon}(\varphi)$, $\chi_{2\varepsilon}(\varphi)$, $\chi_{3\varepsilon}(\varphi)$, $\chi_{4\varepsilon}(\varphi)$. Тогда

$$(\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi),v(\varphi))=\left(\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi),\left(\sum_{\alpha=1}^{4}\chi_{\alpha\varepsilon}(\varphi)\right)v(\varphi)\right)= \tag{15.3.46}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4}\left(\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi),\chi_{\alpha\varepsilon}(\varphi)v(\varphi)\right).$$

На открытых множествах $I_3(\varepsilon)\subset\Omega_1$ и $I_4(\varepsilon)\subset\Omega_1$ обобщённая функция $\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi)$ регулярна, поэтому

$$J_3(\varepsilon)\equiv(\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi),\chi_{3\varepsilon}(\varphi)v(\varphi))=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi)v(\varphi)\chi_{3\varepsilon}(\varphi)\,d\varphi,$$

$$J_4(\varepsilon)\equiv(\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi),\chi_{4\varepsilon}(\varphi)v(\varphi))=\int\limits_{\frac{7\pi}{6}}^{2\pi-\frac{\pi}{6}}\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi)v(\varphi)\chi_{4\varepsilon}(\varphi)\,d\varphi.$$

На участке $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ функции $\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi),v(\varphi)$ непрерывны и ограничены, функция $\chi_{3\varepsilon}(\varphi)$ непрерывна, ограничена по модулю единицей и при $\varepsilon\to0$ сходится к нулю почти всюду на $[\frac{\pi}{6},5\pi]$. По теореме Лебега о мажорированной сходимости

$$\lim_{\varepsilon\to0}J_3(\varepsilon)=0. \tag{15.3.47}$$

По аналогичным соображениям

$$\lim_{\varepsilon\to0}J_4(\varepsilon)=0. \tag{15.3.48}$$

На интервале $I_{1\varepsilon}$ применима формула замены переменных с $g(\varphi)=\sin\varphi$. Поэтому

$$J_1(\varepsilon)\equiv(\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi),\chi_{1\varepsilon}(\varphi)v(\varphi))=\left(\left(S_g^{**}\left(\operatorname{lnm}^{(k)}(\xi)\right)\right)(\varphi),\chi_{1\varepsilon}(\varphi)v(\varphi)\right)= \tag{15.3.49}$$

$$\left(\operatorname{lnm}^{(k)}(\xi),\left(S_g^{*}\left(\chi_{1\varepsilon}(\varphi)v(\varphi)\right)\right)(\xi)\right).$$

Согласно определению оператора S_g^*

$$S_g^*(\chi_1(\varphi)v(\varphi)) = g^{-1*}\left(\frac{1}{|\cos\varphi|}\chi_{1\varepsilon}(\varphi)v(\varphi)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\chi_{1\varepsilon}(\arcsin\xi)v(\arcsin\xi). \quad (15.3.50)$$

Теперь для вычисления выражения (15.3.49) применим лемму 15.3.3 и получим

$$J_1(\varepsilon) = \int\limits_{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}^{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)} \operatorname{lnm}^{(k)}(\xi)(u_1(\xi) - t_{k-1}(u_1,0)(\xi))d\xi + \quad (15.3.51)$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{(k-1-i)}\operatorname{lnm}^{(i)}(\xi)t_{k-1}^{(k-1-i)}(u_1,0)(\xi)\Big|_{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}^{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)},$$

где

$$u_1(\xi) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\chi_{1\varepsilon}(\arcsin\xi)v(\arcsin\xi),$$

а $t_{k-1}(u_1,0)(\xi)$ — сумма Тейлора порядка $(k-1)$ функции $u_1(\xi)$ с центром в нуле. Заметим, что поскольку $\chi_{1\varepsilon}(\arcsin\xi) = 1$ в некоторой окрестности нуля, то

$$t_{k-1}(u_1,))(\xi) = t_{k-2}\left(\frac{v(\arcsin\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}},0\right)(\xi) \equiv p_{k-1}(\xi), \quad (15.3.52)$$

т.е. суммы Тейлора с центром в нуле у функций $\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\chi(\arcsin\xi)v(\arcsin\xi)$ и $\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}v(\arcsin\xi)$ совпадают. Проведём теперь в интеграле в формуле (15.3.51) обратную замену переменных $\xi = \sin\varphi$ и получим

$$J_1(\varepsilon) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi)(\chi_{1\varepsilon}(\varphi)v(\varphi) - (\cos\varphi)p_{k-1}(\sin\varphi))\,d\varphi + \quad (15.3.53)$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\operatorname{lnm}^{(i)}(\xi)p_{k-1}^{(k-1-i)}(\xi)\Big|_{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}^{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}.$$

На множестве $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\backslash]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}[$ функции $\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi), v(\varphi), p_{k-1}(\sin\varphi)$ непрерывны и ограничены, а функция $\chi_{1\varepsilon}(\varphi)$ непрерывна, ограничена по модулю единицей и при $\varepsilon \to 0$ сходятся почти всюду к единице. Поэтому в силу непрерывной зависимости от пределов интегрирования и теоремы Лебега о мажорированной сходимости

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_1(\varepsilon) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi)(v(\varphi) - (\cos\varphi)p_{k-1}(\sin\varphi))\,d\varphi + \quad (15.3.54)$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{(k-1-i)}\operatorname{lnm}^{(i)}(\xi)p_{k-1}^{(k-1-i)}(\xi)\Big|_{-1}^{1}.$$

Аналогичным образом действуем на интервале $I_2(\varepsilon)$. Применяем формулу замены переменных с $\xi = g(\varphi) = \sin\varphi$. Обратная функция $\varphi = g^{-1}(\xi) = \pi - \arcsin\xi$.

$$J_2(\varepsilon) \equiv (\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi), \chi_{2\varepsilon}(\varphi)v(\varphi)) = (\operatorname{lnm}^{(k)}(\xi), (S_g^*(\chi_{2\varepsilon}(\varphi)v(\varphi)))(\xi)). \quad (15.3.55)$$

Согласно определению оператора S_g^* имеем

$$S_g^*(\chi_{2\varepsilon}(\varphi)v(\varphi))(\xi) = g^{-1*}\left(\frac{1}{|\cos\varphi|}\chi_{2\varepsilon}(\varphi)v(\varphi)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\chi_{2\varepsilon}(\pi - \arcsin\xi)v(\pi - \arcsin\xi). \tag{15.3.56}$$

Применим лемму 15.3.3 для вычисления выражения (15.3.55) и получим

$$J_2(\varepsilon) = \int\limits_{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\varepsilon\right)}^{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)} \operatorname{lnm}^{(k)}(\xi)(u_2(\xi) - t_{k-1}(u_2,0)(\xi))d\xi + \tag{15.3.57}$$

$$\sum i = 0^{k-1}(-1)^{k-1-i}\operatorname{lnm}^{(i)}(\xi)t_{k-1}(u_2,0)(\xi)\Big|_{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\varepsilon\right)}^{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)},$$

где

$$u_2(\xi) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\chi_{2\varepsilon}(\pi - \arcsin\xi)v(\pi - \arcsin\xi),$$

а $t_{k-1}(u_2,0)(\xi)$ есть сумма Тейлора порядка $(k-1)$ функции $u_2(\xi)$ с центром в нуле. Поскольку в некоторой окрестности точки $\xi = 0$ функция $\chi_{2\varepsilon}(\pi - \arcsin\xi) = 1$, то

$$t_{k-1}(u_2,0)(\xi) = t_{k-1}\left(\frac{v(\pi - \arcsin\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}, 0\right)(\xi) \equiv g_{k-1}(\xi). \tag{15.3.58}$$

Проведём теперь в интеграле в формуле (15.3.57) обратную замену переменных $\xi = \sin\varphi$ и получим

$$J_2(\varepsilon) = \int\limits_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{3\pi}{2}-\varepsilon} \operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi)(\chi_{2\varepsilon}(\varphi)v(\varphi) + (\cos\varphi)q_{k-1}(\sin\varphi)d\varphi + \tag{15.3.59}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\operatorname{lnm}^{(i)}(\xi)q_{k-1}^{(k-1-i)}(\xi)\Big|_{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\varepsilon\right)}^{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_2(\varepsilon) = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi)(v(\varphi) + (\cos\varphi)q_{k-1}(\sin\varphi))\,d\varphi + \tag{15.3.60}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\operatorname{lnm}^{(i)}(\xi)q_{k-1}(\xi)\Big|_{-1}^{1}.$$

Согласно (15.3.46) при каждом $\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{6}[$ имеет место равенство

$$(\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi), v(\varphi)) = \sum_{\alpha=1}^{4} J_\alpha(\varepsilon). \tag{15.3.61}$$

Переходя в равенстве (15.3.61) к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учётом соотношений (15.3.47), (15.3.48), (15.3.54) и (15.3.60) получаем формулу (15.3.45) $\diamondsuit$.

В дальнейшем мы будем применять формулу (15.3.45) в случае, когда основная функция $v \in D(\Omega_1)$ удовлетворяет условию

$$\forall\varphi \in \mathbf{R} \;\Big|\; v(\varphi + \pi) = (-1)^k v(\varphi) \tag{15.3.62}$$

с $k \in \mathbf{N}$.

Лемма 15.3.5 *Если $v \in D(\Omega_1)$ — основная функция, удовлетворяющая условию (15.3.62), то справедливо равенство*

$$\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi), v(\varphi)) = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi)(v(\varphi) - (\cos\varphi)p_{k-1}(\sin\varphi))d\varphi + \qquad (15.3.63)$$

$$2\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\operatorname{lnm}^{(i)}(1)\left(p_{k-1}^{(k-1-i)}(1) + (-1)^{i+1}p_{k-1}^{(k-1-i)}(-1)\right),$$

где $p_{k-1}(\xi)$ — сумма Тейлора порядка $(k-1)$ функции $u(\xi) \equiv \frac{v(\arcsin\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}$ с центром в точке $\xi = 0$.

Доказательство. Согласно (15.3.31) функция $\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi)$ удовлетворяет условию

$$\forall\varphi \in \mathbf{R} \;\Big|\; \operatorname{lnm}^{(k)}(\sin(\varphi+\pi)) = (-1)^k\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi). \qquad (15.3.64)$$

Для суммы Тейлора $g_{k-1}(\xi)$ функции $u_2(\xi) = \frac{v(\pi-\arcsin\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}$ с центром в нуле имеем

$$g_{k-1}(\xi) \equiv t_{k-1}\left(\frac{v(\pi-\arcsin\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}, 0\right)(\xi) = t_{k-1}\left((-1)^k\frac{v(\arcsin(-\xi))}{\sqrt{1-\xi^2}}, 0\right)(\xi) = \qquad (15.3.65)$$

$$(-1)^k t_{k-1}\left(\frac{v(\arcsin\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}, 0\right)(-\xi) = (-1)^k p_{k-1}(-\xi).$$

Далее для производных на основании (15.3.65) получаем

$$q_{k-1}^{(k-1-i)}(\xi) = \left(\frac{d}{d\xi}\right)^{k-1-i} q_{k-1}(\xi) = (-1)^k\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{k-1-i} p_{k-1}(-\xi) = \qquad (15.3.66)$$

$$(-1)^k(-1)^{k-1-i}\left(\frac{d}{d(-\xi)}\right)^{k-1-i} p_{k-1}(-\xi) = (-1)^{i+1}p_{k-1}^{(k-1-i)}(-\xi).$$

Используя соотношения (15.3.62), (15.3.64), (15.3.65), преобразуем интеграл заменой переменных $\varphi = \psi + \pi$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi)(v(\varphi) + (\cos\varphi)q_{k-1}(\sin\varphi))d\varphi = \qquad (15.3.67)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{lnm}^{(k)}(\sin(\psi+\pi))(v(\psi+\pi) + (\cos(\psi+\pi))q_{k-1}(\sin(\psi+\pi)))d\psi =$$

$$(-1)^{2k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\psi)(v(\psi) - (\cos\psi)p_{k-1}(\sin\psi))d\psi.$$

Используя соотношения (15.3.66), преобразуем сумму, входящую в правую часть формулы (15.3.45),

$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\operatorname{lnm}^{(i)}(\xi)\left(p_{k-1}^{(k-1-i)}(\xi) + q_{k-1}^{(k-1-i)}(\xi)\right)\Big|_{-1}^{1} = \qquad (15.3.68)$$

$$\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\,\mathrm{lnm}^{(i)}(1)\left(p_{k-1}^{(k-1-i)}(1)+q_{k-1}^{(k-1-i)}(1)\right)-$$

$$\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k-1-i}(-1)^{i}\,\mathrm{lnm}^{(i)}(1)\left(p_{k-1}^{(k-1-i)}(-1)+q_{k-1}^{(k-1-i)}(-1)\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\,\mathrm{lnm}^{(i)}(1)\left(p_{k-1}^{(k-1-i)}(1)+(-1)^{i+1}p_{k-1}^{(k-1-i)}(-1)+\right.$$

$$\left.(-1)^{i+1}p_{k-1}^{(k-1-i)}(-1)+p_{k-1}^{(k-1-i)}(1)\right)=$$

$$2\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\,\mathrm{lnm}^{(i)}(1)\left(p_{k-1}^{(k-1-i)}(1)+(-1)^{i+1}p_{k-1}^{(k-1-i)}(-1)\right).$$

Подстановка равенств (15.3.67,15.3.68) в формулу (15.3.45) даёт формулу (15.3.63). $\diamondsuit$

Замечание 15.3.1 *При $k-1=0$ пустая сумма вида $\sum_{i=1}^{k-1}$ по определению считается нулём в формуле (15.3.63).*

§15.4 Трансформация Фурье однородной рациональной функции

Цель этого параграфа — получить явные формулы для трансформации Фурье регулярной однородной рациональной обобщённой функции. При этом мы используем технику повторных функций из § 15.2 и вспомогательные обобщённые функции из § 15.3. Сначала сделаем несколько замечаний о симметричных и однородных обобщённых функциях.

15.4.1 Вращательная симметрия обобщённой функции и её трансформации Фурье.

Вернемся к обозначениям и терминологии п. 15.1.6. Пусть $A\in O(n,\mathbf{R})$ ортогональная матрица и $l:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ линейный изоморфизм $l(x)\equiv Ax$. Тогда оператор S_l^{**} коммутирует с оператором трансформации Фурье F^*, т.е.

$$F^*S_l^*=S_l^*F^* \tag{15.4.1}$$

в силу формулы (15.1.62), ибо $l^\top=l^{-1}$ и $|\det A|=1$. Отсюда, переходя к сопряжённым операторам, получаем

$$S_l^{**}F^{**}=F^{**}S_l^{**} \tag{15.4.2}$$

при $A\in O(n,\mathbf{R})$.

Пусть W некоторое подмножество вещественных матриц $n\times m$, $W\subset M(n\times m,\mathbf{R})$. Пусть при каждом $B\in W$ определена обобщённая функция $f(x,B)\in S'(\mathbf{R}^n)$ аргумента $x\in\mathbf{R}^n$. Через $\hat f(\eta,B)\in S'(\mathbf{R}^n)$ обозначим трансформацию Фурье обобщённой функции $f(x,B)\in S'(\mathbf{R}^n)$.

Утверждение 15.4.1 *Если* $A \in O(n, \mathbf{R})$, $B \in W$, $AB \in W$ *и следующие обобщённые функции равны*

$$f(Ax, AB) = f(x, B), \tag{15.4.3}$$

то равны и следующие обобщённые функции

$$\hat{f}(A\eta, AB) = \hat{f}(\eta, B). \tag{15.4.4}$$

Доказательство. В обозначениях п. 15.1.6 равенство (15.4.3) запишем в виде

$$S_l^{**}\left(f(+, AB)\right) = f(+, B),$$

где символ $+$ означает меняющуюся переменную, и применим к этому равенству оператор трансформации Фурье F^{**}, получим

$$F^{**} S_l^{**}\left(f(+, AB)\right) = F^{**}\left(f(+, B)\right).$$

Учитывая (15.4.2), получим

$$S_l^{**} F^{**}\left(f(+, AB)\right) = F^{**}\left(f(+, B)\right).$$

Последнее равенство совпадает с равенством (15.4.4). $\diamondsuit$

Матрицу $B \in M(n \times m, \mathbf{R})$ мы можем записывать как m столбцов

$$B \equiv (b_1, b_2, \ldots b_m), \quad b_i \in \mathbf{R}^n, \quad i \in \overline{1, m}. \tag{15.4.5}$$

Если обобщённая функция $f(x, b_1, b_2, \ldots b_m)$ регулярна, то она будет удовлетворять соотношению (15.4.3) при любой ортогональной матрице $A \in O(n, \mathbf{R})$, если функция $f(x, b_1, b_2, \ldots b_m)$ представима в виде некоторой функции от попарных скалярных произведений векторов $x, b_1, b_2, \ldots b_m$. Наоборот, если в некоторой точке $(x, b_1, b_2, \ldots b_m) \in (\mathbf{R}^n)^{1+m}$ с $\operatorname{rank}(x, b_1, b_2, \ldots b_m) = \min\{n, m+1\}$ функция $f(x, b_1, b_2, \ldots b_m)$ класса $C^{(1)}$, и обобщённая функция $f(x, b_1, b_2, \ldots b_m)$ удовлетворяет условию (15.4.3) для всех ортогональных матриц A, то в некоторой окрестности точки $(x, b_1, b_2, \ldots b_m) \in (\mathbf{R}^n)^{1+m}$ функция $f(x, b_1, b_2, \ldots b_m)$ представима в виде некоторой функции от попарных скалярных произведений векторов $x, b_1, b_2, \ldots b_m$ согласно теореме 6.3.3.

15.4.2 Трансформация Фурье регулярной обобщённой функции медленного роста.

Пусть $G \subset \mathbf{R}^n$ — открытое множество. Через $L(G)$ обозначим линейное пространство суммируемых по Лебегу функций на множестве G со значениями в $\mathbf{C}$, через $L_{loc}(G)$ — линейное пространство локально суммируемых функций на G со значениями в $\mathbf{C}$. Функция $f \in L_{loc}(\mathbf{R}^n)$ по определению медленного роста, если существует число $m \in \mathbf{N}$, что существует интеграл Лебега

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\,(1 + |x|)^{-m}\,dx.$$

Функция медленного роста $f \in L_{loc}(\mathbf{R}^n)$ задаёт обобщённую функцию медленного роста $f \in S'(\mathbf{R}^n)$, поэтому у неё существует трансформация Фурье $\hat{f} \in S'(\mathbf{R}^n)$.

Пусть $U_R \equiv \left\{x \in \mathbf{R}^n \;\middle|\; |x| \le R\right\}$, $R \in \mathbf{R}_+$ и $f \in L_{loc}(\mathbf{R}^n)$, тогда при каждом $R \in \mathbf{R}_+$ существует интеграл

$$\widehat{f_R}(\eta) \equiv \int\limits_{U_R} f(x) \exp\left(i\langle \eta, x\rangle\right) dx \tag{15.4.6}$$

и по теореме Римана-Лебега функция $\widehat{f_R}(\eta) \in \bar{C}_0\left(\mathbf{R}^n\right)$, т.е. непрерывна на $\mathbf{R}^n$ и имеет нулевой предел в бесконечности. Функция $\widehat{f_R} \in S'\left(\mathbf{R}^n\right)$ и если функция $f \in L_{loc}(\mathbf{R}^n)$ и является функцией медленного роста, то существует в локально выпуклом линейном топологическом пространстве $S'(\mathbf{R}^n)$ предел

$$\lim_{R\to+\infty} \widehat{f_R} = \hat{f}. \tag{15.4.7}$$

В силу естественного вложения $S'\left(\mathbf{R}^n\right) \subset D'\left(\mathbf{R}^n\right)$, тогда существует предел (15.4.7) и в локально выпуклом линейном топологическом пространстве $D'\left(\mathbf{R}^n\right)$. Для любого открытого подмножества $G \subset \mathbf{R}^n$ из сходимости $\widehat{f_R} \to \hat{f}$ в $D'\left(\mathbf{R}^n\right)$ следует сходимость их сужений $\widehat{f_R}\Big|_G \to \hat{f}\Big|_G$ в пространстве $D'(G)$. Итак, для вычисления трансформации Фурье $\hat{f} \in S'\left(\mathbf{R}^n\right)$ мы можем находить обобщённую функцию $\hat{f} \in D'\left(\mathbf{R}^n\right)$ локально, т.е. находить $\hat{f}\Big|_G \in D'(G)$. Но по своим локальным элементам $\hat{f}\Big|_G$ обобщённая функция $f \in D'\left(\mathbf{R}^n\right)$ восстанавливается однозначно (п. 15.3.5).

15.4.3 Локально суммируемые однородные функции.

Введём обозначение ${\mathbf{R}_0}^n \equiv \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.

Утверждение 15.4.2 *Пусть $f : {\mathbf{R}_0}^n \to \mathbf{C}$ измеримая однородная функция, тогда $f \in L_{loc}\left({\mathbf{R}_0}^n\right)$ иф существует интеграл Лебега по единичной сфере $\Omega_{n-1} \equiv \{x \in \mathbf{R}^n \;\Big|\; |x| = 1\}$*

$$\int\limits_{\Omega_{n-1}} |f(p)|\, d\sigma(p) < \infty. \tag{15.4.8}$$

Доказательство. Функция $f \in L_{loc}({\mathbf{R}_0}^n)$ иф для любых двух положительных чисел $a < b$ существует интеграл

$$\int\limits_{G(a,b)} |f(x)|\, dx < \infty, \tag{15.4.9}$$

где $G(a,b) \equiv \{x \in \mathbf{R}^n \;\Big|\; a \le |x| \le b\}$. Но множество $G(a,b)$ диффеоморфно произведению многообразий $[a,b] \times \Omega_{n-1}$ и по теореме Фубини-Лебега

$$\int\limits_{G(a,b)} |f(x)|\, dx = \int\limits_a^b r^{n-1} \int\limits_{\Omega_{n-1}} |f(rp)|\, d\sigma(p)\, dr = \int\limits_a^b r^{n-1+s}\, dr \int\limits_{\Omega_{n-1}} |f(p)|\, d\sigma(p), \tag{15.4.10}$$

где число $s \in \mathbf{R}$—степень однородности функции f. Итак, условие (15.4.9) эквивалентно условию (15.4.8). $\diamondsuit$

Если $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ измеримая функция, она принадлежит классу $L_{loc}(\mathbf{R}^n)$ иф она принадлежит $L_{loc}({\mathbf{R}_0}^n)$ и существует окрестность нуля, в которой она суммируема. Поэтому справедлива

Лемма 15.4.1 *Если $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ измеримая однородная степени $s \in \mathbf{R}$ функция, то следующие утверждения эквивалентны:*

I. $f \in L_{loc}(\mathbf{R}^n)$.

II. Существует окрестность нуля U, что $f\Big|_U \in L(U)$.

III. Существует интеграл (15.4.8) и $s > -n$.

Доказательство. Следование $I \to II$ очевидно. Утверждение II эквивалентно утверждению

$$\exists b \in \mathbf{R}_+ \;\Big|\; \int\limits_{U_b} |f(x)|\,dx < \infty. \tag{15.4.11}$$

Интеграл Лебега абсолютно непрерывен, поэтому

$$\int\limits_{U_b} |f(x)|\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{G(\varepsilon,b)} |f(x)|\,dx. \tag{15.4.12}$$

Согласно формуле (15.4.10) получаем

$$\int\limits_{U_b} |f(x)|\,dx = \int\limits_{\Omega_{n-1}} |f(p)|\,d\sigma(p) \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{b} r^{n+s-1}\,dr\right). \tag{15.4.13}$$

Из (15.4.11) и (15.4.13) следует эквивалентность $II \Leftrightarrow III$.

Если теперь верно утверждение III, то верно и утверждение II и по утверждению 15.4.2 верно и I. $\Diamond$

Между однородными функциями и функциями медленного роста имеет место следующая связь

Лемма 15.4.2 *Если $f \in L_{loc}(\mathbf{R}^n)$ однородная функция степени $s \in \mathbf{R}$, то*

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(x)|(1+|x|)^{-(s+n+1)}\,dx < \infty, \tag{15.4.14}$$

и каждая однородная локально суммируемая на $\mathbf{R}^n$ функция есть функция медленного роста.

Доказательство. Согласно лемме 15.4.1 из принадлежности $f \in L_{loc}(\mathbf{R}^n)$ следует, что $s+n>0$ и существует интеграл по единичной сфере (15.4.8). Тогда

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(x)|(1+|x|)^{-(s+n+1)}\,dx = \int\limits_{0}^{\infty} r^{n-1+s}(1+r)^{-(s+n+1)}\,dr \int\limits_{\Omega_{n-1}} |f(p)|\,d\sigma(p). \tag{15.4.15}$$

Интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{r^{n+s-1}}{(1+r)^{n+s+1}}\,dr$ сходится в нуле, ибо $n+s>0$ и сходится в бесконечности, ибо $(n+s-1)-(n+s+1)=-2$. Из (15.4.15) таким образом следует (15.4.14). $\Diamond$

Введём следующие два подмножества локально суммируемых функций: 1) $\mathrm{LO}\,(\mathbf{R}^n)$ — множество однородных функций $f \in L_{loc}(\mathbf{R}^n)$, 2) $\mathrm{LOR}\,(\mathbf{R}^n)$ — множество функций $f \in L_{loc}(\mathbf{R}^n)$, для которых существует представление $f(x) = \frac{p|x|}{q(x)}$, где $p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ и $q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ однородные полиномы. По определению верны включения $L_{loc}(\mathbf{R}^n) \supset \mathrm{LO}\,(\mathbf{R}^n) \supset \mathrm{LOR}\,(\mathbf{R}^n)$, а в силу леммы 15.4.2 верно $S'(\mathbf{R}^n) \supset \mathrm{LO}\,(\mathbf{R}^n)$. В частности, у всякой функции $f \in \mathrm{LO}\,(\mathbf{R}^n)$ существует трансформация Фурье $\hat f \in S'(\mathbf{R}^n)$. Всюду далее в этом параграфе мы рассматриваем функции $f \in \mathrm{LOR}\,(\mathbf{R}^n)$.

Если измеримое отображение $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ допускает представление $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, где $p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ и $q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ однородные полиномы, то в случае, если полином $q(x)$ не имеет других нулей кроме, быть может, нуля, существует интеграл по единичной сфере (15.4.8) и по лемме 15.4.1 $f \in L_{loc}(\mathbf{R}^n)$ иф степень однородности $s > -n$. В случае $n=2$ справедливо более сильное утверждение.

Лемма 15.4.3 *Пусть* $p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$ *и* $q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$ *однородные взаимно–простые полиномы и* $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. *Тогда* $f \in L_{loc}(\mathbf{R}^2)$ *иф степень однородности* $s \equiv \deg(p) - \deg(q) > -2$ *и полином* $q(x)$ *не имеет на* $\mathbf{R}^2$ *других нулей кроме, быть может, нуля.*

Доказательство. В силу леммы 15.4.2 требуется лишь доказать, что в условиях леммы 15.4.3 полином $q(x)$ не имеет других нулей, кроме, быть может, нуля.

Предположим противное, т.е. $q(a) = 0, \quad a \in \mathbf{R}^2, \quad a \neq 0$. В силу однородности полинома $q(x)$, тогда он обращается в нуль на прямой $l(a) \equiv \mathbf{R}a$. Тогда $\mathrm{Nul}\,(q) \supset l(a)$ и по следствию 14.5.3 полином $q(x)$ делится на полином $r(x) \equiv a_2x_1 - a_1x_2$, где $a \equiv (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$. Существует натуральное число $m \leq \deg(q)$, что $q(x) = (r(x))^m\, u(x)$, где $u(x)$ однородный полином и $u(a) \neq 0$.

Если $p(a) = 0$, то полином $p(x)$ также делится на полином $r(x)$, что противоречит условию взаимной простоты полиномов $p(x)$ и $q(x)$. Если же $p(a) \neq 0$, то существует число $\varepsilon > 0$, что для $f(x) = \frac{p(x)}{r^m(x)u(x)}$ верно

$$\int\limits_{|x-a|\leq\varepsilon} |f(x)|\, dx \geq \frac{1}{2}\left|\frac{p(a)}{u(a)}\right| \int\limits_{|x-a|\leq\varepsilon} \frac{1}{|r(x)|^m}\, dx = +\infty,$$

т.е. $f \notin L_{loc}(\mathbf{R}^2)$. Предположение, что $q(a) = 0$ в точке $a \neq 0$ приведено к противоречию. $\diamondsuit$

Следствие 15.4.1 *Если* $f \in \mathrm{LOR}\,(\mathbf{R}^2)$, *то* $f|_{{\mathbf{R}_0}^2} \in C^{(\infty)}({\mathbf{R}_0}^2)$.

15.4.4 Выражение трансформации Фурье через повторные функции.

Для функции $f \in \mathrm{LOR}\,(\mathbf{R}^n)$ вычислим предел $\lim\limits_{R\to\infty} \hat{f}_R(\eta)$ в пространстве $D'(\mathbf{R}^n)$. В интеграле (15.4.6) проведём замену переменных $x \mapsto -x$ и получим, учитывая свойства симметрии функции $f \in \mathrm{LOR}\,(\mathbf{R}^n)$:

$$\hat{f}_R(\eta) = \int\limits_{U_R} f(-x) \exp\left(i\langle\eta, -x\rangle\right)\, d(-x) = (-1)_s \int\limits_{U_R} f(x) \exp\left(-i\langle\eta, x\rangle\right)\, dx. \qquad (15.4.16)$$

Из равенств (15.4.6) и (15.4.16) по определению функции $\mathrm{ham}\,(s,t)$ — формула (15.3.1) следует

$$\hat{f}_R(\eta) = \int\limits_{U_R} f(x)\, \mathrm{ham}\ (s, \langle\eta, x\rangle)\ dx. \qquad (15.4.17)$$

В интеграле (15.4.17) проведём замену переменных $x = rp$, где $r = |x|, \quad p = \frac{x}{|x|}$, тогда $r \in [0, R], \quad p \in \Omega_{n-1}$ и

$$\hat{f}_R(\eta) = \int\limits_0^R r^{n-1+s} \left(\int\limits_{\Omega_{n-1}} f(p)\, \mathrm{ham}\ (s, r\langle\eta, p\rangle)\ d\sigma(p) \right) dr = \qquad (15.4.18)$$

$$\int\limits_{\Omega_{n-1}} f(p) \left(\int\limits_0^R r^{n+s-1}\, \mathrm{ham}\ (s, r\langle\eta, p\rangle)\ dr \right) d\sigma(p).$$

В силу условия $f \in \mathrm{LOR}\,(\mathbf{R}^n)$ по лемме 15.4.1 верно $s+n-1 \geq 0$ и все интегралы в (15.4.18) существуют. Согласно определению функции $\mathrm{wil}\,(k,s,a,\xi)$ — формула (15.3.40) формулу (15.4.18) можно записать в виде

$$\hat{f}_R(\eta) = \int\limits_{\Omega_{n-1}} f(p)\,\mathrm{wil}\;(s+n-1,s,R,\langle\eta,p\rangle)\;d\sigma(p). \tag{15.4.19}$$

Возьмём теперь основную функцию $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ и пусть шар $U_A \supset \mathrm{supp}\,(\varphi)$. Действие обобщённой функции $\hat{f}_R$ на основную функцию φ по теореме Фубини–Лебега равно

$$\left(\hat{f}_R,\varphi\right) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(\eta)\left(\int\limits_{\Omega_{n-1}} f(p)\,\mathrm{wil}\,(s+n-1,s,R,\langle\eta,p\rangle)\,d\sigma(p)\right)d\eta = \tag{15.4.20}$$
$$\int\limits_{\Omega_{n-1}} f(p)\left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(\eta)\,\mathrm{wil}\,(s+n-1,s,R,\langle\eta,p\rangle)\,d\eta\right)d\sigma(p) =$$
$$\int\limits_{\Omega_{n-1}} f(p)\,(\,\mathrm{wil}\,(s+n-1,s,R,\langle\eta,\dot{p}\rangle),\varphi(\eta))\;d\sigma(p).$$

В силу леммы 15.3.2 верно неравенство

$$\forall p \in \Omega_{n-1} \;\Big|\; |\,(\,\mathrm{wil}\,(s+n-1,s,R,\langle\dot{p},\eta\rangle),\varphi(\eta))\,| \leq 2(2A)^n n^{\frac{s+n}{2}}\,\|\varphi\|_{C^{(s+n)}} \tag{15.4.21}$$

и равенство

$$\forall p \in \Omega_{n-1} \;\Big|\; \lim_{R\to\infty}(\,\mathrm{wil}\,(s+n-1,s,R,\langle\dot{p},\eta\rangle),\varphi(\eta)) = \tag{15.4.22}$$
$$(\,\mathrm{wil}\,(s+n-1,s,\infty,\langle\dot{p},\eta\rangle),\varphi(\eta))\,.$$

По теореме Лебега о мажорированной сходимости тогда

$$\lim_{R\to\infty}\left(\hat{f}_R,\varphi\right) = \int\limits_{\Omega_{n-1}} f(p)\,(\,\mathrm{wil}\,(s+n-1,s,\infty,\langle\dot{p},\eta,\rangle),\varphi(\eta))\;d\sigma(p).$$

Получено следующее равенство

$$\forall\varphi \in D\,(\mathbf{R}^n) \;\Big|\; \left(\hat{f},\varphi\right) = \int\limits_{\Omega_{n-1}} f(p)\,(\,\mathrm{wil}\,(s+n-1,s,\infty,\langle\dot{p},\eta,\rangle),\varphi(\eta))\;d\sigma(p), \tag{15.4.23}$$

в котором согласно теореме 15.2.1 функция

$$\chi(z) \equiv (\,\mathrm{wil}\,(s+n-1,s,\infty,\langle\dot{z},\eta,\rangle),\varphi(\eta)) \tag{15.4.24}$$

принадлежит классу $C^{(\infty)}\,({\mathbf{R}_0}^n)$.

Введём обобщённую функцию $h \in D'(\mathbf{R}^n)$ вида $h(z) \equiv f(z)\delta(|z|-1)$, где $\delta(t) \in D'(\mathbf{R})$ одномерная δ-функция. Обобщённая функция $h(z)$ определена согласно п. 15.1.11, ибо функция $f(z)$ допускает по лемме 15.4.1 суммируемую локализацию на единичную сферу Ω_{n-1}. Согласно теореме 15.2.2 определена обобщённая функция $w(z,\eta) \in D'\,(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ вида

$$w(z,\eta) = \,\mathrm{wil}\,(s+n-1,s,\infty,\langle z,\eta\rangle)\,(f(z)\delta(|z|-1))\,. \tag{15.4.25}$$

Лемма 15.4.4 *Если $f \in \mathrm{LOR}\,(\mathbf{R}^n)$, то для любой основной функции $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ и любой основной функции $\psi \in D(\mathbf{R}^n)$, такой что $\psi(z) = 0$ в некоторой окрестности нуля и $\psi(z) = 1$ в некоторой окрестности единичной сферы Ω_{n-1}, верно*

$$\left(\hat{f}(\eta), \varphi(\eta)\right) = (w(z,\eta), \psi(z)\varphi(\eta))\,. \tag{15.4.26}$$

Доказательство. Формула (15.4.23) может быть согласно п. 15.1.8 записана в виде

$$\left(\hat{f}(\eta), \varphi(\eta)\right) = (f(z)\delta(|z|-1), \psi(z)\,(\,\mathrm{wil}\,(s+n-1, s, \infty, \langle z,\eta\rangle), \varphi(\eta)))\,. \tag{15.4.27}$$

Так как функция $\psi(z) = 0$ в окрестности нуля, то

$$(w(z,\eta), \psi(z)\varphi(\eta)) = \left(w[\mathbf{R}_0{}^n \times \mathbf{R}^n], \psi\Big|_{\mathbf{R}_0{}^n}\varphi\right). \tag{15.4.28}$$

Для обобщённой функции $w(z,\eta)\Big|_{\mathbf{R}_0{}^n\times\mathbf{R}^n}$ выполнены условия A и C по переменной η, поэтому по теореме 15.2.2

$$\left(w[\mathbf{R}_0{}^n \times \mathbf{R}^n], \psi\Big|_{\mathbf{R}_0{}^n}\varphi\right) = \left(\Pi^{**}[\mathbf{R}_0{}^n, \mathbf{R}^n](+,\varphi)w[\mathbf{R}_0{}^n \times \mathbf{R}^n], \psi\Big|_{\mathbf{R}_0{}^n}\right) = \tag{15.4.29}$$

$$\left((f(z)\delta(|z|-1))\,\Big|_{\mathbf{R}_0{}^n}, \psi\Big|_{\mathbf{R}_0{}^n}(z)\,(\,\mathrm{wil}\,(s+n-1, s, \infty, \langle \dot{z},\eta\rangle), \varphi(\eta))\right).$$

Но так как основная функция $\psi(z) = 0$ в окрестности нуля, то из (15.4.29) следует

$$\left(w[\mathbf{R}_0{}^n \times \mathbf{R}^n], \psi\Big|_{\mathbf{R}_0{}^n}\varphi\right) = ((f(z)\delta(|z|-1))\,, \psi(z)\,(\,\mathrm{wil}\,(s+n-1, s, \infty, \langle \dot{z},\eta\rangle), \varphi(\eta)))\,. \tag{15.4.30}$$

Равенства (15.4.27–15.4.30) доказывает равенство (15.4.26). $\diamondsuit$

Следствие 15.4.2 *В условиях леммы 15.4.4 обобщённая функция $\hat{f} \in D'(\mathbf{R}^n)$ равна повторной функции*

$$\hat{f} = \Pi^{**}(\psi, +)w. \tag{15.4.31}$$

15.4.5 Локальное поведение трансформации Фурье $\hat{f}(\eta)$ в случае $n = 3$.

В случае, когда размерность пространства n нечётна, согласно лемме 15.3.1

$$\mathrm{wil}\,(s+n-1, s, \infty, \langle z,\eta\rangle) = (-i)^{s+n-1}\pi\delta^{(s+n-1)}\left(\langle z,\eta\rangle\right), \tag{15.4.32}$$

поэтому обобщённая функция $w(z,\eta) \in D'(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, задаваемая формулой (15.4.25), равна

$$w(z,\eta) = (-i)^{s+n-1}\pi\delta^{(s+n-1)}\left(\langle z,\eta\rangle\right)(f(z)\delta(|z|-1))\,. \tag{15.4.33}$$

Теорема 15.4.1 *Пусть $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, где $p(x)$ и $q(x)$ однородные полиномы на $\mathbf{R}^3$ и функция $f(x) \in L_{loc}(\mathbf{R}^3)$. Пусть $a \in \mathbf{R}^3$, $a \neq 0$ и на окружности $C_a \equiv \left\{x \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; (\langle a,x\rangle = 0) \wedge (|x| = 1)\right\}$ нет нулей полинома $q(x)$. Тогда функция f задаёт обобщённую функцию медленного роста $f \in S'(\mathbf{R}^3)$ и существует окрестность U_a точки a, в которой трансформация Фурье $\hat{f}(\eta)$ регулярна и представляется бесконечно дифференцируемой функцией, в точке a равной*

$$\hat{f}(a) = (-i)^{s+2}\pi\frac{1}{|a|^{s+3}}\int\limits_{C_a}\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{s+2} f\left(y_1\frac{a}{|a|} + \sqrt{1-y_1^2}\,h\right)\right)\Bigg|_{y_1=0} d\sigma(h), \tag{15.4.34}$$

где $y_1 \in \mathbf{R}$, $\quad h \in C_a$.

Доказательство. Множество нулей $\mathrm{Nul}\,(q) \subset \mathbf{R}^3$ полинома $q(x)$ в $\mathbf{R}^3$ замкнуто и окружность C_a является компактом. Поэтому, если $C_a \bigcap \mathrm{Nul}\,(q) = 0$, то существует число $\varepsilon \in]0, \frac{1}{8}]$, что расстояние между компактом C_a и замкнутым множеством $\mathrm{Nul}\,(q)$ больше 2ε. Пусть Q_ε — открытая ε-окрестность окружности C_a в метрическом пространстве $\mathbf{R}^3$. Введём две основные функции. Пусть основная функция $\psi_1(z) \in D(Q_{2\varepsilon})$ такова, что $\psi_1(z) = 1$ на множестве Q_ε, а основная функция $\psi(z) \in D(\mathbf{R}^3)$ равна нулю в ε-окрестности точки 0 и равна единице в 2ε–окрестности окружности C_a, т.е. на множестве $Q_{2\varepsilon}$.

Существует окрестность U_a точки $a \in \mathbf{R}^3$ такая, что $0 \notin U_a$ и если $\eta \in U_a$, то окружность $C_\eta \subset Q_\varepsilon$. Зафиксируем такую окрестность U_a. Для носителя обобщённой функции $w(z,\eta) \in D'(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ вида (15.4.33) по утверждению 15.1.6 верно включение

$$\mathrm{supp}\,(w) \subset \Big\{(z,\eta) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \;\Big|\; (\langle z,\eta\rangle = 0) \bigwedge (|z| = 1)\Big\},$$

поэтому для носителя сужения $w[\mathbf{R}^3 \times U_a]$ получаем

$$\mathrm{supp}\,\Big(w[\mathbf{R}^3 \times U_a]\Big) \subset \Big\{(z,\eta) \in \mathbf{R}^3 \times U_a \;\Big|\; (\langle z,\eta\rangle = 0) \bigwedge (|z| = 1)\Big\}.$$

Отсюда согласно нашему построению

$$\mathrm{supp}\,(w[\mathbf{R}^3 \times U_a]) \subset Q_\varepsilon \times U_a. \tag{15.4.35}$$

Для основной функции $\varphi \in D(U_a)$ согласно лемме 15.4.1 и в силу включения (15.4.35)

$$(\hat{f},\varphi) = (w,\psi\varphi) = \Big(w[\mathbf{R}^3 \times U_a],\psi\varphi\Big) = \Big(w[\mathbf{R}^3 \times U_a],\psi_1\psi\varphi\Big) = (w[Q_{2\varepsilon} \times U_a],\psi_1\psi\varphi)\,. \tag{15.4.36}$$

Но по построению $\psi_1\psi = \psi_1$. По построению на множестве $Q_{2\varepsilon}$ нет нулей знаменателя $q(x)$, поэтому функция $f\Big|_{Q_{2\varepsilon}} \in C^{(\infty)}(Q_{2\varepsilon})$. В таком случае

$$w[Q_{2\varepsilon} \times U_a] = \Big((-i)^{s+2}\pi\delta^{(s+2)}\left(\langle z,\eta\rangle\right)\left(f(z)\delta(|z|-1)\right)\Big)\Big|_{Q_{2\varepsilon}\times U_a} = \tag{15.4.37}$$

$$(-i)^{s+2}\pi f(z)\Big|_{Q_{2\varepsilon}\times U_a}\Big(\delta^{(s+2)}\left(\langle z,\eta\rangle\right)\delta(|z|-1)\Big)\Big|_{Q_{2\varepsilon}\times U_a}.$$

Из (15.4.36, 15.4.37) следует

$$(\hat{f},\varphi) = (-i)^{s+2}\pi\left(\delta^{s+2}(\langle z,\eta\rangle)\delta(|z|-1), f(z)\psi_1(z)\varphi(\eta)\right). \tag{15.4.38}$$

Согласно примеру 15.2.5 тогда $\hat{f}\Big|_{U_a}$ есть регулярная обобщённая функция, представимая функцией

$$\hat{f}(\eta) = (-i)^{s+2}\pi\left(\delta^{(s+2)}(\langle z,\dot{\eta}\rangle)\delta(|z|-1), f(z)\psi_1(z)\right) \tag{15.4.39}$$

класса $C^{(\infty)}(U_a)$. Согласно п. 15.1.10 формула (15.1.108) получаем тогда из (15.4.39) формулу (15.4.34). $\diamondsuit$

Рассмотрим следующий пример применения теоремы 15.4.1.

Пример 15.4.1

$f(x) = \frac{1}{|x|^2}$. Тогда $p(x) = 1$, $\quad q(x) = |x|^2$ и степень однородности $s = -2$.

На единичной сфере Ω_2 нет нулей знаменателя $q(x)$, поэтому по теореме 15.4.1 $\hat{f}(\eta)\Big|_{\mathbf{R}_0{}^3} \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}_0{}^3)$ и формула (15.4.34) даёт при $\eta \in \mathbf{R}_0{}^3$

$$\hat{f}(\eta) = \pi\frac{1}{|\eta|}\int\limits_{C_\eta} f(h)\,d\sigma(h) = \pi\frac{1}{|\eta|}2\pi = \frac{2\pi^2}{|\eta|}. \tag{15.4.40}$$

15.4.6 Вычисление трансформации Фурье $\hat{f}(\eta)$ при $n = 2$.

В случае, когда размерность пространства n чётна, согласно лемме 15.3.1

$$\mathrm{wil}\,(s+n-1, s, \infty, \langle z, \eta\rangle) = i(-1)^{s+n-1} ra^{(s+n-1)}(\langle z, \eta\rangle),$$

поэтому обобщённая функция $w(z,\eta) \in D'(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, задаваемая формулой (15.4.25) равна

$$w(z,\eta) = i(-1)^{s+n-1} ra^{(s+n-1)}(\langle z, \eta\rangle)\,(f(z)\delta(|z|-1))\,. \tag{15.4.41}$$

Далее в этом пункте $n = 2$, тогда

$$w(z,\eta) = (-1)^s ra^{(s+1)}\,(\langle z, \eta\rangle)\,(f(z)\delta(|z|-1))\,. \tag{15.4.42}$$

Введём обобщённую функцию $v \in D'(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$ вида

$$v(z,\eta) \equiv \,\mathrm{lnm}^{\,(k)}\,(\langle z, \eta\rangle)\,\delta\,(|z|-1)\,, \tag{15.4.43}$$

где $k \equiv s+2, \quad k \in \mathbf{N}$. Обобщённая функция (15.4.43) определена, ибо выполнены условия A п. 15.1.5. В самом деле, отображение $g_1 : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ в данном случае составлено из двух непрерывных числовых функций

$$g_{11}(z,\eta) \equiv \langle z, \eta\rangle, \tag{15.4.44}$$

$$g_{12}(z,\eta) \equiv |z|-1. \tag{15.4.45}$$

Множество

$$S = \Big\{(z,\eta) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \;\Big|\; |z| = 1\Big\} = \Omega_1 \times \mathbf{R}^2. \tag{15.4.46}$$

Отображение g_1 класса $C^{(\infty)}({\mathbf{R}_0}^2 \times \mathbf{R}^2)$ и

$$\mathrm{rank}\,\frac{\partial g_1(z,\eta)}{\partial(z,\eta)} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} \eta & \frac{z}{|z|} \\ z & 0 \end{pmatrix}^{\top} = 2 \tag{15.4.47}$$

при $z \neq 0$.

Выразим теперь трансформацию Фурье $\hat{f}(\eta)$ через повторную функцию к функции $v(z,\eta)$.

Лемма 15.4.5 *Если $f \in \mathrm{LOR}\,(\mathbf{R}^2)$, то $f \in S'(\mathbf{R}^2)$, $\quad f\Big|_{{\mathbf{R}_0}^2} \in C^{(\infty)}({\mathbf{R}_0}^2)$ и*

$$\hat{f} = (-i)^s \Pi^{**}(f\psi, +)v, \tag{15.4.48}$$

для любой основной функции $\psi \in D(\mathbf{R}^2)$, равной нулю в некоторой окрестности точки нуль и единице в некоторой окрестности единичной окружности.

Доказательство. Для любой основной функции $\varphi \in D(\mathbf{R}^2)$ согласно лемме 15.4.4 верно равенство (15.4.26), т.е. $(\hat{f}, \varphi) = (w, \psi\varphi)$. Поскольку функция $\psi(z) = 0$ в некоторой окрестности нуля, то

$$(\hat{f}, \varphi) = \left(w[{\mathbf{R}_0}^2 \times \mathbf{R}^2], \psi\Big|_{{\mathbf{R}_0}^2}\varphi\right) = \tag{15.4.49}$$

$$(-i)^s\left(\mathrm{lnm}^{\,(s+2)}(\langle z, \eta\rangle)\,(f(z)\delta(|z|-1))\Big|_{{\mathbf{R}_0}^2 \times \mathbf{R}^2}, \psi\Big|^{(z)}_{{\mathbf{R}_0}^2}\varphi(\eta)\right).$$

Из принадлежности $f \in \mathrm{LOR}\,(\mathbf{R}^2)$ в силу следствия 15.4.1 вытекает, что $f\big|_{\mathbf{R}_0{}^2} \in \mathrm{LOR}\,(\mathbf{R}_0{}^2)$, тогда

$$(-i)^s \left(\mathrm{lnm}^{\,(s+2)}(\langle z, \eta\rangle)\,(f(z)\delta(|z|-1))\,\big|_{\mathbf{R}_0{}^2\times\mathbf{R}^2}, \psi\big|_{\mathbf{R}_0{}^2}(z)\varphi(\eta)\right) = \tag{15.4.50}$$

$$(-i)^s \left(f\big|_{\mathbf{R}_0{}^2}(z) \left(\mathrm{lnm}^{\,(s+2)}(\langle z, \eta\rangle)\delta(|z|-1)\right)\big|_{\mathbf{R}_0{}^2\times\mathbf{R}^2}, \psi\big|_{\mathbf{R}_0{}^2}(z)\varphi(\eta)\right) =$$

$$(-i)^s \left(\left(\mathrm{lnm}^{\,(n+2)}(\langle z, \eta\rangle)\delta(|z|-1)\right)\big|_{\mathbf{R}_0{}^2\times\mathbf{R}^2}, (f(z)\psi(z))\big|_{\mathbf{R}_0{}^2}\varphi(\eta)\right).$$

Но так как функция $\psi(z) = 0$ в некоторой окрестности нуля, то из (15.4.50) следует

$$(-i)^s \left(\left(\mathrm{lnm}^{\,(n+2)}(\langle z, \eta\rangle)\delta(|z|-1)\right)\big|_{\mathbf{R}_0{}^2\times\mathbf{R}^2}, (f(z)\psi(z))\big|_{\mathbf{R}_0{}^2}\varphi(\eta)\right) = \tag{15.4.51}$$

$$(-i)^s \left(\mathrm{lnm}^{\,(s+2)}(\langle z, \eta\rangle)\delta(|z|-1), f(z)\psi(z)\varphi(\eta)\right).$$

Из равенств (15.4.49–15.4.51) по определению повторной функции к обобщённой функции $v(z, \eta)$ следует (15.4.48). $\Diamond$

Обозначим через $\mathrm{vo}\,(z, \eta) \in D'(\mathbf{R}_0{}^2 \times \mathbf{R}_0{}^2)$ сужение обобщённой функции $v(z, \eta) \in D'(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$ вида (15.4.43) на множество $\mathbf{R}_0{}^2 \times \mathbf{R}_0{}^2$,

$$\mathrm{vo}\, \equiv v\big|_{\mathbf{R}_0{}^2\times\mathbf{R}_0{}^2}. \tag{15.4.52}$$

Так как в лемме 15.4.5 функция $\psi(z) = 0$ в некоторой окрестности нуля, то в условиях леммы 15.4.5

$$\hat{f}\big|_{\mathbf{R}_0{}^2} = (-i)^s \Pi^{**}[\mathbf{R}_0{}^2, \mathbf{R}_0{}^2](f\psi, +)\,\mathrm{vo}\,. \tag{15.4.53}$$

Лемма 15.4.6 *При каждом* $\eta \in \mathbf{R}_0{}^2$ *определена обобщённая функция* $\mathrm{vo}\,(z, \dot\eta) \in D'(\mathbf{R}_0{}^2)$ *и для любой основной функции* $\varphi_1(z) \in D(\mathbf{R}_0{}^2)$ *повторная функция* $\Pi^{**}[\mathbf{R}_0{}^2, \mathbf{R}_0{}^2](\varphi_1, +)\,\mathrm{vo}\, \in D'(\mathbf{R}_0{}^2)$ *есть регулярная обобщённая функция, представимая функцией* $\chi(\eta) \equiv (\,\mathrm{vo}\,(z, \dot\eta), \varphi_1(z))$ *класса* $C^{(\infty)}(\mathbf{R}_0{}^2)$.

Доказательство. Пусть $l(\eta) = \mathbf{R}\eta$ — прямая в $\mathbf{R}^2$. Тогда на множестве $\mathbf{R}_0{}^2 \setminus l(\eta)$ выполнены условия A п. 15.1.5 и условие C п. 15.2.5 и определена обобщённая функция $\mathrm{vo}\,(z, \dot\eta) \in D'\left(\mathbf{R}_0{}^2 \setminus l(\eta)\right)$. Но при $z \in l(\eta) \bigcap \mathbf{R}_0{}^2$ в некоторой окрестности точки (z, η) верно $\langle z, \eta\rangle \neq 0$ и обобщённая функция $\mathrm{lnm}^{\,(k)}(\langle z, \dot\eta\rangle)$ есть регулярная обобщённая функция, представимая функцией

$$(-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{\langle z, \dot\eta\rangle^k} \equiv C_k \frac{1}{\langle z, \eta\rangle^k} \tag{15.4.54}$$

класса $C^{(\infty)}$. Тогда определено и произведение

$$(-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{\langle z, \dot\eta\rangle^k}\delta(|z|-1) = \mathrm{vo}\,(z, \eta) \tag{15.4.55}$$

и является обобщённой функцией по z в данной окрестности. Итак, обобщённая функция $v(z, \dot\eta) \in D'(\mathbf{R}_0{}^2)$ определена на всем $\mathbf{R}_0{}^2$ при фиксированном $\eta \in \mathbf{R}_0{}^2$.

Докажем второе утверждение леммы сначала локально. Пусть $a \in {\mathbf{R}_0}^2 \times {\mathbf{R}_0}^2, \quad a \equiv (a_1, a_2), \quad a_1 \in {\mathbf{R}_0}^2, \quad a_2 \in {\mathbf{R}_0}^2$. Рассмотрим два случая: 1)вектора a_1 и a_2 не коллинеарны, 2)вектора a_1 и a_2 коллинеарны.

В случае не коллинеарных векторов a_1 и a_2 найдутся открытые окрестности $U_1(a) \subset {\mathbf{R}_0}^2$ точки a_1 и $U_2(a) \subset {\mathbf{R}_0}^2$ точки a_2, что если $z \in U_1(a), \quad \eta \in U_2(a)$, то вектора z и η не коллинеарны. На множестве $U_1(a) \times U_2(a) \subset {\mathbf{R}_0}^2 \times {\mathbf{R}_0}^2$ функция $v(z,\eta)$ удовлетворяет тогда условиям A п. 15.1.5 и условию C п. 15.2.5. По теореме 15.2.1 тогда

$$\forall \varphi_1 \in D\left(U_1(a)\right) \;\Big|\; \Pi^{**}[U_1(a), U_2(a)](\varphi_1, +)\,\mathrm{vo}\,[U_1(a) \times U_2(a)] = \left(\,\mathrm{vo}\,(z, \dot{\eta}), \varphi_1(z)\right)\chi(\eta)$$

и функция $\chi \in C^{(\infty)}\left(U_2(a)\right)$.

В случае коллинеарных векторов a_1 и a_2 имеем $\langle a_1, a_2\rangle \neq 0$ и существуют открытые окрестности $U_1(a) \subset {\mathbf{R}_0}^2$ точки a_1 и $U_2(a) \subset {\mathbf{R}_0}^2$ точки a_2, что

$$\forall z \in U_1(a)\; \forall \eta \in U_2(a) \;\Big|\; \langle z, \eta\rangle \neq 0.$$

Тогда на множестве $U_1(a) \times U_2(a)$ обобщённая функция $\operatorname{lnm}^{(k)}(\langle z, \eta\rangle)$ регулярна и допускает представление (15.4.54). Для $\varphi_1 \in D\left(U_1(a)\right), \quad \varphi_2 \in D\left(U_2(a)\right)$ имеем

$$(v(z,\eta), \varphi_1(z)\varphi_2(\eta)) = \left(\frac{C_k}{\langle z,\eta\rangle^k}\delta(|z|-1), \varphi_1(z)\varphi_2(\eta)\right) = \tag{15.4.56}$$

$$\left(\delta(|z|-1), \frac{C_k}{\langle z,\eta\rangle^k}\varphi_1(z)\varphi_2(\eta)\right) =$$

$$\left(1(\eta), \left(\delta(|z|-1), \frac{C_k}{\langle z,\eta\rangle^k}\varphi_1(z)\right)\varphi_2(\eta)\right) = \left(\left(\,\mathrm{vo}\,(z,\dot{\eta}), \varphi_1(z)\right), \varphi_2(\eta)\right).$$

Функция $\chi(\eta) = \left(\,\mathrm{vo}\,(z,\dot{\eta}), \varphi_1(z)\right) = \left(\delta(|z|-1), \frac{C_k}{\langle z,\eta\rangle^k}\varphi_1(z)\right)$ согласно п. 15.1.8 представима интегралом

$$\chi(\eta) = C_k \int\limits_{\Omega_1 \cap U_1(a)} \frac{\varphi_1(z)}{\langle z,\eta\rangle^k}\,dz \tag{15.4.57}$$

и поэтому является функцией класса $C^{(\infty)}\left(U_2(a)\right)$.

Используя построение 1 п. 15.2.2, перейдем к глобальным свойствам повторной функции. Пусть $\varphi_1(z) \in D({\mathbf{R}_0}^2)$ и $a_2 \in {\mathbf{R}_0}^2$, тогда согласно построению 15.2.1 существуют m точек $a_s \in {\mathbf{R}_0}^2 \times {\mathbf{R}_0}^2, \quad s \in \overline{1,m}$ и окрестность $G_2 \subset {\mathbf{R}_0}^2$ точки a_2, что

$$\Pi^{**}(\varphi_1, +)v = \sum_{s=1}^{m}\left(\Pi^{**}[U_1(a_s), U_2(a_s)](\varphi_{1s}, +)\,\mathrm{vo}\,[U_1(a_s) \times U_2(a_s)]\right)\Big|_{G_2}. \tag{15.4.58}$$

По доказанному локально повторная функция

$$\left(\Pi^{**}[U_1(a_s), U_2(a_s)](\varphi_{1s}, +)\,\mathrm{vo}\,[U_1(a_s) \times U_2(a_s)]\right)\Big|_{G_2}$$

есть регулярная обобщённая функция, представимая на G_2 функцией

$$\chi_s(\eta) = \left(\,\mathrm{vo}\,(z,\dot{\eta}), \varphi_{1s}(z)\right) \tag{15.4.59}$$

класса $C^{(\infty)}(G_2)$. Тогда согласно (15.4.58) повторная функция $\Pi^{**}(\varphi_1, +)v$ регулярна на G_2 и представима на G_2 функцией класса $C^{(\infty)}(G_2)$ вида

$$\chi(\eta) = \sum_{s=1}^{m} \chi_s(\eta) = \sum_{s=1}^{m} (\,\mathrm{vo}\,(z, \dot\eta), \varphi_{1s}(z)) = \left(\mathrm{vo}\,(z, \dot\eta), \sum_{s=1}^{m} \varphi_{1s}(z)\right) = (\,\mathrm{vo}\,(z, \dot\eta), \varphi_1(z))\,. \tag{15.4.60}$$

Так как точка $a_2 \in \mathbf{R}_0{}^2$ произвольна, лемма доказана. $\diamondsuit$

Теперь мы можем предложить следующее описание действия обобщённой функции $\mathrm{vo}\,(z, \dot\eta) \in D'(\mathbf{R}_0{}^2)$ на основную функцию $\mu(z) \in D(\mathbf{R}_0{}^2)$.

Лемма 15.4.7 *Если* $\eta \in \mathbf{R}_0{}^2, \quad \mu(z) \in D(\mathbf{R}_0{}^2)$, *то*

$$(\,\mathrm{vo}\,(z, \dot\eta), \mu(z)) = \frac{1}{|\eta|^k} \left(\mathrm{lnm}^{(k)}(\sin\varphi), \mu \left(\cos\left(\varphi + \arg(\eta) - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\varphi + \arg(\eta) - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right). \tag{15.4.61}$$

Доказательство. Носителем обобщённой функции $\mathrm{vo}\,(z, \dot\eta)$ является компактное множество — окружность Ω_1, поэтому достаточно доказать равенство (15.4.61) локально в окрестности каждой точки носителя. Введём модуль $|\eta|$ и аргумент $\arg(\eta)$, т.е. $\eta = |\eta|\,(\cos(\arg(\eta)), \sin(\arg(\eta)))$. Пусть $a \in \Omega_1$. Рассмотрим два случая: 1)$\arg(a) - \arg(\eta) \neq \pm\frac{\pi}{2} + r\pi, \quad r \in \mathbf{Z}$; 2)$\arg(a) - \arg(\eta) = \pm\frac{\pi}{2} + r\pi, \quad r \in \mathbf{Z}$.

В первом случае существует окрестность U_a точки a, в которой обобщённая функция $\mathrm{vo}\,(z, \dot\eta) \in D'(\mathbf{R}_0{}^2)$ допускает представление (15.4.55), т.е. при $\mu \in D(U_a)$ имеем согласно п. 15.1.8

$$(\,\mathrm{vo}\,(z, \dot\eta), \mu(z)) = \left(\frac{C_k}{\langle z, \dot\eta\rangle^k}\delta(|z|-1), \mu(z)\right) = C_k \int\limits_{\Omega_1} \frac{\mu(z)}{\langle z, \dot\eta\rangle^k}\, d\sigma(z) = \tag{15.4.62}$$

$$\frac{C_k}{|\eta|^k} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\mu(\cos\varphi, \sin\varphi)}{(\cos(\arg(\eta) - \varphi))^k}\, d\varphi.$$

Проведём в интеграле замену переменных $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arg(\eta) + \varphi$, получим

$$(\,\mathrm{vo}\,(z, \dot\eta), \mu(z)) = \frac{C_k}{|\eta|^k} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\mu(\cos\varphi, \sin\varphi)}{\left(\sin(\frac{\pi}{2} - \arg(\eta) + \varphi)\right)^k}\, d\varphi = \tag{15.4.63}$$

$$\frac{C_k}{|\eta|^k} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\mu\left(\cos\left(\alpha + \arg(\eta) - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\alpha + \arg(\eta) - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{(\sin\alpha)^k}\, d\alpha =$$

$$\frac{1}{|\eta|^k} \left(\mathrm{lnm}^{(k)}(\sin\varphi), \mu \left(\cos\left(\varphi + \arg(\eta) - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\varphi + \arg(\eta) - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right).$$

Мы получили формулу (15.4.61) .

Во втором случае, когда $\arg(a) - \arg(\eta) = \pm\frac{\pi}{2} + r\pi, \quad r \in \mathbf{Z}$ имеем

$$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial(\langle z, \eta\rangle, |z|-1)}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=a} = \mathrm{rank}\left(\eta, \frac{z}{|z|}\right)\Bigg|_{z=a} = 2.$$

Согласно п. 15.1.5 тогда существует окрестность $U_a \subset \mathbf{R}_0{}^2$, что функции

$$g_1(z) \equiv \langle z, \eta\rangle,$$

$$g_2(z) \equiv |z| - 1,$$

задают диффеоморфное вложение $g \in \operatorname{Diffin}(U_a, \mathbf{R}^2)$. Для $\mu \in D(U_a)$ тогда имеем согласно п. 15.1.5:

$$(\operatorname{vo}(z, \dot\eta), \mu(z)) = \left(S_g^{**}\left(\operatorname{lnm}^{(k)}(y_1)\delta(y_2)\right)(z), \mu(z)\right) = \tag{15.4.64}$$

$$\left(\operatorname{lnm}^{(k)}(y_1)\delta(y_2), S_g^*(\mu(z))(y_1, y_2)\right).$$

При $z \in U_a$ согласно формуле (15.1.30) верно

$$p(g)(z) = \left|\det \frac{\partial g}{\partial z}\right|^{-1} = \left|\det\left(\eta, \frac{z}{|z|}\right)\right|^{-1} = \frac{|z|}{|\det(\eta, z)|}. \tag{15.4.65}$$

При $y \in g(U_a)$ согласно формуле (15.1.31) верно

$$S_g^*(\mu) = (p(g)(z)\mu(z))\Big|_{z=g^{-1}(y)} = \left(\frac{|z|}{|\det(\eta, z)|}\mu(z)\right)\Big|_{z=g-1(y)}. \tag{15.4.66}$$

Подставим (15.4.66) в (15.4.64) и получим

$$(\operatorname{vo}(z, \dot\eta), \mu(z)) = \left(\operatorname{lnm}^{(k)}(y_1)\delta(y_2), \left(\frac{|z|}{|\det(\eta, z)|}\mu(z)\right)(z(y_1, y_2))\right) = \tag{15.4.67}$$

$$\left(\operatorname{lnm}^{(k)}(y_1), \left(\frac{1}{|\det(\eta, z)|}\mu(z)\right)\Big|_{z=z(y_1,0)}\right).$$

Перейдем от переменной $y_1 \in \mathbf{R}$ к переменной $\varphi \in \mathbf{R}$ по формуле

$$y_1 = |\eta|\cos(\arg(\eta) - \varphi). \tag{15.4.68}$$

Тогда

$$\frac{\partial y_1}{\partial \varphi} = +|\eta|\sin(\arg(\eta) - \varphi). \tag{15.4.69}$$

Выбирая окрестность U_a достаточно малой, чтобы

$$|\sin(\varphi - \arg(\eta))| \geq \frac{3}{4},$$

получим из (15.4.67 - 15.4.69)

$$(\operatorname{vo}(z, \dot\eta), \mu(z)) = \left(\operatorname{lnm}^{(k)}(|\eta|\cos(\arg(\eta) - \varphi)), \frac{|\eta|(\sin(\arg(\eta) - \varphi))}{|\eta|(\sin(\arg(\eta) - \varphi))}\mu(\cos\varphi, \sin\varphi)\right). \tag{15.4.70}$$

Далее проводим линейную замену переменных $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arg(\eta) + \varphi$ и используем то, что обобщённая функция $\operatorname{lnm}^{(k)} \in D'(\mathbf{R})$, $\quad k \in \mathbf{N}$ однородна степени k, поэтому

$$(\operatorname{vo}(z, \dot\eta), \mu(z)) = \frac{1}{|\eta|^k}\left(\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\alpha), \mu\left(\cos(\alpha + \arg(\eta) - \frac{\pi}{2}), \sin\left(\alpha + \arg(\eta) - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right).$$

Мы снова получили формулу (15.4.61) .

Открытые множества $\{U_a\}_{a\in\Omega_1}$ образуют открытое покрытие открытого множества $G \equiv \bigcup_{a\in\Omega_1} U_a$. По утверждению 15.1.10 существует разбиение единицы $\{e_j\}_{j\in J}$ множества G, подчинённое покрытию $\{U_a\}_{a\in\Omega_1}$. По утверждению 15.1.11 существует конечная подсистема функций $e_1, e_2, \dots e_m$ из разбиения единицы, что: 1)$e_s \in D(U_{as}), \quad s \in \overline{1,m}$; 2)$\sum_{s=1}^m e_s(z) = 1$ в некоторой окрестности компакта $\Omega_1 \subset G$.

Так как носитель обобщённой функции $v(z,\dot{\eta}) \in D'({\mathbf{R}_0}^2)$ есть множество Ω_1, то для любой функции $\mu \in D({\mathbf{R}_0}^2)$ верно

$$(\operatorname{vo}(z,\dot{\eta}), \mu(z)) = \left(\operatorname{vo}(z,\dot{\eta}), \left(\sum_{s=1}^m e_s(z)\right)\mu(z)\right) = \sum_{s=1}^m (\operatorname{vo}(z,\dot{\eta}), e_s(z)\mu(z)) .$$

Но по доказанному для основных функций $e_s(z)\mu(z) \in D(U_{as})$ верно

$$(\operatorname{vo}(z,\dot{\eta}), e_s(z)\mu(z)) =$$

$$\frac{1}{|\eta|^k}\left(\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi), (e_s\mu)\left(\cos\left(\varphi+\arg(\eta)-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\varphi+\arg(\eta)-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right).$$

Суммируя последнее соотношение по $s \in \overline{1,m}$, получаем равенство (15.4.61) . $\diamondsuit$

Следствие 15.4.3 *Для $f \in \operatorname{LOR}(\mathbf{R}^2)$ функция $\hat{f}\big|_{{\mathbf{R}_0}^2} \in D'({\mathbf{R}_0}^2)$ регулярная функция класса $C^{(\infty)}({\mathbf{R}_0}^2)$ и равна в точке $\eta \in {\mathbf{R}_0}^2$ величине*

$$\hat{f}(\eta) = \frac{(-i)^s}{|\eta|^{s+2}}\left(\operatorname{lnm}^{(s+2)}(\sin\varphi), f\left(\cos\left(\varphi+\arg(\eta)-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\varphi-\arg(\eta)-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right). \tag{15.4.71}$$

Формулу (15.4.71) запишем как свертку обобщённой и основной функции на Ω_1. Для этого проведём замену переменных $\psi = -\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ и получим

$$\hat{f}(\eta) = \frac{(-i)^s}{|\eta|^{s+2}}\left(\operatorname{lnm}^{(s+2)}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)\right), f\left(\cos\left(\arg(\eta)-\psi\right), \sin\left(\arg(\eta)-\psi\right)\right)\right).$$

Но последнее выражение есть свёртка обобщённой функции $\operatorname{lip}_{s+2} \in D'(\Omega_1)$ вида $\operatorname{lip}_{s+2}(\psi) \equiv \operatorname{lnm}^{(s+2)}\left(\sin(\frac{\pi}{2}-\psi)\right) = \operatorname{lnm}^{(s+2)}(\cos\psi)$ и основной функции $h(\psi) = f(\cos\psi, \sin\psi)$, т.е. $h = f|_{\Omega_1}$ есть сужение функции f на единичную окружность Ω_1. В этих обозначениях

$$\hat{f}(\eta) = \frac{(-i)^s}{|\eta|^{s+2}}\left(\operatorname{lip}_{s+2}(\psi), h(\arg(\eta)-\psi)\right) = \frac{(-i)^s}{|\eta|^{s+2}}\operatorname{lip}_{s+2} * f|_{\Omega_1}. \tag{15.4.72}$$

Поскольку в п. 15.3.6 мы научились вычислять действие обобщённой функции $\operatorname{lnm}^{(k)}(\sin\varphi) \in D'(\Omega_1)$ на основную функцию, то приходим к следующей теореме.

Теорема 15.4.2 *Если функция $f \in \operatorname{LOR}(\mathbf{R}^2)$, то сужение $f|_{{\mathbf{R}_0}^2} \in C^{(\infty)}({\mathbf{R}_0}^2)$, соответствующая обобщённая функция $f \in S'(\mathbf{R}^2)$ и её трансформация Фурье $\hat{f} \in S'(\mathbf{R}^2)$ есть регулярная функция класса $C^{(\infty)}$ на множестве ${\mathbf{R}_0}^2$ и при $\eta \in {\mathbf{R}_0}^2$ верна формула*

$$\hat{f}(\eta) = \frac{2(-i)^s}{|\eta|^{s+2}}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{lnm}^{(s+2)}(\sin\varphi), \left(f\left(\cos\left(\varphi+\arg(\eta)-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\varphi+\arg(\eta)-\frac{\pi}{2}\right)\right)-\right.\right. \tag{15.4.73}$$

$$(\cos\varphi)p_{s+1}(\sin\varphi))\,d\varphi+\sum_{i-1}^{s+1}(-1)^{s+1-i}\operatorname{lnm}^{(i)}(1)\left(p_{s+1}^{s+1-i}(1)+(-1)^{i+1}p_{s+1}^{(s+1-i)}(-1)\right)\Bigg),$$

где $p_{s+1}(\xi)$ — сумма Тейлора порядка $s+1$ функции

$$u(\xi)\equiv\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}f\left(\cos\left(\arcsin(\xi)+\arg(\eta)-\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\arcsin(\xi)+\arg(\eta)-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

с центром в точке $\xi=0$.

В силу однородности степени $r=-(s+2)$ функции $\hat{f}(\eta)$ достаточно построить её при $|\eta|=1$, ибо тогда при $\eta\in\mathbf{R}_0{}^2$ верно

$$\hat{f}(\eta)=\frac{1}{|\eta|^{s+2}}\hat{f}\left(\frac{\eta}{|\eta|}\right). \tag{15.4.74}$$

Пусть $|\eta|=1$, тогда $\eta=\binom{\cos(\arg(\eta))}{\sin(\arg(\eta))}$ и единичный вектор $\lambda\equiv\binom{\cos\left(\varphi+\arg(\eta)-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin(\varphi+\arg(\eta)-\frac{\pi}{2})}$ получается из единичного вектора $\binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}\equiv\mathbf{R}^2$ двумя ортогональными поворотами на угол $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и на угол $\arg(\eta)$, т.е.

$$\lambda=\begin{pmatrix}\eta_1&-\eta_2\\ \eta_2&\eta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\ -1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1\sin\varphi+\eta_2\cos\varphi\\ \eta_2\sin\varphi-\eta_1\cos\varphi\end{pmatrix}. \tag{15.4.75}$$

В таком случае

$$f\left(\cos\left(\varphi+\arg(\eta)-\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\varphi+\arg(\eta)-\frac{\pi}{2}\right)\right)=f(\eta_1\sin\varphi+\eta_2\cos\varphi,\eta_2\sin\varphi-\eta_1\cos\varphi), \tag{15.4.76}$$

$$f\left(\cos\left(\arcsin(\xi)+\arg(\eta)-\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\arcsin(\xi)+\arg(\eta)-\frac{\pi}{2}\right)\right)= \tag{15.4.77}$$

$$f\left(\eta_1\xi+\eta_2\sqrt{1-\xi^2},\eta_2\xi-\eta_1\sqrt{1-\xi^2}\right).$$

Применим формулы (15.4.76, 15.4.77) в следующем случае.

Пример 15.4.2

$f(x)=\frac{x_1b_1+x_2b_2}{|x|^2}$, $b_1\in\mathbf{C}$, $b_2\in\mathbf{C}$. Тогда $s=-1$. Применяем формулу (15.4.73) сначала при $|\eta|=1$. Согласно формуле (15.4.77)

$$u(\xi)=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(b_1\left(\eta_1\xi+\eta_2\sqrt{1-\xi^2}\right)+b_2\left(\eta_2\xi-\eta_1\sqrt{1-\xi^2}\right)\right),$$

поэтому

$$p_0(\xi)=u(0)=b_1\eta_2-b_2\eta_1. \tag{15.4.78}$$

Согласно формуле (15.3.31)

$$\operatorname{lnm}^{(1)}(\sin\varphi)=\frac{1}{\sin\varphi}. \tag{15.4.79}$$

Подставим (15.4.76, 15.4.78, 15.4.79) в формулу (15.4.73) и получим при $|\eta| = 1$

$$\hat{f}(\eta) = 2i \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\varphi} \left(b_1(\eta_1 \sin\varphi + \eta_2 \cos\varphi) + b_2(\eta_2 \sin\varphi - \eta_1 \cos\varphi) - \right. \tag{15.4.80}$$

$$\left. (\cos\varphi)(b_1\eta_2 - b_2\eta_1)\right) \, d\varphi = 2i\pi(b_1\eta_1 + b_2\eta_2).$$

В силу формулы (15.4.74 получаем

$$\forall \eta \in {\mathbf{R}_0}^2 \; \Big| \; \hat{f}(\eta) = 2\pi i \frac{b_1\eta_1 + b_2\eta_2}{|\eta|^2}. \tag{15.4.81}$$

15.4.7 Продолжение однородной функции на $\mathbf{R}^n$.

Всякая однородная степени $s \in \mathbf{R}$ обобщённая функция $g \in D'(\mathbf{R}^n)$ при сужении на ${\mathbf{R}_0}^n$ даёт однородную степени s обобщённую функцию $f \equiv g|_{{\mathbf{R}_0}^n}$ из $D'({\mathbf{R}_0}^n)$. Наоборот, пусть $f \in D'({\mathbf{R}_0}^n)$ однородная степени s обобщённая функция. Возникают два вопроса. 1)Допускает ли она продолжение до обобщённой функции $g \in D'(\mathbf{R}^n)$ с сохранением однородности? 2)Будет ли это продолжение единственно?

Начнем с вопроса о единственности продолжения. Из следствия 15.1.3 вытекает

Утверждение 15.4.3 *Пусть g, h обобщённые функции из $D'(\mathbf{R}^n)$ однородные степени $s \notin \{-(n + \mathbf{N}_o)\}$, сужения которых на ${\mathbf{R}_0}^n$ совпадают, тогда $g = h$.*

Доказательство. Обобщённая функция $(g - h) \in D'(\mathbf{R}^n)$ однородна степени s и имеет носитель в нуле. По следствию 15.1.3 верно $g - h = 0$.

В случае $f \in D'({\mathbf{R}_0}^n)$ — регулярная обобщённая функция однородная степени $s > -n$ согласно пункту 15.4.3 существует продолжение её до регулярной обобщённой функции g однородной степени s, которое заключается в продолжении представляющей функции $f \in L_{loc}({\mathbf{R}_0}^n)$ нулём в точку нуль.

Итак верна следующая лемма.

Лемма 15.4.8 *Всякая регулярная обобщённая функция $f \in D'({\mathbf{R}_0}^n)$ однородная степени $s > -n$ допускает единственное продолжение до обобщённой функции $g \in D'(\mathbf{R}^n)$ однородной той же степени s, причём обобщённая функция g — регулярная обобщённая функция медленного роста.*

15.4.8 Свёртка однородных функций.

В этом пункте все однородные функции предполагаются измеримыми.

Пусть $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ — однородная функция, тогда по лемме 15.4.1 $f \in L_{loc}(\mathbf{R}^n)$ иф её степень однородности $s > -n$ и интеграл (15.4.8) по единичной сфере Ω_{n-1} существует.

Определение 15.4.1 *Однородная функция $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ ограничена на единичной сфере, если существует положительное число C, что*

$$\forall x \in \Omega_{n-1} \; \Big| \; |f(x)| \le C. \tag{15.4.82}$$

Для однородной функции f, ограниченной на единичной сфере, условие принадлежности $f \in L_{loc}(\mathbf{R}^n)$ сводится к условию $s > -n$. По лемме 15.4.2 всякая однородная функция $f \in L_{loc}(\mathbf{R}^n)$ является функцией медленного роста и представляет обобщённую функцию из $S're(\mathbf{R}^n)$. Однородная функция, ограниченная на единичной сфере, удовлетворяет неравенству

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \;\Big|\; |f(x)| \leq C|x|^s, \tag{15.4.83}$$

где s — степень однородности, вытекающему из 15.4.82.

Из неравенства (15.4.83) и следствия 13.10.2 получаем.

Утверждение 15.4.4 *Две однородные ограниченные на единичной сфере функции f_1 и f_2 степеней однородности $s_1 \in]-n,0[,\; s_2 \in]-n,0[,\; s_1+s_2 < -n$ абсолютно свертываемы и их свёртка однородная степени s_1+s_2+n функция, ограниченная на единичной сфере.*

В условиях утверждения 15.4.4 f_1, f_2 и $f_1 * f_2$ есть обобщённые функции медленного роста и существуют их трансформации Фурье $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \widehat{f_1 * f_2}$ из класса обобщённых функций медленного роста $S'(\mathbf{R}^n)$. По утверждению 15.1.13 образы Фурье $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \widehat{f_1 * f_2}$ являются однородными обобщёнными функциями степеней $-(s_1+n)$, $-(s_2+n)$, $-(s_1+s_2+2n)$ соответственно.

Для однородных функций справедлив следующий вариант теоремы о свертке.

Теорема 15.4.3 *Пусть f_1 и f_2 ограниченные на единичной сфере функции однородные степеней $s_1 \in]-n,0[,\; s_2 \in]-n,0[$ и $s_1+s_2 < -n$. Пусть образы Фурье $\hat{f}_1, \hat{f}_2$ есть регулярные обобщённые функции медленного роста и функция $\hat{f}_1$ бесконечно дифференцируема всюду кроме, быть может, нуля. Тогда существует свёртка $f_1 * f_2 \in S'red(\mathbf{R}^n)$ и верно равенство*

$$\widehat{f_1 * f_2} = \hat{f}_1 \hat{f}_2. \tag{15.4.84}$$

Доказательство. В условиях теоремы применимо утверждение 15.4.4 и поэтому применима лемма 13.10.9, согласно которой

$$\widehat{f_1 * f_2}|_{\mathbf{R}_0{}^n} = \hat{f}_1|_{\mathbf{R}_0{}^n} \hat{f}_2|_{\mathbf{R}_0{}^n}.$$

Но регулярные обобщённые функции $\widehat{f_1 * f_2}|_{\mathbf{R}_0{}^n}, \hat{f}_1|_{\mathbf{R}_0{}^n}, \hat{f}_2|_{\mathbf{R}_0{}^n}$ степеней однородности : $-(s_1+s_2+2n)$, $-(s_1+n)$, $-(s_2+n)$, — больших чем $-n$ согласно лемме 15.4.8 единственным образом продолжаются с сохранением однородности нулём в точке нуль на все $\mathbf{R}^n$, что даёт (15.4.84).

Рассмотрим два примера применения теоремы 15.4.3.

Пример 15.4.3

$f_1(x) = |x|^{-\lambda_1},\; f_2(x) = |x|^{-\lambda_2},\; \lambda_1 \in]0,n[,\; \lambda_2 \in]0,n[,\; \lambda_1+\lambda_2 > n.$

В этой ситуации [28, с.451] существует трансформация Фурье

$$\hat{f}_i(\eta) = \frac{2^{n-\lambda_i}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-\lambda_i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)}|\eta|^{-(n-\lambda_i)}, \quad i \in \overline{1,2}. \tag{15.4.85}$$

Итак, для пары функций f_1, f_2 выполнены условия теоремы 15.4.3 и существует свёртка $f_1 * f_2$ и

$$\widehat{f_1 * f_2}(\eta) = \frac{2^{2n-(\lambda_1+\lambda_2)}\pi^n \Gamma\left(\frac{n-\lambda_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\lambda_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)}|\eta|^{\lambda_1+\lambda_2-2n}. \tag{15.4.86}$$

Так как $(\lambda_1 + \lambda_2 - n) \in]0, n[$, то согласно формуле (15.4.85) из (15.4.86) следует, что

$$(f_1 * f_2)(x) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-\lambda_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\lambda_2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2-n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2n(\lambda_1+\lambda_2)}{2}\right)}|x|^{n-(\lambda_1+\lambda_2)}. \tag{15.4.87}$$

Пример 15.4.4

Размерность $n = 3$. $f_\alpha(\vec{x}) \equiv \frac{x_\alpha}{|\vec{x}|^3}$, $\alpha \in \overline{1,3}$, вектор-функция $\vec{f}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|x|^3}$.

Вычислим с помощью теоремы 15.4.3 интеграл

$$h\left(\vec{b}_2 - \vec{b}_1\right) \equiv \int\limits_{\mathbf{R}^3} \langle \vec{f}(\vec{x} - b_1), \vec{f}(\vec{x} - \vec{b}_2)\rangle \, d\vec{x}. \tag{15.4.88}$$

Обозначим $\vec{y} \equiv \vec{b}_2 - \vec{b}_1$ и найдем трансформацию Фурье $\hat{h}(\vec{\eta})$.

Пусть функция $\operatorname{cul}(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|}$, тогда $f_\alpha(\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\operatorname{cul}(\vec{x})$. Согласно примеру 15.4.3

$$\widehat{\operatorname{cul}}(\vec{\eta}) = \frac{4\pi}{|\vec{\eta}|^2}, \tag{15.4.89}$$

$$\hat{f}_\alpha(\vec{\eta}) = \frac{i\eta_\alpha 4\pi}{|\vec{\eta}|^2}. \tag{15.4.90}$$

Далее в силу нечётности функции f_α

$$h(\vec{b}_2 - \vec{b}_1) = \int\limits_{\mathbf{R}^3} \left(\sum_{\alpha=1}^{3} f_\alpha(\vec{x} - \vec{b}_1) f_\alpha(\vec{x} - \vec{b}_2)\right) d\vec{x} = \int\limits_{\mathbf{R}^3} \sum_{\alpha=1}^{3} f_\alpha(\vec{z}) f_\alpha\left(\vec{z}(\vec{b}_2 - \vec{b}_1)\right) d\vec{z} =$$

$$-\int\limits_{\mathbf{R}^3} \sum_{\alpha=1}^{3} f_\alpha(\vec{z}) f_\alpha(\vec{y} - \vec{z})\, d\vec{z} = -\left(\sum_{\alpha=1}^{3} f_\alpha * f_\alpha\right)(\vec{y}).$$

К паре однородных степени 2 функций f_α, f_α применима теорема 15.4.3 согласно которой

$$\hat{h}(\vec{\eta}) = -\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\eta_\alpha \eta_\alpha}{|\vec{\eta}|^4} i^2 (4\pi)^2 = \frac{(4\pi)^2}{|\vec{\eta}|^2}.$$

Отсюда согласно (15.4.89)

$$h(\vec{b}_2 - \vec{b}_1) = \frac{4\pi}{|\vec{b}_2 - \vec{b}_1|}. \tag{15.4.91}$$

Глава 16

Симметрия обобщённых функций

§ 16.1. Теорема о замкнутом графике и оператор симметризации

§ 16.2. Структура сферически симметричных функций

§ 16.3. Вращательно симметричные векторные поля

При выделение простейших типов частиц и обобщённых частиц естественно пользоваться соображениями симметрии. Основной наш метод моделирования частиц и их взаимодействий — переход к аппроксимирующим влавинам — обобщенным частицам, у которых функции тока есть обобщённые функции. Однако развития в главе 4 теория симметрии для функций, определенных на $\mathbf{R}^n$, должна быть развита далее для работы с обобщёнными функциями, чему и посвящена настоящая глава.

В § 16.1 мы устанавливаем два ключевых для теории симметрии обобщённых функции факта: 1) существование оператора симметризации, 2) тот факт, что симметричная обобщённая функция однозначно определяется своими значениями на симметричных основных функциях.

В § 16.2 мы рассматриваем сферическую симметрию, т.е. симметрию относительно группы $N(n) = SO(n)$ при $n \geq 2$ и $N(1) = O(1)$ для скалярного представления $Tsi_G : D(\mathbf{R}^n) \to D(\mathbf{R}^n)$ и векторного представления $Tvi_G : D_n(\mathbf{R}^n) \to D_n(\mathbf{R}^n)$. Оказывается, что все векторные подпространства $\Pi si^*(N(n)) \subset D'(\mathbf{R}^n)$ сферически симметричных скалярных обобщённых функций являются замкнутыми и топологически дополняемыми, и линейно топологически изоморфны между собой при всех $n \subset \mathbf{N}$. Все векторные подпространства $\Pi vi^*(N(n)) \subset D'_n(\mathbf{R}^n)$, $n \subset \mathbf{N}$ сферически симметричных векторных обобщённых функций также замкнуты и топологически дополняемы. При $n \neq 2$ все они топологически изоморфны между собой. Случай $n = 2$ рассмотрен отдельно в п. 16.3.4. Доказано, что при $n = 3$ всякое соленоидальное сферически симметричное векторное поле $f \in D'_3(\mathbf{R}^3)$ тривиально, т.е. нетривиальных соленоидальных сферически симметрических векторных полей на $\mathbf{R}^3$ не существует.

В § 16.3 изучается вращательная симметрия векторных обобщённых функций в размерности $n = 3$. Показано, что всякое такое поле единственным образом разлагается на сумму p-поля и m-поля и изучены свойства этих полей. p-поле есть математическое обобщение кольцевых токов, а m-поле — магнитных полей таких токов. Показано, что каждое регулярное p-поле задаётся одной произвольной функцией двух переменных $\Phi(\rho, z), \rho \in [0; \infty[, z \in \mathbf{R}$. Математические результаты § 16.3 используются для описания покоящихся квазикиперных агвидов, у которых функция 3-тока $\overrightarrow{jf}(\vec{x})$ соленоидальна, и поэтому согласно вышесказанному условие сферической симметрии для неё слишком сильное ограничение, а условие вращательной симметрии вполне естественно с учётом приложений.

§16.1 Теорема о замкнутом графике и оператор симметризации

16.1.1 Теорема о замкнутом графике для локально выпуклых линейных топологических пространств.

Нам требуется следующее обобщение теоремы о замкнутом графике, приспособленное к применению обобщённых функций, полученное Л.Шварцем [94].

Теорема 16.1.1 *[94, с. 604] Пусть X — локально выпуклое ультраборнологическое линейное топологическое пространство, Y — локально выпуклое суслинское линейное топологическое пространство. Всякое линейное отображение $A : X \to Y$, график которого борелевское множество, непрерывно.*

Следствие 16.1.1 *[94, с. 604] Пусть пространства X и Y те же, что и в теореме 16.1.1. Тогда линейное непрерывное сюръективное отображение B пространства Y на пространство X — топологический гомоморфизм.*

Объяснение терминологии. Здесь и далее мы для краткости локально выпуклое линейное топологическое пространство называем "локально выпуклым пространством". *Ультраборнологическое пространство* — отдельное локально выпуклое пространство, являющееся индуктивным пределом некоторого семейства (не обязательно счётного) банаховых пространств. *Суслинское пространство* здесь — отдельное локально выпуклое пространство, являющееся непрерывным образом полного сепарабельного метрического пространства.

Прямое произведение конечного числа суслинских пространств — суслинское пространство. Замкнутое векторное подпространство суслинского пространства — суслинское пространство.

Локально выпуклые пространства основных функций D, S и сопряженные локально выпуклые пространства обобщённых функций D', S' — ультраборнологические и суслинские. Покажем, что ультраборнологичность локально выпуклых пространств сохраняется при взятии конечных прямых произведений и при переходе к топологически дополняемым векторным подпространствам. Но сначала дадим некоторую информацию о топологически дополняемых векторных подпространствах.

Лемма 16.1.1 *(О непрерывности проектора) Пусть X — ультраборнологическое суслинское локально выпуклое пространство и $X_1 \subset X, X_2 \subset X$ его замкнутые векторные подпространства, такие, что как векторное пространство X есть прямая сумма векторных подпространств X_1 и X_2. Тогда проектор $p_1 : X \to X$ на* *векторное подпространство X_1 параллельно векторному подпространству X_2 есть непрерывное линейное отображение.*

Доказательство. Проектор $p_1 : X \to X$ имеет замкнутый график, так как X_1 и X_2 замкнутые подпространства. По теореме 16.1.1 p_1 — непрерывное отображение. $\diamondsuit$

Векторное подпространство X_1 локально выпуклого пространства X называется *топологически дополняемым*, если существует непрерывный проектор $p : X \to X$ локально выпуклого пространства X на X_1. Как ядро линейного непрерывного оператора $E-p$, тогда векторное подпространство X_1 замкнуто. Ядро $\ker(p) \equiv X_2$ линейного непрерывного оператора p также замкнуто. Итак, если векторное подпространство X_1 топологически дополняемо, то оно замкнуто и существует замкнутое векторное подпространство $X_2 \subset X$, что как векторное пространство X есть прямая сумма своих векторных подпространств X_1, X_2, для которых последнее утверждение обратимо.

Перейдем теперь к вектору о сохранении свойства ультраборнологичности.

Лемма 16.1.2 *Прямая сумма $X_1 \oplus X_2$ локально выпуклых пространств X_1 и X_2 ультраборнологична иф каждое из пространств X_1 и X_2 ультраборнологично.*

Доказательство опирается на следующее утверждение.

Утверждение 16.1.1 *Пусть локально выпуклое пространство $X = X_1 \oplus X_2$ есть прямая сумма локально выпуклых пространств X_1 и X_2. Пусть $i_\alpha : X_\alpha \to X$, $\alpha \in \overline{1,2}$ канонические инъекции и $p_\alpha : X \to X_\alpha$, $\alpha \in \overline{1,2}$ — канонические проекции. Тогда при фиксированной локально выпуклой топологии на X локально выпуклые топологии на X_1 и X_2 есть сильнейшие в которых проекции p_1 и p_2 непрерывны и слабейшие в которых инъекции i_1 и i_2 непрерывны.*

Доказательство утверждения 16.1.1 и леммы 16.1.2. Для доказательства используем технику и терминологию работ [18, 19, 20]. Локально выпуклое пространство будем записывать как пару (X, τ) где X — соответствующее векторное пространство, а τ — локально выпуклая топология на X. Для векторного пространства X через $\mathcal{T}(\mathcal{X})$ обозначим полную структуру всех локально выпуклых топологий на X.

Отображение $f : \mathcal{T} \to T$ полной структуры $\mathcal{T}$ в полную структуру T есть верхнее (нижнее), если оно сохраняет верхние грани и наименьший элемент (соответственно нижние грани и наибольший элемент). Сопоставим каждому линейному отображению $\varphi : X \to Y$ векторного пространства X в векторное Y верхнее отображение $\varphi^{\vdash} : \mathcal{T}(Y) \to \mathcal{T}(X)$, сопоставляющее каждой локально выпуклой топологии $t \in \mathcal{T}(Y)$ слабейшую локально выпуклую топологию $\tau \in \mathcal{T}(\mathcal{X})$, в которой отображение $\varphi : (X, \tau) \to (Y, t)$ непрерывно, и нижнее отображение $\varphi^{\dashv} : \mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(Y)$, сопоставляющее каждой локально выпуклой топологии $\tau \in \mathcal{T}(X)$ сильнейшую локально выпуклую топологию $t \in \mathcal{T}(Y)$, в которой отображение $\varphi : (X, \tau) \to (Y, t)$ непрерывно. Мы построили контравариантный функтор $\varphi \to \varphi^{\vdash}$ из категории векторных пространств в категорию полных структур и верхних отображений и ковариантный функтор $\varphi \to \varphi^{\dashv}$ из категории векторных пространств в категорию полных структур и нижних отображений. Линейное отображение $\varphi : X \to Y$ векторного пространства X в векторное пространство Y непрерывно как отображение локально выпуклых пространств $\varphi : (X, \tau) \to (Y, t)$ иф $\varphi^{\vdash}(t) \prec \tau$ или $\varphi^{\dashv}(\tau) \succ t$.

Перейдем к доказательству утверждению 16.1.1. Пусть локально выпуклое пространство (X,τ) есть прямая сумма локально выпуклых пространств (X_1,τ_1) и (X_2,τ_2) с каноническими инъекциями $i_1 : X_1 \to X$ и $i_2 : X_2 \to X$. В категориях векторных пространств и локально выпуклых пространств конечные прямые суммы совпадают с конечными прямыми произведениями. Пусть $p_1 : X \to X_1$ и $p_2 : X \to X_2$ канонические проекции, тогда $e_1 \equiv p_1 i_1$ и $e_2 \equiv p_2 i_2$ есть тождественные отображения, $0_1 \equiv p_2 i_1$ и $0_2 \equiv p_1 i_2$ есть нулевые отображения.

Так как (X,τ) есть прямая сумма (X_1,τ_1) и (X_2,τ_2), то по определению

$$\tau = i_1^{\dashv}(\tau_2) \wedge i_2^{\dashv}(\tau_2). \tag{16.1.1}$$

Так как (X,τ) есть прямое произведение (X_1,τ_1) и (X_2,τ_2), то по определению

$$\tau = p_1^{\vdash}(\tau_1) \vee p_2^{\vdash}(\tau_2). \tag{16.1.2}$$

Применяя к равенству (16.1.1) отображение $p_1^{\dashv}$, получим

$$p_1^{\dashv}(\tau) = p_1^{\dashv}\left(i_1^{\dashv}(\tau_1) \vee i_2^{\dashv}(\tau_2)\right) = p_1^{\dashv} i_1^{\dashv}(\tau_1) \vee p_1^{\dashv} i_2^{\dashv}(\tau_2) = e_1^{\dashv}(\tau_1) \vee 0_2^{\dashv}(\tau_2) = \tau_1.$$

Итак, $p_1^{\dashv}(\tau) = \tau_1$ и аналогично $p_2^{\dashv}(\tau) = \tau_2$, что доказывает первую часть утверждения 16.1.1. Применяя отображение $i_1^{\vdash}$ к равенству (16.1.2), получим

$$i_1^{\vdash}(\tau) = i_1^{\vdash}\left(p_1^{\vdash}(\tau_1) \vee p_2^{\vdash}(\tau_2)\right) = i_1^{\vdash} p_1^{\vdash}(\tau_1) \vee i_1^{\vdash} p_2^{\vdash}(\tau_2) = e_1^{\vdash}(\tau_1) \vee 0_1^{\vdash}(\tau_2) = \tau_1.$$

Итак, $i_1^{\vdash}(\tau) = \tau_1$ и аналогично $i_2^{\vdash}(\tau) = \tau_2$, что доказывает утверждение 16.1.1.

Перейдем к *доказательству леммы 16.1.2.* Пусть (X,τ) есть индуктивный предел семейства локально выпуклых пространств $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ с банаховыми локально выпуклыми топологиями τ_α и каноническими инъекциями $i_\alpha : X_\alpha \to X$, $\alpha \in A$. Тогда в наших обозначениях

$$\tau = \bigwedge_{\alpha\in A} i_\alpha^{\dashv}(\tau_\alpha). \tag{16.1.3}$$

Тогда по утверждению 16.1.1

$$\tau_1 = p_1^{\dashv} = p_1^{\dashv}\left(\bigwedge_{\alpha\in A} i_\alpha^{\dashv}(\tau_\alpha)\right) = \bigwedge_{\alpha\in A} p_1^{\dashv} i_\alpha^{\dashv}(\tau_\alpha) = \bigwedge_{\alpha\in A} (p_1 i_\alpha)^{\dashv}(\tau_\alpha),$$

т.е. локально выпуклая топология τ_1 есть индуктивный предел банаховых топологий τ_α на X_α с каноническими инъекциями $(p_1 i_\alpha) : X_\alpha \to X_1$. Аналогично

$$\tau_2 = \bigwedge_{\alpha\in A} (p_2 i_2)^{\dashv}(\tau_\alpha)$$

есть индуктивный предел банаховых топологий.

Наоборот, пусть (X_1,τ_1) есть индуктивный предел локально выпуклых пространств $\{(X_{1,\alpha},\tau_{1,\alpha})\}_{\alpha\in A}$ с банаховыми топологиями $\tau_{1,\alpha}$ и каноническими инъекциями $i_{1,\alpha} : X_{1,\alpha} \to X_1$ и (X_2,τ_2) есть индуктивный предел локально выпуклых пространств $\{(X_{2,\beta},\tau_{2,\beta})\}_{\beta\in B}$ с банаховыми топологиями $\tau_{2,\beta}$ и каноническими инъекциями $i_{2,\beta} : X_{2,\beta} \to X_2$. Тогда в наших обозначениях

$$\tau_1 = \bigwedge_{\alpha\in A} i_{1,\alpha}^{\dashv}(\tau_{1,\alpha}); \quad \tau_2 = \bigwedge_{\beta\in B} i_{2,\beta}^{\dashv}(\tau_{2,\beta}). \tag{16.1.4}$$

Так как (X,τ) есть прямая сумма (X_1,τ_1) и (X_2,τ_2), то

$$\tau = i_1^{\dashv}(\tau_1) \wedge i_2^{\dashv}(\tau_2). \tag{16.1.5}$$

Подставляя (16.1.4) в (16.1.5), получаем

$$\tau = i_1^{\dashv}\left(\bigwedge_{\alpha\in A} i_{1,\alpha}^{\dashv}(\tau_{1,\alpha})\right)\bigwedge i_2^{\dashv}\left(\bigwedge_{\beta\in B} i_{2,\beta}^{\dashv}(\tau_{2,\beta})\right) =$$

$$\left(\bigwedge_{\alpha\in A}\left(i_1 i_{1,\alpha}\right)^{\dashv}(\tau_{1,\alpha})\right)\bigwedge\left(\bigwedge_{\beta\in B}\left(i_2 i_{2,\beta}\right)^{\dashv}(\tau_{2,\beta})\right).$$

Т.е. топология τ на X есть индуктивный предел банаховых топологий τ_γ, где $\gamma = (1,\alpha)$ или $\gamma = (2,\beta)$ на (X_γ,τ_γ) с каноническими инъекциями $i_1 i_{1,\alpha}$ и $i_2 i_{2,\beta}$. $\diamondsuit$

Известно, что полнота топологического пространства сохраняется при взятии произведений и замкнутых подмножеств [7, с. 226]. Поэтому на основании предыдущего справедлив вывод.

Вывод 16.1.1 *Следующие свойства локально выпуклого пространства: отделимость, полнота, ультраборнологичность, суслиновость — сохраняются при переходе к конечным прямым произведениям и топологически дополняемым векторным подпространствам.*

Замечание 16.1.1 *Полное ультраборнологичное локально выпуклое пространство бочечно [78, с. 82,84].*

Следствие 16.1.2 *Локально выпуклые пространства D, D', S, S' — отделимые, полные, ультраборнологические, суслинские, бочечные. Любые локально выпуклые пространства, полученные из них за конечное число операций взятия конечных прямых произведений и перехода к топологически дополняемым векторным подпространствам сохраняют эти свойства.*

16.1.2 Оператор симметризации.

В этом пункте в терминологии мы следуем в основном Н. Бурбаки [10]. Здесь N — компактная топологическая группа; U — квазиполное бочечное локально выпуклое пространство; U' — сопряженное локально выпуклое пространство; $L(U,U)$ — алгебра линейных непрерывных операторов $A : U \to U$; $L_p(U,U)$ — локально выпуклое пространство на векторном пространстве $L(U,U)$ с топологией поточечной сходимости, квазиполное [78, с.110]; $L(U',U')$ — алгебра линейных непрерывных операторов $B : U' \to U'$.

Пусть задано представление группы N в $L(U,U)$ вида $T_G : U \to U,\ G \in N$. Пусть отображение $tw : N \times U \to U$ вида

$$tw(G,\varphi) \equiv T_G(\varphi), \quad \varphi \in U$$

непрерывно, т.е. представление T_G непрерывно в терминологии Н.Бурбаки [10, с.229]. На компактной топологической группе N существует лево и правоинвариантная нормированная мера Хаара $\mu(G)$ [10, с. 114,121]. В сформулированных условиях функция

T_G, определенная на топологической группе G, и со значениями в локально выпуклом пространстве $L_p(U,U)$, непрерывна и поэтому [10, с.24-25] скалярно существенно μ-интегрируема на N и существует оператор $\mathrm{Sym}_N \in L_p(U,U)$, равный

$$\mathrm{Sym}_N \equiv \int\limits_N T_G \, d\mu(G). \tag{16.1.6}$$

По построению, верно

$$\forall f \in U' \ \forall \varphi \in U \ \Bigg| \ \int\limits_N (f, T_G\varphi) \ d\mu(G) = \left(f, \left(\int\limits_N T_G \, d\mu(G)\right) \varphi\right) = (f, \mathrm{Sym}_N \varphi) \, . \tag{16.1.7}$$

Оператор Sym_N назовём *оператором симметризации* для группы N.

Согласно § 4.1 введём сохраняющееся множество $\Pi(N) \subset U$, состоящее из всех элементов $\varphi \in U$, для которых верно

$$\forall G \in N \ \Big| \ T_G\varphi = \varphi. \tag{16.1.8}$$

Элемент $\varphi \in U$ со свойством (16.1.8) назовём *симметричным относительно группы* N или N*-симметричным.* Множество $\Pi(N) \subset U$ — замкнутое векторное подпространство как пересечение ядер линейных непрерывных отображений $(T_G - E)$, $G \in N$.

Теорема 16.1.2 *Пусть N — компактная топологическая группа, U — бочечное квазиполное локально выпуклое пространство и T_G — непрерывное представление группы N в $L(U,U)$, тогда:*

1)формула (16.1.6) задаёт линейный непрерывный оператор;

2) справедливо утверждение (16.1.7);

3) $\Pi(N) = \mathrm{Sym}_N(U)$ — топологически дополняемое векторное пространство в U;

4) $\forall Q \in N \ \Big| \ T_Q \, \mathrm{Sym}_N = \mathrm{Sym}_N = \mathrm{Sym}_N T_Q$;

5) $\mathrm{Sym}_N \mathrm{Sym}_N = \mathrm{Sym}_N$.

Следствие 16.1.3 *В условиях теоремы 16.1.2 оператор симметрии Sym_N является непрерывном проектором на множество всех N-симметричных элементов $\Pi(N)$ из U. Элемент $\varphi \in U$ является N-симметричным иф $\mathrm{Sym}_N \varphi = \varphi$*

Доказательство теоремы 16.1.2 . Докажем 4) . Умножим равенство (16.1.6) слева на оператор T_Q, $Q \in N$

$$T_Q \, \mathrm{Sym}_N = T_Q \int\limits_N T_G \, d\mu(G). \tag{16.1.9}$$

В силу предложения 1 с. 11 из [10]

$$T_Q \int\limits_Q T_Q \, d\mu(G) = \int\limits_N T_{QG} \, d\mu(G). \tag{16.1.10}$$

В силу левоинвариантности меры Хаара

$$\int\limits_N T_{QG} \, d\mu(G) = \int\limits_N T_G \, d\mu G = \mathrm{Sym}_N \, . \tag{16.1.11}$$

Аналогично умножая равенство (16.1.6) справа на T_Q и пользуясь правой инвариантностью меры Хаара, получаем

$$\operatorname{Sym}_N T_Q = \int\limits_T T_G\, d\mu(G) T_Q = \int\limits_N T_{GQ}\, d\mu(G) = \int\limits_N T_G\, d\mu(G) = \operatorname{Sym}_N . \qquad (16.1.12)$$

Доказано утверждение 4).

Интегрируя равенство

$$T_Q \operatorname{Sym}_N = \operatorname{Sym}_N$$

по $Q \in N$, получаем в силу предложения 1 с. 11 из [10] утверждение 5). Итак, линейный непрерывный оператор $\operatorname{Sym}_N : U \to U$ есть непрерывный проектор на замкнутое линейное подпространство $\operatorname{Sym}_N(U) \subset U$.

Проверим равенство $\Pi(N) = \operatorname{Sym}_N(U)$. Если $\varphi \in \Pi(N)$, то $T_G\varphi = \varphi$ при всех $G \in N$. Интегрируя это равенство по $G \in N$, получаем $\operatorname{Sym}_N \varphi = \varphi$, т.е. $\varphi \in \operatorname{Sym}_N(U)$. Наоборот, если $\varphi \in \operatorname{Sym}_N(U)$, то $\operatorname{Sym}_N \varphi = \varphi$. Умножаем это равенство слева на оператор T_G и с учётом 4) получаем

$$(T_G \operatorname{Sym}_N \varphi = T_G\varphi) \Rightarrow (\operatorname{Sym}_N \varphi = T_G\varphi) \Rightarrow (\varphi = T_G\varphi)\,,$$

т.е. $\varphi \in \Pi(N)$. $\diamondsuit$

Для каждого линейного непрерывного оператора $A \in L(U,U)$ определен сопряженный линейный непрерывный оператор $A^* \in L(U',U')$. Сопряженные операторы $T^*_G : U' \to U'$ образуют антипредставление топологической группы N в $L(U',U')$. Переходя к сопряжённым операторам, мы в силу теоремы 16.1.2 видим, что линейный непрерывный оператор $\operatorname{Sym}^*_N : U' \to U'$ является проектором на замкнутое векторное подпространство $\operatorname{Sym}^*_N(U') \subset U'$ и верно

$$\forall Q \in N \;\Big|\; \operatorname{Sym}^*_N T^*_Q = \operatorname{Sym}^*_N = T^*_Q \operatorname{Sym}^*_N . \qquad (16.1.13)$$

Пусть $\Pi^*(N) \subset U'$ — сохраняющееся множество для антипредставления T^*_G. Его элементы будем называть *симметричными относительно группы* N или N-*симметричными* элементами из U'. Подмножество $\Pi^*(N) \subset U'$ — замкнутое векторное подпространство. Покажем, что

$$\Pi^*(N) = \operatorname{Sym}^*_N(U'). \qquad (16.1.14)$$

Если $f \in \Pi^*(N)$, то

$$\forall G \in N \;\Big|\; T^*_G f = f.$$

В силу равенства (16.1.7) тогда для любого элемента $\varphi \in U$

$$\int\limits_N (f, T_G\varphi)\, d\mu(G) = \int\limits_N (T^*_G f, \varphi)\, d\mu(G) = (f, \varphi)$$

и

$$\int\limits_N (f, T_G\varphi)\, d\mu(G) = (f, \operatorname{Sym}_N \varphi) = (\operatorname{Sym}^*_N f, \varphi).$$

Отсюда $f = \operatorname{Sym}^*_N f$, т.е. $f \in \operatorname{Sym}^*_N(U')$.

Наоборот, если $f \in \operatorname{Sym}^*_N(U')$, то $f = \operatorname{Sym}^*_N f$. В силу равенств (16.1.13), тогда при любом $G \in N$

$$T^*_G f = T^*_G \operatorname{Sym}^*_N f = \operatorname{Sym}^*_N f = f,$$

т.е. $f \in \Pi^*(N)$.

Итак, аналогично следствию 16.1.3 справедливо следствие.

Следствие 16.1.4 *В условиях теоремы 16.1.2 оператор* $\mathrm{Sym}\, N^*$ *является линейным непрерывным проектором на множество всех* N*-симметричных элементов* $\Pi^*(N)$ *из* U'. *Элемент* $f \in U'$ *является* N*-симметричным иф* $\mathrm{Sym}_N^* f = f$.

Отсюда следует, что N-симметричный функционал $f \in U'$ однозначно определяется своими значениями на топологически дополняемом векторном подпространстве $\Pi(N) \subset U$ всех N-симметричных элементов из U.

Утверждение 16.1.2 *Если* $f \in \Pi^*(N)$ *и сужение* $f|_{\Pi(N)}$ *— тривиальный функционал, то* f *— тривиальный функционал.*

Далее нам потребуется следующее достаточное условие непрерывности представления.

Утверждение 16.1.3 *[10, с. 231] Если* N *— локально компактная топологическая группа,* U *— бочечное локально выпуклое пространство и представление* T_G *группы* N *на локально выпуклом пространстве* U *раздельно непрерывно, то оно непрерывно.*

16.1.3 Непрерывность скалярного и векторного представлений группы $\mathrm{GL}\,(n, \mathbf{R})$.

Пусть $F(\mathbf{R}^n)$ векторное пространство всех отображений $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ и $\mathrm{GL}\,(n) \equiv \mathrm{GL}\,(n, \mathbf{R})$.

В § 4.5 мы ввели представление Tsi_G группы $\mathrm{GL}\,(n)$ в группу линейных изоморфизмов векторного пространства $F(\mathbf{R}^n)$ вида

$$\forall G \in \mathrm{GL}\,(n)\ \forall \varphi \in F(\mathbf{R}^n) \ \Big| \ (Tsi_G \varphi)(x) \equiv \varphi(G^{-1}x). \tag{16.1.15}$$

Сужение линейных отображений Tsi_G на локально выпуклые пространства $U = D(\mathbf{R}^n)$ и $U = S(\mathbf{R}^n)$ основных функций являются линейными топологическими изоморфизмами $Tsi_G : U \to U$ (§ 15.1). Будем обозначать полученные представления группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на локально выпуклых пространствах $U = D(\mathbf{R}^n)$ и $U = S(\mathbf{R}^n)$ тем же символом Tsi_G.

Лемма 16.1.3 *Представление* Tsi_G *топологической группы* $\mathrm{GL}\,(n)$ *на локально выпуклых пространствах* $U = D(\mathbf{R}^n)$ *и* $U = S(\mathbf{R}^n)$ *непрерывно.*

Доказательство. Локально выпуклые пространства $D(\mathbf{R}^n)$ и $S(\mathbf{R}^n)$ бочечные (следствие 16.1.2). Топологическая группа $\mathrm{GL}\,(n)$ локально компактна. Поэтому применимо утверждение 16.1.3 и для непрерывности представления Tsi_G достаточно доказать, что для любой функции $\varphi \in U$ отображение $wi_\varphi : \mathrm{GL}\,(N) \to U$ вида $wi_\varphi(G) \equiv Tsi_G(\varphi)$ непрерывно. Так как отображение перехода к обратному элементу топологической группы непрерывно, то непрерывность отображения wi_φ эквивалентна непрерывности отображения $w_\varphi : \mathrm{GL}\,(n) \to U$ вида

$$(w_\varphi(G))(x) \equiv \varphi(Gx). \tag{16.1.16}$$

Фиксируем произвольную точку $G_0 \in \mathrm{GL}\,(n)$. В топологической группе $\mathrm{GL}\,(n)$ существует компактная окрестность $M \subset \mathrm{GL}\,(n)$ точки G_0 и числа $C_1, C_2 \in \mathbf{R}_+$, что

$$\forall G \in M \ \Big| \ (|G| \le C_1) \wedge \left(|G^{-1}| \le C_2\right), \tag{16.1.17}$$

где $|G|$ — норма линейного оператора $G : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ при заданной канонической евклидовой структуре на $\mathbf{R}^n$.

Для каждого числа $m \in \mathbf{N}$ и каждого индекса $\beta \in (\overline{1,n})^m$, $\beta \equiv (\beta_1, \dots \beta_m)$ введём обозначение для частной производной

$$\varphi^{(\beta)}(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\beta_m}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{\beta_1}} \varphi(x). \tag{16.1.18}$$

Для $m = 0$ положим $(\overline{1,n})^0 \equiv \{0\}$ и $\varphi^{(0)}(x) \equiv \varphi(x)$. По формуле дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial x_{\beta_m}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{\beta_1}} \varphi(Gx) \equiv \sum_{\gamma \in (\overline{1,n})^m} \varphi^{(\gamma)}(Gx) G_{\gamma_m \beta_m} \dots G_{\gamma_1 \beta_1}. \tag{16.1.19}$$

Обозначим здесь через $H(a) \equiv \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \le a\}$ замкнутый шар радиусом $a > 0$ с центром в нуле. Полагаем далее $\varphi \ne 0$, ибо если функция $\varphi = 0$, непрерывность отображения w_φ очевидна.

Рассмотрим теперь два случая: 1) $U = D(\mathbf{R}^n)$, 2) $U = S(\mathbf{R}^n)$.

В первом случае пусть число $a > 0$ равно

$$a \equiv \sup_{x \in \operatorname{supp}(\varphi)} |x|. \tag{16.1.20}$$

Тогда

$$\forall G \in M \;\Big|\; \operatorname{supp}(W_\varphi(G)) = G^{-1} \operatorname{supp}(\varphi) \subset H(C_2 a). \tag{16.1.21}$$

Согласно формуле (16.1.19) производная порядка m от функции $w_\varphi(G)(x) = \varphi(Gx)$ является непрерывной функцией от пары (G, x) на произведении $\mathrm{GL}(n) \times \mathbf{R}^n$. Следовательно её сужение на компакт $M \times H(C_2 a)$ — равномерно непрерывная функция. Поэтому при $G \to G_0$ в M верно $\varphi(Gx) \to \varphi(G_0 x)$ равномерно по $x \in H(C_2 a)$. Мы доказали непрерывность отображения $w_\varphi : \mathrm{GL}(n) \to D(\mathbf{R}^n)$.

Рассмотрим второй случай — $U = S(\mathbf{R}^n)$. Для каждого $m \in \mathbf{N}_o$ каждого $k \in \mathbf{N}_o$ и каждого $\beta \in (\overline{1,n})^m$ введём на $S(\mathbf{R}^n)$ преднорму

$$p_{k,\beta}(\varphi) \equiv \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \left(|\varphi^{(\beta)}(x)| (1 + |x|^2)^{\frac{k}{2}} \right). \tag{16.1.22}$$

Фиксируем некоторую преднорму $p_{k,\beta}$ и число $\varepsilon > 0$. Требуется доказать, что существует число $\delta > 0$, при $|G - G_0| < 0$ верно

$$p_{k,\beta}(w_\varphi(G) - w_\varphi(G_0)) < \varepsilon. \tag{16.1.23}$$

Так как $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$, то любая преднорма вида (16.1.22) конечна на элементе φ. Поэтому существует число $C_3 > 0$, что

$$\forall \gamma \in (\overline{1,n})^m \; \forall x \in \mathbf{R}^n \;\Big|\; |\varphi^{(\gamma)}(x)| \le \frac{C_3}{(1 + |x|^2)^{\frac{k+2}{2}}}. \tag{16.1.24}$$

В силу (16.1.19) имеем

$$p_{k,\beta}(w_\varphi(G) - w_\varphi(G_0)) = \tag{16.1.25}$$

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} \left\{ \left| \left(\sum_{\gamma \in (\overline{1,n})^m} \left(\varphi^{(\gamma)}(Gx) G_{\gamma_m \beta_m} \dots G_{\gamma_1 \beta_1} - \varphi^{(\gamma)}(G_0 x) G_{0\gamma_m \beta_m} \dots G_{0\gamma_1 \beta_1} \right) \right) \right| \left(1 + |x|^2 \right)^{\frac{k}{2}} \right\}.$$

В силу (16.1.17) при $G \in M$ верно

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \;\Big|\; \frac{1}{C_2}|x| \le |Gx| \le C_1|x|. \tag{16.1.26}$$

Возьмём произвольное число $b > \frac{1}{C_2}$. Тогда если $|x| \ge C_2 b$, то $|Gx| \ge b$. Представим $\mathbf{R}^n$ в виде объединения $\mathbf{R}^n = H(C_2 b) \bigcup (\mathbf{R}^n \setminus H(C_2 b))$. Из равенства (16.1.25) с учётом (16.1.24) получим

$$p_{k,\beta}(W_\varphi(G) - W_\varphi(G_0)) \le \max\{A, B\}, \tag{16.1.27}$$

где

$$A \equiv \left(1 + (C_2 b)^2\right)^{\frac{k}{2}} \times \tag{16.1.28}$$

$$\sup_{x \in H(C_2 b)} \left\{ \left| \sum_{\gamma \in (\overline{1,n})^m} \left(\varphi^{(\gamma)}(Gx) G_{\gamma_m \beta_m} \dots G_{\gamma_1 \beta_1} - \varphi^{(\gamma)}(G_0 x) G_{0\gamma_m \beta_m} \dots G_{0\gamma_1 \beta_1} \right) \right| \right\},$$

$$B \equiv n^m C_3 |G|^m \sup_{|x| \ge C_2 b} \left\{ \left((1 + |Gx|^2)^{-\frac{k+2}{2}} + (1 + |G_0 x|^2)^{-\frac{k+2}{2}} \right) (1 + |x|^2)^{\frac{k}{2}} \right\}. \tag{16.1.29}$$

В силу (16.1.26) для величины B имеем неравенства

$$B \le 2n^m |G|^m C_3 \sup_{|x| \ge C_2 b} \left\{ \left(\left(1 + \left(\frac{|x|}{C_2} \right)^2 \right)^{-\frac{k+2}{2}} \left(1 + |x|^2 \right)^{\frac{k}{2}} \right) \right\} \le \tag{16.1.30}$$

$$2^{(1+\frac{k}{2})} n^m |G|^m C_3 \sup_{|x| \ge C_2 b} \left\{ \frac{(2|x|^2)^{\frac{k}{2}}}{\left(\frac{|x|}{C_2} \right)^{k+2}} \right\} = 2n^m |G|^m C_2^k C_3 b^{-2}.$$

Выберем число $b > \frac{1}{C_2}$ так, чтобы было $B < \frac{\varepsilon}{2}$. Это можно сделать в силу неравенств (16.1.30).

В силу рассуждений для случая $U = D(\mathbf{R}^n)$ можно выбрать тогда при фиксированном $b > 0$ число $\delta > 0$ так чтобы при $|G - G_0| < \delta$ было $A < \frac{\varepsilon}{2}$. Итак, при $|G - G_0| < \delta$ получаем (16.1.23). $\diamondsuit$

В § 4.8 мы ввели два представления группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на векторном пространстве $F_n(\mathbf{R}^n) \equiv (F(\mathbf{R}^n))^n$ вектор-функций $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}^n$ вида

$$Tvi_G(\varphi)(x) \equiv G^{-1\top} \varphi(G^{-1} x) \tag{16.1.31}$$

и

$$\widetilde{Tvi}_G(\varphi)(x) \equiv G\varphi(G^{-1} x). \tag{16.1.32}$$

Сужения линейных отображений Tvi_G и $\widetilde{Tvi}_G$ на векторные подпространства $D_n(\mathbf{R}^n) \equiv (D(\mathbf{R}^n))^n$ и $S_n(\mathbf{R}^n) \equiv (S(\mathbf{R}^n))^n$ являются линейными топологическими изоморфизмами соответствующих локально выпуклых пространств и порождают представления топологической группы $\mathrm{GL}\,(n)$ на локально выпуклых пространствах $U = D_n(\mathbf{R}^n)$ и $U = S_n(\mathbf{R}^n)$, за которыми мы сохраним те же обозначения Tvi_G и $\widetilde{Tvi}_G$.

Лемма 16.1.4 *Если $U = D_n(\mathbf{R}^n)$ или $U = S_n(\mathbf{R}^n)$, то представления Tvi_G и $\widetilde{Tvi}_G$ топологической группы* $\mathrm{GL}\,(n)$ *на локально выпуклом пространстве U непрерывны.*

Доказательство. В силу утверждения 16.1.3 достаточно доказать, что при любом фиксированном элементе $\varphi \in U$ отображения v_φ и $\tilde{v}_\varphi$ вида $v_\varphi(G) \equiv Tvi_G(\varphi)$ и $\tilde{v}_\varphi(G) \equiv \widetilde{Tvi}_G(\varphi)$ топологической группы $\mathrm{GL}\,(n)$ в локально выпуклое пространство U непрерывны.

Введём отображение $b_\varphi : \mathrm{GL}\,(n) \to U$ вида $b_\varphi(G)(x) \equiv \varphi(G^{-1}(x))$. Согласно лемме 16.1.3 это отображение непрерывно. Введём тождественное отображение $i : \mathrm{GL}\,(n) \to \mathrm{GL}\,(n)$. Введём отображения p и $\tilde{p}$ произведения $\mathrm{GL}\,(n) \times U$ в U вида: $p(G,\varphi) \equiv G^{-1\top}\varphi$, $\tilde{p}(G,\varphi) \equiv G\varphi$ — при $\varphi \in U$. Отображения v_φ и $\tilde{v}_\varphi$ представимы в виде суперпозиций

$$v_\varphi = p \circ (i \times b_\varphi), \quad \tilde{v}_\varphi = \tilde{p} \circ (i \times b_\varphi),$$

где $i \times b_\varphi$ есть отображение $\mathrm{GL}\,(n) \to \mathrm{GL}\,(n) \times U$ вида $(i \times b_\varphi)(G) \equiv (i(G), b_\varphi(G))$. Итак, отображения v_φ и $\tilde{v}_\varphi$ непрерывны как суперпозиции непрерывных отображений. $\diamondsuit$

В силу результатов п. 16.1.2 и лемм 16.1.3, 16.1.4 для представления Tsi_G на $D(\mathbf{R}^n)$ и $S_n(\mathbf{R}^n)$ и представлений Tvi_G и $\widetilde{Tvi}_G$ на $D_n(\mathbf{R}^n)$ и $S_n(\mathbf{R}^n)$ и любой компактной подгруппы $N \subset \mathrm{GL}\,(n)$ справедливы построения п. 16.1.2 и, в частности, определен оператор симметризации Sym_N.

16.1.4 Сопряженные операторы к операторам Tvi_G, Tsi_G, div, $grad$, rot.

В этом пункте $U(\mathbf{R}^n)$ обозначает локально выпуклое пространство $D(\mathbf{R}^n)$ или локально выпуклое пространство $S(\mathbf{R}^n)$, $U'(\mathbf{R}^n)$ — сильное сопряженное локально выпуклое пространство и $U_n(\mathbf{R}^n) \equiv (U(\mathbf{R}^n))^n$. Операторы $Tsi_G : U(\mathbf{R}^n) \to U(\mathbf{R}^n)$, $G \in \mathrm{GL}\,(n)$, линейны и непрерывны. Сопряженные операторы $Tsi_G^* : U'(\mathbf{R}^n) \to U'(\mathbf{R}^n)$ также линейны и непрерывны и при $G \in O(n,\mathbf{R})$ будет $|\det G| = 1$ и оператор Tsi_G^* будет оператором замены переменной из п. 15.2.1 и для $f \in U'(\mathbf{R}^n)$ будет $(Tsi_G^* f)(x) = f(Gx)$. Оператор $Tvi_G = G^{-1\top}\, Tsi_G = Tsi_G G^{-1\top}$, поэтому его сопряженный оператор $Tvi_G^* = Tsi_G^* G^{-1} = G^{-1}\, Tsi_G^*$. Аналогично $\widetilde{Tvi}_G = G\, Tsi_G = Tsi_G G$ и $\widetilde{Tvi}_G^* = Tsi_G^* G^\top = G^\top\, Tsi_G^*$.

Для локально выпуклых пространств основных функций определены линейные непрерывные операторы $div : U_n(\mathbf{R}^n) \to U(\mathbf{R}^n)$ и $grad : U(\mathbf{R}^n) \to U_n(\mathbf{R}^n)$. Сопряженные линейные операторы равны

$$div^* = -\,grad\,; \tag{16.1.33}$$

$$grad^* = -\,div\,. \tag{16.1.34}$$

В самом деле, если $f \in U'(\mathbf{R}^n), \varphi \in U_n(\mathbf{R}^n)$, то в тензорных обозначениях

$$(f,\, div\,\varphi) = \left(f, \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_i\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f, \varphi_i\right) = -(\,grad\,f, \varphi).$$

А если $f \in U_n'(\mathbf{R}^n), \varphi \in U(\mathbf{R}^n)$, то

$$(f,\, grad\,\varphi) = \left(f_i, \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right) = -(\,div\,f, \varphi).$$

Лемма 16.1.5 *При $Q \in O(n,\mathbf{R})$ справедливы равенства для операторов*

$$div\;\, Tvi_Q = \; Tsi_Q\, div\,, \tag{16.1.35}$$

$$grad\;\, Tsi_Q = \; Tvi_Q\, grad\,. \tag{16.1.36}$$

Доказательство. При $\varphi \in U_n(\mathbf{R}^n)$ имеем

$$(\mathit{div}\ \mathit{Tvi}_Q\varphi)(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} Q_{ij}\varphi_j\left(Q^\top x\right) = Q_{ij}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_k}(y)Q^\top_{ki}\Big|_{y=Q^\top x} = \left(Q^\top Q\right)_{kj}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_k}(y)\Big|_{y=Q^\top x} =$$

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_j}(y)\Big|_{y=Q^\top x} = (\mathit{Tsi}_Q\, \mathit{div}\,\varphi)(x).$$

Аналогично при $\varphi \in U(\mathbf{R}^n)$ верно

$$(\mathit{grad}\ \mathit{Tsi}_Q\varphi)_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(Q^\top x) = \frac{\partial\varphi}{\partial y_j}(y)Q^\top_{ji}\Big|_{y=Q^\top x} = Q_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}(y)\Big|_{y=Q^\top x} =$$

$$(\mathit{Tvi}_Q\, \mathit{grad}\,\varphi)_i(x).$$

♢

В случае $n = 3$ определим также линейный непрерывный оператор $\mathit{rot} : U_3(\mathbf{R}^3) \to U_3(\mathbf{R}^3)$. В этом случае сопряженный оператор

$$\mathit{rot}^* = \mathit{rot}\,, \tag{16.1.37}$$

ибо при $\varphi \in U_3(\mathbf{R}^3)$, $f \in U_3'(\mathbf{R}^3)$ верно

$$(f, \mathit{rot}\,\varphi) = \left(f_\alpha, e_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\varphi_\gamma\right) = -\left(e_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x_\beta}f_\alpha, \varphi_\gamma\right) = \left(e_{\gamma\beta\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}f_\alpha, \varphi_\gamma\right) = (\mathit{rot}\,f, \varphi)\,.$$

Лемма 16.1.6 *При $Q \in SO(3, \mathbf{R})$ верно*

$$\mathit{rot}\ \mathit{Tvi}_Q = \mathit{Tvi}_Q\,\mathit{rot}\,. \tag{16.1.38}$$

Доказательство. Для $\varphi \in U_3(\mathbf{R}^3)$

$$(\mathit{rot}\ \mathit{Tvi}_Q\varphi)_\alpha(x) = e_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x_\beta}Q_{\gamma\nu}\varphi_\nu(Q^\top x) = e_{\alpha\beta\gamma}Q_{\gamma\nu}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_\theta}Q^\top_{\theta\beta}\Big|_{y=Q^\top x} = \tag{16.1.39}$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}Q^\top_{\theta\beta}Q^\top_{\nu\gamma}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_\theta}(y)\Big|_{y=Q^\top x}.$$

Так как $\det Q = 1$, то по тождеству (3.6.92) верно

$$e_{\alpha\beta\gamma}Q^\top_{\theta\beta}Q^\top_{\nu\gamma} = Q^{\top -1}_{\alpha\xi}e_{\xi\theta\nu} = Q_{\alpha\xi}e_{\xi\theta\nu}. \tag{16.1.40}$$

Подставляя (16.1.40) в (16.1.39), получаем

$$(\mathit{rot}\ \mathit{Tvi}_Q\varphi)_\alpha(x) = Q_{\alpha\xi}e_{\xi\theta\nu}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_\theta}(y)\Big|_{y=Q^\top x} = (\mathit{Tvi}_Q\,\mathit{rot}\,\varphi)_\alpha(x).$$

♢

16.1.5 Свойство монтелевости пространств обобщённых функций. В п. 16.1.1 мы напомнили, что пространства $D(\Omega)$ и $S(\mathbf{R}^n)$ основных функций и пространства $D'(\Omega)$ и $S'(\mathbf{R}^n)$ обобщённых функций являются отделимыми, полными, бочечными, ультраборнологическими, суслинскими локально выпуклыми пространствами и что этот комплекс свойств сохраняется при взятии конечных прямых произведений и при переходе к топологически дополняемым подпространствам. Пространства $D(\Omega)$, $S(\mathbf{R}^n)$, $D'(\Omega)$, $S'(\mathbf{R}^n)$ являются также *монтелевскими* [87, с.442].

Отделимое локально выпуклое пространство X называется *полумонтелевским*, если каждое ограниченное подмножество в нём относительно компактно и — *монтелевским*, если оно полумонтелевское и инфрабочечное [87, с.231]. Полумонтелевость и монтелевость обладают следующими свойствами устойчивости [87, с.232,236]: 1) прямое произведение любого семейства монтелевских пространств — монтелевское пространство; 2) сопряженное к монтелевскому пространству — монтелевское пространство; 3) замкнутое векторное подпространство полумонтелевского пространства — полумонтелевское пространство.

В полумонтелевских пространствах слабая и сильная сходимость последовательностей эквивалентны в силу следующего утверждения [87, с.232].

Утверждение 16.1.4 *Пусть X — полумонтелевское пространство, тогда:*

(а) последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ элементов из X, сходящаяся к элементу $a \in X$ слабой топологии, сходится к элементу a и в сильной топологии;

(б) семейство $\{x_\varepsilon\}_{\varepsilon\in]0,\alpha[}$ элементов из X, сходящееся к элементу $a \in X$ в слабой топологии, сходится к элементу a и в сильной топологии.

Благодаря утверждению 16.1.4 сходимость последовательностей в пространстве обобщённых функций $D'(\Omega)$ и $S'(\mathbf{R}^n)$ редуцируется к слабой сходимости, а с учётом рефлексивности монтелевского пространства — и к слабой* сходимости.

§16.2 Структура сферически симметричных функций

В этом параграфе мы применим построения и результаты предыдущего параграфа для изучения сферической симметрии функций в скалярном и векторном случае.

16.2.1 Сферическая симметрия в скалярном случае. В этом пункте рассматривается скалярное представление Tsi_G группы $\mathrm{GL}\,(n,\mathbf{R})$ на локально выпуклом пространстве $U = U(\mathbf{R}^n)$ равном $U(\mathbf{R}^n) = D(\mathbf{R}^n)$ или $U(\mathbf{R}^n) = S(\mathbf{R}^n)$. Через $N = N(n) \subset \mathrm{GL}\,(n,\mathbf{R})$ мы обозначаем компактную топологическую подгруппу $N(n) \equiv SO(n,\mathbf{R})$ при $n \geq 2$ и $N(1) \equiv O(1,\mathbf{R})$. N-симметрические функции мы называем сферически симметричными.

Пусть $\mathbf{H} \equiv [0,\infty[$. Через $D(\mathbf{H})$ обозначаем векторное пространство, бесконечно дифференцируемых на $\mathbf{H}$ функций с компактным носителем, а через $S(\mathbf{H})$ — векторное пространство бесконечно дифференцируемых на $\mathbf{H}$ функций быстро убывающих в $+\infty$.

Нас интересует структура функций из $\amalg si(N(n))$, т. е. сферически симметричных основных функций. Для $\varphi \in \amalg si(N)$ верно

$$\forall G \in N \;\Big|\; \varphi(Gx) = \varphi(x). \tag{16.2.1}$$

Отсюда следует, что функция φ постоянна на любой сфере с центром в нуле и однозначно определяется своими значениями на оси x_1. Если $\varphi \in$ Πsi$(N(n))$, то $\varphi(x_1, 0, \ldots 0)$ есть четная бесконечно дифференцируемая на оси x_1 функция.

Утверждение 16.2.1 *Если функция $\psi \in C^{(\infty)}(\mathbf{R})$, четная, то функция $h(t) \equiv \psi(\sqrt{t})$ — бесконечно дифференцируемая на $\mathbf{H}$.*

Доказательства требует лишь бесконечная дифференцируемость функции $h(t)$ в точке $t = 0$, ибо при $t \geq 0$ мы имеем суперпозицию двух бесконечно дифференцируемых функций.

Производная непрерывной функции $g(t) \in C(\mathbf{H})$ в нуле справа равна

$$g'(0) = \lim_{t \to +0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \tag{16.2.2}$$

и если при $t > 0$ функция g бесконечно дифференцируема, то для существования производной $g'(0)$ по правилу Лопиталя достаточно существования предела

$$\lim_{t \to +0} g'(t), \tag{16.2.3}$$

т.е. непрерывность справа в нуле производной $g'(t)$, определенной при $t > 0$. Итак, достаточно доказать, что для функции $h(t)$ любая производная $h^{(k)}(t),\ k \in \mathbf{N}$, имеет предел справа в нуле.

У чётной функции $\psi(x)$ имеем $\psi(-x) = \psi(x)$ и $(-1)^i \psi^{(i)}(-x) = \psi^{(i)}(x),\ i \in \mathbf{N}_o$. В частности, $(-1)^i \psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(0)$, т.е. все нечетные производные $\psi^{(2x+1)}(0) = 0,\ k \in \mathbf{N}_o$. По формуле Тейлора [32, с. 394] порядка $2k + 2$ с центром в нуле

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\psi^{(2i)}(0)}{(2i)!} x^{2i} + \frac{x^{2k+2}}{(2k+1)!} \int_0^1 \psi^{(2k+2)}(\tau x)(1-\tau)^{2k+1}\, d\tau.$$

Отсюда при $t > 0$

$$h(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\psi^{(2i)}(0)}{(2i)!} t^{i} + \frac{t^{k+1}}{(2k+1)!} \int_0^1 \psi^{(2k+2)}(\tau \sqrt{t})(1-\tau)^{2k+1}\, d\tau.$$

Положим

$$p_k(t) \equiv \sum_{i=0}^{k} \frac{\psi^{(2i)}(0)}{(2i)!} t^{i},$$

$$r_k(t) \equiv \frac{t^{k+1}}{(2k+1)!} \int_0^1 \psi^{(2k+2)}(\tau \sqrt{t})(1-\tau)^{2k+1}\, d\tau.$$

Обе функции бесконечно дифференцируемы при $t > 0$. Чтобы доказать существование предела $\lim_{t \to +0} h^{(k)}(t),\ k \in \mathbf{N}$ достаточно доказать, что при $i \leq k$ верно

$$\lim_{t \to +0} r_k^{(i)}(t) = 0. \tag{16.2.4}$$

Но при каждом дифференцировании функции $r_k(t)$ по t степень общего множителя по t уменьшается не более чем на 1, поэтому верно (16.2.4). ♢

Итак, каждая функция $\psi \in \Pi si(N(n))$ единственным образом представима в виде

$$\varphi(x) = h(|x|^2), \tag{16.2.5}$$

где $h(t) \in D(\mathbf{H})$ при $U = D(\mathbf{R}^n)$ и $h(t) \in S(\mathbf{H})$ при $U = S(\mathbf{R}^n)$. При этом

$$h(t) = \varphi(\sqrt{t}, 0, \dots 0). \tag{16.2.6}$$

Введём на векторных пространствах $D(\mathbf{H})$ и $S(\mathbf{H})$ локально выпуклые топологии, аналогичные соответствующим топологиям на $D(\mathbf{R})$ и $S(\mathbf{R})$. А именно, на векторном подпространстве функций $\varphi \in D(\mathbf{H})$, равных нулю вне $[0, a]$, зададим счётное семейство норм

$$p_{a,k}(\varphi) \equiv \sup_{x \in [0,a]} \{|\varphi^{(k)}(x)|\}, \ k \in \mathbf{N}_o.$$

Получим пространство Фреше X_a. Топология на $D(\mathbf{H})$ есть топология индуктивного предела этого семейства подпространств $\{X_a\}_{a \in \mathbf{R}_+}$. Топология на $S(\mathbf{H})$ задаётся счетным семейством преднорм вида

$$q_{m,k}(\varphi) \equiv \sup_{x \in \mathbf{H}} \{|\varphi^{(k)}(x)|(1 + k^2)^{\frac{m}{2}}\}, \ m \in \mathbf{N}_o, \ k \in \mathbf{N}_o.$$

Локально выпуклое пространство $S(\mathbf{H})$ — пространство Фреше. Локально выпуклые пространства $D(\mathbf{H})$ и $S(\mathbf{H})$ — отделимые, полные, ультраборнологические, суслинские, бочечные.

Введём отображения $Js_n(h) = \varphi$ по формуле (16.2.5). Js_n будет задавать линейные непрерывные отображения $Js_n : D(\mathbf{H}) \to D(\mathbf{R}^n)$ и $Js_n : S(\mathbf{H}) \to S(\mathbf{R}^n)$. Далее локально выпуклое пространство $UO(\mathbf{H})$ есть $D(\mathbf{H})$ или $S(\mathbf{H})$. Справедливо следующее описание пространства сферически симметричных функций $\Pi si(N)$.

Теорема 16.2.1 *Отображение $Js_n : UO(\mathbf{H}) \to U(\mathbf{R}^n)$ есть линейный топологический изоморфизм $UO(\mathbf{H})$ на $\Pi si(N(n))$.*

Доказательство. Уже доказано, что каждая функция $\varphi(x) \in U(\mathbf{R}^n)$ единственным образом представима в виде (16.2.5). Тогда отображение $Js_n : UO(\mathbf{H}) \to U(\mathbf{R}^n)$ — линейная непрерывная биекция на $UO(\mathbf{H})$ на $\Pi si(N(n))$ — топологически дополняемое векторное подпространство в $U(\mathbf{R}^n)$. Тогда $\Pi si(N(n))$ как локально выпуклое пространство с наследственной топологией из $U(\mathbf{R}^n)$ ультраборнологично по следствию 16.1.2. Пространство $UO(\mathbf{H})$ — суслинское. Применимо следствие 16.1.1 и отображение Js_n — линейный топологический изоморфизм $UO(\mathbf{H})$ на $\Pi si(N(n))$. $\diamondsuit$

Следствие 16.2.1 *При любом $n \in \mathbf{N}$ топологически дополняемое линейное пространство $\Pi si(N(n)) \subset U(\mathbf{R}^n)$ линейно топологически изоморфно локально выпуклому пространству $UO(\mathbf{H})$.*

Итак, каждое локально выпуклое пространство $U(\mathbf{R}^n)$ есть прямая сумма двух топологически дополняемых векторных подпространств

$$U(\mathbf{R}^n) = \Pi si(N(n)) \oplus Ad(n), \tag{16.2.7}$$

где $Ad(n) \equiv \ker(\mathrm{Sym}_{N(n)})$ — ядро оператора симметризации. Следовательно [58, с. 138,139] сопряженное локально выпуклое пространство есть прямая сумма сопряженных локально выпуклых пространств

$$U'(\mathbf{R}^n) = \Pi si'(N(n)) \oplus Ad'(n). \tag{16.2.8}$$

При этом $\Pi si'(N(n)) = \Pi si^*(N(n)) = \mathrm{Sym}^*_{N(n)}(U'(\mathbf{R}^n))$. Но локально выпуклое пространство $\Pi si(N(n))$ линейно топологически изоморфно локально выпуклому пространству $UO(\mathbf{H})$.

Следствие 16.2.2 *При любом $n \in \mathbf{N}$ топологически дополняемое векторное пространство $\Pi si^*(N(n)) \subset U'(\mathbf{R}^n)$ сферически симметричных обобщённых функций линейно топологически изоморфно локально выпуклому пространству $UO'(\mathbf{H})$.*

Мы пришли к интуитивно ожидаемому выводу, что наличие сферической симметрии позволяет свести скалярную n-мерную обобщённую функцию к одномерной.

Локально выпуклое пространство $D(\mathbf{H})$ и $S(\mathbf{H})$ обладает одним важным отличием от соответствующих локально выпуклых пространств $D(\mathbf{R})$ и $S(\mathbf{R})$. Оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$ отображает локально выпуклое пространство $D(\mathbf{R})$ и $S(\mathbf{R})$ линейно и непрерывно на некоторые свои собственные векторные подпространства. В случае же локально выпуклых пространств $D(\mathbf{H})$ и $S(\mathbf{H})$ оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$ является линейным топологическим изоморфизмом пространства на себя, ибо обратный к нему линейный непрерывный оператор $I(\varphi)$ равен

$$I(\varphi)(t) = -\int_t^\infty \varphi(\tau)\, d\tau.$$

В самом деле

$$I(\varphi')(t) = -\int_t^\infty \varphi'(\tau)\, d\tau = \varphi(t).$$

16.2.2 Сферическая симметрия в векторном случае.

Пусть $N(n) \subset \mathrm{GL}\,(n, \mathbf{R})$ та же ортогональная подгруппа, что и в предыдущем пункте. Тогда для $G \in N(n)$ верно $G^{-1\top} = G$ и представления Tvi_G и $\widetilde{Tvi}_G$ группы $N(n)$ из п. 16.2.3 совпадают. Положим $U_n(\mathbf{R}^n) = (U(\mathbf{R}^n))^n$, т.е. $U_n(\mathbf{R}^n) = D_n(\mathbf{R}^n)$ или $U_n(\mathbf{R}^n) = S_n(\mathbf{R}^n)$. Векторные функции $\varphi \in \Pi vi(N(n)) \subset U_n(\mathbf{R}^n)$ будем называть сферически симметричными и обобщённые векторные функции $f \in \Pi vi^*(N(n)) \subset U_n(\mathbf{R}^n)$ также сферически симметричными.

Прежде чем описать пространство $\Pi vi(N(n))$ сформулируем вспомогательное утверждение.

Утверждение 16.2.2 *Если $\varphi \in C^{(\infty)}(\mathbf{H})$ и $\varphi(0) = 0$, то функция $\psi(t) \equiv \frac{\varphi(t)}{t}$ также из класса $C^{(\infty)}(\mathbf{H})$.*

Доказательство. Так как $\varphi(0) = 0$, то при $t > 0$

$$\varphi(t) = \int_0^t \varphi'(\tau)\, d\tau = t\int_0^1 \varphi'(t\tau)\, d\tau.$$

Отсюда справедливо представление при $t > 0$

$$\psi(t) = \int_0^1 \varphi'(t\tau)\, d\tau.$$

Требуется доказать лишь бесконечную дифференцируемость в точке $t = 0$ функции ψ, для чего в силу доказательства утверждения 16.2.1 достаточно проверить существование при всех $i \in \mathbf{N}_o$ пределов

$$\lim_{t \to +0} \psi^{(i)}(t) = \lim_{t \to +0} \int\limits_0^1 \varphi^{(i+1)}(t\tau)\tau^i \, d\tau = \frac{\varphi^{(i+1)}(0)}{i+1}.$$

$\diamondsuit$

Подпространство $\Pi vi(N(n)) \subset U_n(\mathbf{R}^n)$ допускает следующее описание.

Лемма 16.2.1 *Функция* $\varphi \in \Pi vi(N(n))$, $n \geq 3$ *иф она представима в виде*

$$\varphi(x) = xh(|x|^2), \tag{16.2.9}$$

где $h \in UO(\mathbf{H})$. *Функция* $\varphi \in \Pi vi(N(2))$ *иф она представима в виде*

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} h_1(|x|^2) + \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} h_2(|x|^2), \tag{16.2.10}$$

где $h_1 \in UO(\mathbf{H})$, $h_2 \in UO(\mathbf{H})$. *Представления (16.2.9,16.2.10) единственны.*

Доказательство. В случае $n \geq 3$ согласно следствию 4.8.1 для $\varphi \in \Pi vi(N(n))$ справедливо представление (16.2.9) с некоторым отображением $h : \mathbf{H} \to \mathbf{C}$. Тогда

$$h(|x|^2) = \frac{\langle x, \varphi|x| \rangle}{|x|^2}. \tag{16.2.11}$$

Скалярная функция $\langle x, \varphi(x) \rangle \in \Pi si(N(n))$, поэтому по теореме 16.2.1 существует функция $k \in UO(\mathbf{H})$, что

$$\langle x, \varphi(x) \rangle = k(|x|^2). \tag{16.2.12}$$

Из (16.2.12) следует, что $k(0) = 0$. Итак, $h(t) = \frac{k(t)}{t}$ при $t > 0$ и по утверждению 16.2.2 верно $h(t) \in UO(\mathbf{H})$. Случай $n \geq 3$ доказан.

В случае $n = 2$ в п. 4.9.3 мы получили представление (16.2.10) для функции $\varphi \in \Pi vi(N(2))$, однако, без условий гладкости функций $h_1(t)$ и $h_2(t)$ на $\mathbf{H}$. Но из (16.2.10) следует

$$h_1(|x|^2) = \frac{\langle x, E\varphi(x) \rangle}{|x|^2}, \; h_2(|x|^2) = -\frac{\langle x, Y\varphi(x) \rangle}{|x|^2}, \tag{16.2.13}$$

где $E \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Отсюда следует, что при $x \neq 0$ функции $h_1(|x|^2)$ и $h_2(|x|^2)$ бесконечно дифференцируемы. Осталось показать лишь бесконечную дифференцируемость функций $h_1(t)$ и $h_2(t)$ при $t = 0$.

Справедливы равенства

$$\forall G \in SO(2) \; \Big| \; \Big(GEG^\top = E\Big) \wedge \Big(GYG^\top = Y\Big),$$

поэтому скалярные функции $\langle x, E\varphi(x) \rangle$ и $\langle x, Y\varphi(x) \rangle$ из класса $\psi(N(2))$ и по теореме 16.2.1 существуют функции $k_1 \in UO(\mathbf{H})$ и $k_2 \in UO(\mathbf{H})$, что

$$k_1(|x|^2) = \langle x, E\varphi(x) \rangle, \quad k_2(|x|^2) = \langle x, Y\varphi(x) \rangle. \tag{16.2.14}$$

Причём из (16.2.14) следует, что $k_1(0) = 0$ и $k_2(0) = 0$. Из (16.2.13), (16.2.14) и уравнения (16.2.2) следует, что $h_1 \in UO(\mathbf{H})$ и $h_2 \in UO(\mathbf{H})$. $\diamondsuit$

Введём обозначение $UO_k(\mathbf{H}) \equiv (UO(\mathbf{H}))^k$, $k \in \mathbf{N}$. Введём при каждом натуральном $n > 2$ линейное непрерывное отображение $Jv_n : UO(\mathbf{H}) \to \text{Пv}i(N(n))$, а при $n = 2$ линейное непрерывное отображение $Jv_2 : UO_2(\mathbf{H}) \to \text{Пv}i(N(2))$ по формулам (16.2.9) и (16.2.10) соответственно. Из леммы 16.2.1 вытекает, что линейное непрерывное отображение Jv_n, $n \geq 2$ сюръективно и инъективно и поэтому по выводу 16.1.1 и следствию 16.1.1 является линейным топологическим изоморфизмом локально выпуклых пространств.

Теорема 16.2.2 *Отображение Jv_n, $n > 2$, есть линейный топологический изоморфизм локально выпуклого пространства $UO(\mathbf{H})$ на локально выпуклое пространство $\text{Пv}i(N(n))$, а отображение Jv_2 есть линейный топологический изоморфизм локально выпуклого пространства $UO_2(\mathbf{H})$ на локально выпуклое пространство $\text{Пv}i(N(2))$.*

Следствие 16.2.3 *Топологически дополняемое векторное пространство $\text{Пv}i^*(N(n)) \subset U'_n(\mathbf{R}^n)$ сферически симметричных векторных обобщённых функций линейно топологически изоморфно локально выпуклому пространству $UO'(\mathbf{H})$ при $n \geq 3$ и локально выпуклому пространству $UO'_2(\mathbf{H})$ при $n = 2$.*

Замечание 16.2.1 *Мы положили в определении сферической симметрии $N(n) = SO(n, \mathbf{R})$ при $n > 1$. Если во изменение положить $N(2) \equiv O(2, \mathbf{R})$, то в лемме 16.2.1 при $n = 2$ также будет верно представление (16.2.9) и в теореме 16.2.2 в случае $n = 2$ линейный топологический изоморфизм $Jv_2 : UO(\mathbf{H}) \to \text{Пv}i(N(2))$ будет иметь тот же вид, что и при $n > 2$.*

16.2.3 Сферическая симметрия в размерности $n = 3$.

При $n = 3$ пространство всех сферически симметричных основных векторфункций $\text{Пv}i(SO(3))$ состоит согласно теореме 16.2.2 из всех функций вида

$$\varphi(x) = xh(\langle x, x\rangle),$$

где $h(t) \subset UO(\mathbf{H})$. Поэтому $\varphi(x) = grad\,(\frac{1}{2}p(\langle x, x\rangle))$, где $p(t) \in UO(\mathbf{H})$ — первообразная функции $h(t)$, т.е. $p = (\frac{d}{dt})^{-1}h$. (Согласно п. 16.2.1 оператор $\frac{d}{dt} : UO(\mathbf{H}) \to UO(\mathbf{H})$ есть линейный топологический изоморфизм локально выпуклого пространства $UO(\mathbf{H})$ на себя.) Итак, всякое сферически симметричное векторное поле $\varphi \in U_3(\mathbf{R}^3)$ потенциально.

Для сферически симметричного обобщенного векторного поля $f \in \text{Пv}i^*(SO(3))$ и $\varphi \in \text{Пv}i(SO(3))$, согласно формуле (16.1.37)

$$(rot\, f, \varphi) = (f, rot\, \varphi) = 0. \tag{16.2.15}$$

Элемент $rot\, f \in U'_3(\mathbf{R}^3)$ также сферически симметричен по лемме 16.1.6 и согласно утверждению 16.1.2 из (16.2.15) следует, что $rot\, f = 0$.

Вывод 16.2.1 *Всякое сферически симметричное обобщенное векторное поле $f \in \text{Пv}i^*(SO(3))$ потенциально.*

Убедимся теперь, что нетривиальных соленоидальных сферически симметричных векторных полей не существует.

Лемма 16.2.2 *Следующие условия для* $f \in \text{Пvi}^*(SO(3))$ *эквивалентны:*
I. $f = 0$;
II. $\langle x, f(x)\rangle = 0$;
III. $div\, f = 0$.

Доказательство. Согласно лемме 16.1.5 элемент $div\, f \in U'(\mathbf{R}^3)$ также сферически симметричен. Поэтому по утверждению 16.1.2 условие III эквивалентно условию

$$\forall \varphi \in \text{Пsi}(SO(3)) \; \Big| \; (\, div\, f, \varphi). \tag{16.2.16}$$

Что по теореме 16.2.1 эквивалентно условию

$$\forall h \in UO(\mathbf{H}) \; \Big| \; (\, div\, f(x), h(\langle x, x\rangle)) = 0. \tag{16.2.17}$$

В силу равенства $div^* = -\,grad$ из п. 16.1.4 последнее условие эквивалентно условию

$$\forall h \in UO(\mathbf{H}) \; \Big| \; (f(x), xh'(\langle x, x\rangle)) = 0 \tag{16.2.18}$$

или условию

$$\forall h \in UO(\mathbf{H}) \; \Big| \; (\langle x, f(x)\rangle, h'(\langle x, x\rangle)) = 0. \tag{16.2.19}$$

Так как оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$ есть изоморфизм пространства $UO(\mathbf{H})$ на себя, то соотношение (16.2.19) эквивалентно соотношению

$$\forall h \in UO(\mathbf{H}) \; \Big| \; (\langle x, f(x)\rangle, h(\langle x, x\rangle)) = 0. \tag{16.2.20}$$

Когда элемент $h(t)$ пробегает все пространство $UO(\mathbf{H})$, функции $h(\langle x, x\rangle)$ пробегают все $\text{Пsi}(SO(3))$. Но обобщённая функция $\langle x, f(x)\rangle \in U'(\mathbf{R}^3)$ сферически симметрична. Поэтому условие (16.2.20) эквивалентно условию II. Доказана эквивалентность $II \Leftrightarrow III$.

Условие (16.2.20) эквивалентно условию

$$\forall h \in UO(\mathbf{H}) \; \Big| \; (f(x), xh(\langle x, x\rangle)) = 0. \tag{16.2.21}$$

Элемент $f \in \text{Пvi}^*(SO(3))$ и по теореме 16.2.2, когда h пробегает $UO(\mathbf{H})$ функция $xh(\langle x, x\rangle)$ пробегает все $\text{Пvi}(SO(3))$. Тогда по утверждению 16.1.2 утверждение (16.2.21) эквивалентно утверждению I. Итак, $I \Leftrightarrow II$. $\Diamond$

16.2.4 Сферическая симметрия в размерности $n = 2$.

В силу теоремы 16.2.2 топологически дополняемое векторное подпространство сферически симметричных основных векторных полей $\text{Пvi}(SO(2))$, рассматриваемое как локально выпуклое пространство с наследственной топологией из $U(\mathbf{R}^2)$ является прямой суммой двух топологически дополняемых линейных пространств

$$\text{Пvi}(SO(2)) = \text{Пvir}(SO(2)) \oplus \text{Пvia}(SO(2)),$$

где $\text{Пvir}(SO(2))$ состоит из векторных полей вида

$$\varphi(x) = xh(\langle x, x\rangle), \tag{16.2.22}$$

с $h \in UO(\mathbf{H})$, которые мы назовём *r-полями*, а $\text{Пvia}(SO(2))$ состоит из векторных полей вида

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} h(\langle x, x\rangle), \tag{16.2.23}$$

которые мы назовём *a-полями.* Так как топологически замкнутое векторное пространство $\Pi vi^*(SO(2)) \in U_2'(\mathbf{R}^2)$ сферически симметричных обобщённых векторных полей изоморфно сопряженному локально выпуклому пространству $(\Pi vi(SO(2)))'$ к локально выпуклому пространству $\Pi vi(SO(2))$, то оно есть прямая сумма

$$\Pi vi^*(SO(2)) = \Pi vir^*(SO(2)) \oplus \Pi via^*(SO(2)). \tag{16.2.24}$$

Здесь $\Pi vir^*(SO(2))$ есть топологически дополняемое векторное пространство в $U_2'(\mathbf{R}^2)$, состоящее из всех сферически симметричных функций, обращающихся в нуль на $\Pi via(SO(2))$, а $\Pi via^*(SO(2))$ — топологически дополняемое векторное пространство в $U_2'(\mathbf{R}^2)$, состоящее из всех сферически симметричных функционалов, обращающихся в нуль на $\Pi vir(SO(2))$. Элементы из $\Pi vir^*(SO(2))$ будем называть *обобщёнными r-полями*, а элементы из $\Pi via^*(SO(2))$ — *обобщёнными a-полями.*

По построению справедливо утверждение.

Утверждение 16.2.3 *Если функционал $f \in \Pi vir^*(SO(2))$ ($f \in \Pi via^*(SO(2))$) равен нулю на $\Pi vir(SO(2))$ ($\Pi via(SO(2))$), то он равен нулю на всем $U_2(\mathbf{R}^2)$.*

Итак, обобщенное r-поле (a-поле) однозначно определяется своим значением на всех основных r-полях (a-полях).

Лемма 16.2.3 *Для $f \in \Pi vi^*(SO(2))$ следующие утверждения эквивалентны между собой:*

$$I. \quad f \in \Pi vir^*(SO(2));$$

$$II. \quad -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0;$$

$$III. \quad -x_2 f_1 + x_1 f_2 = 0$$

и следующие условия эквивалентны между собой

$$IV. \quad f \in \Pi via^*(SO(2));$$

$$V. \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0;$$

$$VI. \quad x_1 f_1 + x_2 f_2 = 0.$$

Доказательство. Условие $f \in \Pi vi^*(SO(2))$ означает

$$\forall Q \in SO(2) \;\Big|\; f(Qx) = Qf(x). \tag{16.2.25}$$

Введём снова матрицу $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, для которой

$$\forall Q \in SO(2) \;\Big|\; QY = YQ. \tag{16.2.26}$$

Теперь заметим, что если $f \in \Pi vi^*(SO(2))$, то $Yf \in \Pi vi^*(SO(2)$, ибо при $Q \in SO(2)$

$$Yf(Qx) = YQf(x) = QYf(x).$$

Если $f \in \Pi\!vi^*(SO(2))$, то скалярная обобщённая функция $\langle x, f(x)\rangle \in \Pi\!si^*(SO(2))$, ибо при $Q \in SO(2)$

$$\langle Qx, f(Qx)\rangle = \langle Qx, Qf(x)\rangle = \langle x, f(x)\rangle.$$

Итак, скалярные функции $(-x_2 f_1 + x_1 f_2)$, $(x_1 f_1 + x_2 f_2)$, из $U'(\mathbf{R}^2)$ — сферически симметричны. По свойству оператора дивергенции из леммы 16.1.5 скалярные обобщённые функции $div\,(Y\,f) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ и $div\,f = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ также сферически симметричны.

Условие I для $f \in \Pi\!vi^*(SO(2))$ эквивалентно условно

$$\forall \varphi \in \Pi\!via(SO(2)) \;\Big|\; (f, \varphi) = 0. \tag{16.2.27}$$

В силу описания подпространства $\Pi\!via(SO(2))$ формулой (16.2.23) условие (16.2.27) эквивалентно условию

$$\forall h \in UO(\mathbf{H}) \;\Big|\; ((-x_2 f_1 + x_1 f_2), h(\langle x, x\rangle)) = 0. \tag{16.2.28}$$

Так как оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$ есть изоморфизм пространства $UO(\mathbf{H})$ на себя, то условие (16.2.28) эквивалентно условию

$$\forall h \in UO(\mathbf{H}) \;\Big|\; (\langle Yf, x\rangle, h'(\langle x, x\rangle)) = 0 \tag{16.2.29}$$

или условию

$$\forall p \in UO(\mathbf{H}) \;\Big|\; (Uf,\, grad\, p(\langle x, x\rangle) = 0. \tag{16.2.30}$$

Что в силу $grad^* = -\,div$ эквивалентно условию

$$\forall h \in UO(\mathbf{H}) \;\Big|\; (\,div\,(Yf), h(\langle x, x\rangle)) = 0. \tag{16.2.31}$$

Когда элемент h пробегает $UO(\mathbf{H})$ элемент $h(\langle x, x\rangle)$ пробегает все $\Pi\!si(SO(2))$ в силу теоремы 16.2.1. В силу сферической симметрии обобщённых функций $(-x_2 f_1 + x_1 f_2)$ и $div\,(Yf)$ по утверждению 16.1.2 тогда утверждение (16.2.28) эквивалентно утверждению III, а утверждение (16.2.31) — утверждению II. Получаем эквивалентности $I \Leftrightarrow II \Leftrightarrow III$.

Эквивалентности $IV \Leftrightarrow V \Leftrightarrow III$ доказываются аналогично. $\diamondsuit$

Замечание 16.2.2 *Непосредственно из определения r-поля и a-поля следуют свойства матрицы* $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$*:*

$$Y\Pi\!vir(SO(2)) = \Pi\!via(SO(2)), \quad Y\Pi\!via(SO(2)) = \Pi\!vir(SO(2)), \tag{16.2.32}$$

$$Y\Pi\!vi(SO(2)) = \Pi\!vi(SO(2))$$

и

$$Y\Pi\!vir^*(SO(2)) = \Pi\!via^*(SO(2)), \quad Y\Pi\!via^*(SO(2)) = \Pi\!vir^*(SO(2)), \tag{16.2.33}$$

$$Y\Pi\!vi^*(SO(2)) = \Pi\!vi^*(SO(2)).$$

Мы убедились, что каждое сферически симметричное обобщенное векторное поле единственным образом представимо в виде суммы r- и a-поля. r-поле — потенциально, a-поле — соленоидально.

§16.3 Вращательно симметричное векторное поле

Сохраняя терминологию и обозначения предыдущих двух параграфов, изучим в размерности $n = 3$ и скалярные и векторные обобщённые функции, симметричные относительно одномерной подгруппы вращений вокруг фиксированной оси.

16.3.1 Сведение вращательной симметрии в размерности $n = 3$ к сферической симметрии в размерности $n = 2$.

Пусть $N \subset SO(3)$ — одномерная подгруппа вращений вокруг фиксированной оси. Векторные поля из класса $\mathrm{Tvi}(N) \subset U_3(\mathbf{R}^3)$ и обобщённые векторные поля из класса $\mathrm{Tvi}^*(N) \subset U_3'(\mathbf{R}^3)$ назовём вращательно симметричными. Далее зафиксируем N как группу вращений вокруг оси x_3. Каждая матрица $G \in N$ имеет вид $G = G(Q) = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{Q} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $Q \in SO(2)$. Поэтому для $\varphi \in U_3(\mathbf{R}^3)$ преобразование $\psi = \ Tvi_{G(Q)}\varphi$ имеет вид согласно формуле (16.3.32)

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \varphi_1\left(Q^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, x_3\right) \\ \varphi_2\left(Q^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, x_3\right) \end{pmatrix}, \tag{16.3.1}$$

$$\psi_3(x) = \varphi\left(Q^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, x_3\right). \tag{16.3.2}$$

Т.е. вращательная симметрия основной функции $\varphi \in U_3(\mathbf{R}^3)$ означает, что при фиксированной переменной $x_3 \in \mathbf{R}$ 3-функция $\varphi(x_1, x_2, \dot{x}_3)$ от двух переменных такова, что векторное поле $\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, x_2, \dot{x}_3) \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dot{x}_3) \end{pmatrix} \in U_2(\mathbf{R}^2)$ сферически симметрично в размерности $n = 2$ и скалярное поле $\varphi_3(x_1, x_2, \dot{x}_3) \in U(\mathbf{R}^2)$ сферически симметрично в размерности $n = 2$. Таким образом, в пространстве основных функций вращательная симметрия в размерности $n = 3$ редуцируется к сферической симметрии в размерности $n = 2$.

Чтобы описать строение вращательно симметричных основных функций нам потребуется следующие обобщения утверждений 16.2.1 и 16.2.2.

Утверждение 16.3.1 *Пусть $\varphi \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^2)$ и для любой точки $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ верно $\varphi(-x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2)$ тогда функция*

$$h(t, z) \equiv \varphi(\sqrt{t}, z) \tag{16.3.3}$$

из класса $C^{(\infty)}(\mathbf{H} \times \mathbf{R})$.

Утверждение 16.3.2 *Если $\varphi \in C^{(\infty)}(\mathbf{H} \times \mathbf{R})$ и для всякого $z \in \mathbf{R}$ верно $\varphi(0, z) = 0$, то функция $\psi(t, z) \equiv \frac{\varphi(t,z)}{t}$ тоже из класса $C^{\infty}(\mathbf{H} \times \mathbf{R})$.*

Доказательство утверждения 16.3.1. Действуем по схеме доказательства утверждения 16.2.1. Требует доказательства лишь непрерывность и бесконечная дифференцируемость функции $h(t, z)$ при $t = 0$. Применим формулу Тейлора по переменной t с центром в точке $t = 0$ от аргумента $t > 0$

$$h(t, z) = \varphi(\sqrt{t}, z) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\varphi^{(2i,0)}(0, z)}{(2i)!} t^i + \frac{t^{k+1}}{(2k+1)!} \int_0^1 \varphi^{(2k+2,0)}(\tau\sqrt{t}, z)(1-\tau)^{2k+1} d\tau. \tag{16.3.4}$$

Отсюда при $k \in \mathbf{N}_o, s \in \mathbf{N}_o, t > 0$ имеем для частной производной

$$h^{(k,s)}(t,z) = \frac{\varphi^{(2k,s)}}{2k!}k! + \left(\frac{d}{dt}\right)^k \left(\frac{t^{k+1}}{(2k+1)!}\int\limits_0^1 \varphi^{(2k+2,s)}(\tau\sqrt{t},z)(1-\tau)^{2k+1}d\tau\right). \quad (16.3.5)$$

Из формулы (16.3.5) следует существование предела

$$\lim_{(t,z)\to(0,z_0)} h^{(k,s)}(t,z) = \frac{\varphi^{(2k,s)}(0,z_0)}{(2k)!}k!. \quad (16.3.6)$$

Итак, каждая функция $h^{(k,s)}(t,z),\ k \in \mathbf{N}_o,\ s \in \mathbf{N}_o$, непрерывна на $\mathbf{H} \times \mathbf{R}$.

Частная производная

$$\frac{\partial}{\partial z}h^{(k,s)}(0,z) = h^{(k,s+1)}(0,z) = \frac{\varphi^{(2k,s+1)}(0,z)}{(2k)!}k!$$

существует и непрерывна на $\{0\} \times \mathbf{R}$. Частная производная

$$\frac{\partial}{\partial t}h^{(k,s)}(t,z)\Big|_{(0,z)} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k+1}\left(\frac{t^{k+1}}{(2k+1)!}\int\limits_0^1 \varphi^{(2k+2,s)}(\tau\sqrt{t},z)(1-\tau)^{2k+1}d\tau\right)\Bigg|_{(0,z)} =$$

$$\frac{\varphi^{(2(k+1),s)}(0,z)}{(2(k+2))!}(k+1)! = h^{(k+1,s)}(0,z)$$

также существует и непрерывна на $\{0\} \times \mathbf{R}$. Итак, каждая функция $h^{(k,s)}(t,z)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbf{H} \times \mathbf{R}$. $\diamondsuit$

Доказательство утверждения 16.3.2 проводится по схеме доказательства утверждения 16.2.2. Достаточно доказать, что функция $\psi(t,z)$ непрерывна и имеет непрерывные производные при $t = 0$.

При $t > 0$ справедливо представление

$$\psi(t,z) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi^{(1,0)}(\tau,z)d\tau = \int\limits_0^1 \varphi^{(1,0)}(\tau t,z)d\tau.$$

Отсюда при любых $k \in \mathbf{N}_o, s \in \mathbf{N}_o, t > 0$ верно

$$\psi^{(k,s)}(t,z) = \int\limits_0^1 \varphi^{(k+1,s)}(\tau t,z)\tau^k d\tau \quad (16.3.7)$$

и существует предел

$$\lim_{(t,z)\to(0,z_0)} \psi^{(k,s)}(t,z) = \frac{\varphi^{(k+1,s)}(0,z_0)}{k+1}. \quad (16.3.8)$$

Функции $\psi^{(k,s)}(t,z)$, доопределенные при $t = 0$ с помощью (16.3.8), непрерывны на $\mathbf{H} \times \mathbf{R}$.

Частная производная

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi^{(k,s)}(t,z)|_{(0,z)} = \frac{\varphi^{(k+2,s)}(0,z)}{k+2} = \psi^{(k+1,s)}(0,z)$$

существует и непрерывна на $\mathbf{H} \times \mathbf{R}$. Частная производная

$$\frac{\partial}{\partial z}\psi^{(k,s)}(t,z)|_{(0,z)} = \frac{\varphi^{(k+1,s+1)}(0,z)}{k+1} = \psi^{(k+1,s+1)}(0,z)$$

также существует и непрерывна на $\{0\} \times \mathbf{R}$. $\diamondsuit$

Теперь мы можем дать следующее описание вращательно симметричного основного вектора поля.

Лемма 16.3.1 *Каждая функция* $\varphi \in \text{П}vi(N) \subset U_3(\mathbf{R}^3)$ *единственным образом представима в виде*

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} h_1(x_1^2+x_2^2, x_3^2) + \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} h_2(x_1^2+x_2^2, x_3) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} h_3(x_1^2+x_2^2, x_3), \quad (16.3.9)$$

где функции $h_\alpha \in C^{(\infty)}(\mathbf{H} \times \mathbf{R}),\ \alpha \in \overline{1,3}$.

Доказательство. Три скалярные функции

$$k_1(x_1,x_2,x_3) \equiv \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi(x) \right\rangle, \quad k_2(x_1,x_2,x_3) \equiv \left\langle \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi(x) \right\rangle, \qquad (16.3.10)$$

$$k_3(x_1,x_2,x_3) \equiv \varphi_3(x)$$

из класса $U(\mathbf{R}^3) \subset C^{(\infty)}(\mathbf{R}^3)$ и вращательно симметричны. Кроме того, по построению $k_1(0,0,x_3) = k_2(0,0,x_3) = 0$. В силу вращательной симметрии

$$\forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3\ \forall \alpha \in \overline{1,3}\ \Big|\ k_\alpha(x_1,x_2,x_3) = k_\alpha\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}, 0, x_3\right). \qquad (16.3.11)$$

Но функции $k_\alpha(x_1,0,x_3) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^2)$ четные по первой переменной и по утверждению 16.3.1 существуют функции $\psi_\alpha(t,z) \in C^{(\infty)}(\mathbf{H} \times \mathbf{R})$, что

$$k_\alpha\left(\sqrt{x_1^2, +x_2^2}, 0, x_3\right) = \psi_\alpha(x_1^2+x_2^2, x_3). \qquad (16.3.12)$$

Согласно (16.3.10-16.3.12) получаем

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\psi(x_1^2+x_2^2,x_3)}{x_1^2+x_2^2} + \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\psi_2(x_1^2+x_2^2,x_3)}{x_1^2+x_2^2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \psi_3(x_1^2+x_2^2, x_3).$$

По утверждению 16.3.2 функции

$$h_1(t,z) \equiv \frac{\psi_1(t,z)}{t},\ h_2(t,z) \equiv \frac{\psi(t,z)}{t},\ h_3(t,z) \equiv \psi_3(t,z)$$

из класса $C^{(\infty)}(\mathbf{H} \times \mathbf{R})$, что доказывает представление (16.3.9).

Единственность представления (16.3.9) следует из линейной независимости векторов $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ при $x_1^2+x_2^2 > 0$ и непрерывности функции h_1, h_2, h_3.
$\diamondsuit$

В пространстве обобщённых векторных полей $D_3'(\mathbf{R}^3)$ редукция вращательной симметрии в размерности $n = 3$ к сферической симметрии в размерности $n = 2$ проводится с помощью повторных функций.

Лемма 16.3.2 *Элемент $f \in D_3'(\mathbf{R}^3)$ вращательно симметричен иф для любой основной функции $\psi(x_3) \in D(\mathbf{R})$ повторная обобщённая функция $(f_3)_\psi \in D'(\mathbf{R}^2)$ сферически симметрична и повторная обобщённая функция $\begin{pmatrix} (f_1)_\psi \\ (f_2)_\psi \end{pmatrix} \in D_2'(\mathbf{R}^2)$ сферически симметрична.*

Доказательство. Рассмотрим действие функционала f на основные функции вида $\varphi(x_1, x_2)\psi(x_3)$, где $\varphi(x_1, x_2) \in D_3(\mathbf{R}^2), \psi(x_3) \in D(\mathbf{R})$. Если $f \in \text{П}vi^*(N)$, то для любого $Q \in SO(2)$ верно

$$(f_\psi, \varphi) = (f, \varphi\psi) = (\ Tvi_{G(Q)} f, \varphi\psi) = (f,\ Tvi_{G(Q)}\varphi\psi) \tag{16.3.13}$$

Но из формул (16.3.1), (16.3.2) для преобразования вращения следует, что

$$Tvi_{G(Q)}\varphi\psi = \psi \cdot \begin{pmatrix} Tvid_Q \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \\ Tsid_Q(\varphi_3) \end{pmatrix}, \tag{16.3.14}$$

где $Tvid_Q : D_2(\mathbf{R}^2) \to D_2(\mathbf{R}^2)$ — операторы векторного представления в размерности $n - 2$, а $Tsid_Q : D(\mathbf{R}^2) \to D(\mathbf{R}^2)$ — операторы скалярного представления Tsi_Q в размерности $n = 2$. Итак, если $f \in \text{П}vi^*(N)$, то

$$(f_\psi, \varphi) = \left(f_\psi, \begin{pmatrix} Tvi_Q \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \\ Tsi_Q\, \varphi_3 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}_\psi,\ Tvi_Q \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \right) + (f_{3\psi},\ Tsi_Q\, \varphi_3) =$$

$$\left(Tvi_Q^* \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}_\psi \right), \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \right) + \left(Tsi_Q^*(f_{3\psi}), \varphi_3 \right). \tag{16.3.15}$$

В силу произвольности элемента $\varphi \in D_3(\mathbf{R}^2)$ отсюда следуют равенства

$$\forall Q \in SO(2) \ \Big| \ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}_\psi = \ Tvi_Q^* \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}_\psi \right); \tag{16.3.16}$$

$$\forall Q \in SO(2) \ \Big| \ f_{3\psi} = \ Tvi_Q^*(f_{3\psi}). \tag{16.3.17}$$

Наоборот, пусть теперь для любого $\psi \in D(\mathbf{R})$ выполнены соотношения (16.3.16, 16.3.17). Тогда для любого элемента $\varphi \in D_3(\mathbf{R}^3)$

$$(f_\psi, \varphi) = \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}_\psi, \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \right) + (f_{3\psi}, \varphi_3) = \left(Tvi_Q^* \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}_\psi \right), \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \right) +$$

$$\left(Tsi_Q^*\,(f_{3\psi})\,, \varphi_3 \right) = \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},\ Tvi_{G(Q)}\varphi\psi \right) = \left(\left(\ Tvi_{G(Q)}^* f \right)_\psi, \varphi \right).$$

Отсюда в силу произвольности $\psi \in D(\mathbf{R})$ по утверждению 15.2.4 следует $f = Tvi_{G(Q)} f$ при любом $Q \in SO(2)$. $\diamondsuit$

16.3.2 p- и m-поля.

Векторное поле $\varphi \in \Pi vi(N) \subset U_3(\mathbf{R}^3)$ назовём *p-полем*, если выполнены условия

$$\varphi_3 = 0; \tag{16.3.18}$$

$$x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 = 0 \tag{16.3.19}$$

и *m-полем*, если выполнено условие

$$-x_2\varphi_2 + x_1\varphi_2 = 0. \tag{16.3.20}$$

Множество p-полей есть векторное подпространство $\Pi vip \subset \Pi vi(N)$. Множество m-полей есть векторное подпространство $\Pi vim \subset \Pi vi(N)$. Если условия (16.3.18,16.3.19, 16.3.20) выполняются одновременно, то $\varphi = 0$, т.е. пересечение $\Pi vip \cap \Pi vim = \{0\}$. Три линейные отображения $B_\alpha : U_3(\mathbf{R}^3) \to U(\mathbf{R}^3)$ вида

$$B_1(\varphi) \equiv \varphi_3;$$

$$B_2(\varphi) \equiv x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2;$$

$$B_3(\varphi) \equiv -x_2\varphi_1 + x_1\varphi_2$$

непрерывны, поэтому векторные подпространства Πvim, Πvip замкнуты в $\Pi vi(N)$.

Согласно лемме 16.3.1 каждое p-поле имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} h_2(x_1^2 + x_2^2, x_3) \tag{16.3.21}$$

где $h_2 \in C^{(\infty)}(\mathbf{H} \times \mathbf{R})$, а каждое m-поле — вид

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} h_1(x_1^2 + x_2^2, x_3) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} h_3(x_1^2 + x_2^2, x_3), \tag{16.3.22}$$

где $h_1, h_2 \in C^{(\infty)}(\mathbf{H} \times \mathbf{R}^3)$, и каждое вращательно симметрическое векторное поле единственным образом единственным образом представимо в виде суммы p- и m-полей. Итак, локально выпуклое пространство $\Pi vi(N)$ является векторной прямой суммой двух замкнутых векторных подпространств Πvip и Πvim, поэтому по лемме 16.1.1 оно является и топологической прямой суммой локально выпуклых пространств Πvip и Πvim

$$\Pi vi(N) = \Pi vip \oplus \Pi vim. \tag{16.3.23}$$

Так как топологически дополняемое векторное пространство $\Pi vi^*(N) \subset U_3'(\mathbf{R}^3)$ топологически изоморфно локально выпуклому пространству $\Pi vi'(N)$, сопряженному к локально выпуклому пространству $\Pi vi(N)$, то $\Pi vi^*(N)$ есть прямая топологическая сумма сопряженных подпространств

$$\Pi vi^*(N) = \Pi vip^* \oplus \Pi vim, \tag{16.3.24}$$

где $\Pi vip \subset \Pi vi^*(N)$ — векторное подпространство всех вращательно симметричных функционалов, обращающихся в нуль на, Πvim, а $\Pi vim^* \subset \Pi vi^*(N)$ — векторное пространство всех вращательно симметричных функционалов обращающихся в нуль на Πvip. Элементы из Πvip^* назовём обобщёнными p-полями, элементы из Πvim^* — обобщёнными m-полями. Итак, каждое вращательно симметричное обобщенное векторное поле однозначно представимо в виде суммы обобщенного p-поля и обобщенного m-поля. Аналогично утверждению 16.2.3 справедливо.

Утверждение 16.3.3 *Если обобщенное p-поле(m-поле) обращается в нуль на всех основных p-полях (m-полях), то оно равно нулю на всем* $U_3(\mathbf{R}^3)$.

Прежде чем получить результат аналогичный лемме 16.2.3 для описания p-полей и m-полей докажем следующее свойство их аппроксимации.

Лемма 16.3.3 *(Лемма о плотности) Линейные комбинации векторных полей вида*

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1,x_2) \\ \varphi_2(x_1,x_2) \\ 0 \end{pmatrix} \psi(x_3), \tag{16.3.25}$$

где $\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1,x_2) \\ \varphi_2(x_1,x_2) \end{pmatrix} \in D_2(\mathbf{R}^2)$ *есть a-поле,* $\psi \in D(\mathbf{R})$, *— всюду плотны в замкнутом векторном пространстве* $\Pi vip \subset D_3(\mathbf{R}^3)$. *Линейные комбинации векторных полей вида*

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1,x_2) \\ \varphi_2(x_1,x_2) \\ \varphi_3(x_1,x_2) \end{pmatrix} \psi(x_3), \tag{16.3.26}$$

где $\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1,x_2) \\ \varphi_2(x_1,x_2) \end{pmatrix} \in D_2(\mathbf{R}^2)$ *есть r-поле,* $\varphi_3 \in \Pi si(SO(2)) \subset D(\mathbf{R}^2), \psi \in D(\mathbf{R})$, *— всюду плотны в замкнутом векторном подпространстве* $\Pi vim \subset D_3(\mathbf{R}^3)$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Sym}_N : D_3(\mathbf{R}^3) \to D_3(\mathbf{R}^3)$ — оператор симметризации. Он линейно и непрерывно отображает $D_3(\mathbf{R}^3)$ на $\Pi vi(N) \subset D_3(\mathbf{R}^3)$. Так как линейные комбинации функций вида $\varphi(x_1,x_2)\psi(x_3)$, где $\varphi \in D_3(\mathbf{R}^2)$, $\psi \in D(\mathbf{R})$ всюду плотны в $D_3(\mathbf{R}^3)$ [24, с.54], то линейные комбинации их образов всюду плотны в $\Pi vi(N)$. Итак, линейные комбинации функций вида $\varphi\psi$, где $\varphi \in D_3(\mathbf{R}^2)$, $\psi \in D(\mathbf{R})$ и $\varphi_3 \in \Pi vi(SO(2)) \subset D(\mathbf{R}^2)$, $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in \Pi vi(SO(2)) \subset D_2(\mathbf{R}^2)$, всюду плотны в $\Pi vi(N) \subset D_3(\mathbf{R}^3)$.

Согласно представлению леммы 16.3.1 и формулам (16.3.21,16.3.22) разложение функции $\psi\varphi$ описанного в предыдущем предложении вида на p-поле и m-поле сводится к разложению векторного поля $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in \Pi vi(SO(2))$ на a-поле и r-поле. Так как проекторы $\Pi vi(N)$ на Πvip и Πvim непрерывны, то линейные комбинации полей вида (16.3.25), где $\psi \in D(\mathbf{R})$, $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in \Pi via \subset D_2(\mathbf{R}^2)$ всюду плотны в Πvip, а линейные комбинации полей вида (16.3.26), где $\psi \in D(\mathbf{R})$, $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in \Pi vir \subset D_2(\mathbf{R}^2)$, $\varphi_3 \in \psi(SO(2)) \subset D(\mathbf{R}^2)$ всюду плотны в Πvim. $\diamondsuit$

Перейдем к описанию характеристических свойств p- и m-полей.

Лемма 16.3.4 *Для* $f \in \Pi vi^*(N) \subset D_3'(\mathbf{R}^3)$ *следующие утверждения эквивалентны между собой:*

I. $f \in \Pi vim^*$;

II. Для любого $\psi \in D(\mathbf{R})$ *повторная функция* $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}_\psi \in \Pi vir^* \subset D_2'(\mathbf{R}^2)$;

III. $-\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$;
IV. $-x_2 f_1 + x_1 f_2 = 0$
и следующие утверждения эквивалентны между собой:
V. $f \in \Pi vip^*$;
VI. $f_3 = 0$ *и для любого* $\psi \in D(\mathbf{R})$ *повторная функция* $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}_\psi \in \Pi via^* \subset D_2'(\mathbf{R}^2)$;
VII. $\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0\right) \bigwedge (f_3 = 0)$;
VIII. $(x_1 f_2 + x_2 f_2 = 0) \bigwedge (f_3 = 0)$.

Доказательство. По определению $f \in \Pi vim^*$ есть m-поле, если для любого основного p-поля $\varphi \in \Pi vip$ верно $(f, \varphi) = 0$. Но в силу леммы 16.3.3 о плотности условие

$$\forall \varphi \in \Pi vip \;\Big|\; (f, \varphi) = 0$$

эквивалентно условию

$$\forall \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in \Pi via \subset D_2(\mathbf{R}^2) \; \forall \psi \in D(\mathbf{R}) \;\Big|\; \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \psi \right) = 0,$$

что эквивалентно условию

$$\forall \psi \in D(\mathbf{R}) \; \forall \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in \Pi via \subset D_2(\mathbf{R}^2) \;\Big|\; \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}_\psi, \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \right) = 0,$$

т.е. условию, что $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}_\psi \in \Pi vir^* \subset D_2'(\mathbf{R}^2)$. Мы доказали эквивалентность $I \Leftrightarrow II$.

Аналогично в силу леммы 16.3.3 о плотности утверждение V эквивалентно утверждению

$$\forall \psi \in D(\mathbf{R}) \;\; \forall \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in \Pi vir \subset D_2(\mathbf{R}^2) \;\; \forall \varphi_3 \in \Pi si(SO(2)) \subset D(\mathbf{R}^2) \;\Big|$$
$$\left(f_\psi, \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}_\psi, \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \right) + (f_{3\psi}, \varphi_3) = 0.$$

Что эквивалентно утверждению

$$\forall \psi \in D(\mathbf{R}) \;\; \forall \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in \Pi vir \;\; \forall \varphi_3 \in \Pi si(SO(2)) \;\Big| \tag{16.3.27}$$
$$\left(\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}_\psi, \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \right) = 0 \right) \bigwedge \Big((f_{3\psi}, \varphi_3) = 0 \Big).$$

Так как по лемме 16.3.2 из $f \in \Pi vi^*(N)$ следует, что повторные функции $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}_\psi \in D_2'(\mathbf{R}^2)$ и $f_{3\psi} \in D'(\mathbf{R}^2)$ сферически симметричны, то утверждение (16.3.27) эквивалентно утверждению

$$\forall \psi \in D(\mathbf{R}) \;\Big|\; \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}_\psi \in \Pi via^* \right) \bigwedge (f_{3\psi} = 0). \tag{16.3.28}$$

Что эквивалентно утверждению VI. Доказана эквивалентность $V \Leftrightarrow VI$.

В силу свойств операции перехода к повторной функции из п. 15.2.7 для любой основной функции $\psi(x_3) \in D(\mathbf{R})$ верны равенства

$$\left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_\psi = -\frac{\partial f_{1\psi}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{2\psi}}{\partial x_1},$$

$$(-x_2 f_1 + x_1 f_2)_\psi = x_2 f_{1\psi} + x_1 f_{2\psi}.$$

Эквивалентность утверждений II, III, IV следует из леммы 16.2.3.

Аналогично эквивалентность утверждений $VI, VII, VIII$ следует из леммы 16.2.3 и свойств операции перехода к повторной функции п. 15.2.7.

Следствие 16.3.1 *Любое обобщенное p-поле соленоидально.*

Из леммы 16.1.6 следует, что вращательная симметрия сохраняется при взятии ротора, т.е. справедливы включения

$$rot\,(\Pi\!\!l vi(N)) \subset \Pi\!\!l vi(N),\ rot\,(\Pi\!\!l vi^*(N)) \subset \Pi\!\!l vi^*(N). \tag{16.3.29}$$

Однако справедливо и более точное утверждение.

Лемма 16.3.5 *Справедливы включения*

$$rot\,(\Pi\!\!l vip) \subset \Pi\!\!l vim; \tag{16.3.30}$$

$$rot\,(\Pi\!\!l vim) \subset \Pi\!\!l vip; \tag{16.3.31}$$

$$rot\,(\Pi\!\!l vip^*) \subset \Pi\!\!l vim^*; \tag{16.3.32}$$

$$rot\,(\Pi\!\!l vim^*) \subset \Pi\!\!l vip^*. \tag{16.3.33}$$

Доказательство. Из леммы 16.3.1 и представлений (16.3.21) и(16.3.22) следует, что в цилиндрических координатах (ρ, φ, z) с ортами $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ локальной цилиндрической системы координат основное p-поле g имеет вид

$$g = \vec{e}_\varphi \Phi(\rho, z),$$

где $\Phi(\rho, z) \equiv \rho h_2(\rho^2, z)$ и $h_2 \in C^{(\infty)}(\mathbf{H} \times \mathbf{R})$, а основное m-поле g имеет вид

$$g = \vec{e}_\rho P(\rho, z) + \vec{e}_z Z(\rho, z),$$

где $P(\rho, z) = \rho h_1(\rho^2, z), Z(\rho, z) = h_3(\rho^2, z)$ и $h_1, h_3 \in C^{(\infty)}(\mathbf{H} \times \mathbf{R})$. Поэтому в цилиндрических координатах ротор p-поля равен

$$rot\,(\vec{e}_\varphi \Phi(\rho, z)) = -\frac{\partial \Phi(\rho, z)}{\partial z}\vec{e}_\rho + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \Phi(\rho, z)\right)\right)\vec{e}_z,$$

т.е. m-поле. А ротор m-поля равен

$$rot\,(\vec{e}_\rho P(\rho, z) + \vec{e}_z Z(\rho, z)) = \left(\frac{\partial P(\rho, z)}{\partial z} - \frac{\partial Z(\rho, z)}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\varphi,$$

т.е. p-поле. Доказаны включения (16.3.30, 16.3.31).

Если теперь $f \in \ \Pi vip^*$, то по условию

$$\forall g \in \ \Pi vim \ \Big| \ (f, q) = 0.$$

Тогда для $g \in \ \Pi vim$

$$(\, rot\, f, g) = (f, \, rot\, g) = 0,$$

ибо $rot\, g \in \ \Pi vim$ по (16.3.30). Итак, $rot\, f \in \ \Pi vim^*$. Аналогично из включения (16.3.31) следует включение (16.3.33). $\diamondsuit$

Свойства быть p-полем и m-полем сохраняются при взятии трансформации Фурье.

Лемма 16.3.6 *Лемма 6. Если $f \in S_3'(\mathbf{R}^3)$ есть p-поле (m-поле), то образ Фурье $\hat{f} \in S_3'(\mathbf{R}^3)$ также p-поле (m-поле).*

Доказательство. Пусть поле $f \in S_3'(\mathbf{R}^3)$ вращательно симметрично, тогда согласно п. 15.1.5 и поле $\hat{f} \in S_3'(\mathbf{R}^3)$ также вращательно симметрично. Итак, к полям f и $\hat{f}$ применима лемма 16.3.4.

Если есть p-поле, то выполнены утверждения VII и $VIII$ леммы 16.3.4, что в образах Фурье эквивалентно утверждениям

$$\Big(\hat{f}_3 = 0\Big) \bigwedge \Big(\eta_1 \hat{f}_1 + \eta_2 \hat{f}_2 = 0\Big) \tag{16.3.34}$$

и

$$\Big(\hat{f}_3 = 0\Big) \bigwedge \left(\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial \eta_2} = 0\right) \tag{16.3.35}$$

соответственно. Но снова по лемме 16.3.4 утверждения (16.3.34),(16.3.35) влекут что $\hat{f}$ — p-поле.

Аналогично, если есть m-поле, то выполнены утверждения III, IV леммы 16.3.3, эквивалентные в образах Фурье утверждениям

$$-\eta_2 \hat{f}_1 + \eta_1 \hat{f}_2 = 0 \tag{16.3.36}$$

и

$$-\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \eta_2} + \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial \eta_1} = 0 \tag{16.3.37}$$

соответственно. Что по лемме 16.3.4 влечет, что $\hat{f}$ — m-поле. $\diamondsuit$

16.3.3 Регулярные вращательно симметричные поля.

Рассмотрим цилиндрическую систему координат (ρ, φ, z) в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$. Каждый из трёх ортов локального базиса

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}(x_1, x_2, 0) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0); \\ \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}(-x_2, x_1, 0) = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0); \\ \vec{e}_3 = (0, 0, 1) \end{cases} \tag{16.3.38}$$

задаёт вращательно симметричное регулярное векторное поле из $S_3'(\mathbf{R}^3)$. Если $\mathrm{Lin} \equiv \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3) \ | \ (x_1 = 0) \bigwedge (x_2 = 0)\}$ ось $x_3 = z$, то сужение полей $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ на множество $\Big(\mathbf{R}^3 \setminus \mathrm{Lin}\Big)$ из класса $C_3^{(\infty)}\Big(\mathbf{R}^3 \setminus \mathrm{Lin}\Big)$.

Если $\hat{f} \in D_3'(\mathbf{R}^3)$ — регулярное вращательно симметричное векторное поле, то скалярная функция

$$\langle \vec{f}(\vec{x}), \vec{e_\alpha}(\vec{x}) \rangle \equiv b_\alpha(\vec{x}), \ \alpha \in \overline{1,3} \tag{16.3.39}$$

вращательно симметрична. При этом

$$|\vec{f}(\vec{x})| = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3} |b_\alpha(\vec{x})|^2},$$

поэтому функция $\vec{f}(\vec{x})$ локально суммируема на $\mathbf{R}^3$ иф каждая функция $b_\alpha(\vec{x})$ локально суммируема на $\mathbf{R}^3$. Итак, вектор-функция $\vec{f}(\vec{x})$ регулярна иф каждая функция $b_\alpha(\vec{x})$, $\alpha \in \overline{1,3}$ регулярна.

Так как функция $b_\alpha(\vec{x})$ вращательно симметрична, то $b_\alpha = \mathrm{Sym}_N\, b_\alpha$, где $\mathrm{Sym}_N : D_3'(\mathbf{R}^3) \to D_3'(\mathbf{R}^3)$ оператор симметризации. Но оператор Sym_N для регулярной обобщённой функции b_α есть оператор усреднения по окружностям $z = Const$ и $\rho = Const$. Итак, существуют измеримые функции a_α на множестве $\Pi \equiv \mathbf{H} \times \mathbf{R}$, что

$$b_\alpha(\vec{x}) = a_\alpha\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_3\right) = a_\alpha(\rho, z). \tag{16.3.40}$$

Локальная суммируемость функции $b_\alpha(\vec{x})$ на $\mathbf{R}^3$ эквивалентна локальной суммируемости функции $\rho a_\alpha(\rho, z)$ на Π.

Вывод 16.3.1 *Каждое регулярное вращательно симметричное векторное поле $\vec{f} \in D_3'(\mathbf{R}^3)$ однозначно представимо в виде*

$$\vec{f}(\vec{x}) = \sum_{\alpha=1}^{3} a_\alpha(\rho, z) \vec{e}_\alpha(\rho, \varphi, z), \tag{16.3.41}$$

где функции $a_\alpha(\rho, z)$ определены формулами (16.3.39, 16.3.40), причём функции $\rho a_\alpha(\rho, z)$, $\alpha \in \overline{1,3}$ локально суммируемы на Π. Наоборот, любые три функции $a_\alpha(\rho, z)$, $\alpha \in \overline{1,3}$ такие, что функции $\rho a_\alpha(\rho, z)$, $\alpha \in \overline{1,3}$ локально суммируемы на Π, задают по формуле (16.3.41) регулярное вращательно симметричное поле на $\mathbf{R}^3$. При этом поле

$$\vec{g}(\vec{x}) \equiv a_2(\rho, z) \vec{e}_2(\rho, \varphi, z) \tag{16.3.42}$$

есть р-поле, а поле

$$\vec{v}(\vec{x}) \equiv a_1(\rho, z) \vec{e}_1(\rho, \varphi, z) + a_3(\rho, z) \vec{e}_3(\rho, \varphi, z) \tag{16.3.43}$$

— т-поле, т.е. формула (16.3.41) задаёт разложение регулярного вращательно симметричного поля на регулярное р-поле и регулярное т-поле.

16.3.4 Вращательно симметричное распределение плотности тока квазикиперной покоящейся доброй частицы.

Плотность тока квазикиперной покоящейся доброй частицы $\overrightarrow{jf} \in BT_3(\mathbf{R}^3)$. Пусть рассматриваемая частица вращательно симметрична вокруг оси $x_3 = z$. Тогда векторное поле $\overrightarrow{jf} \in BT_3(\mathbf{R}^3)$ вращательно симметрично и его образ Фурье $\widehat{\overrightarrow{jf}} \in \bar{C}_{0,3}(\mathbf{R}^3)$ также вращательно симметричное векторное поле. Регулярное векторное поле

$$\widehat{\overrightarrow{uf}}(\vec{\eta}) = -\frac{\widehat{\overrightarrow{jf}}(\vec{\eta})}{|\vec{\eta}|^2}$$

также вращательно симметрично и функция состояния $\overrightarrow{uf} \in \bar{C}^{(1)}_{0,3}(\mathbf{R}^3) \bigcap W^{(1)}_{2,3}(\mathbf{R}^3)$ также вращательно симметрична. По лемме 16.1.6 спиновая функция $\overrightarrow{sf}(\vec{x}) = -\,rot\,\overrightarrow{uf}(\vec{x})$ есть тогда вращательно симметричное поле класса $\bar{C}_{0,3}(\mathbf{R}^3) \bigcap L_{2.3}(\mathbf{R}^3)$. Так как векторное поле $\overrightarrow{sf}(\vec{x})$ непрерывно и вращательно симметрично, то согласно выводу 16.3.1 справедливо разложение $\overrightarrow{sf}(\vec{x})$ на сумму регулярного p-поля $\overrightarrow{sf}_p(\vec{x})$ и регулярного m-поля $\overrightarrow{sf}_m(\vec{x})$

$$\overrightarrow{sf}(\vec{x}) = \overrightarrow{sf}_p(\vec{x}) + \overrightarrow{sf}_m(\vec{x}).$$

Тогда

$$\overrightarrow{jf}(\vec{x}) = \,rot\,\overrightarrow{sf}(\vec{x}) = \,rot\,(\overrightarrow{sf}_p(\vec{x})) + \,rot\,(\overrightarrow{sf}_m(\vec{x})).$$

Согласно лемме 16.3.5 $\,rot\,\overrightarrow{sf}_p$ — m-поле, а $\,rot\,\overrightarrow{sf}_m$ — p-поле. Но регулярное вращательно симметричное поле $\overrightarrow{jf}$ согласно выводу 16.3.1 однозначно представимо в виде регулярного p-поля и регулярного m-поля. Итак,

$$\overrightarrow{jf} = a_1(\rho, z)\vec{e}_\varphi + \,rot\,(a_2(\rho, z)\vec{e}_\varphi), \tag{16.3.44}$$

где

$$a_1 = \langle \overrightarrow{jf}, \vec{e}_\varphi \rangle, \tag{16.3.45}$$

$$a_2 = \langle \overrightarrow{sf}, \vec{e}_\varphi \rangle \tag{16.3.46}$$

а $\vec{e}_\varphi \equiv \vec{e}_2$ в формуле (16.3.38).

Мы получили, что для покоящейся квазикиперной доброй частицы 3-функция тока $\overrightarrow{jf}$ представима с помощью двух вращательно симметричных регулярных p-полей формулой (16.3.44), т.е. задаётся двумя произвольными функциями двух переменных $a_1(\rho, z), a_2(\rho, z)$, определенными на множестве Π.

16.3.5 Трансформация Фурье p-поля.

Пусть $\overrightarrow{jf} \in BT_3(\mathbf{R}^3)$ есть p-поле, тогда согласно п. 16.3.3 оно задаётся одной функцией двух переменных $\,jir\,(\rho, z)$ определенной на $\Pi \equiv \mathbf{H} \times \mathbf{R}$ и такой, что функция $\rho\,jir\,(\rho, z)$ суммируема на Π

$$\overrightarrow{jf}(\vec{x}) = \,jir\,(\rho, z)\vec{e}_\varphi, \tag{16.3.47}$$

где $\vec{e}_\varphi \equiv \vec{e}_2$ из формулы (16.3.38). Тогда трансформация Фурье $\widehat{\overrightarrow{jf}}(\vec{\eta})$ также p-поле и в цилиндрических координатах (r, ψ, ζ) задаётся формулой

$$\widehat{\overrightarrow{jf}}(\vec{\eta}) = \,jor\,(r, \zeta)\vec{e}_\psi \tag{16.3.48}$$

где функция $\,jor\,(r, \zeta)$ определена на Π, а $\vec{e}_\psi \equiv (-\sin\psi, \cos\psi, 0)$.

Выразим функцию $\,jor\,(r, \zeta)$ через функцию $\,jir\,(\rho, z)$. По определению

$$\widehat{\overrightarrow{jf}}(\vec{\eta}) = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \overrightarrow{jf}(\vec{x}) \exp\left(i\langle \vec{x}, \vec{\eta}\rangle\right)\, dx_1 dx_2 dx_3.$$

Согласно (16.3.47, 16.3.48) тогда

$$\,jor\,(r, \zeta) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \,jir\,(\rho, z) \exp\left(i\left(\rho r \cos(\varphi - \psi) + z\zeta\right)\right) \langle \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\psi \rangle \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \tag{16.3.49}$$

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \rho\, jir\,(\rho,z)\exp(iz\zeta)\left(\int\limits_0^{2\pi} \exp\left(i\rho r\cos(\varphi-\psi)\right)\cos(\varphi-\psi)\,d\varphi\right)\,d\rho\,dz =$$

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \rho\, jir\,(\rho,z)\exp(iz\zeta)\left(\int\limits_0^{2\pi} \exp(i\rho r\cos\varphi)\cos\varphi\,d\varphi\right)\,d\rho\,dz.$$

Рассмотрим интеграл, зависящий от параметра $\lambda \geq 0$

$$J(\lambda) \equiv \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\exp(i\lambda\cos\varphi)\,d\varphi = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-2\pi} \sin\theta\exp(i\lambda\sin\theta)\,d\theta = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin\theta\exp(i\lambda\sin\theta)\,d\theta =$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin\theta(\cos(\lambda\sin\theta) + i\sin(\lambda\sin\theta))\,d\theta = 2i\int\limits_0^{\pi} \sin\theta\sin(\lambda\sin\theta)\,d\theta. \qquad (16.3.50)$$

Согласно интегральным представлениям функций Бесселя [29, формула 8.411.3] получаем $J(\lambda) = 2\pi i J_1(\lambda)$. Возвращаясь к формуле (16.3.49), получаем

$$jor\,(r,\zeta) = 2\pi i\int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty jir\,(\rho,z)\rho J_1(\rho r)\exp(iz\zeta)\,d\rho dz. \qquad (16.3.51)$$

Итак, функция $jor\,(r,\zeta)$ равна умноженной на $2\pi i$ трансформации Фурье функции $jir\,(\rho,z)$ по переменной z и трансформации Ханкеля с $\nu = 1$ по переменной ρ.

Глава 17

Статическое электромагнитное поле

Первая ступень изучения взаимодействий — изучение взаимодействий частиц со статическими полями — электростатическим и магнитостатическим. Чтобы описать главные взаимодействия досветовых, световых и сверхсветовых частиц мы ввели ранее 6 элементарных влавинов: власкайл, владип, влаквазикипер, власарм, власнюр, вламар. В § 17.1 собраны в виде таблицы 17.1.1 основные сведения об этих влавинах.

В § 17.2 излагается теория электростатического поля и взаимодействия частиц с ним. Главный результат — взаимодействие агвида с электростатическим полем носит локальный характер. Показано, что релятивистская модель удовлетворительно описывает взаимодействие частицы с электромагнитным полем при любых скоростях частицы. Обсуждена допустимость таких идеализаций как заряды, распределённые на поверхности и на линии. Показано, что введение зарядов, распределённых на линии, приводит к бесконечной энергии, а введение зарядов, распределённых на поверхности, приводит к конечным значениям энергии электростатического поля.

В § 17.3 рассматривается магнитостатическое поле и взаимодействие частицы с магнитостатическим полем. Показано, что в отличие от случая электростатического поля взаимодействие частицы с магнитостатическим полем не носит локального характера. Поэтому релятивистские формулы описывают это взаимодействие с относительной ошибкой порядка квадрата скорости света и применимы лишь при малых скоростях.

В связи с неудовлетворительностью релятивистской модели §§ 17.1–17.7 посвящены более детальному изучению взаимодействий агвидов с магнитостатическим полем. В § 17.4 мы показываем, что спин равен половине магнитного момента и даём новые формулы вычисления спина. Для получения более простых моделей магнитостатических полей мы в § 17.5 выводим формулу для взаимодействия двумерного магнитостатического поля с частицей. В частности, доказано, что магнитное поле внутри любой замкнутой цилиндрической полости, обтекаемой кольцевым током постоянной плотности, постоянно и однородно внутри цилиндра и имеет нулевую напряжённость вне цилиндра. Поэтому для изучения взаимодействия с однородным магнитным полем мы в § 17.6 вычисляем функционал взаимодействия влавина с соленоидом. Как следствия получаем потенциалы взаимодействия движущегося заряда с однородным магнитным полем и движущегося спина с однородным магнитным полем.

В § 17.7 изучаются взаимодействия световых и сверхсветовых частиц с магнитостатическим полем. В частности, устанавливается, что скалярная сверхсветовая частица взаимодействует с магнитостатическим полем лишь в области локализации токов.

§17.1 Таблица элементарных влавинов

Согласно § 13.5 для аппроксимации функционала взаимодействия агвида с внешним полем мы аппроксимируем агвид аппроксимирующим влавином. Далее аппроксимирующий влавин записываем в виде суммы элементарных влавинов и вычисляем взаимодействие элементарных влавинов с внешним полем. Если внешнее поле задаётся системой агвидов, то мы аппроксимируем каждый агвид своим аппроксимирующим влавином также. Таким образом задача построения аппроксимации функционала взаимодействия сводится к вычислению функционала взаимодействия элементарного влавина с внешним полем или с другим элементарным влавином.

Мы ввели в предыдущем изложении 6 специальных элементарных влавина. В § 13.4 три досветовых элементарных влавина: власкайл, владип, и влаквазикипер, — позволяющие аппроксимировать досветовую натуральную частицу влавином первого порядка, составленным как сумма трёх перечисленных влавинов. В § 14.7 мы ввели элементарный световой влавин власарм и показали, что любая световая натуральная частица имеет мейн не менее 1 и аппроксимируется владипом как аппроксимирующим влавином первого порядка. В § 14.8 мы установили, что сверхсветовая натуральная частица конечной энергии имеет мейн не менее 2 и Её аппроксимирующий влавин второго порядка есть сумма двух специальных элементарных влавинов: вланюра и влавмара. Таким образом с помощью введенных 6 элементарных влавинов мы можем аппроксимировать в общем случае главные взаимодействия любых частиц, а для досветовых частиц и главные взаимодействия нейтральных частиц, обладающих дипольным моментом или спином.

Для дальнейшего использования соберем свойства 6 введенных специальных элементарных влавинов в следующую таблицу 17.1.1.

Таблица 17.1.1: Таблица специальных элементарных влавинов.

	1	2	3	4	5	6	7
власкайл	$<$	0	с	заряд	$e \in \mathbf{R}$	$\tilde{e} = e$	$\widehat{jsf}_0(\vec{\eta}) = e$
владип	$<$	1	с	дип. момент	$\vec{d} \in \mathbf{R}^3$	$\tilde{\vec{d}} = R^{-1}\vec{d}$	$\widehat{jsf}_0(\vec{\eta}) = i\langle \vec{d}, \vec{\eta}\rangle$
влаквазикипер	$<$	1	к	спин	$\vec{S} \in \mathbf{R}^3$	$\tilde{\vec{S}} = \frac{1}{(\det R)^2} R^\top \vec{S}$	$\widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta}) = i[\vec{S}, \vec{\eta}]$
власарм	$=$	1	с	дип. момент	* $\vec{d} \in \mathbf{R}^3$, $\langle \vec{d}, \vec{l}\rangle = 0$	$\tilde{\vec{d}} = R^{-1}\vec{d}$	$\widehat{jsf}_0(\vec{\eta}) = i\langle \vec{d}, \vec{\eta}\rangle$
вланюр	$>$	2	с	сквадр	$c \in \mathbf{R}$	$\tilde{c} = c$	$\widehat{jsf}_0(\vec{\eta}) = -c\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta})$
вламар	$>$	2	к	веквин	$\vec{h} \in \mathbf{R}^3$	$\tilde{\vec{h}} = \frac{1}{(\det R)} R^{-1}\vec{h}$	$\widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta}) = -[\,\mathrm{Sw}\,(\vec{h})\,\mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\eta}, \vec{\eta}]$

Столбцы таблицы 17.1.1 имеют следующий смысл.

1. Скорость влавина по отношению к скорости света: $<$ — досветовой, $=$ — световой, $>$ — сверхсветовой.

2. Мейн влавина.

3. Скалярный — "с"или киперный — "к"влавин.

4. Название переносимой характеристики, т.е. той при равенстве нулю которой влавин становится нулевым.

5. Обозначение переносимой характеристики. Указывается является она числом или трехмерным вектором. Звездочка у власарма означает, что в отличие от остальных пяти влавинов, у которых число свободных числовых параметров в переносимой характеристике равно 1 и 3 в зависимости от скалярности или векторности переносимой характеристики у дипольного момента власарма лишь 2 свободных числовых параметра в силу условия $\langle \vec{d}, \vec{l}\rangle = 0$, где $\vec{l}$ — вектор скорости власарма.

6. Формулы преобразования переносимой характеристики при изменении состояния частицы. Предполагается, что $\det R > 0$, т.е. речь идет об изменении состояния одной и той же частицы.

7. Указаны трансформации Фурье функции псевдотока. Причём для скалярных влавинов указывается функция $\widehat{jsf}_0(\vec{\eta})$, через которую трансформация Фурье функции тока выражается формулой

$$\widehat{jf}(\vec{\eta}) = \widehat{jsf}_0(\vec{\eta}) l, \qquad (17.1.1)$$

$l \in \mathbf{R}^4$ — 4-вектор скорости, а для квазикиперных влавинов указывается функция $\widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta})$, через которую трансформация Фурье функции тока выражается формулой (13.2.71), т.е.

$$\widehat{jf}(\vec{\eta}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta}) \end{pmatrix} + l \frac{\langle \vec{l}, \widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta})\rangle}{1 - |\vec{l}|^2}. \qquad (17.1.2)$$

§17.2 Электростатическое поле

Поле покоящегося обобщенного лоренцева агвида будем называть *статическим*. Скалярного агвида — *электростатическим*, квазикиперного — *магнитостатическим*. В этом параграфе мы рассмотрим величину энергии покоящегося лоренцева скалярного агвида и взаимодействие покоящегося лоренцева скалярного агвида с лоренцевым агвидом.

17.2.1 Функционал взаимодействия покоящейся натуральной частицы с натуральной частицей.

Рассмотрим две натуральных частицы, первая из которых покоится, т.е. вектор скорости $\vec{l'} = 0$. Согласно формуле (13.4.23) тогда трансформация Фурье функционала взаимодействия равна

$$\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta}) = \frac{1}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l''},\vec{\eta})}\left\langle \widehat{jf}'(\vec{\eta}), \Theta\widehat{jf}''(-\vec{\eta})\right\rangle - \frac{\left\langle \vec{l''},\vec{\eta}\right\rangle^2}{\vec{\eta}^2\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l''},\vec{\eta})}\widehat{jf}'_)(\vec{\eta})\widehat{jf}''_0(-\vec{\eta}) = \tag{17.2.1}$$

$$\frac{\widehat{jf}'_)(\vec{\eta})\widehat{jf}''_0(-\vec{\eta})}{\vec{\eta}^2} - \frac{\left\langle \widehat{\vec{jf}}'(\vec{\eta}), \widehat{\vec{jf}}''(-\vec{\eta})\right\rangle}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l''},\vec{\eta})},$$

причём функция $\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta})$ аргумента $\vec{\eta} \in \mathbf{R}^3$ суммируема на $\mathbf{R}^3$.

В частном случае, когда покоящаяся частица скалярна, получаем

$$\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta}) = \frac{\widehat{jf}'_0(\vec{\eta})\widehat{jf}''_0(-\vec{\eta})}{(\vec{\eta})^2}, \tag{17.2.2}$$

а в частном случае, когда квазикиперная —

$$\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta}) = -\frac{\left\langle \widehat{\vec{jf}}'(\vec{\eta}), \widehat{\vec{jf}}''(-\vec{\eta})\right\rangle}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l'},\vec{\eta})}. \tag{17.2.3}$$

Формулы (17.2.2) и (17.2.3) описывают взаимодействие агвида с электростатическим и магнитостатическим полями.

17.2.2 Энергия и масса электростатического поля.

Рассмотрим покоящуюся скалярную натуральную кулоновскую частицу. Так как ее скорость $\vec{l} = 0$, то по условию скалярности $\vec{u} = 0$ и $\vec{j} = 0$, т.е. функция состояния $u(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_0(x)$ и функция тока $j(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} j_0(x)$. Так как положение центра $\vec{b}$ в этом случае не зависит от времени, то функции $u_0(x)$ и $j_0(x)$ также не зависят от времени и

$$j_0(x) = jf_0(\vec{x} - \vec{b}), u_0(x) = uf_0(\vec{x} - \vec{b}). \tag{17.2.4}$$

Согласно §§ 1.3,2.2,3.1,14.2,12.2 для покоящейся скалярной натуральной кулоновской частицы масса m равна функции Лагранжа n, равна кинетической энергии $\mathcal{E}c$ и равна физической энергии $\mathcal{E}s$

$$m = n = \mathcal{E}c = \mathcal{E}s. \tag{17.2.5}$$

Поэтому согласно формулам (2.2.35),(2.2.24)

$$\mathcal{E}c = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \vec{x}}(x)\right)^2 dx_1dx_2dx_3 = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\left(\frac{\partial uf_0}{\partial \vec{x}}(\vec{x})\right)^2 dx_1dx_2dx_3, \qquad (17.2.6)$$

$$\mathcal{E}c = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\left(\vec{E}(x)\right)^2 dx_1dx_2dx_3 = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\left(\vec{E}f(\vec{x})\right)^2 dx_1dx_2dx_3. \qquad (17.2.7)$$

А согласно формуле (13.4.27) для массы натуральной скалярной частицы

$$\mathcal{E}c = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{\widehat{jf_0}(\vec{\eta})\widehat{jf_0}(-\vec{\eta})}{(\vec{\eta})^2}\,dx_1dx_2dx_3. \qquad (17.2.8)$$

Согласно формулам (2.2.24) и (2.2.16) напряжённость электрического поля следующим образом связана с функциями смещения и тока

$$\vec{E}f(\vec{x}) = \,grad\, uf_0(\vec{x}), \qquad (17.2.9)$$

$$div\,\vec{E}f(\vec{x}) = -jf_0(\vec{x}). \qquad (17.2.10)$$

Итак, мы имеем 3 формулы для энергии электростатического поля: 1) формула (17.2.6) — через функцию смещений или потенциал электростатического поля; 2) формула (17.2.7) — через напряжённость электрического поля; 3) формула (17.2.8) — через трансформацию Фурье плотности заряда.

Для натуральной частицы подинтегральная функция в (17.2.8) абсолютно суммируема, поэтому если

$$\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta}) = \frac{\widehat{jf_0}(\vec{\eta})\widehat{jf_0}(-\vec{\eta})}{(\vec{\eta})^2},$$

то прообраз Фурье функции $\mathrm{nit}\,(\vec{x})$ есть непрерывная функция и согласно (17.2.8)

$$\mathcal{E}c = \frac{1}{2}\,\mathrm{nit}\,(0). \qquad (17.2.11)$$

Потребуем дополнительно далее в этом пункте, чтобы частица была доброй в смысле п. 13.10.3. Тогда по следствию 13.10.1

$$\widehat{uf_0}(\vec{\eta}) = \frac{\widehat{jf_0}(\vec{\eta})}{(\vec{\eta})^2} \qquad (17.2.12)$$

и

$$uf_0(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}(\,\mathrm{cul} * jf_0)(\vec{x}), \qquad (17.2.13)$$

причём функция $uf_0 \in \bar{C}_0^{(1)}(\mathbf{R}^3)$ и удовлетворяет по лемме 13.10.3 условию

$$\exists C \in \mathbf{R}_+ \ \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3 \ \Big| \ |uf_0(\vec{x})| \le \frac{C}{|\vec{x}|}. \qquad (17.2.14)$$

Далее применима лемма 13.10.7 и

$$\mathrm{nit}\,(\vec{x}) = (uf_0 * cjf_0)(\vec{x}) = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} uf_0(\vec{y})jf_0(\vec{y}-\vec{x})\,dy_1dy_2dy_3 \qquad (17.2.15)$$

(здесь $cjf_0 \equiv jf_0(-\vec{x})$). Отсюда в силу (17.2.11) получаем ещё одно представление для энергии

$$\mathcal{E}c = \frac{1}{2} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} uf_0(\vec{y}) jf_0(\vec{y})\, dy_1 dy_2 dy_3. \qquad (17.2.16)$$

Но подставляя в (17.2.15) формулу (17.2.13), имеем

$$\mathrm{nit}\,(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}(\,\mathrm{cul}\, * jf_0 * cjf_0)(\vec{x}),$$

отсюда

$$\mathrm{nit}\,(0) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left(\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} jf_0(\vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 \right) jf_0(\vec{y})\, dy_1 dy_2 dy_3 =$$

$$\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{jf_0(\vec{x}) jf_0(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, dx_1 dx_2 dx_3\, dy_1 dy_2 dy_3.$$

По лемме 13.10.7 и теореме Фубини-Фату повторный интеграл в последней формуле абсолютно сходится, поэтому существует и двойной интеграл по $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Мы получили ещё одно представление для энергии

$$\mathcal{E}c = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{jf_0(\vec{x}) jf_0(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, dx_1 dx_2 dx_3\, dy_1 dy_2 dy_3. \qquad (17.2.17)$$

17.2.3 Сферически симметричное распределение заряда.

Сохраняем все предположения предыдущего пункта, т.е. рассматриваем скалярную добрую покоящуюся частицу. Предположим дополнительно в этом пункте, что плотность заряда — сферически симметричная функция, т.е. существует четная числовая функция $\ jod\ : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, что

$$\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3 \ \Big|\ jf_0(\vec{x}) = \ jod\,(|\vec{x}|). \qquad (17.2.18)$$

Тогда существуют и четные функции $\ uod\,(t),\ Eod\,(t)$, отображающие $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$, что $uf_0(\vec{x}) = \ uod\,(|\vec{x}|)$ и радиальная компонента вектора $\vec{E}f(\vec{x})$ равна $\ Eod\,(|\vec{x}|)$. Трансформация Фурье функций $jf_0(\vec{x}), uf_0(\vec{x}), \vec{E}f(\vec{x})$ также будут сферически симметричными функциями и будут выражаться через числовые функции:

$$\widehat{jf_0}(\vec{\eta}) = \ jid\,(|\vec{\eta}|),\ \widehat{uf_0}(\vec{\eta}) = \ uid\,(|\vec{\eta}|) \qquad (17.2.19)$$

и радиальная компонента вектора $\widehat{\vec{E}f}(\vec{\eta})$ равна $\ Eid\,(\vec{\eta})$, где $\ jod\,,\ uid\,,\ Eid\ $ — отображения $\mathbf{R}$ в $\mathbf{C}$, четные по своему аргументу.

Согласно формуле (17.2.10) по интегральной теореме Гаусса при $r > 0$ имеем

$$\iiint\limits_{|\vec{x}|\le r} jf_0(\vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 = -\iiint\limits_{|\vec{x}|\le r} div\, \vec{E}f(\vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 = -\iint\limits_{|\vec{x}|=r} \langle \vec{E}f(\vec{x}), d\vec{\sigma}(\vec{x})\rangle. \quad (17.2.20)$$

Учитывая сферическую симметричность, получим

$$4\pi \int\limits_0^r \ jod\,(t) t^2\, dt = -\ Eod\,(r) 4\pi r^2,$$

т.е.

$$Eod\,(r) = -\frac{1}{r^2}\int\limits_0^r jod\,(t)t^2\,dt. \qquad (17.2.21)$$

В силу формулы (17.2.9)

$$Eod\,(r) = \frac{d}{dr}\,uod\,(r),$$

т.е.

$$uod\,(r) = -\int\limits_r^\infty Eod\,(\xi)d\xi. \qquad (17.2.22)$$

Получаем следующее выражение для функции $uod\,(r)$ через функцию $jod\,(r)$

$$uod\,(r) = \int\limits_r^\infty \frac{1}{\xi^2}\left(\int\limits_0^\xi jod\,(t)t^2dt\right)d\xi. \qquad (17.2.23)$$

Рассмотрим теперь вопрос о выражении функции $jid\,(\xi)$ через трансформацию Фурье функции $jod\,(t)$.

Лемма 17.2.1 *Пусть функция $f \in L_1(\mathbf{R}^3) \cup L_\infty(\mathbf{R}^3)$ и сферически симметрична, тогда существуют четные функции $fod : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и $fid : \mathbf{R} \to C$, такие, что при любых $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$, $\vec{\eta} \in \mathbf{R}^3$ верно $f(\vec{x}) = fod\,(|\vec{x}|)$, $\widehat{f}(\vec{\eta}) = fid\,(|\vec{\eta}|)$, трансформация Фурье $\widehat{fod}\,(\xi) \in \bar{C}_0^{(2)}(\mathbf{R})$, при $\xi > 0$*

$$fid\,(\xi) = -\frac{2\pi}{\xi}\frac{d}{d\xi}\,\widehat{fod}\,(\xi), \qquad (17.2.24)$$

а при $\xi = 0$ верно

$$fid\,(0) = -2\pi\frac{d^2}{d\xi^2}\,\widehat{fod}\,(\xi)\Big|_{\xi=0} = 4\pi\int\limits_0^\infty fod\,(t)t^2\,dt = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} f(\vec{x})\,dx_1dx_2dx_3. \qquad (17.2.25)$$

Доказательство. Существование интеграла $\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} |f(\vec{x})|\,dx_1dx_2dx_3$ эквивалентно существованию интеграла $\int\limits_0^\infty fod\,(t)t^2\,dt$. А так как функция $f(\vec{x})$ ограничена на $\mathbf{R}^3$, то функция $fod\,(t)$ ограничена на $\mathbf{R}$. Тогда существует интеграл $\int\limits_0^\infty fod\,(t)(1+t^2)\,dt$ и у функции $fod \in L_1(\mathbf{R})$ существуют нулевой, первый и второй моменты. Согласно теоремам 1.2 и 1.7 монографии [61], тогда трансформация Фурье $\widehat{fod}\,(\xi) \in \bar{C}_0^{(2)}(\mathbf{R})$.

По определению

$$\widehat{f}(\vec{\eta}) = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} f(\vec{x})\exp(i\langle\vec{x},\vec{\eta}\rangle)\,dx_1dx_2dx_3. \qquad (17.2.26)$$

Перейдем к сферическим координатам при $|\vec{\eta}| > 0$

$$\widehat{f}(\vec{\eta}) = \int\limits_0^\infty fod\,(r)r^2\left(\iint\limits_{\Omega_2}\exp\left(i\,r|\vec{\eta}|\left\langle\vec{n},\frac{\vec{\eta}}{|\vec{\eta}|}\right\rangle\right)d\sigma(\vec{n})\right)dr. \qquad (17.2.27)$$

Пусть точка $\vec{\tau} \in \Omega_2$ — двумерной единичной сфере в $\mathbf{R}^3$, тогда интеграл по сфере

$$I(\alpha) = \iint\limits_{\Omega_2} \exp(i\alpha\langle\vec{n}, \vec{\tau}\rangle)\, d\sigma(\vec{n}) \tag{17.2.28}$$

не зависит от $\vec{\tau} \in \Omega_2$, поэтому, выбирая $\vec{\tau} = (0, 0, 1)$, в сферических координатах получим

$$I(\alpha) = \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \exp(i\alpha \cos\theta) \sin\theta \cos\theta\, d\varphi = -2\pi \int\limits_1^{-1} \exp(i\alpha z)\, dz = 4\pi \frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{17.2.29}$$

Из формул (17.2.27-17.2.29) при $|\vec{\eta}| = \xi$ получим

$$fid\,(\xi) = \int\limits_0^\infty fod\,(r) r^2 4\pi \frac{sin(r\xi)}{r\xi}\, dr = \frac{4\pi}{\xi} \int\limits_0^\infty fod\,(r) r \sin(r\xi)\, dr =$$

$$\frac{2\pi}{\xi} \int\limits_{-\infty}^\infty fod\,(r) r \sin(r\xi)\, dr = \frac{2\pi}{\xi} \frac{d}{d\xi} (-1) \int\limits_{-\infty}^\infty fod\,(r) \cos(r\xi)\, dr = -\frac{2\pi}{\xi} \frac{d}{d\xi} \widehat{fod}\,(\xi).$$

Доказана формула (17.2.24). Формула (17.2.25) получается предельным переходом из формулы (17.2.24) с учётом чётности функции $\widehat{jod}\,(\xi)$. ♢

Лемма 17.2.1 даёт нам для скалярной доброй покоящейся частицы соотношение

$$jid\,(\xi) = -\frac{2\pi}{\xi} \frac{d}{d\xi} \widehat{jod}\,(\xi), \quad \xi > 0, \tag{17.2.30}$$

$$jid\,(0) = 4\pi \int\limits_0^\infty jod\,(t) t^2\, dt. \tag{17.2.31}$$

Для энергии в сферически симметричном случае согласно формуле (17.2.8) получаем

$$\mathcal{E}c = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} 4\pi \int\limits_0^\infty jid^{\,2}(r)\, dr = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_0^\infty jid^{\,2}(r)\, dr. \tag{17.2.32}$$

Подставляя в (17.2.32) формулу (17.2.31), получаем

$$\mathcal{E}c = \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \widehat{jod}\,(\xi) \right)^2 d\xi. \tag{17.2.33}$$

Рассмотрим следующие примеры распределения плотности заряда.

Пример 17.2.1

Равномерное распределение заряда в шаре радиуса $a \in \mathbf{R}_+$.

Плотность заряда $jf_0(\vec{x}) = A\chi_a(\vec{x})$, где $\chi_a(\vec{x})$ — характеристическая функция шара $\{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 \;\big|\; |\vec{x}| \le a\}$ и напряжённость электрического поля равна

$$Eod\,(r) = -A \begin{cases} \frac{r}{3} & , r \le a; \\ \frac{a^3}{3r^2} & , r \ge a. \end{cases} \tag{17.2.34}$$

Энергия поля внутри области распределения эарядов равна

$$\mathcal{E}c_{in} = 4\pi \frac{1}{2} A^2 \int\limits_0^a \left(\frac{r}{3}\right)^2 r^2\, dr = 4\pi \frac{1}{2} A^2 \frac{1}{9}\frac{a^5}{5} = \frac{1}{10}\frac{e^2}{4\pi a}. \qquad (17.2.35)$$

Энергия поля вне области распределения зарядов равна

$$\mathcal{E}c_{out} = \frac{1}{2} 4\pi A^2 \int\limits_a^\infty \left(\frac{a^3}{3}\right)^2 \frac{1}{r^4} r^2\, dr = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi a}. \qquad (17.2.36)$$

Полная энергия частицы равна

$$\mathcal{E}c = \mathcal{E}c_{in} + \mathcal{E}c_{out} = 0.6 \frac{e^2}{4\pi a} \qquad (17.2.37)$$

Пример 17.2.2

Плотность заряда $jf_0(\vec{x}) = A\exp\left(\frac{-(\vec{x})^2}{2a^2}\right),\ a \in \mathbf{R}_+$**.**

Полный заряд

$$e = A \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \exp\left(\frac{-(\vec{x})^2}{2a^2}\right) dx_1 dx_2 dx_3 = Aa^3(\sqrt{2\pi})^3. \qquad (17.2.38)$$

Функция $jod\,(t) = A\exp\left(\frac{-t^2}{2a^2}\right)$, её трансформация Фурье $\widehat{jod}\,(\xi) = A\sqrt{2\pi}\ a\ exp\left(\frac{-a^2\xi^2}{2}\right)$ согласно [24, с.107]. Производная

$$\frac{d}{d\xi}\widehat{jod}\,(\xi) = A\sqrt{2\pi}a \cdot (-a^2\xi) \cdot \exp\left(\frac{-a^2\xi^2}{2}\right).$$

Согласно формуле (17.2.33) энергия равна

$$\mathcal{E}c = \int\limits_0^\infty \left(A\sqrt{2\pi}a^3\right)^2 \exp(-a^2\xi^2) d\xi = \frac{e^2}{(2\pi)^3} 2\pi \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{a} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{e^2}{4\pi a}. \qquad (17.2.39)$$

Пример 17.2.3

Плотность заряда $jf_0(\vec{x}) = A\exp\left(\frac{-|\vec{x}|}{a}\right),\ a \in \mathbf{R}_+$**.** Полный заряд

$$e = A \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \exp\left(\frac{-|\vec{x}|}{a}\right) dx_1 dx_2 dx_3 = 4\pi a^3 A \int\limits_0^\infty \exp(-t) t^2 dt = Aa^3 4\pi \cdot 2. \qquad (17.2.40)$$

Трансформация Фурье функции $jod\,(t)$ равна

$$\widehat{jod}\,(\xi) = a \int\limits_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{|t|}{a}\right) \exp(i\xi t)\, dt =$$

$$Aa \int\limits_{-\infty}^\infty \exp(-|\alpha|) \exp(ia\xi\alpha)\, d\alpha = 2Aa \frac{1}{1 + (a\xi)^2}.$$

Производная
$$\frac{d}{d\xi}\widehat{jod}\,(\xi) = 2aA\frac{-2a^2\xi}{(1+(a\xi)^2)^2}. \tag{17.2.41}$$
Согласно формуле (17.2.33) энергия равна
$$\mathcal{E}c = (4a^3A)^2\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+(a\xi)^2)^4}d\xi = \frac{1}{a}(4a^3A)^2\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^4}\,dt = \frac{1}{a}\frac{e^2}{4\pi^2}\frac{5}{2^5}\pi = \frac{5}{2^5}\frac{e^2}{4\pi a}. \tag{17.2.42}$$
(Для вычисления последнего интеграла см., например, [29, формула 2.148.4].)
◊

В примерах 17.2.1–17.2.3 справедливо равенство
$$m = C\frac{e^2}{4\pi a}, \tag{17.2.43}$$
связывающее массу частицы — m, её заряд — e и характерный размер области распределения зарядов — a, где константа $C \in \mathbf{R}_+$ принимает в примерах 17.2.1–17.2.3 соответственно значения $C = 0{,}6$, $C = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, $C = \frac{5}{2^5}$. Определяя из равенства (17.2.43) величину a как функцию массы и заряда мы получим классический радиус частицы, например, электрона.

Отметим ещё раз, что масса ненулевой скалярной натуральной покоящейся частицы положительна.

17.2.4 О допустимых и недопустимых идеализациях в распределении плотности заряда.

Различные формулы для энергии в п. 17.2.2 мы доказали для скалярной покоящейся доброй частицы. Возникает вопрос об их распространении на случай скалярной покоящейся лоренцевой обобщённой частицы. Переход от доброй частицы к обобщённой в данном случае означает переход от функции $jf_0 \in BT(\mathbf{R}^3)$ к обобщённой функции $jf_0 \in S'(\mathbf{R}^3)$. Рассматривая плотность заряда $jf_0 \in S'(\mathbf{R}^3)$ как предел плотностей зарядов $jf_{0,a} \in BT(\mathbf{R}^3)$ при параметре $a \to +0$, мы покажем, что в случае зарядов, сосредоточенных в точках или на линиях, энергия $\mathcal{E}c_a \to +\infty$ при $a \to 0$, а в случае зарядов, сосредоточенных на поверхностях, при некотором ограничении на поверхностную плотность заряда существует предел $\lim\limits_{a\to+0}\mathcal{E}c_a = \mathcal{E}c$.

В примерах 17.2.1-17.2.3 при постоянной величине заряда e плотность заряда стягивается к точке, но энергия неограниченно возрастает. Таким образом мы убедились, что идеализация точечных частиц *недопустима при вычислении энергии.* В то же время в § 13.5 мы ввели аппроксимацию натуральных частиц влавинами — обобщёнными частицами с плотностью заряда, сосредоточенной в точке и замена частиц на аппроксимирующие влавины стала нашим *основным методом асимптотического вычисления взаимодействий* различных частиц.

Следующий пример показывает недопустимость идеализации о зарядах, сосредоточенных на линии, при вычислении энергии.

Пример 17.2.4

Пусть $jf_0(\vec{x}) = A\chi_a(x)$, где $\chi_a(\vec{x})$ — характеристическая функция цилиндра $G_a \equiv \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 \;\Big|\; (x_1^2 + x_2^2 \le a^2) \wedge (|x_3| \le h)\}$, $a \in \mathbf{R}_+$, $h \in \mathbf{R}_+$, $A \in \mathbf{R}_+$.

Заряд равен

$$e = A\pi a^2 2h. \tag{17.2.44}$$

Потенциал в точках цилиндра равен

$$uf_0(\vec{x}) = \frac{A}{4\pi} \iiint\limits_{G_a} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}\, dy_1 dy_2 dy_3.$$

Введём для $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ вектор $\vec{x}_\perp \equiv (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, тогда

$$uf_0(\vec{x}) \geq \frac{A}{4\pi} \iint\limits_{S_a} \left(\int\limits_0^h \frac{1}{\sqrt{(\vec{x}_\perp - \vec{y}_\perp)^2 + x_3^2}}\, dy_1 \right) dy_1 dy_2,$$

где $S_a \equiv \{\vec{x} \in \mathbf{R}^2 \;\big|\; |\vec{x}| \leq a\}$. Если $\rho \equiv |\vec{x}_1 - \vec{y}_1| > 0$, то

$$\int\limits_0^h \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + y_3^2}}\, dy_3 = \int\limits_0^{\frac{h}{\rho}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \ln\left(\frac{h}{\rho} + \sqrt{1 + \frac{h}{\rho}^2} \right).$$

Отсюда

$$uf_0(\vec{x}) \geq \frac{A}{4\pi} \iint\limits_{S_a} \ln\left(\frac{h}{|\vec{x}_\perp - \vec{y}_\perp|} + \sqrt{1 + \left(\frac{h}{|\vec{x}_\perp - \vec{y}_\perp|} \right)^2} \right) dy_1 dy_2 \geq \tag{17.2.45}$$

$$\frac{A}{4\pi} \ln\left(\frac{h}{2a} + \sqrt{1 + \left(\frac{h}{2a}\right)^2} \right) \pi a^2.$$

Подставляя (17.2.45) в формулу для энергии (17.2.16) и выражая A через e согласно (17.2.44), получаем неравенство

$$\mathcal{E}c_a \geq \frac{1}{2} \frac{e^2}{2h4\pi} \ln\left(\frac{h}{2a} + \sqrt{1 + \left(\frac{h}{2a}\right)^2} \right). \tag{17.2.46}$$

При $a \to +0$ величина $\mathcal{E}c_a \to +\infty$ согласно (17.2.46). Итак, при предельном переходе при $a \to +0$ от заряда величины $e > 0$ равномерно распределенного в цилиндре G_a к заряду той же величины e, равномерно распределенному по оси цилиндра мы получаем бесконечное значение энергии.

17.2.5 Заряды, распределенные на поверхности.

В классической электростатике широко используется представление о зарядах, распределенных на поверхности. Покажем, что это представление допустимо при вычислении энергии и оценим допустимые сингулярности, которые может иметь плотность заряда на кромке поверхности. Мы рассмотрим простую гладкую поверхность S, заданную параметрически, и проведём предельный переход при вычислении потенциала и энергии при стягивании к поверхности объёмного заряда постоянной величины e.

Проведём следующее построение. Пусть $W \equiv [0,1]\times[0,1] \subset \mathbf{R}^2$, $V_a \equiv W \times [-a,a] \subset \mathbf{R}^3$, $a \in]0,1]$. Пусть $\psi : W \to \mathbf{R}$ неотрицательная измеримая функция и $\iint\limits_W \psi(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 = s > 0$. Пусть функция ψ удовлетворяет также неравенству

$$\forall(\xi_1,\xi_2)\in W \;\Big|\; \psi(\xi_1,\xi_2) \le C\left(\xi_1^\lambda + (1-\xi_1)^\lambda + \xi_2^\lambda + (1-\xi_2)^\lambda\right), \tag{17.2.47}$$

где $\lambda > -1$, $C \in \mathbf{R}_+$. Пусть $g : V_1 \to \mathbf{R}^3$ диффеоморфное вложение класса $C^{(1)}$ и $g(V_a) \equiv G_a$. Пусть $S \equiv g(W)$ — простая гладкая поверхность, $S \subset G_a$. Определим при каждом $a \in]0,1]$ в объеме G_a распределение заряда с плотностью $jf_{0,a}(\vec{x}) = \rho_a(\vec{x})$ вида

$$\rho_a(\vec{x}) = A\left(\psi(\xi_1,\xi_2)\left|\det\frac{\partial g}{\partial\vec{\xi}}(\vec{\xi})\right|^{-1}\right)\Bigg|_{\vec{\xi}=g^{-1}(\vec{x})}, \tag{17.2.48}$$

где константа A выбрана из условия

$$e = \iiint\limits_{G_a} \rho_a(\vec{x})\,dx_1dx_2dx_3 = A\iiint\limits_{V_a}\rho_a(g(\vec{\xi}))\left|\det\frac{\partial g}{\partial\vec{\xi}}(\vec{\xi})\right| d\xi_1d\xi_2d\xi_3 = \tag{17.2.49}$$

$$A2a\iint\limits_W \psi(\xi_1,\xi_2)d\xi_1d\xi_2 = A2as.$$

Введём теперь следующую величину, характеризующую диффеоморфизм $g(\vec{\xi}) \equiv \vec{x}(\vec{\xi})$;

$$K \equiv \frac{1}{2}\min_{\vec{\xi}\in V_1,\vec{n}\in\Omega_2}\left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{\xi}}(\vec{\xi})\vec{n}\right|, \tag{17.2.50}$$

где $\Omega_2 \equiv \{\vec{x}\in\mathbf{R}^3 |\ |\vec{x}| = 1\}$ — единичная сфера. Так как мы имеем дело с диффеоморфизмом, то матрица $\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{\xi}}(\vec{\xi})$ невырождена при любом $\vec{\xi}\in V_1$ и поэтому непрерывная на компакте $V_1\times\Omega_2$ функция вида $\left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{\xi}}(\vec{\xi})\vec{n}\right|$ в каждой точке положительна и достигает минимума в некоторой точке. Итак, $K > 0$.

Согласно формуле Тейлора ([48], с.16)

$$\vec{x}(\vec{\eta}) - \vec{x}(\vec{\xi}) = \frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{\xi}}(\vec{\xi})(\vec{\eta}-\vec{\xi}) + \int\limits_0^1\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{\xi}}(\vec{\xi}+t(\vec{\eta}-\vec{\xi})) - \frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{\xi}}\right)dt(\vec{\eta}-\vec{\xi}). \tag{17.2.51}$$

Функция $\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{\xi}}(\vec{\xi})$ непрерывна на компакте V_1 и поэтому равномерно непрерывна на V_1. Поэтому существует $\delta\in\mathbf{R}_+$, что

$$\forall\vec{\xi}\in V_1,\ \forall\vec{\eta}\in V_1,\ |\vec{\eta}-\vec{\xi}|\le\delta \;\Big|\; \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{\xi}}(\vec{\eta}) - \frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{\xi}}(\vec{\xi})\right| \le K. \tag{17.2.52}$$

Из (17.2.50–17.2.52) Получаем

$$\forall\vec{\xi}\in V_1,\ \forall\vec{\eta}\in V_1,\ |\vec{\eta}-\vec{\xi}|\le\delta \;\Big|\; |\vec{x}(\vec{\eta}) - \vec{x}(\vec{\eta})| \ge K|\vec{\eta}-\vec{\xi}|. \tag{17.2.53}$$

Определим

$$b \equiv \min_{\substack{\vec{\xi}\in V_1,\vec{\eta}\in V_1\\ |\vec{\xi}-\vec{\eta}|\ge\delta}}\left|\vec{x}(\vec{\eta}) - \vec{x}(\vec{\xi})\right|. \tag{17.2.54}$$

Так как функция $f(\vec{\xi},\vec{\eta}) \equiv \left|\vec{x}(\vec{\eta}) - \vec{x}(\vec{\xi})\right|$ непрерывна на компакте $V_1 \times V_1$ и так как $\vec{x}(\vec{\xi})$ диффеоморфное вложение, то $f(\vec{\xi},\vec{\eta}) > 0$ при $\vec{\xi} \neq \vec{\eta}$. Итак, $b > 0$. С помощью введенных констант оценим теперь следующий интеграл.

Утверждение 17.2.1 *Справедливо неравенство*

$$\forall a \in]0,1] \ \forall \vec{\xi} \in V_1 \ \forall (\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2) \in W \ \Bigg| \ \frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a} |\vec{x}(\vec{\eta}) - \vec{x}(\vec{\eta})|^{-1} d\eta_3 \leq \tag{17.2.55}$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{K}\frac{1}{\sqrt{(\eta_1-\xi_1)^2 + (\eta_2-\xi_2)^2}}.$$

Доказательство. Разобьём рассматриваемый интеграл на два интеграла: по множеству $|\vec{\eta} - \vec{\xi}| \geq \delta$ и по множеству $|\vec{\eta} - \vec{\xi}| < \delta$:

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a} |\vec{x}(\vec{\eta}) - \vec{x}(\vec{\xi})|^{-1} d\eta_3 = \frac{1}{2a}\int\limits_{|\vec{\eta}-\vec{\xi}|\geq\delta} |\vec{x}(\vec{\eta}) - \vec{x}(\vec{\xi})|^{-1} d\eta_3 + \frac{1}{2a}\int\limits_{|\vec{\eta}-\vec{\xi}|<\delta} |\vec{x}(\vec{\eta}) - \vec{x}(\vec{\xi})|^{-1} d\eta_3. \tag{17.2.56}$$

согласно (17.2.53) и (17.2.54) верны неравенства

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{|\vec{\eta}-\vec{\xi}|\geq\delta} |\vec{x}(\vec{\eta}) - \vec{x}(\vec{\xi})|^{-1} d\eta_3 \leq \frac{1}{b}; \tag{17.2.57}$$

и

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{|\vec{\eta}-\vec{\xi}|<\delta} |\vec{x}(\vec{\eta}) - \vec{x}(\vec{\xi})|^{-1} d\eta_3 \leq \frac{1}{K}\frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a} |\vec{\eta} - \vec{\xi}|^{-1} d\eta_3 \tag{17.2.58}$$

Пусть $\rho \equiv \sqrt{(\eta_1-\xi_1)^2 + (\eta_2-\xi_2)^2}$, тогда при $\rho = 0$ неравенство (17.2.55) тривиально. Далее рассматриваем случай $\rho > 0$. Преобразуем интеграл

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a} |\vec{\eta} - \vec{\xi}|^{-1} \, d\eta_3 = \frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a} \frac{1}{\rho^2 + (\eta_3 - \xi_3)^2} d\eta_3 = \frac{1}{2a}\int\limits_{-a-\xi_3}^{a-\xi_3} \frac{1}{\sqrt{\rho^2+t^2}}\, dt.$$

Дифференцируя последний интеграл по ξ_3, убедимся, что он принимает максимальное значение при $\xi_3 = 0$, т.е.

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a} |\vec{\eta} - \vec{\xi}|^{-1} d\eta_3 \leq \frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{\rho^2+t^2}}\, dt = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a}{\rho} + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{\rho}\right)^2}\right) = \tag{17.2.59}$$

$$\frac{1}{a}\left(\ln\left(a + \sqrt{\rho^2 + a^2}\right) - \ln(\rho)\right).$$

По формуле конечных приращений Лагранжа

$$\frac{1}{a}\left(\ln\left(a + \sqrt{\rho + a^2}\right) - \ln(\rho)\right) = \frac{1 + \frac{t}{\sqrt{\rho^2+t^2}}}{1 + \sqrt{\rho^2+t^2}}\Bigg|_{t\in[0,a]} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+t^2}}\Bigg|_{t\in[0,a]} \leq \frac{1}{\rho}.$$

◇

Обозначим в этом пункте для краткости потенциал $u_a(\vec{x}) \equiv uf_{0,a}(\vec{x})$. Теперь мы в состоянии показать, что все потенциалы $u_a(\vec{x})$, $a \in]0,1]$ ограничены одной константой.

Лемма 17.2.2 *Для потенциалов $u_a(\vec{x})$ справедливо неравенство*

$$\forall a \in]0,1] \ \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3 \ \Big| \ u_a(\vec{x}) \leq \frac{e}{4\pi}\left(\frac{1}{b} + 48\frac{C}{(1+\lambda)Ks}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^\lambda d\varphi\right). \tag{17.2.60}$$

Существует предел при любом $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$

$$\lim_{a\to 0} u_a(\vec{x}) \equiv u_0(\vec{x}) = \frac{e}{4\pi s}\iint\limits_W |\vec{y}(\eta_1,\eta_2,0) - \vec{x}|^{-1}\psi(\eta_1,\eta_2)\, d\eta_1 d\eta_2. \tag{17.2.61}$$

Доказательство. В силу принципа максимума для решения гармонического уравнения достаточно доказать оценку (17.2.60) лишь при $\vec{x} \in G_a$. Потенциал $u_a(\vec{x})$ задаётся формулой

$$u_a(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{G_a}\frac{1}{|\vec{y}-\vec{x}|}\rho_a(\vec{y})\, dy_1 dy_2 dy_3.$$

Проведём замену переменных $\vec{y} = \vec{y}(\vec{\eta})$ и положим $\vec{x} = \vec{x}(\vec{\xi})$, $\vec{\xi} \in V_a$, получим

$$u_a(\vec{x}) = \frac{A}{4\pi}\iiint\limits_{V_a}|\vec{x}(\vec{\eta}) - \vec{x}(\vec{\xi})|^{-1}\psi(\eta_1,\eta_2)\, d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 = \tag{17.2.62}$$

$$\frac{e}{4\pi s}\iint\limits_W \psi(\eta_1,\eta_2)\left(\frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a}|\vec{x}(\vec{\eta}) - \vec{x}(\vec{\xi})|^{-1}\, d\eta_3\right) d\eta_1 d\eta_2.$$

Согласно утверждению 17.2.1 подинтегральная функция в последнем интеграле удовлетворяет неравенству

$$\forall a \in]0,1] \ \forall (\eta_1,\eta_2) \in W \ \Bigg| \ \psi(\eta_1,\eta_2)\frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a}\left|\vec{x}(\vec{\eta}) - \vec{x}(\vec{\xi})\right|^{-1}\, d\eta_3 \leq \tag{17.2.63}$$

$$\psi(\eta_1,\eta_2)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{K}|\vec{\eta}_\perp - \vec{\xi}_\perp|^{-1}\right),$$

где для $\vec{\xi} \in V_1$ положено $\vec{\xi}_1 \equiv (\xi_1,\xi_2) \in W$.

Оценим сверху при $\lambda \in]-1,0]$ интеграл

$$I_1 \equiv \iint\limits_W |\vec{\eta}_\perp - \vec{\xi}_\perp|^{-1}\eta_1^\lambda d\eta_1 d\eta_2 = \iint\limits_W \frac{\eta_1^\lambda}{\sqrt{(\eta_1-\xi_1)^2 + (\eta_2-\xi_2)^2}} d\eta_1 d\eta_2 \tag{17.2.64}$$

Так как

$$I_1 = \int\limits_0^1 \eta_1^\lambda\left(\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{(\eta_1-\xi_1)^2 + (\eta_2-\xi_2)^2}}\, d\eta_2\right) d\eta_1$$

и

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{(\eta_1-\xi_1)^2 + (\eta_2-\xi_2)^2}}\, d\eta_2 = \int\limits_{-\xi_2}^{1-\xi_2}\frac{1}{\sqrt{(\eta_1-\xi_1)^2 + t^2}}\, dt \leq 2\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(\eta_1-\xi_1)^2 + t^2}},$$

то

$$I_1 \le 2\int_0^1\int_0^1 \frac{\eta_1^\lambda}{\sqrt{(\eta_1-\xi_1)^2+\eta_2^2}}\,d\eta_1 d\eta_2.$$

Перейдем от двойного интеграла к повторному

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\eta_1^\lambda}{\sqrt{(\eta_1-\xi_1)^2+\eta_2^2}}\,d\eta_1 d\eta_2 = \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{\eta_1^\lambda}{\sqrt{(\eta_1-\xi_1)^2+\eta_2^2}}\,d\eta_1\right)d\eta_2$$

и оценим определенный интеграл

$$\int_0^1 \frac{\eta_1^\lambda}{\sqrt{(\eta_1-\xi_1)^2+\eta_2^2}}\,d\eta_1 = \left(\int_0^{\xi_1}+\int_{\xi_1}^1\right)\frac{\eta_1^\lambda}{\sqrt{(\eta_1-\xi_1)^2+\eta_2^2}}\,d\eta_1 \le$$

$$\left(\int_0^{\frac{\xi_1}{2}}+\int_{\frac{\xi_1}{2}}^{\xi_1}\right)\frac{\eta_1^\lambda}{\sqrt{(\eta_1-\xi_1)^2+\eta_2^2}}d\eta_1 + \int_0^1 \frac{\eta_1^\lambda}{\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}}\,d\eta_1 \le 3\int_0^1 \frac{\eta_1^\lambda}{\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}}\,d\eta_1.$$

Получаем неравенство

$$I_1 \le 6\int_0^1\int_0^1 \frac{\eta_1^\lambda}{\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}}d\eta_1 d\eta_2. \tag{17.2.65}$$

Перейдем к полярным координатам в последнем интеграле, получим в силу условия $\lambda > -1$

$$I_1 \le 6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{r(\varphi)}(\cos\varphi)^\lambda r^\lambda\,dr d\varphi = \frac{6}{1+\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^\lambda r^{1+\lambda}(\varphi)\,d\varphi \le \frac{12}{1+\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^\lambda d\varphi < \infty. \tag{17.2.66}$$

Используя оценку (17.2.66) интеграла I_1 из условия (17.2.47) на функцию ψ, в силу соображений симметрии получим

$$\iint_W \psi(\eta_1,\eta_2)\frac{1}{\sqrt{(\eta_1-\xi_1)^2+(\eta_2-\xi_2)^2}}\,d\eta_1 d\eta_2 \le 4C\frac{12}{1+\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^\lambda\,d\varphi.$$

Итак, функция $\psi(\eta_1,\eta_2)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{K}\frac{1}{\sqrt{(\eta_1-\xi_1)^2+(\eta_2-\xi_2)^2}}\right)$ суммируема на W и справедливо неравенство

$$\iint_W \psi(\eta_1,\eta_2)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{K}\frac{1}{\sqrt{(\eta_1-\xi_1)^2+(\eta_2-\xi_2)^2}}\right)d\eta_1 d\eta_2 \le \frac{1}{b}\iint_W \psi(\eta_1,\eta_2)\,d\eta_1 d\eta_2. \tag{17.2.67}$$

$$+48\frac{C}{K(1+\lambda)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^\lambda d\varphi$$

Из (17.2.62,17.2.63,17.2.67) следует доказываемое неравенство (17.2.60) леммы.

Если $(\eta_1,\eta_2) \ne (\xi_1,\xi_2)$, то

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}|\vec{x}(\vec{\eta})-\vec{x}(\vec{\xi})|^{-1}d\eta_3 = |\vec{x}(\eta_1,\eta_2,0)-\vec{x}(\vec{\xi})|^{-1}.$$

По теореме Лебега о мажорированной сходимости получаем

$$\lim_{a\to 0} u_a(\vec{x}(\vec{\xi})) = \frac{e}{4\pi s} \iint\limits_W |\vec{x}(\eta_1,\eta_2,0) - \vec{x}(\vec{\xi})|^{-1} \psi(\eta_1,\eta_2)\, d\eta_1 d\eta_2.$$

Последняя формула верна при всех $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$

$$\lim_{a\to 0} u_a(\vec{x}) = \frac{e}{4\pi s} \iint\limits_W |\vec{y}(\eta_1,\eta_2,0) - \vec{x}|^{-1}\, \psi(\eta_1,\eta_2)\, d\eta_1 s\eta_2,$$

ибо при $x \notin G_1$ приведенные рассуждения проходят без трудностей, вызванных наличием сингулярности в точке, где $\vec{x}(\vec{\eta}) = \vec{x}(\vec{\xi})$. $\diamondsuit$

Обозначим через $\mathcal{E}c_a$ энергию, соответствующую плотности заряда ρ_a, и применим формулу (17.2.16) для энергии. Из леммы 17.2.2 тогда следует, что

$$\forall a \in]0,1] \;\Big|\; \mathcal{E}c_a \le \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi} \left(\frac{1}{b} + 48 \frac{C}{(1+\lambda)Ks} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^\lambda d\varphi \right),$$

т.е. энергия ограничена.

Лемма 17.2.3 *Существует предел*

$$\lim_{a\to 0} \mathcal{E}c_a = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi s^2} \iint\limits_W \iint\limits_W |\vec{x}(\eta_1,\eta_2,0) - \vec{x}(\xi_1,\xi_2,0)|^{-1} \tag{17.2.68}$$

$$\psi(\eta_1,\eta_2)\psi(\xi_1,\xi_2)\, d\eta_1 d\eta_2 d\xi_1 d\xi_2.$$

Доказательство. Согласно (17.2.16)

$$\mathcal{E}c_a = \frac{1}{2} \iiint\limits_{G_a} u_a(\vec{x})\rho_a(\vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{2} A \iiint\limits_{V_a} u_a(\vec{x}(\vec{\xi}))\psi(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \tag{17.2.69}$$

$$\frac{1}{2}\frac{e}{s} \iint\limits_W \psi(\xi_1,\xi_2) \left(\frac{1}{2a} \int\limits_{-a}^{a} u_a(\vec{x}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)) d\xi_3 \right) d\xi_1 d\xi_2.$$

Согласно формуле (17.2.62)

$$\frac{1}{2a} \int\limits_{-a}^{a} u_a(\vec{x}(\vec{\xi})) d\xi_3 = \frac{e}{4\pi s} \iint\limits_W \psi(\eta_1,\eta_2) \left(\left(\frac{1}{2a}\right)^2 \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a} |\vec{x}(\vec{\eta}) - \vec{x}(\vec{\xi})|^{-1} d\eta_3 d\xi_3 \right) d\eta_1 d\eta_2.$$

Если $(\eta_1,\eta_2) \ne (\xi_1,\xi_2)$, то

$$\lim_{a\to 0} \left(\frac{1}{2a}\right)^2 \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a} |\vec{x}(\vec{\eta}) - \vec{x}(\vec{\xi})|^{-1} d\eta_3 d\xi_3 = |\vec{x}(\eta_1,\eta_2,0) - \vec{x}(\xi_1,\xi_2,0)|^{-1}. \tag{17.2.70}$$

В силу утверждения 17.2.1 и доказательства леммы 17.2.2 функция

$$\psi(\eta_1,\eta_2) \left(\left(\frac{1}{2a}\right)^2 \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a} |\vec{x}(\vec{\eta}) - \vec{x}(\vec{\eta})|^{-1} d\eta_3 d\xi_3 \right)$$

имеет суммируемую мажоранту и по теореме Лебега о мажорированный сходимости

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a} u_a(\vec{x}(\vec{\xi}))\,d\xi_3 = \frac{e}{4\pi s}\iint\limits_{W}\psi(\eta_1,\eta_2)|\vec{x}(\eta_1,\eta_2,0)-\vec{x}(\xi_1,\xi_2,0)|^{-1}\,d\eta_1 d\eta_2. \quad (17.2.71)$$

Опираясь на лемму 17.2.2 об ограниченности потенциалов $U_a(\vec{x})$ одной константой и используя соотношение сходимости (17.2.71), по теореме Лебега о мажорированной сходимости перейдем к пределу в интеграле (17.2.69) и получим формулу (17.2.68). $\diamondsuit$

Чтобы получить простую физическую интерпретацию лемм 17.2.2 и 17.2.3 введём поверхностную плотность заряда $\rho d(\vec{x})$ на поверхности S

$$\forall \vec{x}\in S \left| \rho d(\vec{x}) \equiv \frac{e}{s}\left(\psi(\xi_1,\xi_2)D^{-1}(\vec{x}(\vec{\xi}))\right)\right|_{\vec{\xi}=g^{-1}(\vec{x})}, \quad (17.2.72)$$

где

$$D(\vec{x}(\vec{\xi})) \equiv \left(\left|\det_{1\le i,j\le 2}\left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_i}(\vec{\xi}), \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_j}(\vec{\xi})\right\rangle\right|\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (17.2.73)$$

Тогда полный заряд поверхности

$$e = \iint\limits_{S}\rho d(\vec{x})\,d\sigma(\vec{x}). \quad (17.2.74)$$

Согласно лемме 17.2.2 потенциал поверхностного распределения зарядов в любой точке $\vec{x}\in\mathbf{R}^3$ равен

$$u_0(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}|\vec{y}-\vec{x}|\rho d(\vec{y})\,d\sigma(\vec{y}). \quad (17.2.75)$$

Энергия поверхностного распределения зарядов по лемме 17.2.3 равна

$$\mathcal{E}c_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\iint\limits_{S}|\vec{x}-\vec{y}|\rho d(\vec{x})\rho d(\vec{y})\,d\sigma(\vec{x})\,d\sigma(\vec{y}). \quad (17.2.76)$$

$\diamondsuit$

Вывод 17.2.1 . *Для простой гладкой поверхности S описанного типа, на которой распределена плотность заряда, имеющая особенность не выше ρ^λ, $\lambda > -1$, где ρ — расстояние до кромки поверхности, потенциал ограничен и энергия конечна.*

Соответствующий вывод справедлив и для поверхности, являющейся объединением конечного числа простых гладких поверхностей описанного типа с плотностью заряда описанного типа.

17.2.6 Емкость.

Энергия $\mathcal{E}c(jf_0)$ как функция от плотности заряда jf_0 есть согласно 17.2.2 положительно определенный квадратичный функционал, в частности

$$\mathcal{E}c(\lambda jf_0) = \lambda^2\mathcal{E}c(jf_0), \quad (17.2.77)$$

для $\lambda\in\mathbf{R}$ и любой плотности заряда $jf_0\in BT(\mathbf{R}^3)$. Пусть $q(jf_0)$ — некоторый линейный функционал на плотностях заряда $jf_0\in BT(\mathbf{R}^3)$, например, заряд в данном объеме $G\subset\mathbf{R}^3$,

$$q(\lambda jf_0) = \lambda q(jf_0) \quad (17.2.78)$$

для $\lambda \in \mathbf{R}$. Пусть на данной плотности заряда jf_0 верно $q(jf_0) \neq 0$, тогда согласно (17.2.77,17.2.78)

$$\forall\lambda \in \mathbf{R} \;\Big|\; \mathcal{E}c(\lambda jf_0) = \frac{1}{2C} q^2(\lambda jf_0), \tag{17.2.79}$$

где

$$C \equiv \frac{q^2(jf_0)}{2\mathcal{E}c(jf_0)}. \tag{17.2.80}$$

Число $C \in \mathbf{R}_+$ назовём *ёмкостью* относительно функционала q. Введенная величина имеет смысл лишь при изменениях плотности заряда, которые сводятся к умножению фиксированной плотности на число.

Пусть исходная частица является суммой конечного числа частиц также скалярных добрых и покоящихся, т.е. $jf_0 = \sum\limits_{k=1}^{m} jf_{0k}$. Подставив эту сумму в формулу (17.2.8) для энергии, мы получим

$$\mathcal{E}c(jf_0) = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{E}c(jf_{0k}) + \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=r+1}^{m} \operatorname{nio}(jf_{0r}, jf_{0s}), \tag{17.2.81}$$

где $\operatorname{nio}(jf_{0r}, jf_{0s})$ — значение функционала взаимодействия r-той и s-той частиц. Или

$$\mathcal{E}c(jf_0) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \operatorname{nio}(jf_{0r}, jf_{0s}).$$

В силу билинейности функционала взаимодействия

$$\operatorname{nio}(\lambda_r jf_{0r}, \lambda_s jf_{0s}) = \lambda_r \lambda_s \operatorname{nio}(jf_{0r}, jf_{0s}).$$

Введём m линейных функционалов $q_r(jf_0)$, таких, что

$$\forall r \in \overline{1,m} \;\Big|\; q_r(jf_{0r}) \neq 0.$$

Предполагая, что такие m функционалов существуют и определены, Введём взаимные емкости

$$C_{rs} \equiv \frac{q_r(jf_{0r}) q_s(jf_{0s})}{\operatorname{nio}(jf_{0r}, jf_{0s})}, \quad r \in \overline{1,m},\ s \in \overline{1,m}. \tag{17.2.82}$$

Тогда формула (17.2.79) обобщается следующим образом

$$\mathcal{E}c\left(\sum_{r=1}^{m} \lambda_r jf_{0r}\right) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \frac{1}{C_{rs}} q_r(\lambda_r jf_{0r}) q_s(\lambda_s jf_{0s}) \tag{17.2.83}$$

при любых $\lambda_r \in \mathbf{R},\ r \in \overline{1,m}$. При этом величина

$$C_{rr} = \frac{q_r^2(jf_{0r})}{uod\,(jf_{0r}, jf_{0r})} = \frac{q_r^2(jf_{0r})}{2\mathcal{E}c(jf_{0r})} \tag{17.2.84}$$

совпадает согласно (17.2.80) с ёмкостью r-той частицы относительно r-того функционала q_r.

Замечание 17.2.1 *Введённые определения емкости распространяются и на обобщённые скалярные лоренцевы покоящиеся частицы с зарядами, распределенными по поверхности в силу п. 17.2.5.*

В случае конечного числа проводящих тел с зарядами, распределенными на них, в качестве функционалов q_r обычно берут величину q_r полного заряда данного тела. В случае m проводящих тел потенциал на каждом теле постоянен и формула (17.2.16) даёт для величины общей энергии системы

$$\mathcal{E}c = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} uf_0(\vec{x})jf_0(\vec{x})\,dx_1dx_2dx_3 = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\iiint\limits_{G_r} uf_0(\vec{x})jf_0(\vec{x})\,dx_1dx_2dx_3 =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m} u_{0r}\iiint\limits_{G_r} jf_{0r}(\vec{x})\,dx_1dx_2dx_3 = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m} u_{0r}q_r,$$

где $G_r \subset \mathbf{R}^3$ — часть пространства, занимаемая r-тым проводящим телом, u_{0r} — потенциал, q_r — заряд. Согласно п. 17.2.5 аналогичный вывод верен и для системы m проводящих поверхностей

$$\mathcal{E}c = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m} u_{0r}q_r. \tag{17.2.85}$$

Для случая одного проводящего тела или поверхности получаем

$$\mathcal{E}c = \frac{1}{2}u_0 q. \tag{17.2.86}$$

Сравнение с формулой (17.2.79) даёт

$$u_0 = \frac{q}{C}$$

или

$$C = \frac{q}{u_0}. \tag{17.2.87}$$

Итак, для одного проводящего тела с функционалом q — полным зарядом емкость есть отношение заряда к потенциалу. (Потенциал в пространственной бесконечности обращается в нуль.)

Пример 17.2.5

Заряженная проводящая сфера радиуса R с равномерно распределенным зарядом величины q.

По теореме Гаусса при $r \geq R$ согласно п. 17.2.3

$$q = -\,Eod\,(r)4\pi r^2$$

и по формуле (17.2.22) при $r \geq R$

$$uod\,(r) = \int\limits_{r}^{\infty} \frac{q}{4\pi r^2}\,dr = \frac{q}{4\pi r}.$$

Итак, потенциал сферы $u_0 = \frac{q}{4\pi R}$ и согласно формуле (17.2.87) емкость сферы

$$C = 4\pi R. \tag{17.2.88}$$

Энергия системы равна согласно (17.2.86)

$$\mathcal{E}c = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi R}. \tag{17.2.89}$$

17.2.7 Функционал взаимодействия агвидной частицы с электростатическим полем. Вернемся к п. 17.2.1 и рассмотрим взаимодействие двух натуральных частиц. Пусть первая частица покоящаяся и скалярная, т.е. верна формуле (17.2.2) Для покоящегося лоренцева агвида верна формула (13.2.58), т.е.

$$\widehat{uf'_0}(\vec{\eta}) = \frac{\widehat{jf'_0}(\vec{\eta})}{(\vec{\eta})^2}. \tag{17.2.90}$$

Тогда по формуле (17.2.2)

$$\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta}) = \widehat{uf'_0}(\vec{\eta})\widehat{jf''_0}(-\vec{\eta}). \tag{17.2.91}$$

Попробуем дополнительно, чтобы обе частицы были добрыми в смысле п. 13.10.3. Если покоящаяся частица добрая, то $jf'_0 \in BT(\mathbf{R}^3)$ и $jf'_0 \in L_1(\mathbf{R}^3)$, поэтому $\widehat{jf'_0} \in \bar{C}_0(\mathbf{R}^3)$. По следствию 13.10.1 верно (17.2.90) и $\widehat{uf'_0}(\vec{\eta})$ есть регулярная обобщённая функция, непрерывная во всех точках, кроме нуля, и оригинал

$$uf'_0 = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{cul} * jf'_0. \tag{17.2.92}$$

При этом, так как частица натуральная и кулоновская, то $uf'_0 \in \bar{C}_0(\mathbf{R}^3)$ и существует $C \in \mathbf{R}_+$, что $|uf'_0(\vec{x})| \leq \frac{C}{|\vec{x}|}$ при всех $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$. Поэтому, так как вторая частица добрая, по лемме 13.10.7 верно (17.2.91) и существует свёртка

$$\mathrm{nit}\,(\vec{x}) = \int\limits_{\mathbf{R}^3} uf'_0(\vec{y})jf''_0(\vec{y} - \vec{x})\,dy_1dy_2dy_3. \tag{17.2.93}$$

Последняя формула в терминологии п. 12.1.3 означает, что взаимодействие доброй частицы с полем покоящейся скалярной доброй частицы носит локальный характер.

Если теперь мы аппроксимируем функцию тока jf''_0 суммой Дирака, то получим аппроксимацию функционала взаимодействия $\mathrm{nit}\,(\vec{x})$ в виде конечной суммы значений функции uf'_0 и её частных производных в точке $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ с постоянными коэффициентами. Что и отражает локальный характер взаимодействия второй частицы с покоящейся скалярной доброй частицей. Однако, для аппроксимации функционала взаимодействия $\mathrm{nit}\,(\vec{x})$ мы будем вместо аппроксимации функции тока $jf''_0(\vec{x})$ в формуле (17.2.93) её суммой Дирака аппроксимировать трансформацию Фурье $\widehat{jf''_0}(\vec{\eta})$ в формуле (17.2.2) её суммой Тейлора, что эквивалентно согласно § 13.5. Если мы заменим в формуле (17.2.2) функцию $\widehat{jf''_0}(\vec{\eta})$ на её сумму Тейлора $t_m(\widehat{jf''_0})(\vec{\eta})$, то по правилу умножения трансформации Фурье на многочлен получим следующую аппроксимацию функционала взаимодействия

$$\mathrm{nit}_m(\vec{x}) = t_m(\widehat{jf''_0})\left(-i\left(\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\right)^{\top}\right)uf'_0(\vec{x}). \tag{17.2.94}$$

Последняя формула даёт функционал взаимодействия влавина с электростатическим полем.

Рассмотрим примеры взаимодействий 6 специальных элементарных влавинов из § 17.1 с электростатическим полем. Обозначение $\frac{\partial}{\partial\vec{x}} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ мы понимаем как оператор-строка, а $\left(\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\right)^{\top} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ как оператор-столбец.

Пример 17.2.6

Властайл. Согласно таблице 17.1.1 $\widehat{jf_0''}(\vec{\eta}) = e''$ есть константа и мы получаем из (17.2.94) классическую формулу для потенциала взаимодействия точечного заряда с электростатическим полем

$$\mathrm{nit}\,(\vec{x}) = e'' u f_0'(\vec{x}). \tag{17.2.95}$$

Пример 17.2.7

Владип. Согласно таблице 17.1.1 $\widehat{jf_0''}\left(-i\left(\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\right)^{\top}\right) = (-i)i\langle\vec{d}, \left(\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\right)^{\top}\rangle$. Функционал взаимодействия

$$\mathrm{nit}\,(\vec{x}) = \vec{d}\,\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\,u f_0'(\vec{x}) = \langle\vec{d},\, grad\ u f_0'(\vec{x})\rangle. \tag{17.2.96}$$

Пример 17.2.8

Влаквазикипер. Согласно таблице 17.1.1 и формуле (17.1.2)

$$\widehat{jf_0''}(\vec{\eta}) = \frac{\langle\vec{l}, \widehat{js\vec{f}''}(\vec{\eta})\rangle}{1-|\vec{l}|^2} = i\frac{\langle\vec{l}, [\vec{S}, \vec{\eta}]\rangle}{1-|\vec{l}|^2} = i\frac{\langle[\vec{l}, \vec{S}], \vec{\eta}\rangle}{1-|\vec{l}|^2}.$$

Поэтому

$$\mathrm{nit}\,(\vec{x}) = (-i)i\frac{\langle[\vec{l}, \vec{S}], \left(\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\right)^{\top}\rangle}{1-|\vec{l}|^2} u f_0'(\vec{x}) = \frac{1}{1-|\vec{l}|^2}\langle[\vec{l}, \vec{S}],\, grad\, u f_0'(\vec{x})\rangle. \tag{17.2.97}$$

Здесь и ниже $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ — вектор скорости второй частицы и двойной штрих у характеристик второй частицы опускается.

Пример 17.2.9

Власарм. Как и в случае владипа

$$\mathrm{nit}\,(\vec{x}) = \langle\vec{d},\, grad\, u f_0'(\vec{x})\rangle. \tag{17.2.98}$$

Пример 17.2.10

Вланюр. Согласно таблице 17.1.1 $\widehat{jf_0''}(\vec{\eta}) = -c\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta})$ и

$$\widehat{jf_0''}\left(-i\left(\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\right)^{\top}\right) = +c\,\mathrm{Pd}\,\left(-i\left(\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\right)^{\top}\right) = -c\,\Box(\vec{l}),$$

где $\Box(\vec{l})$ — дифференциальный оператор вида (13.1.27). Получаем согласно (17.2.94)

$$\mathrm{nit}\,(\vec{x}) = -c\,\Box(\vec{l}) u f_0'(\vec{x}). \tag{17.2.99}$$

Пример 17.2.11

Вламар. Для вламара сквадр $c = 0$ и по формулам (14.8.64), (14.8.71)

$$\widehat{jf_0''}(\vec{\eta}) = \frac{\langle\vec{l}, \vec{h}\rangle}{1-|\vec{l}|^2}\,\mathrm{Pd}\,(\vec{l}, \vec{\eta}) - \langle\vec{l}, \vec{\eta}\rangle\langle\vec{h}, \vec{\eta}\rangle.$$

Тогда

$$\mathrm{nit}\,(\vec{x}) = \left(\frac{\langle\vec{l}, \vec{h}\rangle}{1-|\vec{l}|^2}\Box(\vec{l}) + \left\langle\vec{l}, \left(\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\right)^{\top}\right\rangle\left\langle\vec{h}, \left(\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\right)^{\top}\right\rangle\right) u f_0'(\vec{x}). \tag{17.2.100}$$

Из последних двух примеров следует, что сверхсветовые агвиды не взаимодействуют с однородным электростатическим полем.

§17.3 Магнитостатическое поле

В этом параграфе мы рассмотрим массу и энергию магнитостатического поля и его взаимодействие с агвидами. Соответствующие построения аналогичны построениям предыдущего параграфа для электростатического поля с заменой скалярной плотности заряда $jf_0(\vec{x})$ на 3-векторную плотность тока $\overrightarrow{jf}(\vec{x})$. Принципиальными отличиями от случая электростатического поля являются: 1) отрицательность массы квазикиперной натуральной частицы; 2) нелокальный характер взаимодействия движущегося агвида с магнитостатическим полем. Изложение в данном параграфе параллельно изложению в предыдущем параграфе.

17.3.1 Энергия и масса магнитостатического поля

Рассмотрим квазикиперную натуральную кулоновскую частицу. Для неё вектор скорости $\vec{l} = 0$ и $u_0 = 0$, $j_0 = 0$. Функция состояния $ux = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{u}(x) \end{pmatrix}$, функция тока $j(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{j}(x) \end{pmatrix}$. Центр частицы неподвижен, находится в точке $\vec{b} \in \mathbf{R}^3$ и

$$u(x) = uf(\vec{x} - \vec{b}),\ j(x) = jf(\vec{x} - \vec{b}),$$

т.е. функция состояния и функция тока не зависят от времени.

Согласно §§ 1.3,2.2,3.1,12.2,14.2 для покоящейся квазикиперной натуральной кулоновской частицы масса m равна функции Лагранжа n. Физическая энергия $\mathcal{E}s$ равна потенциальной энергии деформации $\mathcal{E}d$ и равна массе, взятой с обратным знаком

$$m = n = -\mathcal{E}s = -\mathcal{E}d. \tag{17.3.1}$$

Согласно формулам (2.2.25),(14.2.30)

$$\mathcal{E}d = \frac{1}{2} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left(rot\, \vec{uf}(\vec{x}) \right)^2 dx_1 dx_2 dx_3 \tag{17.3.2}$$

и

$$\mathcal{E}d = \frac{1}{2} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left(\vec{Hf}(\vec{x}) \right)^2 dx_1 dx_2 dx_3. \tag{17.3.3}$$

Согласно формуле (13.4.27) для массы натуральной частицы

$$\mathcal{E}d = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\langle \widehat{\overrightarrow{jf}}(\vec{\eta}), \widehat{\overrightarrow{jf}}(-\vec{\eta}) \rangle}{(\vec{\eta}^2)} d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3. \tag{17.3.4}$$

Согласно формулам (13.3.2),(13.3.4),(13.3.20)

$$\vec{Hf}(\vec{x}) = rot\, \vec{uf}(\vec{x}), \tag{17.3.5}$$

$$\overrightarrow{jf}(\vec{x}) = -\, rot\, \vec{Hf}(\vec{x}). \tag{17.3.6}$$

Итак, мы имеем 3 формулы для энергии магнитостатического поля: 1) формулу (17.3.2) — через функцию состояния; 2) формулу (17.3.3) — через напряжённость магнитного поля; 3) формулу (17.3.4) — через функцию тока.

Для натуральной частицы подинтегральная функция в (17.3.4) абсолютно суммируема, поэтому, если

$$\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta}) \equiv -\frac{\langle \widehat{\overrightarrow{jf}}(\vec{\eta}), \widehat{\overrightarrow{jf}}(-\vec{\eta})\rangle}{(\vec{\eta})^2}, \tag{17.3.7}$$

то прообраз Фурье $\mathrm{nit}\,(\vec{x})$ есть непрерывная функция и согласно (17.3.4)

$$\mathcal{E}d = -\frac{1}{2}\,\mathrm{nit}\,(0). \tag{17.3.8}$$

Далее в этом пункте потребуем, чтобы частица была доброй в смысле п. 13.10.3. Тогда по следствию 13.10.1

$$\widehat{\overrightarrow{uf}}(\vec{\eta}) = -\frac{\widehat{\overrightarrow{jf}}(\vec{\eta})}{(\vec{\eta})^2} \tag{17.3.9}$$

и функция состояния $\overrightarrow{uf}$ равна свёртке

$$\overrightarrow{uf} = -\frac{1}{4\pi}\left(\mathrm{cul} * \overrightarrow{jf}\right), \tag{17.3.10}$$

причём функция $\overrightarrow{uf} \in \bar{C}^{(1)}_{3,0}(\mathbf{R}^3)$ и удовлетворяет по лемме 13.10.3 условию

$$\exists C \in \mathbf{R}_+ \ \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3 \ \Big| \ \left|\overrightarrow{uf}(\vec{x})\right| \le \frac{C}{|\vec{x}|}. \tag{17.3.11}$$

Далее применима лемма (13.10.7) и из соотношения (17.3.7) следует равенство

$$\mathrm{nit}\,(\vec{x}) = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left\langle \overrightarrow{uf}(\vec{y}), \overrightarrow{jf}(\vec{y}-\vec{x})\right\rangle\, dy_1 dy_2 dy_3.$$

Отсюда и из (17.3.8) получаем ещё одно представление для энергии

$$\mathcal{E}d = -\frac{1}{2}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left\langle \overrightarrow{uf}(\vec{y}), \overrightarrow{jf}(\vec{y})\right\rangle\, dy_1 dy_2 dy_3. \tag{17.3.12}$$

Подставляя сюда формулу (17.3.10), получаем также

$$\mathcal{E}d = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\langle \overrightarrow{jf}(\vec{x}), \overrightarrow{jf}(\vec{y})\rangle}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, dx_1 dx_2 dx_3\, dy_1 dy_2 dy_3. \tag{17.3.13}$$

Также как и в предыдущем параграфе представление о токах, сосредоточенных на 0 и 1-мерных многообразиях, приводит к бесконечным энергиям. Пример 17.2.5 плотности заряда, сосредоточенной на отрезке и имеющей бесконечную энергию, непосредственно переносится на случай токов, если положить плотности тока $\overrightarrow{jf}(\vec{x}) = \vec{k}jf_0(\vec{x})$, где $\vec{k} = (0,0,1)$, а $jf_0(\vec{x})$ — плотность заряда примера 17.2.5. Непосредственно проверяется неограниченность функции состояния и энергии для тока, текущего по единичной окружности — см. п. 17.3.5. Построения п. 17.2.5 позволяют утверждать, что в случае двумерной плотности токи $\overrightarrow{jfd}(\vec{x})$, распределенной на кусочно гладкой поверхности S вида, описанного в п. 17.2.5, если плотность $\overrightarrow{jfd}(\vec{x})$ имеет при подходе к кромке поверхности особенности не выше ρ^λ, $\lambda > -1$, где ρ — расстояние от точки поверхности до кромки, то функция состояния $\overrightarrow{uf}(\vec{x})$ ограничена во всем пространстве

$\mathbf{R}^3$ и энергия конечна. Тот же вывод справедлив для конечного объединения поверхностей описанного типа с описанной плотностью тока. Итак, при вычислении энергии магнитостатического поля точечные и линейные токи недопустимы, а поверхностные — допустимы.

Напомним, что при изучении взаимодействия различных частиц допустимы и обобщённые частицы с функциями тока сосредоточенными в точке, на линии, поверхности или в объеме.

Для поверхностной плотности тока $\overrightarrow{jfd}(x)$ формулы (17.3.10),(17.3.12), (17.3.13) переходят соответственно в формулы

$$\overrightarrow{uf}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{\overrightarrow{jfd}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,d\sigma(\vec{y}); \tag{17.3.14}$$

$$\mathcal{E}d = -\frac{1}{2}\iint\limits_S \langle\overrightarrow{uf}(\vec{x}), \overrightarrow{jfd}(\vec{x})\rangle\,d\sigma(\vec{x}); \tag{17.3.15}$$

$$\mathcal{E}d = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\iint\limits_S \frac{\langle\overrightarrow{jfd}(\vec{x}), \overrightarrow{jfd}(\vec{y})\rangle}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,d\sigma(\vec{x})\,d\sigma(\vec{y}). \tag{17.3.16}$$

17.3.2 Индуктивность

Рассмотрим квазикиперную добрую покоящуюся частицу. Энергия деформации $\mathcal{E}d$ согласно формуле (17.3.4) есть положительно определенный квадратичный функционал от плотности тока $\overrightarrow{jf}$, в частности

$$\mathcal{E}d(\lambda\overrightarrow{jf}) = \lambda^2\mathcal{E}d(\overrightarrow{jf}) \tag{17.3.17}$$

при любом $\lambda \in \mathbf{R}$ и любой функции $\overrightarrow{jf} \in BT_3(\mathbf{R}^3)$. Пусть $I(\overrightarrow{jf})$ — некоторый линейный функционал на плотностях тока $\overrightarrow{jf} \in BT_3(\mathbf{R}^3)$, например, полный ток через данное сечение, тогда

$$I(\lambda\overrightarrow{jf}) = \lambda I(\overrightarrow{jf}) \tag{17.3.18}$$

при любом $\lambda \in \mathbf{R}$ и любой функции $\overrightarrow{jf} \in BT_3(\mathbf{R}^3)$. Пусть для данной функции тока $\overrightarrow{jf}(\vec{x})$ верно $I(\overrightarrow{jf}) \neq 0$, тогда по (17.3.17,17.3.18) при любом $\lambda \in \mathbf{R}$ верно

$$\mathcal{E}d(\lambda\overrightarrow{jf}) = \frac{1}{2}L\,I^2(\lambda\overrightarrow{jf}), \tag{17.3.19}$$

где

$$L \equiv \frac{2\mathcal{E}d(\overrightarrow{jf})}{I^2(\overrightarrow{jf})}. \tag{17.3.20}$$

Число L — назовём *коэффициентом самоиндукции* относительно функционала I. Введенный коэффициент самоиндукции имеет смысл лишь при изменениях плотности тока $\overrightarrow{jf}$, которые сводятся к умножению фиксированной плотности тока на число.

Пусть исходная частица является суммой конечного числа частиц, также квазикиперных добрых и покоящихся, т.е.

$$\overrightarrow{jf} = \sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{jf}_k,$$

где $\overrightarrow{jf}_k \in BT_3(\mathbf{R}^3)$, $k \in \overline{1,m}$. Подставив эту сумму в формулу (17.3.4), получим

$$\mathcal{E}d(\overrightarrow{jf}) = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{E}d(\overrightarrow{jf}_k) + \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=r+1}^{m} \operatorname{nio}(\overrightarrow{jf}_r, \overrightarrow{jf}_s), \tag{17.3.21}$$

где $\operatorname{nio}(\overrightarrow{jf}_r, \overrightarrow{jf}_s)$ — значение функционала взаимодействия r-той и s-той частиц. Введём для каждой частицы свой линейный функционал I_k, так чтобы при всех $k \in \overline{1,m}$

$$I_k(\overrightarrow{jf}_k) \neq 0$$

и введём *коэффициенты взаимной индукции*

$$L_{rs} \equiv \frac{\operatorname{nio}(\overrightarrow{jf}_r, \overrightarrow{jf}_s)}{I_r(\overrightarrow{jf}_r)\ I_s(\overrightarrow{jf}_s)}, \quad r \in \overline{1,m},\ s \in \overline{1,m}. \tag{17.3.22}$$

При $r = s$ это определение совпадает с определением коэффициента самоиндукции. В силу (17.3.21) и определения (17.3.22) получаем для любых чисел $\lambda_k \in \mathbf{R}$, $k \in \overline{1,m}$

$$\mathcal{E}d\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \overrightarrow{jf}_k\right) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} L_{rs} I_r(\lambda_r \overrightarrow{jf}_r) I_s(\lambda_s \overrightarrow{jf}_s). \tag{17.3.23}$$

Замечание 17.3.1 *Введённые определения коэффициентов самоиндукции и взаимной индукции и их связь с энергией деформации распространяются согласно п. 17.3.1 и на случай поверхностных токов.*

17.3.3 Взаимодействие лоренцева агвида с магнитостатическим полем.

Рассмотрим взаимодействие лоренцева агвида с магнитостатическим полем, т.е. с покоящейся квазикиперной частицей. Согласно формуле (17.2.3) образ Фурье функционала взаимодействия покоящейся квазикиперной частицы с натуральной частицей равен

$$\widehat{\operatorname{nit}}(\vec{\eta}) = -\frac{\langle \widehat{\overrightarrow{jf}}'(\vec{\eta}), \widehat{\overrightarrow{jf}}''(-\vec{\eta})\rangle}{\operatorname{Pd}(\vec{l}'', \vec{\eta})}. \tag{17.3.24}$$

Для лоренцева агвида верна формула (13.2.58), т.е.

$$\widehat{\overrightarrow{uf}}''(-\vec{\eta}) = -\frac{\widehat{\overrightarrow{jf}}''(-\vec{\eta})}{\operatorname{Pd}(\vec{l}'', \vec{\eta})}. \tag{17.3.25}$$

Из (17.3.24,17.3.25) следует

$$\widehat{\operatorname{nit}}(\vec{\eta}) = \left\langle \widehat{\overrightarrow{jf}}'(\vec{\eta}), \widehat{\overrightarrow{uf}}''(-\vec{\eta}) \right\rangle. \tag{17.3.26}$$

Если покоящаяся частица добрая, а вторая частица — кулоновская, то по лемме 13.10.7 функционал взаимодействия равен

$$\operatorname{nit}(\vec{x}) = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \langle \overrightarrow{jf}'(\vec{y}), \overrightarrow{uf}''(\vec{y} - \vec{x})\rangle dy_1 dy_2 dy_3. \tag{17.3.27}$$

Из формул (17.3.24,17.3.27) мы видим, что взаимодействие лоренцева агвида с магнитостатическим полем носит локальный характер иф агвид покоится. Итак, в отличие от взаимодействия с электростатическим полем взаимодействие движущегося агвида с магнитостатическим полем *не носит локального характера* в терминологии п. 12.1.3.

Вернемся к формулам (17.3.24) и заменим в ней величину $\mathrm{Pd}\,(\vec{l}'',\vec{\eta})$ на $\mathrm{Pd}\,(0,\vec{\eta})$. Мы совершим при $|\vec{l}|\ll 1$ относительную ошибку порядка $|\vec{l}|^2$ и получим выражение

$$\widehat{\mathrm{nit}}_c(\vec{\eta}) \equiv -\frac{\langle \widehat{\vec{jf}}'(\vec{\eta}), \widehat{\vec{jf}}''(-\vec{\eta})\rangle}{|\vec{\eta}|^2} = \langle \widehat{\vec{uf}}'(\vec{\eta}), \widehat{\vec{jf}}''(-\vec{\eta})\rangle. \qquad (17.3.28)$$

Оригинал $\mathrm{nit}_c(\vec{x})$ назовём *классическим функционалом взаимодействия лоренцева агвида с магнитостатическим полем.* Если обе частицы добрые, то по лемме (13.10.7)

$$\mathrm{nit}_c(\vec{x}) = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \langle \widehat{\vec{uf}}'(\vec{\eta}), \vec{jf}''(\vec{y}-\vec{x})\rangle\, dy_1 dy_2 dy_3, \qquad (17.3.29)$$

т.е. мы получаем формулу взаимодействия движущейся частицы с магнитостатическим полем, принятую в классической физике. Согласно предыдущему классическая формула для функционала взаимодействия (17.3.29) даёт локальный характер взаимодействия движущегося лоренцева агвида с магнитостатическим полем и применима лишь при малых скоростях $|\vec{l}|\ll 1$ с относительной ошибкой порядка $O(|\vec{l}|^2)$.

Замечание 17.3.2 *Формулу (17.3.24), справедливую для взаимодействия натуральных частиц, мы будем далее распространять на случаи, когда одна или обе частицы являются обобщёнными лоренцевыми агвидами для получения аппроксимации взаимодействия соответствующих натуральных частиц.*

17.3.4 Взаимодействие власкайла с магнитостатическим полем.

Если в условиях предыдущего пункта вторая частица заменяется власкайлом, то по замечанию 17.3.2 трансформация Фурье функционала взаимодействия равна

$$\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta}) = -\frac{\langle \widehat{\vec{jf}}'(\vec{\eta}), \vec{l}''\rangle e''}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l}'',\vec{\eta})}. \qquad (17.3.30)$$

Найдем функцию, образ Фурье которой равен $\frac{1}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l},\vec{\eta})}$, $|\vec{l}|<1$. Квадратичный полином $\mathrm{Pd}\,(\vec{l},\vec{\eta})$ равен

$$\mathrm{Pd}\,(\vec{l},\vec{\eta}) = (\vec{\eta})^2 - \langle \vec{l},\vec{\eta}\rangle^2 = \langle \vec{\eta},\, \mathrm{Ks}\,(\vec{l})\vec{\eta}\rangle. \qquad (17.3.31)$$

Согласно формуле (3.6.73), в которой вместо $\vec{l}$ подставлен 0, а вместо вектора $\tilde{\vec{l}}$ подставлен вектор $\vec{l}$, получаем

$$\mathrm{Ks}\,(\vec{l}) = R^{-1}R^{-1\top}, \qquad (17.3.32)$$

где

$$R = B(\vec{\beta})Q,\ Q\in SO(3),\ \vec{l} = Q^\top\vec{\beta}. \qquad (17.3.33)$$

Тогда

$$\mathrm{Pd}\,(\vec{l},\vec{\eta}) = \langle \vec{\eta}, R^{-1}R^{-1\top}\vec{\eta}\rangle = \langle R^{-1\top}\vec{\eta}, R^{-1\top}\vec{\eta}\rangle. \qquad (17.3.34)$$

Если F^{**} оператор трансформации Фурье из п. 15.1.6, то в обозначениях § 13.10

$$\frac{1}{4\pi}F^{**}(\,\mathrm{cul}\,) = \frac{1}{(\vec{\eta})^2}$$

и

$$S^{**}_{R^{-1\top}}F^{**} = |\det R|F^{**}S^{**}_R$$

по следствию 15.1.2. Тогда оригинал Фурье для функции $\frac{1}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l},\vec{\eta})}$ есть

$$|\det R|\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{cul}\,(R\vec{x}) = \frac{|\det R|}{4\pi|R\vec{x}|} \equiv \mathrm{vip}\,(\vec{l},\vec{x}). \tag{17.3.35}$$

Согласно (3.6.77)

$$\mathrm{vip}\,(\vec{l},\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\sqrt{1-|l|^2}}\frac{1}{\sqrt{\langle R\vec{x},R\vec{x}\rangle}} = \frac{1}{4\pi\sqrt{1-|l|^2}}\frac{1}{\sqrt{\langle \vec{x},R^\top R\vec{x}\rangle}}. \tag{17.3.36}$$

Согласно формуле (3.6.69) в данном случае

$$R^\top R = (BQ)^\top(BQ) = Q^\top B^2 Q = Q^\top\left(E + \frac{1}{1-|\vec{l}|^2}\vec{\beta}\vec{\beta}^\top\right)Q = \tag{17.3.37}$$

$$E + \frac{1}{1-|\vec{l}|^2}\vec{l}\vec{l}^\top$$

(мы использовали формулы (17.3.33) и (3.2.19)). Из (17.3.36,17.3.37) получаем

$$\mathrm{vip}\,(\vec{l},\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(\vec{x})^2(1-|\vec{l}|^2)+\langle\vec{l},\vec{x}\rangle^2}} \tag{17.3.38}$$

или через векторное произведение

$$\mathrm{vip}\,(\vec{l},\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(\vec{x})^2-[\vec{l},\vec{x}]^2}}. \tag{17.3.39}$$

Итак, мы построили регулярную обобщённую функцию медленного роста $\mathrm{vip}\,(\vec{l},\vec{x})$, которая зависит от параметра $\vec{l}\in\mathbf{R}^3$, $|\vec{l}|<1$ и при каждом значении параметра $\vec{l}$ является регулярной функцией медленного роста по переменной $\vec{x}$, т.е. $\mathrm{vip}\,(\vec{l},\vec{x})\in S'(\mathbf{R}^3)$ с трансформацией Фурье

$$\widehat{\mathrm{vip}}\,(\vec{l},\vec{\eta}) = \frac{1}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l},\vec{\eta})}. \tag{17.3.40}$$

В случае, когда покоящаяся частица добрая, обобщённая функция медленного роста по переменной $\vec{\eta}\in\mathbf{R}^3$ вида

$$\widehat{\overrightarrow{\mathrm{spec}}}\,(\vec{l},\vec{\eta}) \equiv -\frac{\widehat{\overrightarrow{jf}}'(\vec{\eta})}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l},\vec{\eta})} \tag{17.3.41}$$

регулярна и является непрерывной во всех точках кроме, быть может, точки $\vec{\eta} = 0$. Оригинал Фурье $\overrightarrow{\mathrm{spec}}(\vec{l}, \vec{x})$ по переменной $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ согласно § 13.10 также регулярная обобщённая функция класса $\bar{C}^{(1)}_{0,3}(\mathbf{R}^3) \cap W^{(1)}_{2,3}(\mathbf{R}^3)$ и верна теорема о свёртке

$$\overrightarrow{\mathrm{spec}}(\vec{l}, \vec{x}) = -\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \overrightarrow{jf}'(\vec{y}) \,\mathrm{vip}\,(\vec{l}, \vec{x} - \vec{y})\, dy_1 dy_2 dy_3 = -\left(\overrightarrow{jf}'(+) * \mathrm{vip}\,(\vec{l}, +)\right)(\vec{x}). \tag{17.3.42}$$

Согласно формуле 17.3.30 функционал взаимодействия тогда равен

$$\mathrm{nit}\,(\vec{x}) = \left\langle \overrightarrow{\mathrm{spec}}(\vec{l}'', \vec{x}), \vec{l}'' \right\rangle e''. \tag{17.3.43}$$

Рассмотрим согласно замечанию 17.3.2 также случай, когда и покоящаяся частица является обобщённой лоренцевой агвидной квазикиперной частицей, причём функция тока $\overrightarrow{jf}' \in \mathcal{E}'_3(\mathbf{R}^3)$ имеет компактный носитель. Тогда образ Фурье $\widehat{\overrightarrow{jf}}' \in S'_3(\mathbf{R}^3)$ есть регулярная обобщённая функция и $\widehat{\overrightarrow{jf}}' \in C^{(\infty)}_3(\mathbf{R}^3)$ и для функций $\widehat{\overrightarrow{jf}}'$ и $\mathrm{vip}\,(\vec{l}, \vec{x})$ согласно [24, с. 70,105] справедливы утверждения: 1) существует свёртка

$$\overrightarrow{\mathrm{spec}}(\vec{l}, \vec{x}) = -\left(\overrightarrow{jf}'(+) * \mathrm{vip}\,(\vec{l}, +)\right)(\vec{x}) \tag{17.3.44}$$

из класса $S'_3(\mathbf{R}^3)$, 2) на дополнении к носителю $\mathrm{supp}\,(\overrightarrow{jf}') \equiv K$ функция $\overrightarrow{\mathrm{spec}}(\vec{l}, \vec{x})$ принадлежит классу $C^{(\infty)}_3(\mathbf{R}^3 \setminus K)$ и задаётся формулой

$$\overrightarrow{\mathrm{spec}}(\vec{l}, \vec{x}) = -\left(\overrightarrow{jf}'(\vec{y}),\, \mathrm{vip}\,(\vec{l}, \vec{x} - \vec{y})\right), \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^3 \setminus K, \tag{17.3.45}$$

3) верно (17.3.41).

17.3.5 Взаимодействие кольцевого тока с властайлом.

В качестве применения последних рассуждений рассмотрим взаимодействие постоянного линейного тока, протекающего по замкнутой поверхности, с властайлом. Итак, в этом пункте мы рассмотрим покоящуюся лоренцеву агвидную квазикиперную обобщённую частицу с функцией тока

$$\overrightarrow{jf}'(\vec{x}) = I\left[\vec{k}, \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right] \delta\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a\right) \delta(x_3). \tag{17.3.46}$$

Здесь $I \in \mathbf{R}$ — сила тока; $a \in \mathbf{R}_+$ — радиус окружности C_a, лежащей в плоскости x_1, x_2 и с центром в нуле; $\delta(t) \in D'(\mathbf{R})$ — одномерная δ-функция.

Согласно предыдущему пункту функция состояния $\overrightarrow{uf}(\vec{x})$ будет класса $C^{(\infty)}_3(\mathbf{R}^3 \setminus C_a)$ и при $\vec{x} \in \mathbf{R}^3 \setminus C_a$ верно

$$\overrightarrow{uf}(\vec{x}) = \overrightarrow{\mathrm{spec}}(0, \vec{x}) = \oint\limits_{C_a} \overrightarrow{jf}(\vec{y})\, \mathrm{cul}\,(0, \vec{y} - \vec{x})\, ds(\vec{y}). \tag{17.3.47}$$

Вектор нулевых моментов для функции тока (17.3.46) равен нулю. Вычислим матрицу первых моментов $A \in M(3, \mathbf{R})$ вида

$$A \equiv \frac{I}{a} \oint\limits_{C_a} [\vec{k}, \vec{x}]\vec{x}^\top\, ds(\vec{x}) = \tag{17.3.48}$$

$$\frac{I}{a}\,\mathrm{Sw}\,(\vec{k})\oint\limits_{C_a}\vec{x}\vec{x}^\top\,ds(\vec{x})=\frac{I}{a}\,\mathrm{Sw}\,(\vec{k})\begin{pmatrix}2\pi\frac{a^3}{2}&0&0\\0&2\pi\frac{a^3}{2}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\pi a^2 I\,\mathrm{Sw}\,(\vec{k})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\pi a^2 I\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\pi a^2 I\,\mathrm{Sw}\,(\vec{k}).$$

Согласно п. 13.11.1 тогда сумма Тейлора первого порядка с центром в нуле функции $\widehat{\overrightarrow{jf}}(\vec{\eta})$ равна

$$t_1\left(\widehat{\overrightarrow{jf}}\right)(\vec{\eta})=i\pi a^2 I\,\mathrm{Sw}\,(\vec{k})\vec{\eta}=i\,\mathrm{Sw}\,(\pi a^2 I\vec{k})\vec{\eta}=i[\pi a^2 I\vec{k},\vec{\eta}].$$

Для покоящейся обобщённой частицы следовательно определен спин и согласно формуле (13.11.76) равен

$$\vec{S}=\pi a^2 I\vec{k}. \tag{17.3.49}$$

Вывод 17.3.1 *Вектор спина кольцевого тока силой I, бегущего по окружности радиуса a, равен по модулю площади ограниченного круга на силу тока и направлен перпендикулярно плоскости окружности, так что с острия вектора спина $\vec{S}$ ток бежит по окружности против часовой стрелки.*

Вычислим теперь функционал взаимодействия власкайла с данным кольцевым током, для чего согласно предыдущему пункту достаточно вычислить функцию $\overrightarrow{spec}(\vec{l},\vec{x})$ по формуле (17.3.45), т.е.

$$\overrightarrow{\mathrm{spec}}\,(\vec{l},\vec{x})=-\frac{I}{a}\oint\limits_{C_a}[\vec{k},\vec{y}]\,\mathrm{vip}\,(\vec{l},\vec{y}-\vec{x})\,ds(\vec{y}). \tag{17.3.50}$$

Введём параметризацию на окружности C_a, т.е. положим $\vec{y}=a(\cos\varphi,\sin\varphi,0),\varphi\in[0,2\pi]$. Кроме того, введём обозначение для зависимости функции $\overrightarrow{\mathrm{spec}}$ от радиуса окружности C_a, т.е. $\overrightarrow{\mathrm{spec}}\,(\vec{l},\vec{x},a)$.

Введём обозначение $\vec{\tau}(\varphi)\equiv(\cos\varphi,\sin\varphi,0)$. Тогда из (17.3.50)

$$\overrightarrow{\mathrm{spec}}\,(\vec{l},\vec{x},a)=-I\left[\vec{k},a\int\limits_0^{2\pi}\vec{\tau}(\varphi)\,\mathrm{vip}\,(\vec{l},a\vec{\tau}(\varphi)-\vec{x})\,d\varphi\right]= \tag{17.3.51}$$

$$-I\left[\vec{k},\int\limits_0^{2\pi}\vec{\tau}(\varphi)\,\mathrm{vip}\,\left(\vec{l},\vec{\tau}(\varphi)-\frac{\vec{x}}{a}\right)\,d\varphi\right].$$

Отсюда следует, что

$$\overrightarrow{\mathrm{spec}}\,(\vec{l},\vec{x},a)=\overrightarrow{\mathrm{spec}}\left(\vec{l},\frac{\vec{x}}{a},1\right) \tag{17.3.52}$$

и

$$\overrightarrow{\mathrm{spec}}\,(\vec{l},\vec{x},a)=-I\left[\vec{k},\overrightarrow{\mathrm{stec}}\left(\vec{l},\frac{\vec{x}}{a}\right)\right], \tag{17.3.53}$$

где

$$\overrightarrow{\mathrm{stec}}\,(\vec{l},\vec{x})\equiv\int\limits_0^{2\pi}\vec{\tau}(\varphi)\,\mathrm{vip}\,(\vec{l},\vec{\tau}(\varphi)-\vec{x})\,d\varphi. \tag{17.3.54}$$

Или в координатах:

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{stec}_1(\vec{l},\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(\vec{r}(\varphi)-\vec{x})^2-[\vec{l},\vec{r}(\varphi)-\vec{x}]^2}};\\ \operatorname{stec}_1(\vec{l},\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(\vec{r}(\varphi)-\vec{x})^2-[\vec{l},\vec{r}(\varphi)-\vec{x}]^2}};\\ \operatorname{stec}_3(\vec{l},\vec{x}) = 0. \end{array}\right. \tag{17.3.55}$$

Функционал взаимодействия кольцевого тока с власкайлом будет равен

$$\operatorname{nit}(\vec{x}) = -e''I\left\langle\left[\vec{k},\overrightarrow{\operatorname{stec}}\left(\vec{l''},\frac{\vec{x}}{a}\right)\right],\vec{l''}\right\rangle = e''I\left\langle\left[\vec{k},\vec{l''}\right],\overrightarrow{\operatorname{stec}}\left(\vec{l''},\frac{\vec{x}}{a}\right)\right\rangle \tag{17.3.56}$$

при $\vec{x}\in\mathbf{R}^3\setminus C_a$.

17.3.6 Взаимодействие влавина с магнитостатическим полем

Пусть покоящийся квазикиперный агвид — добрый, а второй агвид — досветовой влавин. Перенесем построения п. 17.3.4 на этот случай замены скайла произвольным досветовым влавином. Если покоящаяся квазикиперная частица добрая, то согласно п. 17.3.4 функционал взаимодействия равен сумме сверток

$$\operatorname{nit} = \sum_{\alpha=1}^{3} jfc''_\alpha(+) * \operatorname{spec}_\alpha(\vec{l''},+), \tag{17.3.57}$$

где $jfc''_\alpha(\vec{x}) \equiv jf_\alpha{}''(-\vec{x})$. В частном случае, когда обобщённая функция $\overrightarrow{jf}'(\vec{x})$ имеет компактный носитель, согласно п. 17.3.4 функция $\overrightarrow{\operatorname{spec}}(\vec{l''},\vec{x})$ класса $C_3^{(\infty)}(\mathbf{R}^3\setminus\operatorname{supp}(\overrightarrow{jf}'))$. Так как обобщённая функция $\overrightarrow{jf}''$ имеет точечный носитель, то тогда

$$\operatorname{nit}(\vec{x}) = \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\widetilde{jf}''_\alpha(-\vec{y}),\operatorname{spec}_\alpha\left(\vec{l''},\vec{x}-\vec{y}\right)\right) = \left(\widetilde{\overrightarrow{jf}}''(\vec{y}),\overrightarrow{\operatorname{spec}}\left(\vec{l''},\vec{x}+\vec{y}\right)\right), \tag{17.3.58}$$

при $\vec{x}\in\mathbf{R}^3\setminus\operatorname{supp}(\overrightarrow{jf}')$, где $\widetilde{\overrightarrow{jf}}''$ — продолжение обобщённой функции с пространства $S_3(\mathbf{R}^3)$ на пространство $C_3^{(\infty)}(\mathbf{R}^3)$.

§17.4 Вычисление спина агвида

В параграфах 3.5,3.7, 13.3, 13.11, 14.7 мы изучали спин и привели формулы для его вычисления. В данном параграфе мы покажем, что спин равен половине векторного момента 3-функции псевдотока и установим некоторые новые формулы для его вычисления.

17.4.1 Выражение спина через векторный момент функции псевдотока. Рассмотрим натуральную частицу, у которой существует интеграл

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} |\overrightarrow{jsf}(\vec{x})|(1+|\vec{x}|)\,dx_1dx_2dx_3 \tag{17.4.1}$$

от 3-вектора плотности псевдотока $\overrightarrow{jsf}(\vec{x})$. Тогда согласно утверждениям 14.6.3 и 14.6.4 существуют все моменты первого порядка у функции $\overrightarrow{jsf}(\vec{x})$ и образ Фурье $\widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta})\in\bar{C}_{3,0}^{(1)}(\mathbf{R}^3)$.

Лемма 17.4.1 *У натуральной частицы, удовлетворяющей условию (17.4.1), существует спин*

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} [\vec{x}, \overrightarrow{jsf}(\vec{x})]\, dx_1 dx_2 dx_3 \qquad (17.4.2)$$

Доказательство. В условиях леммы согласно п. 13.11.5

$$\widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta}) = i[\vec{S}, \vec{\eta}] + o(|\vec{\eta}|).$$

Где $\vec{S} \in \mathbf{R}^3$ — вектор спина. Или в координатах

$$\widehat{jsf}_\alpha(\vec{\eta}) = i e_{\alpha\beta\gamma} S_\beta \eta_\gamma + O(|\vec{\eta}|), \quad \alpha \in \overline{1,3}.$$

Отсюда согласно формуле (13.11.7) получаем для моментов

$$MC_\gamma(jsf_\alpha) = e_{\alpha\beta\gamma} S_\beta. \qquad (17.4.3)$$

Тогда верно (17.4.2), ибо согласно (17.4.3)

$$\frac{1}{2} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} [\vec{x}, \overrightarrow{jsf}(\vec{x})]_\beta\, dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{2} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} e_{\beta\nu\theta} x_\nu jsf_\theta(\vec{x})\, dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$\frac{1}{2} e_{\beta\nu\theta} MC_\nu(jsf_\theta) = \frac{1}{2} e_{\beta\nu\theta} e_{\theta\xi\nu} S_\xi.$$

Но согласно тождеству (1.3.25) для символа Леви-Чивиты имеем

$$\frac{1}{2} e_{\beta\nu\theta} e_{\theta\xi\nu} S_\xi = \frac{1}{2} \left(\delta_{\nu\nu}\delta_{\beta\xi} - \delta_{\nu\xi}\delta_{\beta\nu}\right) S_\xi = \frac{1}{2} \left(3\delta_{\beta\xi} - \delta_{\xi\beta}\right) S_\xi = S_\beta.$$

♢

Итак, спин агвида равен половине векторного момента 3-функции псевдотока.

17.4.2 Замкнутый линейный ток.

Пусть $C \in \mathbf{R}^n$ — замкнутая кусочно гладкая кривая с выбранным направлением обхода и $I \in \mathbf{R}$ — число. Тогда замкнутым линейным током силы I мы назовём обобщённую функцию $jf \in D_n(\mathbf{R}^n)$, действующую на каждую основную функцию $\varphi \in D_n(\mathbf{R}^n)$ по правилу

$$(jf, \varphi) \equiv I \oint_C \langle \varphi, dl \rangle.$$

Утверждение 17.4.1 *Замкнутый линейный ток $jf \in D'_n(\mathbf{R}^n)$ задаёт соленоидальное векторное поле в $\mathbf{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$, тогда

$$(\, div\,(jf), \varphi) = -(jf,\, grad\, \varphi) = -I \oint_c \langle\, grad\, \varphi, dl \rangle = 0.$$

♢

Замкнутый линейный ток является обобщённой функцией с компактным носителем, поэтому у него существуют все моменты, а следовательно согласно § 13.11

существует и спин. Аппроксимируя обобщённую функцию с компактным носителем регулярной обобщённой функцией с компактным носителем и переходя к пределу в формуле (17.4.2), мы получим в трёхмерном случае

$$\vec{S} = \frac{1}{2} I \oint\limits_C [\vec{x}, d\vec{l}]. \tag{17.4.4}$$

Пусть в $\mathbf{R}^3$ задана кусочно-гладкая ориентированная поверхность G, ограниченная контуром C, ориентация которой согласована с ориентацией контура C.

Лемма 17.4.2 *Проекция спина замкнутого линейного тока на любой единичный вектор $\vec{n} \in \mathbf{R}^3$ равна ориентированной проекции площади любой кусочно-гладкой ориентированной поверхности G, ограниченной ориентированным замкнутым контуром C, на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{n}$ умноженной на силу тока I.*

Доказательство. Согласно формуле (17.4.4) верно

$$\langle \vec{n}, \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} I \oint_C \langle \vec{n}, [\vec{x}, d\vec{l}] \rangle = \frac{1}{2} I \oint_C \langle [\vec{n}, \vec{x}], d\vec{l} \rangle.$$

По формуле Стокса

$$\langle \vec{n}, \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} I \iint\limits_G \left\langle r\vec{o}t[\vec{n}, \vec{x}], d\vec{\sigma} \right\rangle = I \iint\limits_G \langle \vec{n}, d\vec{\sigma} \rangle .$$

◇

Следствие 17.4.1 *В условиях леммы 17.4.2*

$$\vec{S} = I \iint\limits_G d\vec{\sigma} \equiv I\vec{\sigma}(G). \tag{17.4.5}$$

Итак, результат, полученный для спина линейного кольцевого тока в п. 17.3.5, справедлив для любого линейного замкнутого тока.

17.4.3 Спин вращательно симметричной доброй квазикиперной покоящейся частицы

Лемма 17.4.3 *Спин $\vec{S}$ вращательно симметричной доброй квазикиперной покоящейся частицы, удовлетворяющей условию (17.4.1), существует и направлен по оси вращения.*

Доказательство. Пусть $Q \in SO(3)$ произвольная матрица поворота вокруг оси симметрии частицы. Тогда по формуле (17.4.2)

$$Q\vec{S} = \frac{1}{2} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} Q \left[\vec{x}, \vec{jf}(\vec{x}) \right] \, dx_1 dx_2 dx_3.$$

По свойству векторного произведения (формула (3.6.18))

$$Q \left[\vec{x}, \vec{jf}(\vec{x}) \right] = \left[Q\vec{x}, Q\vec{jf}(\vec{x}) \right] .$$

По свойству вращательной симметрии частицы

$$Q\overrightarrow{jf}(\vec{x}) = \overrightarrow{jf}(Q\vec{x}).$$

Получаем

$$Q\vec{S} = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left[Q\vec{x}, \overrightarrow{jf}(Q\vec{x})\right]\, dx_1dx_2dx_3.$$

Откуда в силу инвариантности меры Лебега при ортогональных поворотах

$$Q\vec{S} = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} [\vec{y}, \overrightarrow{jf}(\vec{y})]\, dy_1dy_2dy_3 = \vec{S}.$$

Так как равенство $Q\vec{S} = \vec{S}$ выполнено для всех матриц поворота Q, то вектор $\vec{S}$ коллинеарен оси симметрии. $\diamondsuit$

Таким образом при вычислении спина вращательно симметричной частицы достаточно вычислить его проекцию на ось вращения.

Рассмотрим вращательно симметричную квазикиперную покоящуюся частицу, удовлетворяющую условию (17.4.1). В цилиндрической системе координат с локальным ортонормированным базисом $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ 3-функция тока допускает представлении

$$\overrightarrow{jf}(\vec{x}) = a_1(\rho,z)\vec{e}_\rho + a_2(\rho,z)\vec{e}_\varphi + a_3(\rho,z)\vec{e}_z \tag{17.4.6}$$

согласно п. 16.3.3 причём функции $\rho^2 a_\alpha(\rho,z);\ \alpha \in \overline{1,3}$ суммируемы на $\Pi \equiv [0,\infty[\times\mathbf{R}$. Проекция спина на ось вращения тогда равна по формуле (17.4.2)

$$S_3 = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \left\langle \vec{e}_z, [\vec{x}, \overrightarrow{jf}(\vec{x})]\right\rangle dx_1dx_2dx_3 = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty \langle[\vec{e}_z, \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z], a_1\vec{e}_\rho + a_2\vec{e}_\varphi + a_3\vec{e}_z\rangle$$

$$\rho\, d\rho d\varphi dz = \frac{1}{2}2\pi \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty a_2(\rho,z)\rho^2 d\rho dz = \pi \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty a_2(\rho,z)\rho^2 d\rho dz,$$

т.е.

$$S_3 = \pi \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty a_2(\rho,z)\rho^2 d\rho dz. \tag{17.4.7}$$

Из формулы (17.4.7) вытекает

Следствие 17.4.2 *Если в условиях леммы 17.4.3 3-функция тока $\overrightarrow{jf}(\vec{x})$ есть m-поле, то спин равен нулю.*

Итак, во вращательно симметричном случае вклад в спин даёт лишь p-поле 3-функции тока.

Пример 17.4.1

Пусть p-поле $\overrightarrow{jf}(\vec{x})$ имеет постоянную плотность $a_2(\rho, z) = a$ в кольце прямоугольного сечения $c \le \rho \le d, \ -h \le z \le h$. По формуле (17.4.7) величина спина равна

$$S_3 = \pi a \int\limits_c^d \int\limits_{-h}^h \rho^2 \, d\rho = \frac{1}{3}\pi a(d^3 - c^3)2h = \frac{1}{3}\pi(d^2 + dc + c^2)I, \tag{17.4.8}$$

где

$$I = a(d - c)2h \tag{17.4.9}$$

величина полного тока через поперечное сечение кольца.

Пример 17.4.2

Пусть p-поле $\overrightarrow{jf}(\vec{x})$ имеет постоянную плотность $a_2(\rho, z) = a$ в кольце кругового сечения. Пусть R — радиус оси тора, r — радиус круга в поперечном сечении.

Введём параметризацию в объеме тора

$$\begin{cases} \rho &= R + \nu \cos\psi, \\ z &= \nu \sin\psi, \end{cases} \qquad \nu \in [0, r], \ \psi \in [0, 2\pi]$$

и применим формулу (17.4.7). Получим

$$S_3 = \pi a \int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} (R + \nu\cos\psi)^2 \, \nu d\nu d\psi = \pi a \int\limits_0^r \left(R^2 + \frac{\nu^2}{2}\right) 2\pi\nu d\nu = \pi(a\pi r^2)\left(R^2 + \frac{r^2}{4}\right)$$

или

$$S_3 = \pi\left(R^2 + \frac{r^2}{4}\right) I, \tag{17.4.10}$$

где

$$I = a\pi r^2 \tag{17.4.11}$$

величина полного тока через поперечное сечение тора.

§17.5 Двумерное магнитостатическое поле

Начиная с этого места далее, если специально не оговорено, термин *агвид* означает лоренцеву агвидную обобщённую частицу с 4-функцией состояния $uf \in D_4'(\mathbf{R}^3)$. Чтобы получить более простые законы взаимодействия с магнитостатическими полями перейдем к более простым идеализациям, а именно, рассмотрим взаимодействие агвида с двумерными магнитостатическими полями.

17.5.1 Функционал взаимодействия агвида с двумерным магнитостатическим полем.

Рассмотрим поле, создаваемое функцией тока $jf'(\vec{x})$, не зависящей от одной переменной x_3, — такие поля мы называем двумерными. Продолжая рассмотрения § 17.3, мы считаем первый агвид квазикиперным и покоящимся с двумерным полем. В этом случае первый агвид не является натуральной частицей и соотношения (17.3.24),(17.3.27) для вычисления функционала взаимодействия непосредственно не применимы. Однако, двумерное магнитостатическое поле как идеализация в физике получается предельным переходом из полей трехмерных финитных токов, когда размеры по оси x_3 неограниченно увеличиваются.

Пусть $\overrightarrow{jf}'(\vec{x}) \in \mathcal{E}'_3(\mathbf{R}^2)$ обобщённая функция на $\mathbf{R}^2$ с компактным носителем. $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ — обозначение линейного подпространства обобщённых функций с компактным носителем на $\mathbf{R}^n, \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n) \subset S'(\mathbf{R}^n)$. Мы обозначаем через $\mathcal{E}'_k(\mathbf{R}^n) \equiv (\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n))^k$ — пространство обобщённых k-вектор функций с компактным носителем. Пусть $\chi_a(t) \in S'(\mathbf{R})$ — характеристическая функция сегмента $[-a, a]$, $a \in \mathbf{R}_+$. Тогда $\overrightarrow{jf}'_a(\vec{x}) \equiv \overrightarrow{jf}'_a(x_1, x_2)\chi_a(x_3)$ есть обобщённая функция $\overrightarrow{jf}'_a \in \mathcal{E}'_3(\mathbf{R}^3)$ с компактным носителем. Образ Фурье обобщённой функции $\chi_a(t)$ есть обобщённая функция $\hat{\chi}_a(\eta_3) \in S'(\mathbf{R})$ вида

$$\hat{\chi}_a(\eta_3) = 2\frac{\sin(a\eta_3)}{\eta_3}. \tag{17.5.1}$$

Отображение $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ из класса $\Theta_M(\mathbf{R}^n)$, если $f \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$ и выполнено требование

$$\forall \alpha \in \mathbf{N}_o{}^n \ \exists C \in \mathbf{R}_+ \ \exists m \in \mathbf{N}_o \ \forall x \in \mathbf{R}^n \ \Big| \ |f^{(\alpha)}(x)| \le C(1 + |x|^2)^m. \tag{17.5.2}$$

Если обобщённая функция $\overrightarrow{jf}' \in \mathcal{E}'_3(\mathbf{R}^2)$, то её образ Фурье $\widehat{jf}' \in (\Theta_M(\mathbf{R}^2))^3 \equiv \Theta_{M,3}(\mathbf{R}^2)$ согласно [24, с.104]. Обобщённая функция $\overrightarrow{jf}'_a$ есть прямое произведение обобщённых функций с компактным носителем, поэтому её образ Фурье

$$\widehat{\overrightarrow{jf}}'_a(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \widehat{\overrightarrow{jf}}'(\eta_1, \eta_2)\hat{\chi}_a(\eta_3). \tag{17.5.3}$$

Обоснование предельного перехода при $a \to +\infty$ в функционале взаимодействия производится следующей теоремой.

Теорема 17.5.1 *Пусть $\overrightarrow{jf}' \in \mathcal{E}'_3(\mathbf{R}^2)$ и $\widehat{\overrightarrow{jf}}'(0) = 0$. Пусть $\chi_a \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$ — характеристическая функция сегмента $[-a, a], a \in \mathbf{R}_+$. Пусть вектор скорости $\vec{l}'' \in \mathbf{R}^3$ по модулю меньше единицы $|\vec{l}''| < 1$. Пусть $\widehat{\overrightarrow{jf}}'' \in C_3^{(1)}(\mathbf{R}^3)$ и выполнено условие*

$$\exists C \in \mathbf{R}_+ \ \exists m \in \mathbf{N}_o \ \forall \alpha \in \mathbf{N}_o{}^3, |\alpha| \le 1 \ \forall \vec{\eta} \in \mathbf{R}^3 \ \Big| \ \left| \widehat{\overrightarrow{jf}}''^{(\alpha)}(\vec{\eta}) \right| \le C(1 + |\vec{\eta}|^2)^m. \tag{17.5.4}$$

Тогда в $S'(\mathbf{R}^3)$ существует предел

$$\lim_{a \to +\infty} \left(-\frac{\langle \overrightarrow{jf}'_a(\vec{\eta}), \widehat{\overrightarrow{jf}}''(-\vec{\eta}) \rangle}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l}'', \vec{\eta})} \right) = 2\pi\delta(\eta_3)\,\widehat{\mathrm{nitd}}\,(\eta_1, \eta_2), \tag{17.5.5}$$

где функция

$$\widehat{\mathrm{nitd}}\,(\eta_1, \eta_2) \equiv -\frac{\langle \widehat{\overrightarrow{jf}}'(\eta_1, \eta_2), \widehat{\overrightarrow{jf}}''(-\eta_1, -\eta_2, 0) \rangle}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l}'', (\eta_1, \eta_2, 0))}, \tag{17.5.6}$$

где функция $\widehat{\mathrm{nitd}}\,(\eta_1, \eta_2)$ непрерывно дифференцируема во всех точках $(\eta_1, \eta_2) \in \mathbf{R}^2$, кроме точки $(0, 0)$, локально суммируема на $\mathbf{R}^2$, растёт в бесконечности не быстрее полинома некоторой степени и определяет регулярную обобщённую функцию из пространства $S'(\mathbf{R}^2)$.

Справедливость теоремы 17.5.1 вытекает из следующей леммы.

Лемма 17.5.1 *Пусть функция* $p \in \Theta_M(\mathbf{R}^2)$ *и* $p(0) = 0$. *Пусть вектор* $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ *по модулю меньше единицы,* $|\vec{l}| < 1$. *Пусть функция* $q \in C^{(1)}(\mathbf{R}^3)$ *удовлетворяет условию*

$$\exists C \in \mathbf{R}_+ \ \exists m \in \mathbf{N}_o \ \forall \alpha \in {\mathbf{N}_o}^3, |\alpha| \le 1 \ \forall \vec{\eta} \in \mathbf{R}^3 \ \Big| \ |q^{(\alpha)}(\vec{\eta})| \le C(1 + |\vec{\eta}|^2)^m. \tag{17.5.7}$$

Тогда в $S'(\mathbf{R})^3$ *существует предел*

$$\lim_{a \to +\infty} \left(\frac{2\sin(a\eta_3)}{\eta_3} \frac{p(\eta_1, \eta_2) q(\eta_1, \eta_2, \eta_3)}{\mathrm{Pd}\left(\vec{l}, (\eta_1, \eta_2, \eta_3)\right)} \right) = 2\pi\delta(\eta_3) w(\eta_1, \eta_2), \tag{17.5.8}$$

где функция

$$w(\eta_1, \eta_2) \equiv \frac{p(\eta_1, \eta_2) q(\eta_1, \eta_2, 0)}{\mathrm{Pd}\left(\vec{l}, (\eta_1, \eta_2, 0)\right)} \tag{17.5.9}$$

непрерывно дифференцируема во всех точках $(\eta_1, \eta_2) \in \mathbf{R}^2$ *кроме точки* $(0, 0)$, *локально суммируема на* $\mathbf{R}^2$, *растет в бесконечности не быстрее полинома некоторой степени и определяет регулярную обобщённую функцию из пространства* $S'(\mathbf{R}^2)$.

Для доказательства леммы 17.5.1 нам потребуется следующая лемма.

Лемма 17.5.2 *Пусть на* $\mathbf{R}$ *заданы три непрерывные ограниченные вещественные функции* $h(x), g(x), f(x)$ *такие, что:*

I. $\exists C \in \mathbf{R}_+ \ \forall A \in \mathbf{R} \ \forall B \in \mathbf{R} \ \Big| \ |\int\limits_A^B h(x)\,dx| \le C$;

II. Функция g *абсолютно интегрируема вместе со своей первой производной* g' *на* $\mathbf{R}$;

III. Функция f *неотрицательна и монотонно возрастает на* $]-\infty, a]$ *и монотонно убывает на* $[a, +\infty[$.

Тогда справедливо неравенство

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x) g(x) f(x)\,dx \right| \le C f(a) \left(\sup_{x \in \mathbf{R}} |g(x)| + \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g'(x)|\,dx \right). \tag{17.5.10}$$

Доказательство леммы 17.5.2. В силу суммируемости функции g и ограниченности функций h и f интеграл в левой части (17.5.10) существует. Возьмём произвольное число $p < a$ и произвольное число $q > a$. По формулам Бонне [69, с.117,119] существуют числа $A \in [p, a]$ и $B \in [a, q]$, что

$$\int\limits_p^a h(x) g(x) f(x)\,dx = f(a) \int\limits_A^a h(x) g(x)\,dx$$

и

$$\int\limits_a^q h(x) g(x) f(x)\,dx = f(a) \int\limits_a^B h(x) g(x)\,dx.$$

Поэтому

$$\int\limits_p^q h(x) g(x) f(x)\,dx = f(a) \int\limits_A^B h(x) g(x)\,dx. \tag{17.5.11}$$

Интегрируем по частям

$$\int_A^B h(x)g(x)\,dx = g(B)\int_A^B h(t)dt - \int_A^B \left(\int_A^x h(t)dt\right) g'(x)\,dx.$$

По условию I получаем

$$\left|\int_A^B h(x)g(x)\,dx\right| \le C\left(|g(B)| + \int_A^B |g'(x)|\,dx\right). \qquad (17.5.12)$$

Из (17.5.11) и (17.5.12) в силу произвольности чисел p и q следует (17.5.10). $\diamondsuit$

Доказательство леммы 17.5.1. Функция, определенная на $\mathbf{R}^3$, вида

$$v_a(\eta_1,\eta_2,\eta_3) \equiv 2\frac{\sin(a\eta_3)}{\eta_3}\frac{p(\eta_1,\eta_2)q(\eta_1,\eta_2,\eta_3)}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l},(\eta_1,\eta_2,\eta_3))} \qquad (17.5.13)$$

непрерывно дифференцируема во всех точках $\vec{\eta}\in\mathbf{R}^3$ кроме точки $\vec{\eta}=0$, как отношение непрерывно дифференцируемых функций и суммируема в некоторой окрестности нуля, ибо числитель дроби непрерывен, а знаменатель удовлетворяет неравенству

$$\forall\vec{\eta}\in\mathbf{R}^3 \;\Big|\; \mathrm{Pd}\,(\vec{l},\vec{\eta}) = (\vec{\eta})^2 - \langle\vec{l},\vec{\eta}\rangle^2 \ge (1-|\vec{l}|^2)|\vec{\eta}|^2. \qquad (17.5.14)$$

Так как функция $p\in\Theta_M(\mathbf{R}^2)$ и функция q удовлетворяет условию (17.5.7), функция $v_a(\vec{\eta})$ растёт в бесконечности не быстрее полинома некоторой степени и задаёт регулярную обобщённую функцию медленного роста $v_a\in S'(\mathbf{R}^3)$.

Определенная на $\mathbf{R}^2$ функция $w(\eta_1,\eta_2)$ вида (17.5.9) также непрерывно дифференцируема во всех точках $(\eta_1,\eta_2)\in\mathbf{R}^2$ кроме точки $(0,0)$. В силу условия $p(0,0)=0$ и дифференцируемости функции $p(\eta_1,\eta_2)$, функция $w(\eta_1,\eta_2)$ локально суммируема в некоторой окрестности нуля. Функция $w(\eta_1,\eta_2)$ растёт в бесконечности не быстрее полинома в силу принадлежности $p\in\Theta_M(\mathbf{R}^2)$ и условия (17.5.7). Итак, функция $w(\eta_1,\eta_2)$ задаёт регулярную обобщённую функцию медленного роста на $\mathbf{R}^2$, $w\in S'(\mathbf{R}^2)$.

Возьмём теперь основную функцию $\varphi\in S(\mathbf{R}^3)$ и докажем существование предела

$$\lim_{a\to+\infty}(v_a,\varphi) = (2\pi\delta(\eta_3)w(\eta_1,\eta_2),\varphi(\eta_1,\eta_2,\eta_3)) = 2\pi\,(w(\eta_1,\eta_2),\varphi(\eta_1,\eta_2,0)) = \qquad (17.5.15)$$

$$2\pi\iint_{\mathbf{R}^2} w(\eta_1,\eta_2)\varphi(\eta_1,\eta_2,0)\,d\eta_1 d\eta_2.$$

В самом деле

$$(v_a,\varphi) = \iiint_{\mathbf{R}^3}\frac{2\sin(a\eta_3)}{\eta_3}\frac{p(\eta_1,\eta_2)g(\eta_1,\eta_2,\eta_3)}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l}'',(\eta_1,\eta_2,\eta_3))}\varphi(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\,d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3$$

или

$$(v_a,\varphi) = \iint_{\mathbf{R}^2} p(\eta_1,\eta_2)\left(\int_{\mathbf{R}}\frac{2\sin(a\eta_3)}{\eta_3}\frac{g(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\varphi(\eta_1,\eta_2,\eta_3)}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l}'',(\eta_1,\eta_2,\eta_3))}\,d\eta_3\right) d\eta_1 d\eta_2. \qquad (17.5.16)$$

Введём функции

$$u_a(\eta_1,\eta_2) \equiv \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{2\sin(a\eta_3)}{\eta_3} \frac{q(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\varphi(\eta_1,\eta_2,\eta_3)}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l}'',(\eta_1,\eta_2,\eta_3))}\,d\eta_3, \quad a \in \mathbf{R}_+. \tag{17.5.17}$$

При каждом фиксированном $(\eta_1,\eta_2) \in \mathbf{R}^2, (\eta_1,\eta_2) \neq 0$, функция

$$\frac{q(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\varphi(\eta_1,\eta_2,\eta_3)}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l}'',(\eta_1,\eta_2,\eta_3))}$$

как функция аргумента $\eta_3 \in \mathbf{R}$ непрерывно дифференцируема и суммируема на $\mathbf{R}$, поэтому в силу теории интеграла Фурье [31, с.362]

$$\lim_{a\to+\infty} u_a(\eta_1,\eta_2) = 2\pi \frac{q(\eta_1,\eta_2,0)\varphi(\eta_1,\eta_2,0)}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l}'',(\eta_1,\eta_2,0))}. \tag{17.5.18}$$

Итак, в интеграле (17.5.16) подинтегральная функция во всех точках $(\eta_1,\eta_2) \in \mathbf{R}^2$ кроме точки $(0,0)$ сходится при $a \to +\infty$ к функции $2\pi w(\eta_1,\eta_2)\varphi(\eta_1,\eta_2,0)$. Чтобы перейти к пределу в интеграле (17.5.16) при $a \to +\infty$ применим теорему Лебега о мажорированной сходимости. Для её применения достаточно убедиться, что семейство функций на $\mathbf{R}^2$ вида

$$p(\eta_1,\eta_2)u_a(\eta_1,\eta_2), \quad a \in \mathbf{R}_+ \tag{17.5.19}$$

ограничено не зависимой от $a \in \mathbf{R}_+$ суммируемой на $\mathbf{R}^2$ функцией.

Оценим интеграл $u_a(\eta_1,\eta_2)$ по лемме 17.5.2 при $(\eta_1,\eta_2) \neq 0$. Полагаем в лемме 17.5.2: $h(x) = \frac{2\sin(ax)}{x}$, $f(x) = \frac{1}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l}'',(\eta_1,\eta_2,x))}$, $g(x) = q(\eta_1,\eta_2,x)\varphi(\eta_1,\eta_2,x)$. Тогда

$$\int\limits_A^B \frac{2\sin(ax)}{x}\,dx = 2\int\limits_{aA}^{aB} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = 2\left(\int\limits_0^{aB} \frac{\sin(t)}{t}\,dt - \int\limits_0^{aA} \frac{\sin(t)}{t}\,dt\right).$$

По формуле 8.231.3 из [29] получаем

$$\left|\int\limits_A^B \frac{2\sin(ax)}{x}\,dx\right| \leq 2\pi.$$

С учётом комплексности функции $q(\eta_1,\eta_2,x)\varphi(\eta_1,\eta_2,x)$ и в силу неравенства (17.5.14) получаем

$$|u_a(\eta_1,\eta_2)| \leq \frac{4\pi}{(1-|\vec{l}''|^2)(\eta_1^2+\eta_2^2)} \left(\sup_{\eta_3\in\mathbf{R}} |q(\eta_1,\eta_2,\eta_3)w(\eta_1,\eta_2,\eta_3)| + \right. \tag{17.5.20}$$

$$\left. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial}{\partial\eta_3}\left(q(\eta_1,\eta_2,\eta_3)w(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\right)\right| d\eta_3\right).$$

Так как $p \in \Theta_M(\mathbf{R}^2)$, то

$$\exists s \in \mathbf{N}_o\ \exists C_3 \in \mathbf{R}_+\ \forall (\eta_1,\eta_2) \in \mathbf{R}^2 \;\Big|\; |p(\eta_1,\eta_2)| \leq C_3(1+\eta_1^2+\eta_2^2)^s. \tag{17.5.21}$$

Так как $\varphi \in S(\mathbf{R}^3)$, то

$$\exists C_2 \in \mathbf{R}_+ \ \forall \alpha \in {\mathbf{N}_o}^3, |\alpha| \le 1 \ \forall \vec{\eta} \in \mathbf{R}^3 \ \Big| \ |\varphi^{\alpha}(\vec{\eta})| \le C_2(1+|\vec{\eta}|^2)^{-(m+s+4)}. \qquad (17.5.22)$$

Из условия (17.5.7) леммы 17.5.1 и (17.5.22) получаем

$$\forall \alpha \in {\mathbf{N}_o}^3, |\alpha| \le 1 \ \forall \vec{\eta} \in \mathbf{R}^3 \ \Big| \ \left|(q(\vec{\eta})\varphi(\vec{\eta}))^{(\alpha)}\right| \le 2CC_2\left(1+|\vec{\eta}|^2\right)^{-(s+4)}. \qquad (17.5.23)$$

Подставляя неравенство (17.5.23) в (17.5.20), получаем

$$\forall (\eta_1,\eta_2) \in \mathbf{R}^2 \ \Big| \ |u_a(\eta_1,\eta_2)| \le \frac{4\pi}{(1-|\vec{l''}|^2)(\eta_1^2+\eta_2^2)} 2CC_2\Big((1+\eta_1^2+\eta_2^2)^{-(s+4)}+ \qquad (17.5.24)$$

$$(1+\eta_1^2+\eta_2^2)^{-(s+3)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\eta_3^2}\,d\eta_3\Big) \le \frac{4(2\pi)^2CC_2}{(1-|\vec{l''}|^2)(\eta_1^2+\eta_2^2)}(1+\eta_1^2+\eta_2^2)^{-(s+3)}.$$

Из (17.5.21) и (17.5.24) получаем следующую мажорантную оценку для функций (17.5.19)

$$\forall (\eta_1,\eta_2) \in \mathbf{R}^2 \ \Big| \ |p(\eta_1,\eta_2)u_a(\eta_1,\eta_2) \le \frac{4(2\pi)^2CC_2C_3}{(1-|\vec{l''}|^2)(\eta_1^2+\eta_2^2)}(1+\eta_1^2+\eta_2^2)^{-3}. \qquad (17.5.25)$$

Так как функция $p \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^2)$ и $p(0,0)=0$, то

$$\exists C_4 \in \mathbf{R}_+ \ \forall (\eta_1,\eta_2) \in \mathbf{R}^2, \eta_1^2+\eta_2^2 \le 1 \ \Big| \ |p(\eta_1,\eta_2)| \le C_4(\eta_1^2+\eta_2^2)^{\frac{1}{2}}. \qquad (17.5.26)$$

В силу (17.5.24) и (17.5.26)

$$\forall (\eta_1,\eta_2) \in \mathbf{R}^2, \ \eta_1^2+\eta_2^2 \le 1 \ \Big| \ |p(\eta_1,\eta_2)u_a(\eta_1,\eta_2)| \le \frac{4(2\pi)^2CC_2C_4}{(1-|\vec{l''}|^2)\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}}. \qquad (17.5.27)$$

Неравенства (17.5.25) и (17.5.27) доказывают, что семейство функций (17.5.19) имеет суммируемую $\mathbf{R}^2$ мажоранту.

Мы доказали существование предела (17.5.15) для любой основной функции $\varphi \in S(\mathbf{R}^3)$. Но пространство $S(\mathbf{R}^3)$ бочечное (см. п. 16.1.1) следовательно, предельный линейный функционал также непрерывен, т.е. является обобщённой функцией из $S'(\mathbf{R}^3)$ ([78, с.111]). Но пространство $S'(\mathbf{R}^3)$ также монтелевское (см. п. 16.1.5) и по утверждению 16.1.4 предел (17.5.8) существует и в сильной топологии пространства $S'(\mathbf{R}^3)$. $\diamondsuit$

17.5.2 Взаимодействие власкайла с двумерным магнитостатическим полем.

Теорема 17.5.1 применима к следующему случаю взаимодействия двух агвидов, первый из которых неподвижный квазикиперный агвид с 3-функцией тока $\overrightarrow{jf}' \in \mathcal{E}_3'(\mathbf{R}^2)$ — обобщённой функцией с компактным носителем, удовлетворяющей условию

$$\widehat{\overrightarrow{jf}}'(0,0) = 0, \qquad (17.5.28)$$

а второй агвид — власкайл. Т.е. мы рассматриваем взаимодействие власкайла с двумерным магнитостатическим полем, создаваемым двумерным компактным распределением токов.

Согласно теореме 17.5.1 трансформация Фурье функционала взаимодействия равна для этого случая

$$\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta}) = 2\pi\delta(\eta_3)\,\widehat{\mathrm{nitd}}\,(\eta_1, \eta_2), \tag{17.5.29}$$

где

$$\widehat{\mathrm{nitd}}\,(\eta_1, \eta_2) \equiv -e'' \frac{\langle \widehat{\vec{jf}}'(\eta_1, \eta_2), \vec{l}'' \rangle}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l}'', (\eta_1, \eta_2, 0))}. \tag{17.5.30}$$

Здесь e'' — заряд, $\vec{l}''$ — скорость власкайла. Чтобы построить оригинал $\mathrm{nitd}\,(x_1, x_2)$ согласно формуле (17.5.30) достаточно научиться строить оригинал по трансформации Фурье в двумерных обозначениях имеющей вид

$$\hat{v}(\vec{\nu}) = \frac{\hat{g}(\vec{\nu})}{\mathrm{Pt}\,(\vec{q}, \vec{\nu})}, \tag{17.5.31}$$

где $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbf{R}^2$; $\vec{q} = (q_1, q_2) \in \mathbf{R}^2$ и $|\vec{q}| < 1$; функция $g \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^2)$ и $\hat{g}(0,0) = 0$;

$$\mathrm{Pt}\,(\vec{q}, \vec{\nu}) \equiv (\vec{\nu})^2 - \langle \vec{q}, \vec{\nu} \rangle^2. \tag{17.5.32}$$

Перейдем к построению оригинала $v(x_1, x_2) \in S'(\mathbf{R}^2)$ согласно формуле (17.5.31). Введём следующие симметричные положительно определенные матрицы из $M(2, \mathbf{R})$:

$$\mathrm{Kt}\,(\vec{q}) \equiv E - \vec{q}\vec{q}^{\top}; \tag{17.5.33}$$

$$\mathrm{Ktr}\,(\vec{q}) \equiv E - (1 + \sqrt{1 - |\vec{q}|^2})^{-1}\vec{q}\vec{q}^{\top}. \tag{17.5.34}$$

Введём следующие положительные числовые функции, определенные внутри единого круга $|\vec{q}| < 1$:

$$\tau = \tau(\vec{q}) \equiv (1 - |\vec{q}|^2)^{-\frac{1}{2}}, \tag{17.5.35}$$

$$\gamma = \gamma\left(\vec{q}\right) \equiv \left(1 + \sqrt{1 - |\vec{q}|^2}\right)^{-1}. \tag{17.5.36}$$

По определению $\tau(\vec{q}) \in [1, \infty[$, $\gamma(\vec{q}) \in [\frac{1}{2}, 1[$ и верны тождества:

$$|\vec{q}|^2\gamma(\vec{q}) = 1 - (1 - |\vec{q}|^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tau^{-1}(\vec{q}), \tag{17.5.37}$$

$$\frac{1}{\gamma(\vec{q})} - \frac{1}{\tau(\vec{q})} = 1. \tag{17.5.38}$$

Для матриц $\mathrm{Kt}\,(\vec{q})$ и $\mathrm{Ktr}\,(\vec{q})$ справедливы соотношения

$$(\mathrm{Ktr}\,(\vec{q}))^2 = \mathrm{Kt}\,(\vec{q}), \tag{17.5.39}$$

$$(\mathrm{Ktr}\,)^{-1}(\vec{q}) = E + \tau(\vec{q})\gamma(\vec{q})\vec{q}\vec{q}^{\top}, \tag{17.5.40}$$

$$(\mathrm{Kt}\,)^{-1}(\vec{q}) = E + \tau^2(\vec{q})\vec{q}\vec{q}^{\top}, \tag{17.5.41}$$

$$\det(\mathrm{Ktr}\,(\vec{q})) = \tau^{-1}(\vec{q}), \tag{17.5.42}$$

проверяемые прямым вычислением.

Для квадратичной формы (17.5.32) мы получили представление

$$Bt(\vec{q}, \vec{\nu}) = \langle \vec{\nu}, \mathrm{Kt}\,(\vec{q})\vec{\nu} \rangle = |\,\mathrm{Ktr}\,(\vec{q})\vec{\nu}|^2. \tag{17.5.43}$$

В случаях, не вызывающих недоразумений, мы будем опускать аргумент $\vec{q} \in \mathbf{R}^2$ у матриц $\mathrm{Kt}\,(\vec{q}) = \mathrm{Kt}$ и $\mathrm{Ktr}\,(\vec{q}) = \mathrm{Ktr}$ и у величин (17.5.35,17.5.36).

Возьмём теперь регулярную обобщённую функцию $b \in S'(\mathbf{R}^2)$ вида

$$b(\vec{t}) \equiv -\frac{1}{2\pi}(\ln(|\vec{t}|) + C_0), \tag{17.5.44}$$

где константа $C_0 \in \mathbf{R}$ такова, что трансформация Фурье

$$\hat{b}(\vec{\nu}) = Pf\frac{1}{|\vec{\nu}|^2},$$

где сужение $Pf\frac{1}{|\vec{\nu}|^2}\Big|_{\mathbf{R}^2\setminus\{0\}}$ есть регулярная обобщённая функция $\frac{1}{|\vec{\nu}|^2}$ (см. [24, с.195]). Согласно правилу преобразования образа Фурье обобщённой функции при линейном преобразовании её аргумента — следствие 15.1.2, обобщённой функции $\frac{1}{|\det \mathrm{Ktr}\,(\vec{q})|}b\left(\mathrm{Ktr}^{-1}(\vec{q})\vec{t}\right)$ аргумента $\vec{t} \in \mathbf{R}^2$, зависящей от векторного параметра $\vec{q} \in \mathbf{R}^2$, соответствует образ Фурье $Pf\frac{1}{|\mathrm{Ktr}\,(\vec{q})\vec{\nu}|^2}$. Возвращаясь к равенству (17.5.31), мы видим, что в силу принадлежности $y \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^2)$ применима теорема о свёртке и свёртка обобщённых функций $\frac{1}{|\det \mathrm{Ktr}\,(\vec{q})|}b\left(\mathrm{Ktr}^{-1}(\vec{q})\vec{t}\right)$ и $g(\vec{t})$ существует и её трансформация Фурье равна произведению

$$\hat{g}(\vec{\nu})Pf\frac{1}{|\mathrm{Ktr}\,(\vec{q})\vec{\nu}|^2}. \tag{17.5.45}$$

В силу включения $\hat{g} \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^2)$ и условия $\hat{g}(0,0) = 0$ обобщённая функция (17.5.45) совпадает с регулярной обобщённой функцией

$$\hat{v}(\vec{\nu}) = \frac{\hat{g}(\vec{\nu})}{\mathrm{Pt}\,(\vec{q},\vec{\nu})} = \frac{\hat{g}(\vec{\nu})}{|\mathrm{Ktr}\,(\vec{q})\vec{\nu}|^2}. \tag{17.5.46}$$

В силу условия $\hat{g}(0,0) = 0$, если мы заменим функцию $b(\vec{t})$ на функцию $-\frac{1}{2\pi}\ln(|\vec{t}|)$, то образ Фурье свёртки не изменится, значит не изменится и свёртка. Введём функцию

$$\mathrm{lnd}\,(\vec{q},\vec{t}) \equiv -\frac{1}{2\pi}\tau(\vec{q})\ln(\left\langle\vec{t},\, \mathrm{Kt}^{-1}(\vec{q})\vec{t}\right\rangle^{\frac{1}{2}}) \tag{17.5.47}$$

аргумента $\vec{t} \in \mathbf{R}^2$, зависящую от параметра $\vec{q} \in \mathbf{R}^2$. Тогда в силу принадлежности $g \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$ функция $v(\vec{t})$ равна свёртке функций $g(\vec{t})$ и $\mathrm{lnd}\,(\vec{q},\vec{t})$. На множестве $\mathbf{R}^2\setminus \mathrm{supp}\,(g)$ функция $v(\vec{t})$ класса $C^{(\infty)}$ и выражается формулой

$$v(\vec{t}) = (\tilde{g}(\vec{s}),\, \mathrm{lnd}\,(\vec{q},\vec{t}-\vec{s})), \tag{17.5.48}$$

где $\tilde{g}(\vec{s})$ — продолжение обобщённой функции с компактным носителем $g(\vec{s})$ на пространство $C^{(\infty)}(\mathbf{R}^2)$.

Возвращаясь к формуле (17.5.30) для функционала взаимодействия двумерного магнитостатического с властайлом, получаем, что функция $\mathrm{nitd}\,(x_1,x_2)$ класса $C^{(\infty)}(\mathbf{R}^2 \setminus \mathrm{supp}\,(\vec{jf}'))$ и в точках $\vec{t} \in \mathbf{R}^2 \setminus \mathrm{supp}\,(\vec{jf}')$ представима формулой

$$\mathrm{nitd}\,(\vec{t}) = -e''(\langle\vec{jf}'(\vec{s}),\vec{l}''\rangle,\, \mathrm{lnd}\,((l_1'',l_2''),\vec{t}-\vec{s})). \tag{17.5.49}$$

17.5.3 Взаимодействие власкайла с полем бесконечного прямолинейного тока.

Пусть задано два прямолинейных бесконечно тонких параллельных провода с током. Один — через ось x_3 с током величины I и другой — через точку $(b, 0, 0)$ параллельно оси x_3 с током величины $-I$. Пусть $\vec{k}$ — единичный вектор вдоль оси x_3. Тогда выполнены условия пунктов 17.5.1 и 17.5.2 для

$$\overrightarrow{jf}'(x_1, x_2) = I\vec{k}(\delta(x_1, x_2) - \delta(x_1 - b, x_2)), \tag{17.5.50}$$

где $\delta(x_1, x_2) \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^2)$ — двумерная δ-функция с центром в нуле, и

$$\widehat{\overrightarrow{jf}}'(0, 0) = 0, \tag{17.5.51}$$

если второй агвид — власкайл. Согласно формуле (17.5.49) всюду вне проводов с током функционал взаимодействия равен

$$\operatorname{nitd}(x_1, x_2) = -e\langle\vec{k}, \vec{l}\rangle\,(\operatorname{lnd}((l_1, l_2), (x_1, x_2)) - \operatorname{lnd}((l_1, l_2), (x_1 - b, x_2)))$$

или

$$\operatorname{nitd}(x_1, x_2) = e\frac{\left\langle\vec{k}, \vec{l}\right\rangle}{2\pi\sqrt{1 - (l_1^2 + l_2^2)}}\left(\ln\left(x_1^2 + x_2^2 + \frac{(x_1 l_2 + x_2 l_2)^2}{1 - (l_1^2 + l_2^2)}\right)^{\frac{1}{2}} - \right. \tag{17.5.52}$$

$$\left.\ln\left((x_1 - b)^2 + x_2^2 + \frac{((x_1 - b)l_1 + x_2 l_2)}{1 - (l_1^2 + l_2^2)}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Из п. 17.5.1 следует, что в данном случае трехмерный функционал взаимодействия равен

$$\operatorname{nit}(x_1, x_2, x_3) = \operatorname{nitd}(x_1, x_2). \tag{17.5.53}$$

Если мы теперь будем уносить второй провод в бесконечность, т.е. в формуле (17.5.52) устремим параметр $b \to \infty$, то предел функционала взаимодействия (17.5.52) не существует, ибо второй логарифм в правой части будет неограниченно возрастать. Однако, в уравнения Эйлера для описания движения частицы входят лишь производные потенциала $\operatorname{nit}(x_1, x_2, x_3)$. Но производные второго логарифма по переменным x_1 и x_2 имеют нулевой предел при $b \to \infty$, а производные по переменным l_1 и l_2 при $b \to \infty$ являются величинами порядка $O(|\vec{l}|^3)$, ограниченными по $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$. В этом смысле при достаточно малой скорости $\vec{l}$ можно аппроксимировать функционал взаимодействия (17.5.52) при $b \to \infty$ функционалом

$$e\frac{\langle\vec{k}, \vec{l}\rangle}{2\pi\sqrt{1 - (l_1^2 + l_2^2)}}\ln\left(x_1^2 + x_2^2 + \frac{(x_1 l_1 + x_2 l_2)^2}{1 - (l_1^2 + l_2^2)}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{17.5.54}$$

содержащим взаимодействие власкайла лишь с первым проводом. Соответствующий классический потенциал взаимодействия с одним проводом в смысле п. 17.3.3 будет

$$\operatorname{nit}_c(x_1, x_2, x_3) = \frac{eI}{2\pi}\langle\vec{k}, \vec{l}\rangle\ln(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{17.5.55}$$

17.5.4 Собственное поле обтекаемой током замкнутой цилиндрической поверхности.

Рассмотрим цилиндрическую поверхность Q, с образующей параллельной оси x_3, сечение которой плоскостью $x_3 = 0$ есть ориентированная кусочно-гладкая кривая C без самопересечений. Пусть поверхность обтекается поверхностным током постоянной плотности I, перпендикулярным оси x_3. Предполагаем, что кривая C обходится против часовой стрелки, если смотреть с положительной части оси x_3. Итак, мы рассматриваемый покоящийся квазикиперный агвид, у которого третья компонента функции тока $jf_3 = 0$, а следовательно и третья компонента функции состояния $uf_3 = 0$. Поэтому далее в этом пункте мы Введём двумерные вектор-функции $\overrightarrow{jfb} \in D_2'(\mathbf{R}^3)$ и $\overrightarrow{ufb} \in D_2'(\mathbf{R}^3)$, полученные из трехмерных вектор-функций $\overrightarrow{jf} \in D_3'(\mathbf{R}^3)$ и $\overrightarrow{uf} \in D_3'(\mathbf{R}^3)$ отбрасыванием третьей компоненты. В этих обозначениях

$$\overrightarrow{jfb}(x_1, x_2, x_3) = \overrightarrow{jfd}(x_1, x_2)1(x_3), \tag{17.5.56}$$

где $\overrightarrow{jfd} \in D_2'(\mathbf{R}^2)$ — двумерный линейный замкнутый ток, введенный в п. 17.4.2.

В силу замкнутости линейного двумерного тока выполнены условия леммы 17.5.1 и поэтому обобщённая функция $\overrightarrow{jf} \in S_3'(\mathbf{R}^3)$ и в силу предельного перехода леммы 17.5.1 верно

$$\widehat{\overrightarrow{ufb}}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = -\frac{\widehat{\overrightarrow{jfd}}(\eta_1, \eta_2)}{\eta_1^2 + \eta_2^2} 2\pi\delta(\eta_3) \equiv \widehat{\overrightarrow{ufd}}(\eta_1, \eta_2) 2\pi\delta(\eta_3), \tag{17.5.57}$$

где положено

$$\widehat{\overrightarrow{ufd}}(\eta_1, \eta_2) = -\frac{\widehat{\overrightarrow{jfd}}(\eta_1, \eta_2)}{\eta_1^2 + \eta_2^2}. \tag{17.5.58}$$

Согласно п. 17.5.2 оригинал $\overrightarrow{ufd}(x_1, x_2)$ является сверткой обобщённых функций $-\overrightarrow{jfd}(x_1, x_2)$ и $-\frac{1}{2\pi}\ln(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$, бесконечно дифференцируем на множестве $\mathbf{R}^2 \setminus C$ и в точках этого множества представим интегралом

$$\overrightarrow{ufd}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} I \oint\limits_C \ln\left((x_1 - t_1)^2 + (x_2 - t_2)^2\right)^{\frac{1}{2}} d\vec{s}(t_1, t_2). \tag{17.5.59}$$

Для функции состояния $\overrightarrow{uf}(x_1, x_2, x_3)$ мы тогда имеем

$$\overrightarrow{uf}(x_1, x_2, x_3) = (ufd_1(x_1, x_2), ufd_2(x_1, x_2), 0) \tag{17.5.60}$$

на множестве $\mathbf{R}^3 \setminus Q$. Поэтому при $\vec{x} \in \mathbf{R}^3 \setminus Q$

$$rot\,\overrightarrow{uf}(x_1, x_2, x_3) = \vec{k}\left(\frac{\partial ufd_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial ufd_1(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right). \tag{17.5.61}$$

Обозначим для краткости $\operatorname{lne}(t_1, t_2) \equiv \ln(t_1^2 + t_2^2)^{\frac{1}{2}}$, тогда из (17.5.59,17.5.61) получаем

$$rot\,\overrightarrow{uf}(x_1, x_2, x_3) = \tag{17.5.62}$$

$$\frac{I}{2\pi}\vec{k}\oint\limits_C \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{lne}(x_1 - t_1, x_2 - t_2)\right) dt_2 - \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\operatorname{lne}(x_1 - t_1, x_2 - t_2)\right) dt_1 =$$

$$\frac{-I}{2\pi}\vec{k}\oint\limits_{C}\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\,\mathrm{lne}\,(t_1-x_1,t_2-x_2)\right)dt_2-\left(\frac{\partial}{\partial t_2}\,\mathrm{lne}\,(t_1-x_1,t_2-x_2)\right)dt_1.$$

В случае, когда точка (x_1,x_2) лежит вне контура C, применима формула Грина к последнему интегралу и

$$rot\,\overrightarrow{uf}(x_1,x_2,x_3)=-\frac{I}{2\pi}\vec{k}\iint\limits_{G}\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\,\mathrm{lne}\,(t_1-x_1,t_2-x_2)+\right. \tag{17.5.63}$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}\,\mathrm{lne}\,(t_1-x_1,t_2-x_2)\right)dt_1dt_2=0$$

в силу гармоничности функции $\mathrm{lne}\,(t_1,t_2)$ при $(t_1,t_2)\neq 0$.

В случае, когда точка (x_1,x_2) лежит внутри контура C, возьмём окружность B_r радиуса $r>0$ с центром в точке (x_1,x_2), целиком лежащую внутри контура C. В силу гармоничности функции $\mathrm{lne}\,(x_1,x_2)$ вне этой окружности

$$rot\,\overrightarrow{uf}(x_1,x_2,x_3)=$$

$$\frac{-I}{2\pi}\vec{k}\oint\limits_{B_r}\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\,\mathrm{lne}\,(t_1-x_1,t_2-x_2)\right)dt_2-\left(\frac{\partial}{\partial t_2}\,\mathrm{lne}\,(t_1-x_1,t_2-x_2)\right)dt_1.$$

Вводя параметризацию окружности B_r вида

$$\left\{\begin{array}{ll} t_1-x_1 & =r\cos\varphi,\\ t_2-x_2 & =r\sin\varphi,\end{array}\right. \qquad \varphi\in[0,2\pi],$$

получаем

$$rot\,\overrightarrow{uf}(x_1,x_2,x_3)=\frac{-I}{2\pi}\vec{k}\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)d\varphi=-I\vec{k}. \tag{17.5.64}$$

Вывод 17.5.1 *Если цилиндрическая поверхность Q с образующей, параллельной единичному вектору $\vec{k}$, имеет в перпендикулярном сечении замкнутый ориентированный кусочно-гладкий контур без самопересечений и обтекается замкнутым поверхностным током перпендикулярным вектору $\vec{k}$ постоянной поверхностной плотности I, то напряжённость магнитного поля $\vec{H}=0$ вне цилиндра Q и $\vec{H}=-I\vec{k}$ внутри цилиндра Q.*

17.5.5 Взаимодействие влавина с двумерным магнитостатическим полем.

Перенесем построения п. 17.5.2 на случай, когда власкайл заменяется произвольным досветовым влавином. Пусть покоящийся квазикиперный агвид удовлетворяет условиям пункта 17.5.2, а второй агвид является влавином. Тогда верна теорема 17.5.1 и выполнена формула (17.5.6) для двумерного функционала взаимодействия. Итак, $\overrightarrow{jf}'\in\mathcal{E}_3'(\mathbf{R}^2)$ — обобщённая функция с компактным носителем. Обозначим через $\overrightarrow{jfd}''\in\mathcal{E}_3'(\mathbf{R}^2)$ обобщённую функцию с точечным носителем, образ Фурье которой

$$\widehat{\overrightarrow{jfd}}''(\eta_1,\eta_2)=\widehat{\overrightarrow{jfd}}''(\eta_1,\eta_2,0).$$

Согласно [24, с.70] справедлива теорема о свёртке для формулы (17.5.6) и

$$\mathrm{nitd} = -\sum_{\alpha=1}^{3} w * jf'_{\alpha} * jfdc''_{\alpha}, \tag{17.5.65}$$

где $w \in S'(\mathbf{R}^2)$ — обобщённая функция, образ Фурье которой

$$\hat{w}(\eta_1, \eta_2) \equiv \frac{1}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l}'', (\eta_1, \eta_2, 0))},$$

а $jfdc''_{\alpha}(\vec{s}) \equiv jfd''_{\alpha}(-\vec{s})$. В п. 17.5.2 мы показали, что свёртка

$$\mathrm{sped}_{\,\alpha} \equiv -w * jf'_{\alpha}, \quad \alpha \in \overline{1,3} \tag{17.5.66}$$

есть обобщённая функция, регулярная и класса $C^{(\infty)}$ в области $\mathbf{R}^2 \setminus \mathrm{supp}\,(jf'_{\alpha})$ и представимая в этой области формулой

$$\mathrm{sped}_{\,\alpha}(\vec{t}) = -\left(\widetilde{jf}'_{\alpha}(\vec{s}),\, \mathrm{lnd}\,\left((l''_1, l''_2), \vec{t} - \vec{s}\right)\right). \tag{17.5.67}$$

Так как обобщённая функция jfd''_{α} имеет точечный носитель в нуле, то из (17.5.65-17.5.67) получаем следующее представление для функционала взаимодействия

$$\mathrm{nitd}\,(\vec{x}) = \sum_{\alpha=1}^{3} \left(jfd''_{\alpha}(-\vec{t}),\, \mathrm{sped}_{\,\alpha}(\vec{x} - \vec{t})\right) = \left(\overrightarrow{jfd}''(\vec{t}),\, \overrightarrow{\mathrm{sped}}\,(\vec{x} + \vec{t})\right), \tag{17.5.68}$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \mathrm{supp}\,\left(\overrightarrow{jf}'\right)$.

Итак, вычисление функционала взаимодействия влавина с двумерным магнитостатическим полем сводится к вычислению функции

$$\overrightarrow{\mathrm{sped}}\,(\vec{q}, \vec{t}) \equiv -\left(\widetilde{\overrightarrow{jf}}'(\vec{s}),\, \mathrm{lnd}\,(\vec{q}, \vec{t} - \vec{s})\right), \tag{17.5.69}$$

где $\vec{q} \in \mathbf{R}^2, |\vec{q}| < 1$ и $\vec{t} \in \mathbf{R}^2$, и применению к ней обобщённой функции $\overrightarrow{jfd}'$.

§17.6 Влавин в поле соленоида

В этом параграфе мы вычислим функционал $\overrightarrow{\mathrm{sped}}\,(\vec{d}, \vec{t})$ вида (17.5.69) для соленоида, т.е. бесконечного кругового цилиндра, обтекаемого кольцевым током постоянной плотности. Тем самым согласно п. 17.5.5 напряжённость магнитного поля внутри соленоида постоянна, а вне — равна нулю. Поэтому мы получаем для влавина внутри соленоида простейшую модель взаимодействия частицы с магнитным полем.

Мы рассмотрим также два частных случая: 1) когда влавин есть власкайл, 2) когда влавин есть влаквазикипер. В первом случае мы получаем модель "чистого"взаимодействия заряда и однородного магнитного поля для власкайла внутри соленоида. Для власкайла вне соленоида мы обнаружим, что хотя напряжённость магнитного поля равна нулю, взаимодействие заряда и поля имеет место, т.е. дадим формулы для описания так называемого эффекта Ааронова-Бома. Во втором случае мы получаем внутри соленоида модель "чистого"взаимодействия спина с магнитным полем, а вне соленоида обнаруживаем, что и при равной нулю напряженности магнитного поля взаимодействие спина с полем соленоида имеет место.

17.6.1 Формула для функции $\overrightarrow{sped}\,(\vec{q},\vec{x})$.

В этом параграфе мы возвращаемся к ситуации п.17.5.4 и рассматриваем покоящийся квазикиперный агвид, порожденный кольцевым поверхностным током постоянной плотности I, обтекающим круговой цилиндр, ось которого есть ось x_3 и радиус равен a. Тогда согласно формуле (17.5.69) для функции $\overrightarrow{\mathrm{sped}}\,(\vec{q},\vec{x})$ и определения замкнутого линейного тока в размерности $n=2$ п. 17.4.2 верно

$$\mathrm{sped}_{\,\alpha}(\vec{q},\vec{x}) = -\oint\limits_{C_a} \mathrm{lnd}\,(\vec{q},\vec{x}-\vec{t})\,dt_\alpha \tag{17.6.1}$$

При $\alpha \in \overline{1,2}$ и $\mathrm{sped}_{\,3}(\vec{q},\vec{x}) = 0$, если $\vec{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus C_a$ Здесь: $C_a \subset \mathbf{R}^2$ есть окружность радиуса a с центром в нуле; $\vec{q} \in \mathbf{R}^2$, $|\vec{q}| < 1; \vec{t} \in C_a$.

Введём двумерный вектор $\overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(\vec{q},\vec{x}) \equiv (\,\mathrm{sped}_{\,1}(\vec{q},\vec{x}),\,\mathrm{sped}_{\,2}(\vec{q},\vec{x}))$. Для него сохраняется формула (17.6.1) в двумерном векторном варианте.

$$\overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(\vec{q},\vec{x}) = -I\oint\limits_{C_a} \mathrm{lnd}\,(\vec{q},\vec{x}-\vec{t})d\vec{t}. \tag{17.6.2}$$

Из вида (17.5.47) функции $\mathrm{lnd}\,((\vec{q},\vec{t}))$ и формулы (17.6.2) следует, что функция $\overrightarrow{\mathrm{spef}}\,((\vec{q},\vec{t}))$ класса $C^{(\infty)}$ на произведении $\{\vec{q} \in \mathbf{R}^2 \mid \vec{q}| < 1\} \times (\mathbf{R}^2 \setminus C_a)$.

Функция $\overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(\vec{q},\vec{x})$ обладает следующим свойством симметрии

$$\forall Q \in SO(2) \;\Big|\; \overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(Q\vec{q},Q\vec{x}) = Q\,\overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(\vec{q},\vec{x}). \tag{17.6.3}$$

В самом деле

$$\overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(Q\vec{q},Q\vec{x}) = -\oint\limits_{C_a} \mathrm{lnd}\,(Q\vec{q},Q\vec{x}-\vec{t})\,d\vec{t} = \tag{17.6.4}$$

$$-I\oint\limits_{C_a} \mathrm{lnd}\,(Q\vec{q},Q(\vec{x}-Q^\top t))QdQ^\top\vec{t} = Q\left(-I\oint\limits_{C_a} \mathrm{lnd}\,(Q\vec{q},Q(\vec{x}-\vec{y}))d\vec{y}\right).$$

Но согласно формуле (17.5.47) для функции $\ln(\vec{q},\vec{x})$ верно

$$\mathrm{lnd}\,(Q\vec{q},Q(\vec{x}-\vec{y})) = \mathrm{lnd}\,(\vec{q},\vec{x}-\vec{y}). \tag{17.6.5}$$

Соотношения (17.6.4,17.6.5) доказывает (17.6.3)

В силу соотношения (17.6.3) достаточно построить функцию $\overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(\vec{q},\vec{x})$ для векторов $\vec{q}$ вида $\vec{q} = (0,q)$. В самом деле, определим функцию

$$\overrightarrow{\mathrm{speg}}\,(q,\vec{x}) \equiv \overrightarrow{\mathrm{spef}}\,((0,q),\vec{x}),\;\; q \in [0,1[. \tag{17.6.6}$$

Для $\vec{q} \neq 0$ определим матрицу $Q(\vec{q}) \in SO(2)$ вида

$$Q(\vec{q}) \equiv \frac{1}{|\vec{q}|}\begin{pmatrix} q_2 & q_1 \\ -q_1 & q_2 \end{pmatrix} \tag{17.6.7}$$

и положим

$$q \equiv |\vec{q}| = \sqrt{q_1^2+q_2^2}. \tag{17.6.8}$$

Тогда верно равенство

$$\overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(\vec{q},\vec{x}) = \overrightarrow{\mathrm{spef}}\left(Q(\vec{q})\begin{pmatrix}0\\q\end{pmatrix},Q(\vec{q})Q^\top(\vec{q})\vec{x}\right) = Q(\vec{q})\,\overrightarrow{\mathrm{spef}}\left(\begin{pmatrix}0\\q\end{pmatrix},Q^\top(\vec{q})\vec{x}\right) = \tag{17.6.9}$$

$$Q(\vec{q})\,\overrightarrow{\mathrm{speg}}\left(|\vec{q}|, Q^\top(\vec{q})\vec{x}\right).$$

Для вычисления функции $\overrightarrow{\mathrm{speg}}(q,\vec{x})$ согласно формулам (17.6.2,17.6.6) введём на окружности C_a параметризацию

$$\begin{cases} t_1 = & a\cos\varphi, \\ t_2 = & a\sin\varphi. \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi] \tag{17.6.10}$$

Тогда

$$\overrightarrow{\mathrm{speg}} = -Ia\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{lnd}\left(\begin{pmatrix}0\\q\end{pmatrix}, \vec{x} - a\vec{n}(\varphi)\right) d\vec{n}(\varphi), \tag{17.6.11}$$

где

$$\vec{n}(\varphi) \equiv \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}.$$

Подставляя выражение (17.5.47) для функций $\mathrm{lnd}\,(\vec{q},\vec{t})$, получаем

$$\overrightarrow{\mathrm{speg}}(q,\vec{x}) = \frac{Ia\tau}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left((n_1(\varphi)-y_1)^2 + \tau^2(n_2(\varphi)-y_2)^2\right) d\vec{n}(\varphi), \tag{17.6.12}$$

где $\tau \equiv \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$, $\vec{y} \equiv \frac{\vec{x}}{a}$, $|\vec{y}| \neq 1$. Далее, интегрируя по частям, получаем

$$\overrightarrow{\mathrm{speg}}(q,\vec{x}) = -\frac{Ia\tau}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \vec{n}(\varphi)\frac{-n_2(\varphi)(n_1(\varphi)-y_1) + \tau^2 n_1(\varphi)(n_2(\varphi)-y_2)}{(n_1(\varphi)-y_1)^2 + \tau^2(n_2(\varphi)-y_2)^2}\,d\varphi. \tag{17.6.13}$$

В последнем интеграле перейдем к интегрированию по единичной окружности $S = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ комплексной плоскости с помощью замены переменных $z = e^{i\varphi}$, получим

$$\overrightarrow{\mathrm{speg}}(q,\vec{x}) = -\frac{Ia\tau}{1+\tau}\vec{J}(\tau,\vec{y}) \tag{17.6.14}$$

где

$$\vec{J}(\tau,\vec{y}) \equiv \frac{1+\tau}{2\pi}\oint\limits_S \vec{n}(z)\frac{-n_2(z)(n_1(z)-y_1) + \tau^2 n_1(z)(n_2(z)-y_2)}{(n_1(z)-y_1)^2 + \tau^2(n_2(z)-y_2)^2}\frac{1}{iz}\,dz. \tag{17.6.15}$$

и

$$\begin{cases} n_1(z) \equiv & \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \\ n_2(z) \equiv & \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}). \end{cases} \tag{17.6.16}$$

Теперь наша задача — вычисление функции $\vec{J}(\tau,\vec{y})$ при $\tau \in [1,\infty[$, $\vec{y} \in (\mathbf{R}^2 \setminus C_1)$.

17.6.2 Расположение особых точек подинтегральной функции

Рассмотрим в интеграле (17.6.15) подинтегральную функцию

$$\vec{f}(z) \equiv \vec{n}(z)\;\frac{-n_2(z)(n_1(z)-y_1) + \tau^2 n_1(z)(n_2(z)-y_2)}{(n_1(z)-y_1)^2 + \tau^2(n_2(z)-y_2)^2}\frac{1}{iz}. \tag{17.6.17}$$

Это рациональная функция аргумента $z \in \mathbf{C}$. Её особые точки — полюса. А именно, особая точка $z_0 = 0$ и особые точки — нули знаменателя $(n_1(z)-y_1)^2 + \tau^2(n_2(z)-y_2)^2$. Разложим знаменатель на множители

$$(n_1(z)-y_1)^2 + \tau^2(n_2(z)-y_2)^2 = \tag{17.6.18}$$

$$((n_1(z) - y_1) + i\tau(n_2(z) - y_2)) \cdot ((n_1(z) - y_1) - i\tau(n_2(z) - y_2)).$$

Итак, нули знаменателя — это нули уравнения

$$(n_1(z) - y_1) + i\tau(n_2(z) - y_2) = 0 \tag{17.6.19}$$

и нули уравнения

$$(n_1(z) - y_1) - i\tau(n_2(z) - y_2) = 0. \tag{17.6.20}$$

Рассмотрим сначала некоторые специальные свойства корней уравнения (17.6.19) и (17.6.20)

Утверждение 17.6.1 *Если корень z уравнения (17.6.19) или (17.6.20) лежит на единичной окружности S, то точка $\vec{y}$ лежит на единичной окружности C_1.*

Доказательство. Если $z \in S$, то $z = e^{i\alpha},\ \alpha \in \mathbf{R}$. Тогда $n_1(z) = \cos\alpha, n_2(z) = \sin\alpha$. Если теперь верно (17.6.19) или (17.6.20), то $y_1 = \cos\alpha,\ y_2 = \sin\alpha$. $\diamondsuit$

Обозначим через $\bar{z}$ комплексное число, сопряженное к комплексному числу z. По определению (17.6.16) комплексная функция $\vec{n}(z)$ обладает следующим свойством

$$\vec{n}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \overline{\vec{n}(z)} \tag{17.6.21}$$

при $z \neq 0$. В самом деле

$$n_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\bar{z}} + \bar{z}\right) = \overline{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \overline{n_1(z)}$$

и

$$n_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\bar{z}} - \bar{z}\right) = \overline{\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \overline{n_2(z)}.$$

Уравнение (17.6.19) запишем в эквивалентной форме

$$n_1(z) + i\tau n_2(z) = y_1 + i\tau y_2, \tag{17.6.22}$$

а уравнение (17.6.20) — в эквивалентной форме

$$n_1(z) - i\tau n_2(z) = y_1 - i\tau y_2. \tag{17.6.23}$$

Теперь проверим справедливость следующего свойства.

Утверждение 17.6.2 *Комплексное число $z \neq 0$ — корень уравнения (17.6.19) иф комплексное число $w = \frac{1}{\bar{z}}$ — корень уравнения (17.6.20)*

Доказательство. Пусть выполнено (17.6.22), тогда согласно (17.6.21) верно

$$n_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) - i\tau n_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \overline{n_1(z)} - i\tau\overline{n_2(z)} = \overline{n_1(z) + i\tau n_2(z)} =$$

$$\overline{y_1 + i\tau y_2} = y_1 - i\tau y_2,$$

т.е. число $w = \frac{1}{\bar{z}}$ — корень уравнения (17.6.23). Наоборот, если число $z \neq 0$ — корень уравнения (17.6.23), то

$$n_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) + i\tau n_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \overline{n_1(z)} + i\tau\overline{n_2(z)} = \overline{n_1(z) - i\tau n_2(z)} =$$

$$\overline{y_1 - i\tau y_2} = y_1 + i\tau y_2,$$

и число $\frac{1}{\bar{z}}$ — корень уравнения (17.6.22) $\diamondsuit$

Вернемся теперь к рассмотрению уравнения (17.6.19) помня, что $\tau \in [1, \infty[$. Подставим в (17.6.19) выражения (17.6.16) для функций $n_1(z)$ и $n_2(z)$ получим уравнение

$$-\frac{1}{2}(1+\tau)z + \frac{1}{2}(1-\tau)\frac{1}{z} - (y_1 + i\tau y_2) = 0$$

эквивалентное квадратному уравнению при $z \neg 0$

$$z^2 - \frac{2(y_1 + i\tau y_2)}{1+\tau}z + \frac{1-\tau}{1+\tau} = 0. \tag{17.6.24}$$

Корни квадратного уравнения (17.6.24) равны

$$z_{1,2} = \frac{1}{\tau+1}\left((y_1 + i\tau y_2) \pm \sqrt{(y_1 + i\tau y_2)^2 + \tau^2 - 1}\right) \tag{17.6.25}$$

и связаны соотношениями теоремы Виетта

$$z_1 z_2 = \frac{1-\tau}{1+\tau}, \tag{17.6.26}$$

$$z_1 + z_2 = \frac{2}{1+\tau}(y_1 + i\tau y_2). \tag{17.6.27}$$

Корни $z_1 = z_1(\tau, \vec{y})$ и $z_2 = z_2(\tau, \vec{y})$ непрерывно зависят от $\tau \in [1, \infty[$ и при $\tau = 1$ есть числа $(y_1 + iy_2)$ и 0. Положим $z_1(\tau, \vec{y})$ — корень уравнения (17.6.24), такой что $z_1(1, \vec{y}) = y_1 + iy_2$, а $z_2(\tau, \vec{y})$ — корень уравнения (17.6.24), такой что $z_2(1, \vec{y}) = 0$. Из соотношения (17.6.26) и непрерывной зависимости корней квадратного уравнения (17.6.24) от $\tau \in [1, \infty[$ в силу утверждения 17.6.1 получаем.

Вывод 17.6.1 *Если $|\vec{y}| < 1$, то оба корня квадратного уравнения (17.6.24) лежат внутри единичной окружности S. Если $|\vec{y}| > 1$, то $|z_1| > 1$ и $|z_2| < 1$.*

Перейдем к рассмотрению уравнения (17.6.20). Подставляя в него выражение (17.6.16) для функций $n_1(z), n_2(z)$, получим эквивалентное уравнение

$$\frac{1}{2}(1-\tau)z + \frac{1}{2}(1+\tau)\frac{1}{z} - (y_1 - i\tau y_2) = 0. \tag{17.6.28}$$

В случае $\tau = 1$ это уравнение принимает вид

$$\frac{1}{z} = (y_1 - i\tau y_2). \tag{17.6.29}$$

В случае $\tau > 1$ уравнение (17.6.28) эквивалентно квадратному уравнению

$$z^2 - \frac{2(y_1 - i\tau y_2)}{(1-\tau)}z + \frac{1+\tau}{1-\tau} = 0, \tag{17.6.30}$$

корни которого

$$z_{3,4} = \frac{1}{1-\tau}\left((y_1 - i\tau y_2) \pm \sqrt{(y_1 - i\tau y_2)^2 + \tau^2 - 1}\right) \tag{17.6.31}$$

по теореме Виетта удовлетворяют соотношениям

$$z_3 z_4 = \frac{1+\tau}{1-\tau}, \tag{17.6.32}$$

$$z_3 + z_4 = \frac{2(y_1 - i\tau y_2)}{(1-\tau)}. \tag{17.6.33}$$

Отметим теперь, что при $\tau > 1$ квадратные уравнения (17.6.24) и (17.6.30) не имеют нулевых корней и поэтому эквивалентны уравнениям (17.6.19) и (17.6.20) соответственно. По утверждению 17.6.2 тогда корни уравнений (17.6.19) и (17.6.20) связаны соотношениями

$$z_3 = \frac{1}{\bar{z}_2}, \tag{17.6.34}$$

$$z_4 = \frac{1}{\bar{z}_1} \tag{17.6.35}$$

при $\tau > 1$. Из вывода 17.6.1 и соотношений (17.6.34,17.6.35) следует.

Вывод 17.6.2 *Пусть* $\tau \in]1, \infty[$. *Если* $|\vec{y}| < 1$, *то* $|z_3| > 1$, *и* $|z_4| > 1$. *Если* $|\vec{y}| > 1$, *то* $|z_3| > 1$ *и* $|z_4| < 1$.

17.6.3 Вычисление вычетов подинтегральной функции $\vec{f}(z)$.

В этом пункте полагаем $\tau \in]1, \infty[$. Вычислим вычеты рациональной функции $\vec{f}(z)$ в её полюсах $z_0 = 0$, z_1, z_2, z_3, z_4. Сначала Введём рациональную функцию

$$g(z) \equiv \frac{-n_2(z)(n_1(z) - y_1) + \tau^2 n_1(z)(n_2(z) - y_2)}{(n_1(z) - y_1)^2 + \tau^2 (n_2(z) - y_2)^2}. \tag{17.6.36}$$

В этих обозначениях

$$\vec{f}(z) = \vec{n}(z) \frac{1}{iz} g(z). \tag{17.6.37}$$

Начнем с вычисления вычета функции $\vec{f}(z)$ в нуле. Согласно формуле (17.6.37) для этого достаточно найти коэффициент Тейлора g_1 при z^1 в разложении функции $g(z)$ в нуле. Ибо вычет функции $\vec{f}(z)$

$$\operatorname{res}\{\vec{f}(z), 0\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} g_1 \tag{17.6.38}$$

в силу (17.6.37). Раскладывая знаменатель на множители согласно формуле (17.6.18), получаем

$$g(z) = \frac{-n_2(z)(n_1(z) - y_1) + \tau^2 n_1(z)(n_2(z) - y_2)}{((n_1(z) + i\tau n_2(z)) - (y_1 + i\tau y_2))((n_1(z) - i\tau n_2(z)) - (y_1 - i\tau y_2))}. \tag{17.6.39}$$

Подставим сюда выражения (17.6.16) для $n_1(z)$ и $n_2(z)$

$$g(z) = \frac{-\frac{1}{2i}(z^2-1)\left(\frac{1}{2}(z^2+1) - y_1 z\right) + \tau^2 \frac{1}{2}(z^2+1)\left(\frac{1}{2i}(z^2-1) - y_2 z\right)}{\left(\frac{1}{2}(z^2+1+\tau(z^2-1)) - z(y_1 + i\tau y_2)\right)\left(\frac{1}{2}(z^2+1-\tau(z^2-1) - z(y_1 - i\tau y_2)\right)}. \tag{17.6.40}$$

Отсюда при $z \to 0$ получаем

$$g(z) = \frac{\left(\frac{1}{4i} - \tau^2 \frac{1}{4i}\right) + z\left(-\frac{y_1}{2i} - \frac{\tau^2 y_2}{2}\right) + O(|z|^2)}{\left(\frac{1}{2}(1-\tau) - z(y_1 + i\tau y_2) + O(|z|^2)\right)\left(\frac{1}{2}(1+\tau) - z(y_1 - i\tau y_2) + O(|z|^2)\right)} = \tag{17.6.41}$$

$$\frac{\frac{1}{4i}(1-\tau^2) - \frac{1}{2i}(y_1 + i\tau^2 y_2)z + O(|z|^2)}{\frac{1}{4}(1-\tau^2) - z\left(\frac{1}{2}(1+\tau)(y_1 + i\tau y_2) + \frac{1}{2}(1-\tau)(y_1 - i\tau y_2)\right) + O(|z|^2)} =$$

$$= (-i)\frac{1 - \frac{2(y_1 + i\tau^2 y_2)}{1-\tau^2}z + O(|z|^2)}{1 - \frac{4(y_1 + i\tau^2 y_2)}{1-\tau^2}z + O(|z|^2)} = -i\left(1 + \frac{2(y_1 + i\tau^2 y_2)}{1-\tau^2}z + O(|z|^2)\right).$$

Таким образом,

$$g_1 = -i\frac{2(y_1 + i\tau^2 y_2)}{1-\tau^2} \tag{17.6.42}$$

и вычет функции $\vec{f}(z)$ в нуле согласно (17.6.38) равен

$$\operatorname{res}\{\vec{f}(z), 0\} = \frac{y_1 + i\tau^2 y_2}{\tau^2 - 1}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}. \tag{17.6.43}$$

Переходя к вычислению вычетов функции $\vec{f}(z)$ в точках z_1, z_2, z_3, z_4, заметим, что производные функций $n_1(z)$ и $n_2(z)$ согласно (17.6.16) удовлетворяют соотношениям

$$\frac{d}{dz}n_1(z) = \frac{-1}{iz}n_2(z), \tag{17.6.44}$$

$$\frac{d}{dz}n_2(z) = \frac{1}{iz}n_1(z). \tag{17.6.45}$$

Поэтому согласно формуле (17.6.17) функция

$$\vec{f}(z) = \frac{1}{2}\vec{n}(z)\frac{d}{dz}\ln\left((n_1(z) - y_1)^2 + \tau^2(n_2(z) - y_2)^2\right). \tag{17.6.46}$$

Вычеты логарифмической производной в нулях первого порядка равны $+1$, поэтому если все корни z_1, z_2, z_3, z_4 различны, то

$$\operatorname{res}\{\vec{f}(z), z_k\} = \frac{1}{2}\vec{n}(z_k), \quad k \in \overline{1,4}. \tag{17.6.47}$$

17.6.4 Вычисление функции $\vec{J}(\tau, \vec{y})$.

Зная расположение особых точек и величины вычетов подинтегральной функции, мы можем теперь вычислить интеграл по единичной окружности в формуле (17.6.15) для $\vec{J}(\tau, \vec{y})$.

Рассмотрим случай $\tau > 1$, $|\vec{y}| < 1$. Согласно выводам 17.6.1 и 17.6.2 в этом случае внутри единичной окружности S лежат три особые точки: z_0, z_1, z_2. Для величины $\vec{J}(\tau, \vec{y})$ получаем

$$\vec{J}(\tau, \vec{y}) = \frac{1+\tau}{2\pi}2\pi i\sum_{k=0}^{2}\operatorname{res}\{\vec{f}(z), z_k\}. \tag{17.6.48}$$

Подставляя сюда формулы для вычетов (17.6.43) и (17.6.47), получим

$$\vec{J}(\tau, \vec{y}) = i(1+\tau)\left(\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\frac{y_1 + i\tau^2 y_2}{\tau^2 - 1} + \frac{1}{2}\left(\vec{n}(z_1) + \vec{n}(z_2)\right)\right). \tag{17.6.49}$$

Используем теорему Виетта — формулы (17.6.26,17.6.27) и вычислим сумму $\vec{n}(z_1) + \vec{n}(z_2)$. Имеем

$$n_1(z_1) + n_2(z_2) = \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1} + z_2 + \frac{1}{z_2}\right) = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)\left(1 + \frac{1}{z_1 z_2}\right) = \tag{17.6.50}$$

$$\frac{1}{2}\frac{2}{1+\tau}(y_1 + i\tau y_2)\left(1 + \frac{1+\tau}{1-\tau}\right) = 2\frac{y_1 + i\tau y_2}{1-\tau^2},$$

аналогично

$$n_2(z_1) + n_2(z_2) = \frac{1}{2i}\left(z_1 + z_2 - \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)\right) = \frac{1}{2i}(z_1 + z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) \tag{17.6.51}$$

$$= \frac{1}{2i}\frac{2}{1+\tau}(y_1 + i\tau y_2)\left(1 + \frac{1+\tau}{1-\tau}\right) = i\tau 2\frac{y_1 + i\tau y_2}{1-\tau^2}.$$

Подставим (17.6.50,17.6.51) в (17.6.49) и получим

$$\vec{J}(\tau, \vec{y}) = i(1+\tau)\left(\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\frac{y_1 + i\tau^2 y_2}{\tau^2 - 1} + \frac{y_1 + i\tau y_2}{1-\tau^2}\begin{pmatrix}1\\ i\tau\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-\tau y_2\\ y_1\end{pmatrix}.$$

Продолжая это равенство по непрерывности и в точку $\tau = 1$, получаем

$$\forall \tau \in [1, \infty[\ \forall \vec{y} \in \mathbf{R}^2, |\vec{y}| < 1 \ \Big|\ \vec{J}(\tau, \vec{y}) = \begin{pmatrix}-\tau y_2\\ y_1\end{pmatrix}. \tag{17.6.52}$$

Теперь рассмотрим случай $\tau > 1$, $|\vec{y}| > 1$. Тогда согласно выводам 17.6.1 и 17.6.2 внутри единичной окружности лежат три особые точки z_0, z_2, z_4. Для величины $\vec{J}(\tau, \vec{y})$ согласно формуле (17.6.15) получаем

$$\vec{J}(\tau, \vec{y}) = (1+\tau)i\left(\operatorname{res}\{f(z), 0\} + \operatorname{res}\{f(z), z_2\} + \operatorname{res}\{f(z), z_4\}\right). \tag{17.6.53}$$

Выразим теперь через корни z_1 и z_2 входящую в выражение вычета $\operatorname{res}\{\vec{f}(z), 0\}$ величину $y_1 + i\tau^2 y_2$. По теореме Виетта (формула (17.6.27))

$$z_1 + z_2 = \frac{2}{1+\tau}(y_1 + i\tau y_2),$$

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \frac{2}{1+\tau}(y_1 - i\tau y_2).$$

Отсюда

$$\frac{y_1 + i\tau^2 y_2}{\tau^2 - 1} = \frac{-1}{4}\left((z_1 + z_2)\frac{(1+\tau)}{(1-\tau)} + (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)\right). \tag{17.6.54}$$

Подставим теперь в формулу (17.6.53) значения (17.6.43) и (17.6.47) для вычетов и учтем (17.6.54), получим

$$\vec{J}(\tau, \vec{y}) = (1+\tau)i\left(\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{4}\right)\left((z_1 + z_2)\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right) + (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)\right) + \frac{1}{2}(\vec{n}(z_2) + \vec{n}(z_4))\right). \tag{17.6.55}$$

Но согласно (17.6.35) и (17.6.21) верно $\vec{n}(z_4) = \overline{\vec{n}(z_1)}$. Подставляя это в (17.6.55), получаем

$$\vec{J}(\tau, \vec{y}) = (1+\tau)i\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{4}\right)\left((z_1 + z_2)\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right) + (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)\right) +$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} z_2+\frac{1}{z_2}+\bar z_1+\frac{1}{\bar z} \\ \frac{1}{i}\left((z_2-\bar z_1)-\left(\frac{1}{z_2}-\frac{1}{\bar z_1}\right)\right)\end{pmatrix}=$$

$$\frac{(1+\tau)i}{4}\begin{pmatrix} -z_1\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right)-z_2\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right)-\bar z_1-\bar z_2+z_2+\frac{1}{z_2}+\bar z_1+\frac{1}{\bar z_1} \\ (-i)\left(z_1\frac{1+\tau}{1-\tau}+z_2\frac{1+\tau}{1-\tau}+\bar z_1+\bar z_2+z_2-\bar z_1-\frac{1}{z_2}+\frac{1}{\bar z_1}\right)\end{pmatrix}.$$

По теореме Виетта (формула (17.6.26)) выразим z_2 через z_1 :

$$z_2=\frac{1-\tau}{1+\tau}\frac{1}{z_1}$$

и подставим в предыдущую формулу. Получим

$$\vec J(\tau,\vec y)=\frac{(1+\tau)i}{4}\begin{pmatrix} -\frac{1}{z_1}-\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)\frac{1}{\bar z_1}+\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)\frac{1}{z_1}+\frac{1}{\bar z_1} \\ (-i)\left(\frac{1}{z_1}+\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)\frac{1}{\bar z_1}+\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)\frac{1}{z_1}+\frac{1}{\bar z_1}\right)\end{pmatrix}= \tag{17.6.56}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\tau\left(\frac{1}{\bar z_1}-\frac{1}{z_1}\right) \\ \left(\frac{1}{\bar z_1}+\frac{1}{z_1}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \tau Im\left(\frac{1}{z_1}\right) \\ Re\left(\frac{1}{z_1}\right)\end{pmatrix}.$$

Продолжая последнее равенство по непрерывности и на $\tau=1$, получаем

$$\forall\tau\in[1,\infty[\ \forall\vec y\in\mathbf{R}^2,|\vec y|>1\ \Big|\ \vec J(\tau,\vec y)=\begin{pmatrix} \tau\frac{i}{2}\left(\frac{1}{\bar z_1}-\frac{1}{z_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\bar z_1}+\frac{1}{z_1}\right)\end{pmatrix}, \tag{17.6.57}$$

где $z_1(\tau,\vec y)$ — корень квадратного уравнения

$$z^2-2\frac{(y_1+i\tau y_2)}{(1+\tau)}z+\frac{1+\tau}{1-\tau}=0 \tag{17.6.58}$$

такой, что $|z_1(\tau,\vec y)|>1$ при $|\vec y|>1$.

В частном случае $\tau=1$ из формул (17.6.52) и (17.6.57) получаем: при $|\vec y|<1$ верно

$$\vec J(1,\vec y)=\begin{pmatrix}-y_2\\ y_1\end{pmatrix}, \tag{17.6.59}$$

а при $|\vec y|>1$ верно

$$\vec J(1,\vec y)=\frac{1}{|\vec y|^2}\begin{pmatrix}-y_2\\ y_1\end{pmatrix}. \tag{17.6.60}$$

17.6.5 Функция $\overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(\vec q,\vec x)$ внутри соленоида.

Возвратимся к п. 17.6.1 и найдем согласно формулам (17.6.6,17.6.14,17.6.52) выражение для функции $\overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(\vec q,\vec x)$ при $|\vec x|<a$. А именно, получим

$$\overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(\vec q,\vec x)=\left(-\frac{I\tau}{1+\tau}\right)Q(\vec q)\begin{pmatrix}-\tau\left(Q^\top(\vec q)\vec x\right)_2\\ \left(Q^\top(\vec q)\vec x\right)_1\end{pmatrix} \tag{17.6.61}$$

$$=-\frac{I\tau}{1+\tau}Q(\vec q)\begin{pmatrix}0&-\tau\\1&0\end{pmatrix}Q^\top(\vec q)\vec x,$$

где

$$\tau\equiv(1-q^2)^{-\frac{1}{2}}, \tag{17.6.62}$$

$$\tau \equiv |\vec{q}|, \tag{17.6.63}$$

и матрица $Q(\vec{q}) \in SO(2)$ задаётся формулой (17.6.7) при $q > 0$. Из включения $Q(\vec{q}) \in SO(2)$ следует, что $Q(\vec{q}) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q^\top(\vec{q}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, согласно замечанию 2.4.1, поэтому

$$Q(\vec{q}) \begin{pmatrix} 0 & -\tau \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q^\top = Q(\vec{q}) \left(\begin{pmatrix} 0 & 1-\tau \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) Q^\top(\vec{q}) = \tag{17.6.64}$$

$$(1-\tau) Q(\vec{q}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^\top(\vec{q}) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставим (17.6.64) в (17.6.61) и получим

$$\overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(\vec{q}, \vec{x}) = -\frac{I\tau}{1+\tau} \left((1-\tau) Q(\vec{q}) \begin{pmatrix} 0 & 1-\tau \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^\top(\vec{q}) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \vec{x}. \tag{17.6.65}$$

Существует предел при $|\vec{q}| \to 0$ в равенстве (17.6.64)

$$\lim_{|q| \to 0} \left(Q(\vec{q}) \begin{pmatrix} 0 & -\tau \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q^\top(\vec{q}) \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{17.6.66}$$

Поэтому равенство (17.6.65) при $\vec{q} = 0$ понимается по непрерывности как

$$\overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(0, \vec{x}) = -\frac{I}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}. \tag{17.6.67}$$

17.6.6 Взаимодействие власкайла с соленоидом внутри соленоида.

Для двумерного функционала взаимодействия власкайла с соленоидом согласно формуле (17.5.68) и формулам (17.6.1),(17.6.2) при $|\vec{x}| < a$ получаем

$$\mathrm{nitd}\,(\vec{x}) = e \langle (l_1, l_2), \overrightarrow{\mathrm{spef}}\,((l_1, l_2), (x_1, x_2)) \rangle, \tag{17.6.68}$$

где e — заряд власкайла $\vec{l} \equiv (l_1, l_2, l_3)$ — его скорость. Полагая $\vec{q} \equiv (l_1, l_2)$, имеем согласно (17.6.65)

$$\mathrm{nitd}\,(\vec{x}) = -eI \frac{\tau}{1+\tau} \left\langle \vec{q}, \left((1-\tau) Q(\vec{q}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^\top(\vec{q}) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \vec{x} \right\rangle = \tag{17.6.69}$$

$$-eI \frac{\tau}{1+\tau} \left((1-\tau) \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q^\top(\vec{q}) \vec{q}, Q^\top(\vec{q}) \vec{x} \right\rangle + \left\langle \vec{q}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} \right\rangle \right).$$

Но согласно определению (17.6.7) матрица $Q(\vec{q})$ даёт ортогональное преобразование, переводящее вектор $\binom{0}{|\vec{q}|}$ в вектор $\vec{q}$, поэтому матрица $Q^\top(\vec{q})$, соответствующая обратному преобразованию, такова, что $Q^\top(\vec{q})\vec{q} = \binom{0}{|\vec{q}|}$. Далее $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \binom{0}{|\vec{q}|} = \binom{0}{0}$ и равенство (17.6.69) принимает вид

$$\mathrm{nitd}\,(\vec{x}) = -eI \frac{\tau}{1+\tau} (q_2 x_1 - q_1 x_2). \tag{17.6.70}$$

Согласно выводу (17.5.4) внутри соленоида напряжённость магнитного поля соленоида $\vec{H} = -I\vec{k}$ и поэтому в трехмерных векторных обозначениях мы можем согласно (17.6.70) записать следующее выражение для функционала взаимодействия власкайла с соленоидом внутри соленоида

$$\mathrm{nit}\,(\vec{x}) = \frac{e}{1+\sqrt{1-(l_1^2+l_2^2)}}\langle\vec{H}, [\vec{x}, \vec{l}]\rangle, \tag{17.6.71}$$

где $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ — вектор скорости власкайла, $\vec{H} = (0, 0, -I)$ — напряжённость магнитного поля, $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ — вектор центра власкайла.

Для классического потенциала взаимодействия в смысле п.17.3.3 получаем

$$\mathrm{nit}_c(\vec{x}) = \frac{e}{2}\langle\vec{H}, [\vec{x}, \vec{l}]\rangle. \tag{17.6.72}$$

Итак, отличие функционала взаимодействия движущегося заряда с однородным магнитным полем заключается в замене постоянного множителя 2 в знаменателе формулы (17.6.72) на величину $1+\sqrt{1-(l_1^2+l_2^2)}$, зависящую от скорости.

Формула (17.6.71) описывает искомое "чистое"взаимодействие заряда с однородным магнитостатическим полем.

17.6.7 Взаимодействие влаквазикипера с соленоидом внутри соленоида.

Для влаквазикипера согласно таблице 17.1.1 трансформация Фурье псевдотока трехмерной функции псевдотока равна

$$\widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta}) = i[\vec{S}, \vec{\eta}], \tag{17.6.73}$$

где $\vec{S}$ — вектор спина, поэтому трансформация Фурье трехмерной функции тока по формуле (17.1.2) есть

$$\widehat{\overrightarrow{jf}}(\vec{\eta}) = \left(E + \xi_0^2\vec{l}\vec{l}^{\top}\right)\widehat{\overrightarrow{jsf}}(\vec{\eta}), \tag{17.6.74}$$

где

$$\xi_0 = \xi_0(\vec{l}) \equiv (1-|\vec{l}|^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{17.6.75}$$

Отсюда обобщённая функция $\overrightarrow{jf}$ есть значение следующего дифференциального оператора

$$\left(E + \xi_0^2\vec{l}\vec{l}^{\top}\right)[\vec{S}, -\vec{\nabla}], \tag{17.6.76}$$

где

$$\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \tag{17.6.77}$$

на основной функции в точке 0.

Согласно формуле (17.5.68) получаем в трехмерных обозначениях для функционала взаимодействия

$$\mathrm{nit}\,(\vec{x}) = -\left\langle [\vec{S}, \vec{\nabla}], \left(E + \xi_0^2\vec{l}\vec{l}^{t}\right)\mathrm{sped}\,(\vec{x})\right\rangle. \tag{17.6.78}$$

Подставим сюда (17.6.1,17.6.2,17.6.65) и получим

$$\mathrm{nit}\,(\vec{x}) = I\frac{\tau}{1+\tau}\cdot \tag{17.6.79}$$

$$\left\langle [\vec{S},\vec{\nabla}], \left(E+\xi_0^2\vec{l}\vec{l}^\top\right)\left(\begin{matrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\binom{x_1}{x_2}+(1-\tau)Q(\vec{q})\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}Q^\top(\vec{q})\binom{x_1}{x_2}\\ 0\end{matrix}\right)\right\rangle,$$

где $q\equiv(l_1,l_2)$.

Но

$$\vec{l}^\top\left(\begin{matrix}(1-\tau)Q(\vec{q})\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^\top(\vec{q})\binom{x_1}{x_2}\\ 0\end{matrix}\right)=(1-\tau)\left\langle\vec{q},Q(\vec{q})\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^\top(\vec{q})\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right\rangle=0 \tag{17.6.80}$$

согласно рассуждениям предыдущего пункта, поэтому

$$\operatorname{nit}(\vec{x})=I\frac{\tau}{1+\tau}\left(\left\langle[\vec{S},\vec{\nabla}],\left(\begin{matrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\binom{x_1}{x_2}+(1-\tau)Q(\vec{q})\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}Q^\top(\vec{q})\binom{x_1}{x_2}\\ 0\end{matrix}\right)\right\rangle\right. \tag{17.6.81}$$

$$\left.+\xi_0^2\left\langle[\vec{S},\vec{\nabla}],\vec{l}\right\rangle\left\langle\vec{q},\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right\rangle\right).$$

Рассмотрим по отдельности каждое из трёх слагаемых в скобках в правой части (17.6.81). Первое слагаемое

$$I_1\equiv\left\langle[\vec{S},\vec{\nabla}],\left(\begin{matrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\binom{x_1}{x_2}\\ 0\end{matrix}\right)\right\rangle=\left\langle\vec{S},\left[\vec{\nabla},\begin{pmatrix}-x_2\\ x_1\\ 0\end{pmatrix}\right]\right\rangle=\langle\vec{S},2\vec{k}\rangle=2S_3. \tag{17.6.82}$$

Третье слагаемое

$$I_3\equiv\xi_0^2\langle[\vec{S},\vec{\nabla}],\vec{l}\rangle\left\langle\vec{q},\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right\rangle=\xi_0^2\left\langle\vec{S},\left[\begin{pmatrix}q_2\\ -q_1\\ 0\end{pmatrix},\vec{l}\right]\right\rangle= \tag{17.6.83}$$

$$-\xi_0^2\left\langle\vec{S},l_3\vec{l}-|\vec{l}^2|\vec{k}\right\rangle=-\xi_0^2\left(l_3\langle\vec{S},\vec{l}\rangle-S_3\langle\vec{l},\vec{l}\rangle\right).$$

Второе слагаемое равно

$$I_2\equiv(1-\tau)\left\langle[\vec{S},\vec{\nabla}],\left(\begin{matrix}Q(\vec{q})\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^\top(\vec{q})\binom{x_1}{x_2}\\ 0\end{matrix}\right)\right\rangle= \tag{17.6.84}$$

$$(1-\tau)\left\langle\vec{S},\left[\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ 0\end{pmatrix},\left(\begin{matrix}Q(\vec{q})\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^\top(\vec{q})\binom{x_1}{x_2}\\ 0\end{matrix}\right)\right]\right\rangle=$$

$$(1-\tau)\left\langle\vec{S},\left[\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\left(\begin{matrix}Q(\vec{q})\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^\top(\vec{q})\binom{1}{2}\\ 0\end{matrix}\right)\right]+\right.$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q(\vec{q}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^\top(\vec{q}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle =$$

$$(1-\tau)\left\langle \vec{S}, \vec{k}\right\rangle \left(\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Q(\vec{q}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^\top(\vec{q}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle -\right.$$

$$\left.\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Q(\vec{q}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^\top(\vec{q}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle\right) =$$

$$(1-\tau)S_3 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Q(\vec{q}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Q^\top(\vec{q}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle =$$

$$(1-\tau)S_3 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle = -(1-\tau)S_3.$$

Собирая (17.6.82-17.6.84) в (17.6.81), получаем

$$\operatorname{nit}(\vec{x}) = I\frac{\tau}{1+\tau}\left(2S_3 - (1-\tau)S_3 - \xi_0^2\left(l_3\left\langle \vec{S}, \vec{l}\right\rangle - S_3\left\langle \vec{l}, \vec{l}\right\rangle\right)\right) =$$

$$I\frac{\tau}{1+\tau}\left((1+\tau)S_3 - \xi_0^2\left(l_3\left\langle \vec{S}, \vec{l}\right\rangle - S_3\left\langle \vec{l}, \vec{l}\right\rangle\right)\right).$$

В векторной форме последнее выражение равно

$$\operatorname{nit}\ \vec{x} = -\tau\left\langle \vec{H}, \vec{S} + \frac{\xi_0^2}{1+\tau}\left(\vec{S}\langle\vec{l}, \vec{l}\rangle - \vec{l}\langle\vec{S}, \vec{l}\rangle\right)\right\rangle. \qquad (17.6.85)$$

Однако, в последнем выражении нужно ещё учесть то, что спин $\vec{S}$ зависит от скорости. А именно, пусть $\vec{S_0}$ — значение спина в состоянии покоя, которое мы принимаем за стандартное состояние влаквазикипера. Тогда в правом представлении матриц Лоренца спин следующим образом зависит от скорости согласно формулам (3.2.12,3.3.36,3.7.15)

$$\vec{S} = \frac{1}{\xi_0^2} BQ^\top \vec{S_0}, \qquad (17.6.86)$$

где симметричная матрица

$$B = E + \frac{\xi_0}{(1+\frac{1}{\xi_9})}\vec{l}\vec{l}^\top, \qquad (17.6.87)$$

$Q \in SO(3)$ — матрица пространственного поворота (не имеющая никакого отношения к фигурировавшей ранее матрице $Q(\vec{q}) \in SO(2)$). Подставим (17.6.86,17.6.87) в (17.6.86) и получим

$$\operatorname{nit}(\vec{x}) = -\langle \vec{H}, \operatorname{Bes}(\vec{l})Q^\top \vec{S_0}\rangle, \qquad (17.6.88)$$

где симметричная матрица $\operatorname{Bes}(\vec{l})$ равна

$$\operatorname{Bes}(\vec{l}) \equiv \frac{\tau}{\xi_0^2}\left(\left(1 + \frac{\xi_0^2|\vec{l}|^2}{1+\tau}\right)E - \frac{\xi_0^2}{1+\tau}\vec{l}\vec{l}^\top\right)\left(E + \frac{\xi_0^2}{1+\xi_0}\vec{l}\vec{l}^\top\right). \qquad (17.6.89)$$

Или проводя алгебраические преобразования, получим

$$\operatorname{Bes}(\vec{l}) = \frac{1}{\sqrt{1-(l_1^2+l_2^2)}}\left(\left(1 - \frac{|\vec{l}|^2}{1+\sqrt{1-(l_1^2+l_2^2)}}\right)E + \right. \qquad (17.6.90)$$

$$\left(\frac{\sqrt{1-|\vec{l}|^2}}{1+\sqrt{1-|\vec{l}|^2}} - \frac{\sqrt{1-(l_1^2+l_2^2)}}{1+\sqrt{1-(l_1^2+l_2^2)}}\right)\vec{l}\vec{l}^\top\right).$$

В частном случае когда $\langle\vec{l},\vec{H}\rangle = 0$, т.е. $l_3 = 0$, получаем из (17.6.90)

$$\mathrm{Bes}\,(\vec{l}) = E \tag{17.6.91}$$

и

$$\mathrm{nit}\,(\vec{x}) = -\langle\vec{H}, Q^\top\vec{S}_0\rangle. \tag{17.6.92}$$

В частном случае, когда $\vec{l} \parallel \vec{H}$, т.е. $l_1 = l_2 = 0$, получаем из (17.6.90)

$$\mathrm{Bes}\,(\vec{l}) = \left(1 - \frac{1}{2}|\vec{l}|^2\right)E + \left(\frac{\sqrt{1-|\vec{l}|^2}}{1+\sqrt{1-|\vec{l}|^2}} - \frac{1}{2}\right)\vec{l}\vec{l}^\top. \tag{17.6.93}$$

Поэтому

$$\mathrm{Bes}\,(\vec{l})\vec{H} = \left(\left(1 - \frac{1}{2}|\vec{l}|^2\right) + \left(\frac{\sqrt{1-|\vec{l}|^2}}{1+\sqrt{1-|\vec{l}|^2}} - \frac{1}{2}\right)|\vec{l}|^2\right)\vec{H} = \sqrt{1-|\vec{l}|^2}\,\vec{H}, \tag{17.6.94}$$

и

$$\mathrm{nit}\,(\vec{x}) = -\sqrt{1-|\vec{l}|^2}\left\langle\vec{H}, Q^\top\vec{S}_0\right\rangle. \tag{17.6.95}$$

17.6.8 Свойства матрицы $\mathrm{Bes}\,(\vec{l})$.

Для того, чтобы пользоваться формулой (17.6.88) изучим свойства матрицы $\mathrm{Bes}\,(\vec{l})$, где $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$, $|\vec{l}| < 1$ как функции скорости $\vec{l}$. Соответствующий симметричный линейный оператор $\mathrm{Bes}\,(\vec{l}) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ имеет два ортогональных инвариантных подпространства: 1) инвариантное подпространство $L_\perp$ векторов, ортогональных $\vec{l}$, 2) инвариантное подпространство $L_\parallel$ векторов, параллельных $\vec{l}$. Действие оператора $\mathrm{Bes}\,(\vec{l})$ на вектора из $L_\perp$ сводится к умножению на собственное значение

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{1-(l_1^1+l_2^2)}}\left(1 - \frac{|\vec{l}|^2}{1+\sqrt{1-(l_1^2+l_2^2)}}\right), \tag{17.6.96}$$

а действие на вектора из $L_\parallel$ сводится к умножению на собственное значение

$$\lambda_2 = \tag{17.6.97}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(l_1^1+l_2^2)}}\left(1 - \frac{|\vec{l}|^2}{1+\sqrt{1-(l_1^2+l_2^2)}} + |\vec{l}|^2\left(\frac{\sqrt{1-|\vec{l}|^2}}{1+\sqrt{1-|\vec{l}|^2}} - \frac{\sqrt{1-(l_1^2+l_2^2)}}{1+\sqrt{1-(l_1^2+l_2^2)}}\right)\right).$$

Из выражения (17.6.96) следует в силу $|\vec{l}| < 1$, что $\lambda_1 > 0$ и

$$\lambda_1 = 1 - \frac{l_3^2}{\sqrt{1-(l_1^2+l_1^2)}\left(1+\sqrt{1-(l_1^2+l_1^2)}\right)}. \tag{17.6.98}$$

Поэтому $\lambda_1(\vec{l}) \in]0,1]$ и $\lambda_1(\vec{l}) = 1$ иф $l_3 = 0$.

Выражение (17.6.97) для второго собственного значения преобразуется к виду

$$\lambda_2(\vec{l}) = \sqrt{\frac{1-|\vec{l}|^2}{1-(l_1^2+l_2^2)}}. \tag{17.6.99}$$

Поэтому $\lambda_2(\vec{l}) \in]0,1]$ и $\lambda_2(\vec{l}) = 1$ иф $l_3 = 0$.

Вывод 17.6.3 *Если $l_3 \neq 0$, то норма оператора* $\mathrm{Bes}\,(\vec{l})$ *меньше 1. Если $l_3 = 0$, то* $\mathrm{Bes}\,(\vec{l}) = E$.

17.6.9 Критерий существования кратных корней квадратного уравнения (17.6.24).

Поскольку гладкая зависимость корней z_1, z_2 квадратного многочлена от его коэффициентов может нарушаться лишь в точках кратности корней, то определим для дальнейшего значения параметров $\tau \in [1, \infty[$ и $(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ квадратного многочлена (17.6.24) при которых корни кратные, т.е. $z_1 = z_2$.

Утверждение 17.6.3 *Квадратное уравнение (17.6.24) имеет кратные корни иф $y_1 = 0$ и $|y_2| = |\vec{q}| = \sqrt{1 - \frac{1}{\tau^2}}$.*

Доказательство. Обращение в нуль дискриминанта

$$(y_1 + i\tau y_2)^2 + \tau^2 - 1 = 0$$

квадратного многочлена (17.6.24) эквивалентно выполнению двух равенств для вещественных переменных

$$y_1 y_2 = 0$$

и

$$y_1^2 - \tau^2 y_2^2 + \tau^2 - 1 = 0.$$

Что возможно в двух случаях.

В первом случае $y_2 = 0$ и

$$y_1^2 + \tau^2 - 1 = 0. \tag{17.6.100}$$

Но из равенства (17.6.100) вытекает, что $y_1 = 0$ и $\tau = 1$.

Во втором случае $y_1 = 0$ и

$$-\tau^2 y_2^2 + \tau^2 - 1 = 0.$$

Откуда $y_1 = 0$ и $|y_2| = \sqrt{1 - \frac{1}{\tau^2}}$. Второй случай содержит решение $y_1 = 0, y_2 = 0, \tau = 1$. $\diamondsuit$

Следствие 17.6.1 *Если $|y_1 + iy_2| \neq |\vec{q}|$, то квадратное уравнение (17.6.24) не имеет кратных корней.*

17.6.10 Функция $\overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(\vec{q}, \vec{x})$ вне соленоида.

Аналогично п. 17.6.5 построим функцию $\overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(\vec{q}, \vec{x})$ вне соленоида, т.е. в случае $|\vec{x}| = |y_1 + iy_2| > a$. Согласно формулам (17.6.9, 17.6.14, 17.6.57) имеем при $|\vec{q}| > 0$

$$\overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(\vec{q}, \vec{x}) = -\frac{Ia\tau}{1+\tau} Q(\vec{q}) \vec{J}\left(\tau, \frac{Q^\top(\vec{q})\vec{x}}{a}\right), \tag{17.6.101}$$

где вектор $\vec{J}(\tau, \vec{y})$ задаётся формулой (17.6.56).

Чтобы найти значение функции $\overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(\vec{q}, \vec{x})$ при $\vec{q} = 0$ положим теперь $\vec{q} = \beta\vec{e}$, где $\beta \in]0, 1[$, а $\vec{e} \in \mathbf{R}^2$ единичный вектор. В этом случае $Q(\beta\vec{e}) = Q(\vec{e})$ при $\beta \in]0, 1[$ и формула (17.6.101) принимает вид

$$\overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(\beta\vec{e}, \vec{x}) = -\frac{Ia\tau}{1+\tau} Q(\vec{e}) \vec{J}\left(\tau(\beta\vec{e}), \frac{Q^\top(\vec{e})\vec{x}}{a}\right),$$

При $\beta \to +0$ верно $\tau \to 1$ и согласно п. 17.6.4 и формуле (17.6.60) существует предел

$$\lim_{\beta \to +0} \overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(\beta\vec{e}, \vec{x}) = -\frac{Ia}{2} Q(\vec{e})\vec{J}\left(1, \frac{Q^\top(\vec{e})\vec{x}}{a}\right) =$$

$$-\frac{Ia}{2}\frac{a}{|\vec{x}|^2} Q(\vec{e}) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q^\top(\vec{e})\vec{x} = -\frac{Ia^2}{2}\frac{1}{|\vec{x}|^2}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Доопределим функцию $\overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(\vec{q}, \vec{x})$ при $\vec{q} = 0$ полученным предельным значением

$$\overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(0, \vec{x}) = -\frac{Ia^2}{2}\frac{1}{|\vec{x}|^2}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}. \qquad (17.6.102)$$

17.6.11 Взаимодействие власкайла с соленоидом вне соленоида.

Аналогично п. 17.6.6 вычислим функционал взаимодействия власкайла с соленоидом вне соленоида. Согласно формуле (17.6.101) и формулам (17.6.1, 17.6.2) при $|\vec{x}| > a$ получаем при $|\vec{q}| > 0$ равенство

$$\mathrm{nitd}\,(\vec{x}) = e\left\langle \vec{q}, \overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(\vec{q}, \vec{x})\right\rangle = -\frac{eIa\tau}{1+\tau}\left\langle \vec{q}, Q(\vec{q})\vec{J}\left(\tau, \frac{Q^\top(\vec{q})\vec{x}}{a}\right)\right\rangle = \qquad (17.6.103)$$

$$-\frac{eIa\tau}{1+\tau}\left\langle Q^\top(\vec{q})\vec{q}, \vec{J}\left(\tau, \frac{Q^\top(\vec{q})\vec{x}}{a}\right)\right\rangle.$$

Поскольку по построению $Q(\vec{q})\begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} = \vec{q}$, то $Q^\top(\vec{q})\vec{q} = Q^{-1}(\vec{q})\vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$. Тогда формула (17.6.103) принимает вид

$$\mathrm{nitd}\,(\vec{x}) = -\frac{eIa\tau q}{1+\tau} J_2\left(\tau, Q^\top(\vec{q})\frac{\vec{x}}{a}\right), \qquad (17.6.104)$$

где функция

$$J_2(\tau, \vec{y}) = Re\left(\frac{1}{z_1(\tau, \vec{y})}\right), \qquad (17.6.105)$$

а $z_1(\tau, \vec{y})$ — корень квадратного уравнения (17.6.24), такой что $|z_1(\tau, \vec{y})| > 1$ при $|\vec{y}| > 1$.

§17.7 Взаимодействие световой и сверхсветовой частиц с магнитостатическим полем

Так как согласно § 14.7 световая натуральная частица конечной энергии имеет нулевой заряд и нулевой спин, то её мейн не менее единицы и её главк представляется в общем случае власармом. Поэтому, чтобы рассмотреть главное взаимодействие натуральной световой частицы с магнитостатическим полем в общем случае, достаточно ограничиться рассмотрением взаимодействия власарма с однородным магнитостатическим полем, или точнее с полем соленоида внутри соленоида.

Для сверхсветовых частиц мы ограничимся рассмотрением главного взаимодействия скалярных сверхсветовых частиц с общим магнитостатическим полем. Так как согласно § 14.7 мейн натуральной сверхсветовой частицы не менее 2, то главк сверхсветовой скалярной натуральной частицы в общем случае представляется вланюром. Итак, мы рассмотрим в п.2 15.4.2 взаимодействие вланюра с магнитостатическим полем.

17.7.1 Функционал взаимодействия власарма с полем соленоида.

Рассмотрим взаимодействие соленоида и власарма. В этом случае условия теоремы 17.5.1 о предельном переходе для получения формулы (17.5.6) для двумерного функционала взаимодействия формально не выполняются, ибо $|\vec{l''}| = 1$. Однако, без проведения математического доказательства мы и в этом случае применим формулу (17.5.6), т.е. возьмём

$$\widehat{\mathrm{nitd}}\,(\eta_1,\eta_2) = -\frac{\left\langle \widehat{\vec{jf}}'(\eta_1,\eta_2), \widehat{\vec{jf}}''(-\eta_1,-\eta_2,0)\right\rangle}{\mathrm{Pd}\,(\vec{l''},(\eta_1,\eta_2,0))}. \tag{17.7.1}$$

Если $\vec{q} \equiv (l_1, l_2)$ и $|\vec{q}| < 1$, т.е. $l_3 \neq 0$, то для вычисления функционала $\mathrm{nitd}\,(x_1,x_2)$ применимы построения § 17.6 и, в частности, формула (17.6.65). Согласно формуле (17.5.68) имеем тогда

$$\mathrm{nit}\,(x_1,x_2,x_3) = -\left\langle \vec{d},\vec{\nabla}\right\rangle \left\langle \vec{q}, \overrightarrow{\mathrm{spef}}\,(\vec{q},(x_1,x_2))\right\rangle, \tag{17.7.2}$$

где $\vec{\nabla} \equiv (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})^\top, \vec{d} \in \mathbf{R}^3$ — дипольный момент власарма.

Сравнивая применение формулы (17.5.68) для власкайла и власарма мы видим, что функционал взаимодействия для власарма получается из функционала взаимодействия для власкайла, если в нём положить $e = 1$ и затем применить дифференциальный оператор $-\left\langle \vec{d},\vec{\nabla}\right\rangle$. Итак, внутри соленоида согласно формуле (17.6.71) имеем для функционала взаимодействия власарма и соленоида

$$\mathrm{nit}\,(\vec{x}) = -\frac{1}{1+\sqrt{1-(l_1^2+l_2^2)}}\left\langle \vec{d},\vec{\nabla}\right\rangle \left\langle \vec{H},[\vec{x},\vec{l}]\right\rangle = \frac{1}{1+\sqrt{1-(l_1^2+l_2^2)}}\left\langle \vec{d},\vec{\nabla}\right\rangle \left\langle [\vec{H},\vec{l}],\vec{x}\right\rangle =$$

$$\frac{\left\langle [\vec{H},\vec{l}],\vec{d}\right\rangle}{1+\sqrt{1-(l_1^2+l_2^2)}}.$$

Эту формулу мы получили при $l_3 \neq 0$, но по непрерывности она продолжается и на $l_3 = 0$. Получаем следующий вид функционала взаимодействия власарма с соленоидом внутри соленоида

$$\mathrm{nit}\,(\vec{x}) = \frac{\left\langle [\vec{H},\vec{l}],\vec{d}\right\rangle}{1+\sqrt{1-(l_1^2+l_2^2)}}. \tag{17.7.3}$$

Отсюда, в частности, видно что в однородном магнитостатическом поле дипольный момент власарма ориентируется коллинеарно вектору $[\vec{H},\vec{l}]$, т.е. фиксируется поляризация.

17.7.2 Взаимодействие вланюра с квазикиперным покоящимся агвидом.

Вернемся к общему случаю формулы (17.3.24) для функционала взаимодействия покоящейся натуральной квазикиперной частицы с натуральной частицей и согласно замечанию 17.3.2 подставим на место второго агвида вланюр. Согласно таблице 17.1.1 получим

$$\widehat{\mathrm{nit}}\,(\vec{\eta}) = c\left\langle \widehat{\vec{jf}}'(\vec{\eta}),\vec{l}\right\rangle,$$

где $c \in \mathbf{R}$ — сквадр вланюра. Отсюда функционал взаимодействия вланюра с квазикиперным покоящимся агвидом равен

$$\operatorname{nit}(\vec{x}) = c \left\langle \overrightarrow{jf}'(\vec{x}), \vec{l} \right\rangle . \tag{17.7.4}$$

Итак, функционал взаимодействия вланюра с магнитостатическим полем отличен от нуля лишь в области локализации токов. Вне области локализации токов взаимодействие отсутствует. Т.е. в данном случае сверхсветовая частица "не чувствует" напряжённость магнитного поля, а "чувствует" только токи.

Глава 18

Взаимодействие влавинов и динамика точечных частиц

Настоящая глава — пример применения предшествующей теории к построению динамики взаимодействия точечных частиц.

Поскольку нашей целью является построение динамики ансамблей частиц, включающих частицы любых скоростей, то в § 18.1 мы сначала излагаем теорию 4-вектора импульса свободной частицы единообразно для частиц досветовых, световых и сверхсветовых скоростей.

В § 18.9 мы показываем как существование четырех компонент связности группы Лоренца может влечь существование квартетов или пар частиц с одинаковой массой и симметричными характеристиками в досветовом, световом и сверхсветовом случаях.

Так как в нашей теории потенциал взаимодействия зависит от скоростей частиц достаточно сложным образом, то и импульсы взаимодействующих частиц являются нелинейными функциями скоростей. Поэтому возникают новые математические трудности в вопросах существования экстремалей, их гладкости и выполнения законов сохранения. Эти вопросы мы рассматриваем в § 18.6 перед последующим применением в § 18.7. Заметим, что результаты § 18.6 потребовались бы и при более подробном описании экстремалей в § 18.4.

В § 18.2, следуя изложению предыдущих глав, мы напоминаем, как построение взаимодействия точечных частиц с помощью аппроксимации влавинами сводится к вычислению взаимодействия элементарных влавинов. Далее в качестве демонстрации этой схемы мы выбираем простейший элементарный влавин, а именно, власкайл — влавин нулевого порядка, несущий лишь одну характеристику — заряд e. Мы вводим понятие скайла. Это заряженная агвидная частица с указанием способа аппроксимации её взаимодействий. А именно, во всех взаимодействиях она заменяется её аппроксимирующим влавином нулевого порядка — власкайлом. Т.е. для аппроксимации всех её взаимодействий используется только одна характеристика частицы — её заряд.

§ 18.3 посвящён построению общей динамики скайлов. В § 18.4 показано, что аппроксимация второго порядка включительно по скоростям функции Лагранжа системы скайлов даёт релятивистскую функцию Лагранжа для взаимодействия заряженной частицы с электромагнитным полем. Т.е. динамика скайлов в качестве приближения второго порядка содержит релятивистскую динамику движения частиц в электромагнитном поле и, в частности, законы Кулона и Био-Савара. В § 18.5 мы показываем, что при скоростях движения, сравнимых со скоростью света, закон взаимодействия скайлов существенно отличается от релятивистского закона взаимодействия, а именно, две частицы одинаковой массы и одноимённых зарядов могут образовывать стационарную вращающуюся систему при скоростях движения больших $\frac{c}{\sqrt{2}}$ в отличие от релятивистской модели движения.

В случае, если один из власкайлов покоится, потенциал взаимодействия двух власкайлов совпадает с кулоновским, поэтому для движения в электростатическом поле модель власкайла совпадает с классической релятивистской моделью движения заряженной частицы в электростатическом поле. (Из других соображений мы пришли к этому выводу ранее в п. 17.2.7.) В случае же магнитостатического поля теория скайлов и классическая релятивистская теория дают разные результаты. Поэтому в § 18.7 мы строим теорию движения скайла внутри соленоида и в § 18.8 сравниваем её с соответствующей классической нерелятивистской (мы называем её в § 18.8 просто *классической*) и релятивистской моделями. Оказывается, что в теории скайлов траектория электрона в однородном постоянном магнитном поле внутри соленоида уже может не быть окружностью и скорость электрона на траектории может не быть постоянной. Показано также, что в случае плоского движения классическое приближение даёт меньшую ошибку аппроксимации точной траектории, чем релятивистское. В частности, в определении частоты классическое приближение даёт относительную ошибку $O(\beta^4)$, а релятивистское даёт относительную ошибку $-\frac{\beta^2}{2}+O(\beta^4)$, где β — нормированная на скорость света скорость частицы.

В § 18.10 мы строим теорию движения скайла вне соленоида, которая не имеет аналога в классической и релятивистской моделях, в которых взаимодействие движущейся заряженной частицы с магнитным полем соленоида вне соленоида отсутствует. В частности мы определяем характеристики круговых траекторий вне соленоида.

Хотя настоящая глава содержит построение всей классической релятивистской теории движения заряженных частиц в электромагнитном поле, она носит тем не менее, как уже говорилось, демонстрационный характер. По изложенной схеме, используя предшествующую теорию, строится взаимодействие частиц с учётом их характеристик следующего порядка: дипольного момента, спина, квадра, квина и т.д. Эта схема применяется к описанию взаимодействия частиц единообразно для взаимодействия частиц досветового, светового и сверхсветового классов как внутри класса так и между ними.

§18.1 4-вектор импульса свободной агвидной частицы

18.1.1 Общая схема формализма динамики агвидных частиц. В этом параграфе рассматривается свободная агвидная частица конечной массы. Агвидность здесь в отличие от соглашения § 17.5 не включает требование лоренцевости, а понимается в исходном смысле определения 3.6.1. Мы рассматриваем все величины: массу m, 4-вектор скорости $l \in \mathbf{R}^4$, 3-вектор импульса $\vec{p} \in \mathbf{R}^3$ в текущем и стандартном состояниях. В отличие от предшествующих обозначений, чтобы не использовать знаки над символами, мы будем отличать величины в стандартном состоянии добавлением к их символам буквы s. Например, ms — масса стандартного состояния (ранее обозначавшаяся m_0), $ls \in \mathbf{R}^4$ — 4-вектор скорости стандартного состояния, $\overrightarrow{ps} \in \mathbf{R}^3$ — 3-вектор импульса стандартного состояния.

Состояния частицы нумеруются элементами группы Пуанкаре. В данной ситуации свободной агвидной частицы функция Лагранжа не зависит от времени и положения центра частицы, поэтому мы нумеруем состояния элементами G связной компоненты единицы группы Лоренца Ω_e. Стандартному состоянию соответствует единичная матрица $E \in \Omega_e$.

В этих обозначениях согласно формуле (3.6.20) 4-вектор скорости следующим образом зависит от состояния

$$l = \left(G^{-1}ls\right)_0^{-1} G^{-1}ls. \tag{18.1.1}$$

Функция Лагранжа равна массе и следующим образом зависит от состояния согласно формуле (12.2.18)

$$n = m = \left(G^{-1}ls\right)_0^{-1} ms. \tag{18.1.2}$$

Задача настоящего параграфа — приписать единым образом 3-вектор импульса и энергию каждой свободной агвидной частице: досветовой, световой и сверхсветовой, — так, чтобы мы могли использовать законы сохранения энергии и импульса для ансамблей, содержащих частицы всех трёх видов. Инструментом такого построения законов сохранения будет гамильтонов формализм п. 12.4.5.

Согласно этому формализму мы задаём 3-вектор импульса $\vec{p} \in \mathbf{R}^3$ и строим функцию

$$w = w(G, \vec{p}, ls) \equiv n + \left\langle \vec{p}, \vec{l} \right\rangle = \left(G^{-1} ls \right)_0^{-1} \left(ms + \left\langle \vec{p}, \overrightarrow{G^{-1} ls} \right\rangle \right) \tag{18.1.3}$$

аргумента $G \in \Omega_e$, в которую величины $\vec{p} \in \mathbf{R}^3$ и $ls \in \mathbf{R}^4$ с $ls_0 = 1$ входят как параметры. Если $K \in \Omega_e$ — критическая точка функции w по аргументу G при фиксированных $\vec{p} \in \mathbf{R}^3$ и $ls \in \mathbf{R}^4$, то значение

$$\mathrm{hc} = \mathrm{hc}\,(\vec{p}) \equiv w(K, \vec{p}, ls). \tag{18.1.4}$$

мы называем функцией Гамильтона или энергией. Определяя $p_0 \equiv \mathrm{hc}$, получаем 4-вектор импульса $p \equiv \binom{p_0}{\vec{p}} \in \mathbf{R}^4$.

Рассмотрим 4-вектора импульса и скорости как функции состояния $G \in \Omega_e$. Тогда для функций $l = l(G)$ и $p = p(G)$ по определению стандартного состояния верны неравенства

$$l(E) = ls, \;\; p(E) = ps, \tag{18.1.5}$$

$$w(E, \overrightarrow{ps}, ls) = ps_0 = ms + \left\langle \overrightarrow{ps}, \overrightarrow{ls} \right\rangle, \tag{18.1.6}$$

$$\delta w(G, \overrightarrow{ps}, ls)\Big|_{G=E} = 0. \tag{18.1.7}$$

В соотношении (18.1.7) утверждается, что вариация по аргументу $G \in \Omega_e$ в точке $G = E$ обращается в нуль. При этом $\overrightarrow{ps}$ и ls — фиксированные параметры.

Наша задача теперь для каждого состояния определить его 4-вектор импульса. Мы будем действовать в обратном направлении — задавать 3-вектор импульса $\vec{p} \in \mathbf{R}^3$ и находить критическую точку $K \in \Omega_e$ функции $w(G, \vec{p}, ls)$ и значение функции в критической точке p_0.

18.1.2 Коллинеарность 4-векторов импульса и скорости

Покажем, что в любом состоянии верно соотношение

$$p = p_0 l \tag{18.1.8}$$

между 4-векторами импульса p и скорости l.

Из определяющей формулы (18.1.3) следует, что

$$\forall G \in \Omega_e \;\Bigg|\; \left\langle \begin{pmatrix} w(G, \vec{p}, ls) \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \Theta G^{-1} ls \right\rangle = ms. \tag{18.1.9}$$

Проведём варьирование равенства (18.1.9) в критической точке $G = K \in \Omega_e$ функции $w(G, \vec{p}, ls)$ по аргументу G. Так как в критической точке $\delta w(G, \vec{p}.ls)|_{G=K} = 0$, то получим

$$\left\langle p, \Theta \left(\delta G^{-1} \right) ls) \right\rangle = 0. \tag{18.1.10}$$

Для элемента G группы Лоренца согласно лемме (2.4.3) верно

$$G^{-1} = \Theta G^{\top} \Theta. \tag{18.1.11}$$

Выразим вариацию в точке $K \in \Omega_e$ через вариацию в точке E, т.е. сделаем замену переменных $G = KS$, тогда $\delta G = K \delta S$. Итак, условие (18.1.10) принимает вид

$$\left\langle (\delta S) p, \Theta K^{-1} ls \right\rangle = 0. \tag{18.1.12}$$

Но линейное пространство вариаций в единице группы Лоренца есть алгебра Ли этой группы, равная согласно формуле (4.2.47) $Ma(4)\Theta$. Т.е. вариации δS пробегают линейное пространство $Ma(4)\Theta$, и условие (18.1.12) эквивалентно условию

$$\forall A \in Ma(4) | \left\langle A\Theta p, \Theta K^{-1} ls \right\rangle = 0. \tag{18.1.13}$$

Пользуясь формулой (18.1.1) для 4-вектора скорости и свойствами скалярного произведения матриц из § 6.1, соотношение (18.1.13) приведём к эквивалентному виду

$$\forall A \in Ma(4) \; \Big| \; \left\langle A, (\Theta l)(\Theta p)^\top \right\rangle = 0. \tag{18.1.14}$$

Теперь нам потребуется следующее алгебраическое утверждение.

Утверждение 18.1.1 *Пусть* $a \in \mathbf{R}^n, b \in \mathbf{R}^n, n \geq 2$, *тогда если*

$$\forall A \in Ma(n) \; \Big| \; \left\langle A, ab^\top \right\rangle = 0, \tag{18.1.15}$$

то вектора a *и* b *линейно зависимы.*

Доказательство. Из условия (18.1.15) следует, что при любых $i, j \in \overline{1,n}$ $i \neq j$ верно

$$a_i b_j - a_j b_i = 0,$$

т.е. вектора a и b линейными зависимы. ♢

Используя утверждение 18.1.1, мы получаем из соотношения (18.1.14) линейную зависимость векторов Θp и Θl, а значит и векторов p и l. Но $l_0 = 1$, поэтому доказано равенство (18.1.8).

Рассматривая соотношение (18.1.9) в критической точке $G = K$ получаем также соотношение

$$\langle p, \Theta l \rangle = m \tag{18.1.16}$$

связывающее 4-вектора импульса p и скорости l и массу m в текущем состоянии. Подставим в (18.1.16) соотношение (18.1.8) и получим соотношение

$$p_0(1 - |\vec{l}|^2) = m, \tag{18.1.17}$$

связывающее энергию p_0, массу m и величину скорости $|\vec{l}|$ в текущем состоянии.

Из соотношения (18.1.17) следует, что вывод леммы (13.4.1) о равенстве нулю массы световой частицы, полученный для натуральных скалярных световых частиц, распространяется на все агвидные частицы конечной энергии.

Вывод 18.1.1 *Масса агвидной световой частицы конечной конденсированной энергии равна нулю.*

18.1.3 Закон преобразования 4-вектора импульса при изменении состояния.

Правило преобразования 4-вектора импульса следует из леммы.

Лемма 18.1.1 *Пусть единица* E *— критическая точка функционала* $w(G, \overrightarrow{ps}, ls)$ *и* $w(E, \overrightarrow{ps}, ls) = ps_0$. *Пусть* $K \in \Omega_e$. *Тогда* K *— критическая точка функционала* $w(G, \overrightarrow{K^{-1}ps}, ls)$ *и*

$$w(K, \overrightarrow{K^{-1}ps}, ls) = (K^{-1}ps)_0. \tag{18.1.18}$$

Доказательство. Нам даны соотношения (18.1.6) и (18.1.7). Требуется доказать соотношения (18.1.18) и равенство

$$\delta w(G, \overrightarrow{K^{-1}ps}, ls)|_{G=K} = 0. \tag{18.1.19}$$

Преобразуем функцию w, задаваемую выражением (18.1.3),

$$w(G, \overrightarrow{K^{-1}ps}, ls) = (G^{-1}ls)_0^{-1}\left(ms + \left\langle \overrightarrow{K^{-1}ps}, \overrightarrow{G^{-1}ls}\right\rangle\right) = \tag{18.1.20}$$

$$(G^{-1}ls)_0^{-1}\left(ms + \left(K^{-1}ps\right)_0\left(G^{-1}ls\right)_0 - \left\langle K^{-1}ps, \Theta G^{-1}ls\right\rangle\right) =$$

$$(K^{-1}ps)_0 + (G^{-1}ls)_0^{-1}\left(ms - \left\langle ps, K^{-1\top}\Theta G^{-1}ls\right\rangle\right).$$

Линейной заменой переменных $G = SK$ сведем вариацию по аргументу G в точке $G = K$ к вариации по аргументу S в точке $S = E$. При этом

$$G^{-1} = K^{-1}S^{-1}, K^{-1\top}\Theta G^{-1} = \Theta K G^{-1} = \Theta S^{-1}$$

в силу свойства (18.1.11). Согласно (18.1.20) получаем

$$w\left(G, \overrightarrow{K^{-1}ps}, ls\right) = \left(K^{-1}ps\right)_0 + \left(K^{-1}S^{-1}ls\right)_0^{-1}\left(ms - \langle ps, \Theta S^{-1}ls\rangle\right). \tag{18.1.21}$$

Рассмотрим функцию

$$v(S) \equiv ms - \left\langle ps, \Theta S^{-1}ls\right\rangle = ms - ps_0(S^{-1}ls)_0 + \left\langle \overrightarrow{ps}, \overrightarrow{S^{-1}ls}\right\rangle = (S^{-1}ls)_0\left(w(S, \overrightarrow{ps}, ls) - ps_0\right). \tag{18.1.22}$$

В силу условий (18.1.6) и (18.1.7) верно

$$\begin{cases} v(E) & = & 0, \\ \delta U(S)|_{S=E} & = & 0. \end{cases} \tag{18.1.23}$$

Из (18.1.21,18.1.22) следует (18.1.18) и (18.1.19). $\diamondsuit$

Следствие 18.1.1 *При переходе из стандартного состояния в состояние, задаваемое элементом $G \in \Omega_e$ вектор 4-импульса преобразуется по формуле*

$$p = G^{-1}ps. \tag{18.1.24}$$

Из формулы (18.1.24) следует, что величина

$$\langle p, \Theta p\rangle = Const = \langle ps, \Theta ps\rangle \tag{18.1.25}$$

по всем состояниям частицы. Сравнивая (18.1.16) и (18.1.25) получаем

$$\langle p, \Theta p\rangle = p_0 m = Const \tag{18.1.26}$$

по всем состояниям частицы.

18.1.4 Основные соотношения и их следствия

В 18.1.2 и 18.1.3 мы получили следующие основные соотношения для вектора 4-импульса свободной агвидной частицы конечной массы:

$$p = p_0 l, \tag{18.1.27}$$

$$\langle p, \Theta l \rangle = m, \tag{18.1.28}$$

$$p = G^{-1} ps. \tag{18.1.29}$$

Из них следуют соотношения

$$p_0 \langle l, \Theta l \rangle = m, \tag{18.1.30}$$

$$\langle p, \Theta p \rangle = p_0 m = ps_0 ms. \tag{18.1.31}$$

Применим теперь эти соотношения совместно с формулами (18.1.1) и (18.1.2) для зависимости скорости и массы от состояния частицы отдельно к случаям досветовой световой и сверхсветовой частиц.

Досветовая частица. В этом случае существует выделенное физическое состояние — состояние покоя частицы. Применим это состояние за стандартное, тогда ms — масса покоя частицы (обозначаемая нами в предыдущих главах как m_0). В этом случае по формуле (18.1.2)

$$m = ms\sqrt{1 - |\vec{l}|^2}. \tag{18.1.32}$$

Согласно (18.1.30), тогда

$$p_0 = \frac{ms}{\sqrt{1 - |\vec{l}|^2}}. \tag{18.1.33}$$

Согласно (18.1.27)

$$\vec{p} = \frac{ms}{\sqrt{1 - |\vec{l}|^2}} \vec{l}. \tag{18.1.34}$$

По формуле (18.1.30) масса m и энергия p_0 имеют один и тот же знак в любом состоянии. Соотношение (18.1.31) принимает классический вид

$$\langle p, \Theta p \rangle = (ms)^2. \tag{18.1.35}$$

Световой случай. В этом случае $m = 0$ и $\langle l, \Theta l \rangle = 0$ во всех состояниях и соотношение (18.1.30) не даёт информации об энергии p_0 как функции состояния. Поэтому основным источником информации об энергии как функции состояния становится формула преобразования 4-вектора импульса (18.1.29). Из формулы (18.1.27) в световом случае следует, что

$$p_0 = \pm |\vec{p}|. \tag{18.1.36}$$

Формула (18.1.31) принимает вид

$$\langle p, \Theta p \rangle = 0. \tag{18.1.37}$$

Важным отличием светового случая от досветового является то, что энергия и импульс уже не являются функцией скорости частицы. При одном и том же векторе скорости $\vec{l}$ они могут принимать различные значения.

Пример 18.1.1

Рассмотрим световую частицу с вектором скорости в стандартном состоянии $\overrightarrow{ls} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Пусть матрица $G \in \Omega_e$ равна

$$G = \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 & 0 & \beta\xi_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\xi_0 & 0 & 0 & \xi_0 \end{pmatrix} \tag{18.1.38}$$

где $\beta \in]-1, 1[, \xi \equiv (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$. В текущем состоянии 4-вектор скорости равен

$$l = (G^{-1}ls)_0^{-1} G^{-1} ls = (\xi_0(1-\beta))^{-1} \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 & 0 & -\beta\xi_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\xi_0 & 0 & 0 & \xi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = ls, \tag{18.1.39}$$

а 4-вектор импульса равен

$$p = G^{-1} ps = \begin{pmatrix} \xi_0 & 0 & 0 & -\beta\xi_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\xi_0 & 0 & 0 & \xi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ps_0 = (1-\beta)\xi_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ps_0 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} ps, \tag{18.1.40}$$

т.е.

$$p_0 = \gamma(\beta) ps_0, \tag{18.1.41}$$

$$\vec{p} = \gamma(\beta) \overrightarrow{ps}, \tag{18.1.42}$$

где

$$\gamma(\beta) \equiv \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \tag{18.1.43}$$

Итак, при сохранении скорости $\vec{l}$ при изменении состояния энергия может умножаться на множитель $\gamma \in]0, \infty[$ вида (18.1.43).

Сверхсветовой случай. В этом случае как и в световом не существует физически выделенного состояния. Однако, масса ненулевой частицы как и в досветовом случае не равна нулю и является известной функции состояния — формула (18.1.2). Вместо массы покоя в световом случае за константу, общую для всех состояний, в сверхсветовом случае возьмём согласно соотношению (18.1.31) величину

$$a \equiv \pm\sqrt{-\langle p, \Theta p\rangle}. \tag{18.1.44}$$

Заметим, что в силу (18.1.27) для сверхсветовой частицы

$$\langle p, \Theta p\rangle = p_0^2(1 - |\vec{l}|^2) \le 0.$$

Мы получаем следующее выражение для энергии

$$p_0 = -\frac{a}{\sqrt{|l|^2 - 1}}. \tag{18.1.45}$$

Что в силу (18.1.30) даёт следующее выражение для массы

$$m = a\sqrt{|\vec{l}|^2 - 1}. \tag{18.1.46}$$

Энергия p_0 и масса m имеют противоположные знаки в сверхсветовом случае. 4-импульс сверхсветовой частицы как функция скорости определен и равен

$$p = -\frac{a}{\sqrt{|\vec{l}|^2 - 1}}\begin{pmatrix}1\\ \vec{l}\end{pmatrix}. \tag{18.1.47}$$

При $|\vec{l}| \to 1$ и энергия и импульс неограниченно возрастают. При $|\vec{l}| \to \infty$ энергия стремится к нулю, а импульс стремится к постоянному пределу, если существует предел

$$\lim_{|\vec{l}|\to\infty} \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \vec{k}.$$

Тогда

$$\lim_{|\vec{l}|\to\infty} \vec{p}(\vec{l}) = -a\vec{k}.$$

Замечание 18.1.1 *Отметим, что все соотношения и выводы пп. 18.1.1-18.1.4 получены для свободной агвидной частицы при отсутствии взаимодействия с другими полями.*

Формула (18.1.27) даёт также возможность сделать следующий

Вывод 18.1.2 *Пусть агвидная частица конечной ненулевой конденсированной энергии имеет 4-вектор импульса $p \in \mathbf{R}^4$. Тогда частица: 1) досветовая иф $|p_0| > |\vec{p}|$; 2) световая иф $|p_0| = |\vec{p}|$; 3) сверхсветовая иф $|p_0| < |\vec{p}|$.*

§18.2 Взаимодействия элементарных влавинов. Функционал взаимодействия власкайлов.

18.2.1 Взаимодействия элементарных влавинов.

В п. 13.5.6 для описания взаимодействия агвидов мы ввели их аппроксимацию влавинами. Так как каждый влавин является суммой элементарных влавинов, то вычисление функционалов взаимодействия влавинов сводится к вычислению функционалов взаимодействия элементарных влавинов. Мы выделили 6 простейших элементарных влавинов для аппроксимации досветовых, световых и сверхсветовых частиц: власкайл, владип, влаквазикипер, власарм, вланюр, власмар. С помощью власкайла, владипа и влаквазикипера мы аппроксимируем любую досветовую натуральную частицу с ошибкой второго порядка. С помощью власарма мы аппроксимируем любую световую натуральную частицу с ошибкой второго порядка. С помощью вланюра и вламара мы аппроксимируем любую сверхсветовую частицу с ошибкой третьего порядка в смысле § 13.5.

Образ Фурье функционала взаимодействия двух влавинов — рациональная функция, явно построенная в § 13.4. Образ Фурье функционала взаимодействия двух элементарных влавинов однородная рациональная функция целой степени $s \geq -2$. В теореме 15.4.1 вычисление оригинала от однородной функции даётся формулой (15.4.34), т.е. построение оригинала сводится к вычислению интеграла по единичной окружности от рациональный функции. Результат предъявляется с помощью вычисления вычетов рациональной функции. Итак, мы имеем техническую процедуру построения функционалов взаимодействия элементарных влавинов.

Мы рассмотрим в этой главе только один пример такого построения — функционал, описывающий главное взаимодействие нулевого порядка — функционал взаимодействия власкайлов. Основанием этого выбора является то, что этот пример содержит всю классическую электродинамику взаимодействия зарядов, закон Кулона, закон Био-Савара, "релятивистский"закон взаимодействия, — и на его основе получаются функционалы взаимодействия любых досветовых скалярных влавинов.

18.2.2 Функционал взаимодействия власкайлов.

Согласно § 13.4 функционал взаимодействия двух власкайлов с зарядами e' и e''

$$\mathrm{nit} = e'e'' \ \mathrm{vin}\,(\vec{l'}, \vec{l''}, \vec{b''} - \vec{b'}), \tag{18.2.1}$$

где $\vec{l'}$ и $\vec{l''}$ — скорости, а $\vec{b'}$ и $\vec{b''}$ — вектора центров частиц. Согласно формуле (13.4.46)

$$\mathrm{vin}\,\left(\vec{l'}, \vec{l''}, \vec{b}\right) = \left\langle \vec{l'}, \Theta \vec{l''} \right\rangle \ \mathrm{vin}\ 1\left(\vec{l'}, \vec{l''}, \vec{b}\right) - \ \mathrm{vin}\ 2\left(\vec{l'}, \vec{l''}, \vec{b}\right). \tag{18.2.2}$$

Или согласно тождеству (13.4.33) справедливо выражение

$$\mathrm{vin}\,\left(\vec{l'}, \vec{l''}, \vec{b}\right) = \ \mathrm{vin}\ 3\left(\vec{l'}, \vec{b}\right) + \ \mathrm{vin}\ 3\left(\vec{l''}, \vec{b}\right) - \left(1 + \left\langle \vec{l'}, \vec{l''} \right\rangle\right) \ \mathrm{vin}\ 1\left(\vec{l'}, \vec{l''}, \vec{b}\right). \tag{18.2.3}$$

Подставляя в последнюю формулу формулы (13.8.43) и (13.8.45) для явного вида функций $\mathrm{vin3}\ \left(\vec{l}, \vec{b}\right)$ и $\mathrm{vin}\ 1\left(\vec{l'}, \vec{l''}, \vec{b}\right)$, получим явный вид функции

$$\begin{gathered}\mathrm{vin}\,\left(\vec{l'}, \vec{l''}, \vec{b}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{\vec{b}^2 - [\vec{l'}, \vec{b}]^2}} + \frac{1}{\sqrt{\vec{b}^2 - [\vec{l''}, \vec{b}]^2}}\right) - \right. \\ \left(1 + \left\langle \vec{l'}, \vec{l''} \right\rangle\right) b^2 \left([\vec{l'} + \vec{l''}, \vec{b}]^2 b^2 - \left[[\vec{l'}, \vec{b}], [\vec{l''}, \vec{b}]\right]^2\right)^{-1} \times \\ \left.\left(\frac{\left\langle [\vec{l'} + \vec{l''}, \vec{b}], [\vec{l'}, \vec{b}] \right\rangle}{\sqrt{\vec{b}^2 - [\vec{l'}, \vec{b}]^2}} + \frac{\left\langle [\vec{l'} + \vec{l''}, \vec{b}], [\vec{l''}, \vec{b}] \right\rangle}{\sqrt{\vec{b}^2 - [\vec{l''}, \vec{b}]^2}}\right)\right).\end{gathered} \tag{18.2.4}$$

В силу свойств симметрии (13.4.39) и (13.4.38) функций $\mathrm{vin1}$ и $\mathrm{vin2}$ и формулы (18.2.2) функция vin обладает следующим свойством симметрии

$$\forall Q \in O(3) \ \Big| \ \mathrm{vin}\,(Q\vec{l'}, Q\vec{l''}, Q\vec{b}) = \ \mathrm{vin}\,(\vec{l'}, \vec{l''}, \vec{b}). \tag{18.2.5}$$

Из свойств чётности (13.4.43) и (13.4.44) функций $\mathrm{vin1}$ и $\mathrm{vin2}$ вытекает следующее свойство чётности функции vin :

$$\mathrm{vin}\,(-\vec{l'}, -\vec{l''}, \vec{b}) = \ \mathrm{vin}\,(\vec{l'}, \vec{l''}, \vec{b}) = \ \mathrm{vin}\,(\vec{l'}, \vec{l''}, -\vec{b}). \tag{18.2.6}$$

Из формул (13.4.28) и (13.4.29) следует также, что

$$\mathrm{vin}\ 1(\vec{l'}, \vec{l''}, \vec{b}) = \ \mathrm{vin}\ 1(\vec{l''}, \vec{l'}, \vec{b}), \tag{18.2.7}$$

$$\mathrm{vin}\ 2(\vec{l'}, \vec{l''}, \vec{b}) = \ \mathrm{vin}\ 2(\vec{l''}, \vec{l'}, \vec{b}), \tag{18.2.8}$$

$$\operatorname{vin}(\vec{l'}, \vec{l''}, \vec{b}) = \operatorname{vin}(\vec{l''}, \vec{l'}, \vec{b}). \tag{18.2.9}$$

Рассмотрим следующие частные случаи формулы (18.2.4)

Случай 1. $\vec{l'} = 0$. Тогда согласно (13.4.28)

$$\operatorname{vin} 1(0, \vec{l''}, \vec{b}) = \operatorname{vin3}(\vec{l''}, \vec{b}) \tag{18.2.10}$$

И формула (18.2.3) даёт

$$\operatorname{vin}(0, \vec{l''}, \vec{b}) = \operatorname{vin3}(0, \vec{b}) = \frac{1}{4\pi|\vec{b}|}. \tag{18.2.11}$$

Вывод 18.2.1 *Если один из скайлов покоится, потенциал взаимодействия равен кулоновскому потенциалу.*

Случай 2. $\vec{l''} = \vec{l'} = \vec{l}$. Согласно формулам (13.4.49)

$$\operatorname{vin}(\vec{l}, \vec{l}, \vec{b}) = (1 - |\vec{l}|^2) \operatorname{vin3}(\vec{l}, \vec{b}) = \frac{1 - |\vec{l}|^2}{4\pi\sqrt{\vec{b^2} - [\vec{l}, \vec{b}]^2}}. \tag{18.2.12}$$

Случай 3. Векторы $\vec{l'}, \vec{l''}, \vec{b}$ — компланарны. Тогда вектора $[\vec{l'}, \vec{b}]$ и $[\vec{l''}, \vec{b}]$ коллинеарны и $\Big[[\vec{l''}, \vec{b}], [\vec{l''}, \vec{b}]\Big] = 0$. Формула (18.2.4) принимает вид

$$\operatorname{vin}(\vec{l'}, \vec{l''}, \vec{b}) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{\vec{b^2} - [\vec{l'}, \vec{b}]^2}} + \frac{1}{\sqrt{\vec{b^2} - [\vec{l''}, \vec{b}]^2}}\right) - \tag{18.2.13}$$

$$(1 + \langle\vec{l'}, \vec{l''}\rangle)\Big([\vec{l'} + \vec{l''}, \vec{b}]^2\Big)^{-1}\left(\frac{\langle[\vec{l'} + \vec{l''}, \vec{b}], [\vec{l'}, \vec{b}]\rangle}{\sqrt{\vec{b^2} - [\vec{l'}, \vec{b}]^2}} + \frac{\langle[\vec{l'} + \vec{l''}, \vec{b}], [\vec{l''}, \vec{b}]\rangle}{\sqrt{\vec{b^2} - [\vec{l''}, \vec{b}]^2}}\right).$$

Случай 4. $[\vec{l''}, \vec{b}] = 0$. Формула (18.2.13) принимает вид

$$\operatorname{vin}(\vec{l'}, \vec{l''}, \vec{b}) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\vec{b}|} - \frac{\langle\vec{l'}, \vec{l''}\rangle}{\sqrt{\vec{b^2} - [\vec{l'}, \vec{b}]^2}}\right). \tag{18.2.14}$$

Случай 5. Вектора $\vec{l'}, \vec{l''}, \vec{b}$ коллинеарны. Формула (18.2.14) принимает вид

$$\operatorname{vin}(\vec{l'}, \vec{l''}, \vec{b}) = \frac{1}{4\pi|\vec{b}|}\Big(1 - \langle\vec{l'}, \vec{l''}\rangle\Big). \tag{18.2.15}$$

Вывод 18.2.2 *Релятивистская формула для потенциала взаимодействия движущихся зарядов совпадает с точной формулой в случае зарядов, движущихся по одной прямой.*

Случай 6. Вектора $\vec{l}$ и $\vec{l''}$ коллинеарны, $\vec{l'} = \vec{l}, \vec{l''} = t\vec{l}, t \in \mathbf{R}$. Тогда $\vec{l'}, \vec{l''}, \vec{b}$ — компланарные вектора и согласно формуле (18.2.13)

$$\operatorname{vin}(\vec{l}, t\vec{l}, \vec{b}) = \frac{1}{4\pi}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{\vec{b^2} - [\vec{l}, \vec{b}]^2}} + \frac{1}{\sqrt{\vec{b^2} - t^2[\vec{l}, \vec{b}]^2}}\right) - \right. \tag{18.2.16}$$

$$(1+t|\vec{l}|^2)\frac{1}{t+1}\left(\frac{1}{\sqrt{\vec{b}^2-[\vec{l},\vec{b}]^2}}+\frac{t}{\sqrt{\vec{b}^2-t^2[\vec{l},\vec{b}]^2}}\right)\Bigg).$$

Случай 7. $\vec{l}=\vec{l}'=-\vec{l}''$. В случае $t\to-1$ в формуле (18.1.16) мы получаем неопределенность в формуле (18.2.16), раскрывая которую получим

$$\operatorname{vin}(\vec{l},-\vec{l},\vec{b})\equiv\lim_{t\to-1}\operatorname{vin}(\vec{l},t\vec{l},\vec{b})= \tag{18.2.17}$$

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{\sqrt{\vec{b}^2-[\vec{l},\vec{b}]^2}}-(1-|\vec{l}|^2)\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{\sqrt{\vec{b}^2-t^2[\vec{l},\vec{b}]^2}}\right)\Bigg|_{t=-1}\right)=$$

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{\sqrt{\vec{b}^2-[\vec{l},\vec{b}]^2}}-(1-|\vec{l}|^2)\left(\frac{1}{\sqrt{\vec{b}^2-[\vec{l},\vec{b}]^2}}+\frac{[\vec{l},\vec{b}]^2}{\left(\vec{b}^2-[\vec{l},\vec{b}]\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\right).$$

Отсюда после преобразований

$$\operatorname{vin}(\vec{l},-\vec{l},\vec{b})=\frac{1}{4\pi\sqrt{\vec{b}^2-[\vec{l},\vec{b}]^2}}\left(1+\frac{\langle\vec{l},\vec{b}\rangle^2}{\vec{b}^2-[\vec{l},\vec{b}]^2}\right). \tag{18.2.18}$$

18.2.3 Функционал взаимодействия досветовых скалярных агвидов.

Знание функции $\operatorname{vin}(\vec{l}',\vec{l}'',\vec{b})$ позволяет аппроксимировать с любым порядком взаимодействие любых двух досветовых скалярных натуральных частиц по следующей схеме.

Образ Фурье функционала взаимодействия двух досветовых скалярных натуральных частиц согласно формуле (13.4.24) равен

$$\widehat{\operatorname{nit}}(\vec{\eta})=\widehat{\operatorname{vin}}(\vec{l}',\vec{l}'',\vec{\eta})\widehat{jf'_0}(\vec{\eta})\widehat{jf''_0}(-\vec{\eta}). \tag{18.2.19}$$

В предположении, что функции $\widehat{jf'_0}(\vec{\eta})$ и $\widehat{jf''_0}(\vec{\eta})$ дифференцируемы в нуле порядка n и m соответственно, заменим в формуле (18.2.19) функции $\widehat{jf'_0}(\vec{\eta})$ и $\widehat{jf''_0}(\vec{\eta})$ их полиномами Тейлора с центром в нуле $t'_n(\vec{\eta})$ и $t''_m(\vec{\eta})$ соответственно. Получим аппроксимацию функционала взаимодействия

$$\widehat{\operatorname{nit}}_a(\vec{\eta})=\widehat{\operatorname{vin}}(\vec{l}',\vec{l}'',\vec{\eta})t'_n(\vec{\eta})t''_m(-\vec{\eta}). \tag{18.2.20}$$

По свойству трансформации Фурье тогда функция $\operatorname{nit}_a(\vec{b})$ получается из функции $\operatorname{vin}(\vec{l}',\vec{l}'',\vec{b})$ действием на неё линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами по переменной $\vec{b}$ вида

$$\operatorname{nit}_a(\vec{b})=t'_n(i\vec{\nabla})t''_m(-i\vec{\nabla})\operatorname{vin}(\vec{l}',\vec{l}'',\vec{b}), \tag{18.2.21}$$

где $\vec{\nabla}\equiv(\frac{\partial}{\partial b_1},\frac{\partial}{\partial b_2},\frac{\partial}{\partial b_3})^\top$ — дифференциальный оператор. Коэффициенты полиномов t'_n и t''_m являются функциями состояния частиц и, в частности, их скоростей (см. § 13.11).

Отметим, что существует и другой путь вычисления функционала взаимодействия $\operatorname{nit}_a(\vec{b})$, описанный в п. 18.2.1, — через вычисление элементарных взаимодействий и использование теоремы 15.4.1.

§18.3 Динамика скайлов

18.3.1 Понятие скайла.

Введём новое понятие, объединяющее частицу и указание способа аппроксимации её взаимодействий. А именно *скайлом* будем называть досветовую натуральную частицу, которая при взаимодействии заменяется аппроксимирующим власкайлом. Скайл имеет две характерные константы: массу покоя, обозначаемую в этом и в двух следующих параграфах как m, и заряд e. Через $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ мы обозначаем вектор центра скайла, через $\vec{\beta} = \frac{d}{dx_0}\vec{x}$ — вектор скорости центра.

Массовый член для агвида конечной массы зависит лишь от скорости $\vec{\beta}$ и равен

$$m\sqrt{1 - \vec{\beta}^2} \tag{18.3.1}$$

согласно § 18.1.

В качестве стандартного состояния мы выбираем для скайла состояние покоя. Тогда каждое состояние скайла задаётся элементом $G \in \Omega_e$ группы Лоренца, представимом в виде $G \in G_s G_t$, где G_s соответствует вращению, а G_t — матрица чистого преобразования Лоренца. Т.е. мы используем правое представление матрицы G в терминологии § 3.2. Так как аппроксимирующий власкайл в состоянии покоя сферически симметричен, то $\tilde{T}_G j = \tilde{T}_{G_t}\tilde{T}_{G_s} j = \tilde{T}_{G_t} j$, где j — 4-функция тока аппроксимирующего власкайла в состоянии покоя с центром в нуле. Поэтому для предъявления функции состояния аппроксимирующего власкайла кроме координат центра требуется знание лишь матрицы G_t, которая согласно п. 3.2.5 определяется однозначно вектором $\vec{\beta} \in \mathbf{R}^3$, имеющим в данный ситуации смысл скорости частицы. Если же мы в качестве стандартного состояния выберем не состояние покоя, то выражение массового члена и функционала взаимодействия скайла с другими полями будут иметь более сложный вид, зависящий как от G_t так и от G_s .

Так как при взаимодействиях мы заменяем скайлы власкайлами, то функционал взаимодействия двух скайлов есть

$$e_1 e_2 \,\mathrm{vin}\,(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{x}_2 - \vec{x}_1). \tag{18.3.2}$$

Таким образом, в силу (18.3.1), (18.3.2) плотность лагранжиана для системы k взаимодействующих скайлов равна

$$n = \sum_{i=1}^{k} m_i \sqrt{1 - \vec{\beta}_i^2} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{k} e_i e_j \,\mathrm{vin}\,(\vec{\beta}_i, \vec{\beta}_j, \vec{x}_j - \vec{x}_i). \tag{18.3.3}$$

Динамику частиц с плотностью лагранжиана (18.3.3) мы назовём *динамикой скайлов.*

18.3.2 О неприменимости формул релятивистской механики к движущимся скайлам.

Для описания движения скайла во внешнем поле $w(x)$ согласно формуле (12.1.31) имеем функцию Лагранжа

$$n = \frac{1}{2}\,\mathrm{ni}\,(x_0, p, p, v, v) + \mathrm{ni}\,(x_0, p, e, v, w) + \frac{1}{2}\,\mathrm{ni}\,(x_0, e, e, w, w). \tag{18.3.4}$$

В обозначениях § 12.1, используя равенство функционалов

$$\mathrm{ni}\,(x_0, e, p, w, v) = \mathrm{nt}\,(x_0, e, p, w, Av) \tag{18.3.5}$$

и заменяя функцию тока скайла функцией тока аппроксимирующего власкайла, от функции Лагранжа (18.3.4) перейдем к функции Лагранжа

$$n = m\sqrt{1-\vec{\beta}_i^2} + e\left(w_0(x_0,\vec{x})\langle\vec{\beta},\vec{w}(x_0,\vec{x})\rangle\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{ni}\,(x_0,e,e,w,w). \tag{18.3.6}$$

Пусть теперь поле $w(x)$ создаётся также скайлом $w = T_{p''}(u)$, В таком случае отмечая величины, относящиеся к первому скайлу, единицей, а величины, относящиеся ко второму скайлу, — двойкой, получим из формулы (18.3.6)

$$n = m_1\sqrt{1-\vec{\beta}_1^2} + e_1e_2\frac{1-\langle\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2\rangle}{4\pi\sqrt{\vec{b}^2-[\vec{\beta}_2,\vec{b}]^2}} + m_2\sqrt{1-(\vec{\beta}_2)^2},\quad \vec{b}\equiv\vec{b}_2-\vec{b}_1. \tag{18.3.7}$$

Если поменять местами в рассуждении частицы, то получим симметричную формулу

$$n = m_2\sqrt{1-(\vec{\beta}_2)^2} + e_1e_2\frac{1-\langle\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2\rangle}{\sqrt{\vec{b}^2-[\vec{\beta}_1,\vec{b}]^2}} + m_1\sqrt{1-(\vec{\beta}_1)^2},\quad \vec{b}\equiv\vec{b}_2-\vec{b}_1. \tag{18.3.8}$$

Нетрудно видеть, что в общем случае выражения (18.3.6)и (18.3.8) не равны между собой и не равны выражению (18.3.3) с $k = 2$. Причина полученного противоречия — использование равенства (18.3.6), которое в общем случае движущихся частиц не имеет места, что привело к ошибочным выражениям (18.3.6-18.3.8) для функции Лагранжа системы двух скайлов.

Мы убедились, что функцию Лагранжа (18.3.6) взаимодействия частицы с внешним полем нельзя, вообще говоря, использовать, когда внешнее поле — поле движущегося заряда. Возникает вопрос: когда можно использовать формулу (18.3.6) для функции Лагранжа движения скайла во внешнем поле? Этот вопрос редуцируется к вопросу о справедливости равенства (18.3.5). А равенство (18.3.5) согласно п. 12.1.3 выполняется, если пространственные компоненты $\vec{w}(x)$ внешнего поля обращаются в нуль, что верно для любого электростатического поля.

18.3.3 О потенциале и вектор-потенциале.

Вернемся к плотности лагранжиана (18.3.3), описывающей движение k скайлов и будем считать движение всех скайлов кроме одного заданным. Тогда движение одного выделенного скайла будет определяться варьированием плотности лагранжиана

$$n = m\sqrt{1-\vec{\beta}^2} + e\sum_{i=1}^{k-1} e_i\,\mathrm{vin}\,(\vec{\beta},\vec{\beta}_i,\vec{x}-\vec{x}_i). \tag{18.3.9}$$

В случае когда единичный скайл движется во внешнем поле, создаваемом непрерывно распределенной системой скайлов одного сорта, формула (18.3.18) переходит в формулу

$$n = m\sqrt{1-\vec{\beta}^2} + e\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \rho(x_0,\vec{y})\ \mathrm{vin}\,(\vec{\beta},\vec{\beta}(x_0,\vec{y}),\vec{x}-\vec{y})\,dy_1dy_2dy_3, \tag{18.3.10}$$

где $\rho(x_0,\vec{y})$ — плотность заряда в момент времени x_0 в точке $\vec{y}\in\mathbf{R}^3$, а $\vec{\beta}(x_0,\vec{y})$ — скорость заряда в момент времени x_0 в точке $\vec{y}\in\mathbf{R}^3$. Таким образом, для определения движения скайла в поле, созданном системой скайлов, от системы скайлов требуется знать функцию от $f(\vec{\beta},\vec{x},x_0) \equiv f(\vec{\beta},x)$ от переменных $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$, $\vec{\beta} \in \mathbf{R}^3$, $x_0 \in \mathbf{R}$ вида

$$f(\vec{\beta},\vec{x},x_0) \equiv \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \rho(x_0,\vec{y})\ \mathrm{vin}\,(\vec{\beta},\vec{\beta}(x_0,\vec{y}),\vec{x}-\vec{y})\,dy_1dy_2dy_3, \tag{18.3.11}$$

которую мы по определению назовём *потенциалом системы скайлов.*

Естественно возникает вопрос, как соотносится введённое понятие с релятивистским 4-вектором потенциала? Чтобы ответить на этот вопрос, возьмём релятивистское выражение для плотности лагранжиана заряженной частицы во внешнем поле

$$n_r = m\sqrt{1-\vec{\beta}^2} + e\left(w_0(x) + \langle\vec{\beta},\vec{w}(x)\rangle\right). \tag{18.3.12}$$

Сравнивая (18.3.10) и (18.3.12), мы видим, что 4-вектор $\vec{w}(x)$ получается при разложении потенциала (18.3.11) как функции $\vec{\beta}$ с центром в точке $\vec{\beta}=0$ по формуле Тейлора первого порядка. Поэтому

$$w_0 = f(x,\vec{x},x_0), \tag{18.3.13}$$

$$\vec{w} = \left(\frac{\partial f}{\partial\vec{\beta}}(\vec{\beta},\vec{x},x_0)\bigg|_{\vec{\beta}=0}\right)^{\top}. \tag{18.3.14}$$

Мы убедились, что знание классического 4-вектора потенциала означает знание линейной части суммы Тейлора потенциала $f(\vec{\beta},x)$ по $\vec{\beta}$ и в общем случае недостаточно для описания выражения скайла в поле других скайлов. Аппроксимация потенциала $f(\vec{\beta},x)$ с помощью 4-вектора потенциала может быть удовлетворительной при малых скоростях движения, как мы покажем в § 18.5.

В заключение этого пункта отметим, что если внешнее поле создаётся пространственным распределением скайлов s разных сортов, имеющих в каждой точке пространства $\vec{y} \in \mathbf{R}^3$, в момент времени $x_0 \in \mathbf{R}$, плотность заряда $\rho_i(x_0,\vec{y})$ и скорость $\vec{\beta}_i(x_0,\vec{y})$, $i \in \overline{1,s}$, то плотность лагранжиана движения скайла в таком поле будет

$$n = m\sqrt{1-\vec{\beta}^2} + ef(\vec{\beta},x), \tag{18.3.15}$$

где потенциал $f(\vec{\beta},x)$ равен

$$f(\vec{\beta},\vec{x},x_0) = \sum_{i=1}^{s}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \rho_i(x_0,\vec{y})\ \mathrm{vin}\,\left(\vec{\beta},\vec{\beta}_i(x_0,\vec{y}),\vec{x}-\vec{y}\right)\,dy_1dy_2dy_3. \tag{18.3.16}$$

При вычислении потенциала $f(\vec{\beta},y)$ интеграл в правой части (18.3.16) может браться и по подмногообразиям меньшей размерности — по поверхностям или кривым, на которых сосредоточены заряды. Так в случае поля, создаваемого замкнутым витком тока бесконечно-малого сечения, порождаемого движением скайлов s сортов, мы получаем потенциал

$$f(\vec{\beta},\vec{x},x_0) = \sum_{i=1}^{s}\int\limits_{C} \rho l_i(x_0,l)\ \mathrm{vin}\,\left(\vec{\beta},\vec{\beta}_i(x_0,l),\vec{\tau}(l),\vec{x}-\vec{y}(l)\right)\,dl, \tag{18.3.17}$$

где C — линия, l — длина вдоль линии, $\vec{\tau}(l)$ — единичный касательный вектор, $\vec{y}(l)$ — точка на линии, $\rho l_i(x_0,l)$ — линейная плотность заряда скайлов i-го сорта, $\beta_i(x_0,l)$ — величина скорости зарядов i-того сорта.

18.3.4 7 законов сохранения: энергии, импульса и момента, — для системы скайлов.

Рассмотрим теперь законы сохранения для замкнутой системы скайлов без внешнего поля, описываемой функцией Лагранжа (18.3.3). Согласно п. 12.4.8 имеют место 7 законов сохранения: энергии, импульса и момента системы. Для их формулировки используем гамильтонов формализм § 12.4 в применении к функции Лагранжа (18.3.3).

Согласно п. 12.4.3 введём функцию Гамильтона

$$h = n + \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{p}_i, \vec{\beta}_i \rangle \tag{18.3.18}$$

от переменных $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots \vec{x}_k; \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \ldots \vec{\beta}_k; \vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots \vec{p}_k$. Тогда вектор i-го импульса равен

$$\vec{p}_i = -\left(\frac{\partial n}{\partial \vec{\beta}_i}\right)^{\top} = m_i \frac{\vec{\beta}_i}{\sqrt{1-\vec{\beta}_i^2}} - e_i \sum_{j=i+1}^{k} e_j \left(\frac{\partial}{\partial \vec{\beta}_i} \operatorname{vin}(\vec{\beta}_i, \vec{\beta}_j, \vec{x}_j - \vec{x}_i)\right)^{\top}$$

$$-e_i \sum_{j=1}^{i-1} e_j \left(\frac{\partial}{\partial \vec{\beta}_i} \operatorname{vin}(\vec{\beta}_j, \vec{\beta}_i, \vec{x}_i - \vec{x}_j)\right)^{\top}$$

или

$$\vec{p}_i = m_i \frac{\vec{\beta}_i}{\sqrt{1-\vec{\beta}_i^2}} - e_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} e_j \left(\frac{\partial}{\partial \vec{\beta}_i} \operatorname{vin}(\vec{\beta}_i, \vec{\beta}_j, \vec{x}_j - \vec{x}_i)\right)^{\top}. \tag{18.3.19}$$

(Мы использовали свойство (18.2.9) функции vin).

Сохраняющейся величиной будет вектор полного импульса системы

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{k} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{k} m_i \frac{\vec{\beta}_i}{\sqrt{1-\vec{\beta}_i^2}} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k} e_i e_j \left(\frac{\partial}{\partial \vec{\beta}_i} \operatorname{vin}(\vec{\beta}_i, \vec{\beta}_j, \vec{x}_j - \vec{x}_i)\right)^{\top}. \tag{18.3.20}$$

Сохраняющейся величиной будет вектор полного момента системы

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{k} [\vec{x}_i, \vec{p}_i] = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{\sqrt{1-\vec{\beta}_i^2}} [\vec{x}_i, \vec{\beta}_i] - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k} e_i e_j \left[\vec{x}_i, \left(\frac{\partial}{\partial \vec{\beta}_i} \operatorname{vin}(\vec{\beta}_i, \vec{\beta}_j, \vec{x}_j - \vec{x}_i)\right)^{\top}\right]. \tag{18.3.21}$$

Сохраняющейся величиной будет энергия системы

$$\mathcal{H} = n + \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{p}_i, \vec{\beta}_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{\sqrt{1-\vec{\beta}_i^2}} + \tag{18.3.22}$$

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k} e_i e_j \left(\frac{1}{2} \operatorname{vin}(\vec{\beta}_i, \vec{\beta}_j, \vec{x}_j - \vec{x}_i) - \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \vec{\beta}_i} \operatorname{vin}(\vec{\beta}_i, \vec{\beta}_j, \vec{x}_j - \vec{x}_i)\right)^{\top}, \vec{\beta}_i \right\rangle \right).$$

18.3.5 Выражение массы и заряда в системе СИ.

Согласно п. 12.4.3, чтобы перейти от используемых нами нормированных величин к величинам исходной физической размерности, нужно умножить функцию Лагранжа (18.3.3) на плотность энергии деформации μ. Тогда мы получим величину, имеющую размерность энергии.

Рассмотрим частный случай двух одинаковых покоящихся скайлов, расположенных не расстоянии r друг от друга. Все величины в системе СИ будем обозначать добавлением индекса f. Т. е m_f — масса покоя частицы в системе СИ, e_f — заряд частицы в системе СИ. Константа c_f — скорость света в системе СИ. Приравнивая функции Лагранжа

$$\mu\left(2m + \frac{e^2}{4\pi r}\right) = 2m_f c_f^2 + \frac{e_f^2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

где ε_0 — электрическая постоянная, получим

$$m = m_f \frac{c_f^2}{\mu}, \tag{18.3.23}$$

$$e = -e_f \sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon_0}}. \tag{18.3.24}$$

Константа μ в (18.3.24) — плотность энергии деформации из § 1.3, а не магнитная проницаемость.

Формулы (18.3.23),(18.3.24) позволяют вычислять нормированные массы и заряды частиц через их значения в системе СИ, хотя константа μ нами пока не определена.

18.3.6 Выражение основных величин в системе СГС.

Возвратимся к § 1.3 и предположим, что все механические величины, входящие в выражение плотности лагранжиана среды Максвелла (1.3.115) взяты в системе СГС. Выразим теперь все нормированные величины, входящие в нашу теорию через соответствующие величины в системе СГС, принятые в [41, 65]. Величины, взятые в системе СГС, будем отмечать индексом c внизу, кроме величин, имеющих размерность длин скорости света c и плотности энергии деформации в единицах СГС, обозначаемой μ,

Аналогично предыдущему пункту для случая двух одинаковых заряженных покоящихся частиц плотность лагранжиана (18.3.3) равна

$$n = 2m + \frac{e^2}{4\pi r} \tag{18.3.25}$$

Для аналогичной функции Лагранжа в системе СГС согласно [41, с. 68,122] с точностью до знака

$$n' = 2m_c c^2 + \frac{e_c^2}{r}. \tag{18.3.26}$$

Отсюда

$$\mu\left(2m + \frac{e^2}{4\pi r}\right) = 2m_c c^2 + \frac{e_c^2}{r}. \tag{18.3.27}$$

Из (18.3.27) следуют равенства

$$m = \frac{m_c c^2}{\mu}, \tag{18.3.28}$$

$$e = \pm\sqrt{\frac{4\pi}{\mu}}e_c. \tag{18.3.29}$$

Выберем в (18.3.29) знак $-$, т.е. положим заряд электрона положительным

$$e = -\sqrt{\frac{4\pi}{\mu}}e_c. \tag{18.3.30}$$

Тогда для плотности заряда получаем

$$j_0 = -\sqrt{\frac{4\pi}{\mu}}\rho_c. \tag{18.3.31}$$

Для скалярной частицы в нормированной системе 4-вектор плотности тока равен

$$j = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{l} \end{pmatrix} j_0, \tag{18.3.32}$$

а в системе СГС [41, с. 101]

$$j_c = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v}_c \end{pmatrix} \rho_c, \tag{18.3.33}$$

где $\vec{v}_c$ — вектор скорости частицы, $\vec{l} = \frac{1}{c}\vec{v}$. Из (18.3.32)

$$\vec{j} = \vec{l}j_0 = -\frac{1}{c}\sqrt{\frac{4\pi}{\mu}}\vec{v}\rho_c = -\frac{1}{c}\sqrt{\frac{4\pi}{\mu}}\vec{j}_c,$$

т.е.

$$\vec{j} = -\frac{1}{c}\sqrt{\frac{4\pi}{\mu}}\vec{j}_c. \tag{18.3.34}$$

Получаем соотношение для 4-векторов тока

$$j = -\sqrt{\frac{4\pi}{\mu}}\begin{pmatrix} \rho_c \\ \frac{1}{c}\vec{j}_c \end{pmatrix}. \tag{18.3.35}$$

Для лоренцевой частицы 4-вектора функции состояния и тока связаны в нормированном случае уравнением

$$\Theta\Box u = j, \tag{18.3.36}$$

а в системе СГС согласно [41, с. 209] — уравнением

$$\Box\vec{A}_c = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_c, \tag{18.3.37}$$

$$\Box\varphi_c = 4\pi\rho_c, \tag{18.3.38}$$

где $\vec{A}_c$ — 3-вектор потенциала, φ_c — скалярный потенциал. Отсюда для скалярной частицы, для которой верно (18.3.32,18.3.33), получаем

$$u = \Theta\begin{pmatrix} 1 \\ \vec{l} \end{pmatrix} u_0, \tag{18.3.39}$$

где

$$\Box u_0 = j_0 = -\sqrt{\frac{4\pi}{\mu}}\rho_c = -\sqrt{\frac{1}{4\pi\mu}}(4\pi\rho_c). \tag{18.3.40}$$

Сравнивая (18.3.38) и (18.3.40), получаем
$$u_0 = -\sqrt{\frac{1}{4\pi\mu}}\varphi_c. \tag{18.3.41}$$
Из соотношений (18.3.33,18.3.37,18.3.38) следует
$$\vec{A}_c = \vec{l}\varphi_c. \tag{18.3.42}$$
Далее из (18.3.39,18.3.40,18.3.41) следует
$$\vec{u} = -\vec{l}u_0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi\mu}}\vec{l}\varphi_c$$
и
$$\vec{u} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\mu}}\vec{A}_c. \tag{18.3.43}$$

Для напряженности электрического поля в нормированных единицах согласно формуле (2.2.24)
$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_0} + \, grad\, u_0,$$
а в системе СГС
$$\vec{E}_c = -\frac{\partial\vec{A}_c}{\partial x_0} - \, grad\, \varphi_c.$$
Отсюда согласно (18.3.39,18.3.40,18.3.41)
$$\vec{E} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\mu}}\left(-\frac{\partial\vec{A}_c}{\partial x_0} - \, grad\, \varphi_c\right),$$
т.е.
$$\vec{E} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\mu}}\vec{E}_c. \tag{18.3.44}$$
Для напряженности магнитного поля в нормированных переменных по формуле (2.2.25) имеем
$$\vec{H} = \, rot\, \vec{u},$$
а в системе СГС [41, с. 71]
$$\vec{H}_c = \, rot\, \vec{A}_c.$$
Отсюда согласно (18.3.43)
$$\vec{H} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\mu}}\vec{H}_c. \tag{18.3.45}$$

Из полученных соотношений (18.3.44,18.3.45) для напряженности полей получаем, в частности,
$$\frac{\mu}{2}(\vec{E}^2 - \vec{H}^2) = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}_c^2 - \vec{H}_c^2), \tag{18.3.46}$$
$$\frac{\mu}{2}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2) = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}_c^2 + \vec{H}_c^2). \tag{18.3.47}$$

Замечание 18.3.1 *Если мы в (18.3.29) выберем знак +, т.е. положим* $e = \frac{4\pi}{\mu}e_c$*, то правые части равенств (18.3.35, 18.3.41, 18.3.43, 18.3.44, 18.3.45) умножатся на* -1.

18.3.7 Выражение плотности тока и напряженностей полей в системе СИ.

Для скалярного агвида плотность тока в нормированной системе равна

$$\vec{j} = \vec{l} j_0, \tag{18.3.48}$$

где $\vec{l}$ — вектор нормированной на c скорости, j_0 — плотность заряда. В системе СИ соответственно имеем

$$\vec{j}_f = \vec{v}_f \rho_f \tag{18.3.49}$$

где $\vec{v}_f$ — вектор скорости, ρ_f — плотность заряда. Но согласно двум предыдущим пунктам

$$j_0 = -\sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon_0}}\,\rho_f, \tag{18.3.50}$$

Из (18.3.48-18.3.50) получаем выражение нормированной плотности тока через плотность тока в системе СИ

$$\vec{j} = \frac{-1}{c_f\sqrt{\mu\varepsilon_0}}\vec{j}_f, \tag{18.3.51}$$

Формула (18.3.51 справедлива как для объемной так и для поверхностной плотности тока.

Плотности энергий электрического и магнитного полей через напряженности электрического и магнитного полей в нормированной системе выражаются согласно формулам (1.3.118) и (1.3.119) в виде $\frac{\mu}{2}\vec{E}^2$, и $\frac{\mu}{2}\vec{H}^2$, а через те же напряженности в системе СИ в виде $\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}_f^2$ и $\frac{\mu_0}{2}\vec{H}_f^2$ [75, с. 249,251] соответственно. Отсюда аналогично предыдущему пункту получаем

$$\vec{E} = \frac{\varepsilon_0}{\mu}\vec{E}_f, \tag{18.3.52}$$

$$\vec{H} = \frac{\mu_0}{\mu}\vec{H}_f, \tag{18.3.53}$$

Отметим, что здесь μ — плотность энергии деформации из § 1.3.

Рассмотрим теперь область, ограниченную замкнутой цилиндрической поверхностью, обтекаемую замкнутым поверхностным током постоянной поверхностной плотности перпендикулярным образующей. Согласно выводу 17.5.1 в этой области верно $\vec{H} = -I\vec{k}$, где I — поверхностная плотность тока, $\vec{k}$ — единичный вектор вдоль образующей. Отсюда согласно (18.3.51) и (18.3.53) получаем

$$\vec{H}_f = I_f\vec{k}, \tag{18.3.54}$$

т.е. в системе СИ напряжённость магнитного поля в данной области равна по величине поверхностной плотности тока.

§18.4 Центрально-симметричное движение двух скайлов одинаковой массы

В данной работе мы не проводим полного исследования движения двух взаимодействующих скайлов. Однако, чтобы продемонстрировать принципиальные отличия динамики скайлов от классической динамики заряженных частиц, взаимодействующих по закону Кулона, мы рассмотрим в этом параграфе пример с вращательным движением двух скайлов одинаковой массы. Мы покажем, что скайлы с зарядами одного знака могут образовывать при высоких скоростях движения стационарные вращательные системы. Таким образом, одних электромагнитных сил взаимодействия достаточно для удержания заряженных частиц одного заряда вместе в ядрах атомов, даже без учёте взаимодействий более высокого порядка. Кроме того, в рассматриваемом примере мы получим спокойную составную частицу нулевой или отрицательной массы.

18.4.1 Существование центрально-симметричных движений двух скайлов одинаковой массы.

Рассматриваются два взаимодействующих скайла зарядов e_1 и e_2 и равных масс покоя $m_1 = m_2 = m$. Согласно формуле (18.3.3) функция Лагранжа системы будет:

$$n = m\sqrt{1-\vec{\beta}_1^2} - e_1 e_2 \operatorname{vin}(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{x}_1 - \vec{x}_2) + m\sqrt{1-\vec{\beta}_2^2}. \tag{18.4.1}$$

Рассмотрим вопрос о существовании центрально-симметричных движений, т.е. таких для которых существует 3-вектор-функция $\vec{x} = \vec{x}(x_0)$, что

$$\vec{x}_1 = \vec{x}; \quad \vec{x}_2 = -\vec{x}. \tag{18.4.2}$$

Если экстремали вида (18.4.2) для функция Лагранжа (18.4.1) существуют, то они должны быть и экстремалями в более узком классе вариаций, в частности, экстремалями функционала, функция Лагранжа которого получена из функция Лагранжа (18.4.1) подстановкой (18.4.2).

Эту функцию Лагранжа обозначим

$$\operatorname{sim} \equiv 2m\sqrt{1-\vec{\beta}^2} + e_1 e_2 \operatorname{vin}(\vec{\beta}, -\vec{\beta}, -2\vec{x}). \tag{18.4.3}$$

В силу чётности функции $\operatorname{vin}(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{b})$ по аргументу $\vec{b}$ и однородности степени -1 по этому аргументу формула (18.4.3) эквивалентна формуле

$$\operatorname{sim} = 2m\sqrt{1-\vec{\beta}^2} + \frac{e_1 e_2}{2} \operatorname{vin}(\vec{\beta}, -\vec{\beta}, \vec{x}). \tag{18.4.4}$$

Покажем, что и наоборот каждая экстремаль функции Лагранжа (18.4.4) обобщённом по формуле (18.4.2) экстремаль функции Лагранжа (18.4.1).

Введём обозначения для 3-векторов, составленных из частных производных функции $\operatorname{vin}(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{b})$

$$\operatorname{vino}(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{b}) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \vec{\beta}_1} \operatorname{vin}(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{b})\right)^{\top}, \tag{18.4.5}$$

$$\operatorname{vint}(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{b}) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \vec{\beta}_2} \operatorname{vin}(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{b})\right)^{\top}, \tag{18.4.6}$$

$$\operatorname{vinf}(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{b}) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \vec{b}} \operatorname{vin}(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{b})\right)^{\top}. \tag{18.4.7}$$

Дифференцируя равенство (18.2.9), получаем соотношение

$$\operatorname{vint}(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{b}) = \operatorname{vino}(\vec{\beta}_2, \vec{\beta}_1, \vec{b}). \tag{18.4.8}$$

А дифференцируя равенство (18.2.6), — соотношение

$$\operatorname{vino}(\vec\beta_1, \vec\beta_2, \vec b) = -\operatorname{vino}(-\vec\beta_1, -\vec\beta_2, \vec b). \tag{18.4.9}$$

Из (18.4.8) и (18.4.9) следует

$$\operatorname{vint}(\vec\beta, -\vec\beta, \vec b) = -\operatorname{vino}(\vec\beta, -\vec\beta, \vec b). \tag{18.4.10}$$

Так как функция $\operatorname{vin}(\vec\beta_1, \vec\beta_2, \vec b)$ чётна по аргументу $\vec b$ и однородна степени -1, то тем же свойством обладают и функции $\operatorname{vino}(\vec\beta_1, \vec\beta_2, \vec b)$ и $\operatorname{vint}(\vec\beta_1, \vec\beta_2, \vec b)$, а функция $\operatorname{vinf}(\vec\beta_1, \vec\beta_2, \vec b)$ будет нечётной и однородной степени -2 по аргументу $\vec b$.

Выпишем теперь уравнения Эйлера для плотности лагранжиана (18.4.1):

$$\frac{d}{dx_0}\left(-m\frac{\vec\beta_1}{\sqrt{1-\vec\beta_1^2}} + e_1e_2\operatorname{vino}(\vec\beta_1, \vec\beta_2, \vec x_2 - \vec x_1)\right) = -e_1e_2\operatorname{vinf}(\vec\beta_1, \vec\beta_2, \vec x_2 - \vec x_1), \tag{18.4.11}$$

$$\frac{d}{dx_0}\left(-m\frac{\vec\beta_2}{\sqrt{1-\vec\beta_2^2}} + e_1e_2\operatorname{vint}(\vec\beta_1, \vec\beta_2, \vec x_2 - \vec x_1)\right) = e_1e_2\operatorname{vinf}(\vec\beta_1, \vec\beta_2, \vec x_2 - \vec x_1). \tag{18.4.12}$$

В случае (18.4.2) уравнения принимают вид

$$\frac{d}{dx_0}\left(-m\frac{\vec\beta}{\sqrt{1-\vec\beta^2}} + e_1e_2\operatorname{vino}(\vec\beta, -\vec\beta, -2\vec x)\right) = -e_1e_2\operatorname{vinf}(\vec\beta, -\vec\beta, -2\vec x), \tag{18.4.13}$$

$$\frac{d}{dx_0}\left(m\frac{\vec\beta}{\sqrt{1-\vec\beta^2}} + e_1e_2\operatorname{vint}(\vec\beta, -\vec\beta, -2\vec x)\right) = e_1e_2\operatorname{vinf}(\vec\beta, -\vec\beta, -2\vec x). \tag{18.4.14}$$

Уравнение Эйлера для функции Лагранжа (18.4.4) имеет вид

$$\frac{d}{dx_0}\left(-2m\frac{\vec\beta}{\sqrt{1-\vec\beta^2}} + \frac{e_1e_2}{2}\Big(\operatorname{vino}(\vec\beta, -\vec\beta, \vec x) - \operatorname{vint}(\vec\beta, -\vec\beta, \vec x)\Big)\right) = \frac{e_1e_2}{2}\operatorname{vinf}(\vec\beta, -\vec\beta, \vec x), \tag{18.4.15}$$

что в силу (18.4.10) эквивалентно уравнению

$$\frac{d}{dx_0}\left(-m\frac{\vec\beta}{\sqrt{1-\vec\beta^2}} + \frac{e_1e_2}{2}\operatorname{vino}(\vec\beta, -\vec\beta, \vec x)\right) = \frac{e_1e_2}{4}\operatorname{vinf}(\vec\beta, -\vec\beta, \vec x). \tag{18.4.16}$$

Согласно вышеуказанным свойствам функций vino, vint, vinf верны соотношения

$$e_1e_2\operatorname{vino}(\vec\beta, -\vec\beta, -2\vec x) = \frac{e_1e_2}{2}\operatorname{vino}(\vec\beta, -\vec\beta, \vec x), \tag{18.4.17}$$

$$e_1e_2\operatorname{vinf}(\vec\beta, -\vec\beta, -2\vec x) = -\frac{e_1e_2}{4}\operatorname{vinf}(\vec\beta, -\vec\beta, \vec x), \tag{18.4.18}$$

$$e_1e_2\operatorname{vint}(\vec\beta, -\vec\beta, -2\vec x) = \frac{e_1e_2}{2}\operatorname{vint}(\vec\beta, -\vec\beta, \vec x) = -\frac{e_1e_2}{2}\operatorname{vino}(\vec\beta, -\vec\beta, \vec x). \tag{18.4.19}$$

В силу соотношений (18.4.17) и (18.4.18) уравнение (18.4.13) совпадает с уравнением (18.4.16), а в силу соотношений (18.4.19) и (18.4.18) уравнение (18.4.14) получается из уравнения (18.4.16) умножением на -1. Итак, если выполнено уравнение (18.4.16), то выполнены и уравнения (18.4.13) и (18.4.14).

Вывод 18.4.1 *Вектор-функции вида (18.4.2) задают экстремаль функции Лагранжа (18.4.1) иф вектор-функция $\vec{x}$ есть экстремаль функции Лагранжа (18.4.4).*

Изучение центрально-симметричных движений системы сведено нами к исследованию экстремалей функции Лагранжа (18.4.4). В силу § 18.2 случай 7 для функции sim справедливо представление

$$\mathrm{sim} = 2m\sqrt{1-\vec{\beta}^2} + \frac{e_1 e_2}{8\pi}\left(1 + \frac{\left\langle \vec{\beta}, \vec{x}\right\rangle^2}{\vec{x}^2 - [\vec{\beta}, \vec{x}]^2}\right)\left(\vec{x}^2 - [\vec{\beta}, \vec{x}]^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{18.4.20}$$

Так как функция sim не изменяет значения при ортогональных преобразованиях аргументов $\vec{x}$ и $\vec{b}$, то справедлив закон сохранения момента (п. 12.4.8) в форме

$$[\vec{x}, \vec{p}] = \vec{M} = Const.$$

Откуда

$$\left\langle \vec{x}, \vec{M} \right\rangle = 0, \tag{18.4.21}$$

т.е. движение происходит в фиксированной плоскости, ортогональной вектору $\vec{M}$.

Так как движение плоское, перейдём к полярным координатам (r, φ) в плоскости движения, нормируем плотность лагранжиана на $2m$ и введём константу

$$\varepsilon = \frac{e_1 e_2}{16\pi m}. \tag{18.4.22}$$

Получим нормированную плотность лагранжиана в полярных координатах

$$\mathrm{simn} \equiv \sqrt{1-(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)} + \frac{\varepsilon}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{1 - r^2\dot{\varphi}^2}\right)\left(1 - r^2\dot{\varphi}^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{18.4.23}$$

Так как плотность лагранжиана (18.4.23) не зависит от времени x_0 и угла φ, то справедливы законы сохранения момента

$$M = -\frac{\partial\,\mathrm{simn}}{\partial\dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi}\left(\left(1 - \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{\varepsilon}{r}\frac{1 - r^2\dot{\varphi}^2 + 3\dot{r}^2}{(1 - r^2\dot{\varphi}^2)^{\frac{5}{2}}}\right) \tag{18.4.24}$$

и энергии

$$\mathcal{H} = \mathrm{simn} + \dot{r}p_r + \dot{\varphi}p_\varphi = \left(1 - \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{r}\left(\frac{(1 - 2r^2\dot{\varphi}^2)}{(1 - r^2\dot{\varphi}^2)^{\frac{3}{2}}} - \dot{r}^2\frac{(1 + 2r^2\dot{\varphi}^2)}{(1 - r^2\dot{\varphi}^2)^{\frac{5}{2}}}\right). \tag{18.4.25}$$

18.4.2 Вращательные движения.

Рассмотрим решения, являющиеся равномерным вращением частиц по окружности, т.е. когда

$$\dot{r} = 0, \dot{\varphi} = \omega = const. \tag{18.4.26}$$

Уравнение Эйлера для функции Лагранжа (18.4.23) по координате φ будет при условиях (18.4.26) выполнено, а чтобы выполнялось уравнение Эйлера по координате r необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{\partial\,\mathrm{simn}}{\partial r} = 0, \tag{18.4.27}$$

т.е. учитывая (18.4.23), условия

$$- r\dot{\varphi}^2 \left(1 - r^2\dot{\varphi}^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{\varepsilon}{r^2} \left(1 - r^2\dot{\varphi}^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon\dot{\varphi}^2 \left(1 - r^2\dot{\varphi}^2\right)^{-\frac{3}{2}} = 0. \qquad (18.4.28)$$

Обозначим через $\xi \equiv r^2\dot{\varphi}^2 = \beta^2$ квадрат скорости вращательного движения, нормированной на скорость света. По определению $\xi \in [0{,}1[$. Из уравнения (18.4.28) выразим радиус вращательного движения через ξ:

$$r = \varepsilon \frac{2\xi - 1}{\xi(1-\xi)}. \qquad (18.4.29)$$

Подставляя (18.4.29) в (18.4.24), получим выражение для момента вращательного движения

$$M = \frac{-\varepsilon}{\sqrt{\xi(1-\xi)}}, \qquad (18.4.30)$$

а подставляя в (18.4.25) — для энергии

$$\mathcal{H} = \sqrt{1-\xi}. \qquad (18.4.31)$$

При этом при получении выражения (18.4.30) для момента мы выбрали положительное направление вращения системы , т.е. $\dot{\varphi} > 0$.

Далее мы рассматриваем случай, когда масса покоя частиц m положительна. Тогда при $\varepsilon < 0$, т.е. когда заряды имеют разный знак, вращательное движение существует при $\xi \in]0,\frac{1}{2}[$, причём когда ξ пробегает значения от 0 до $\frac{1}{2}$, радиус $r(\xi)$ пробегает значения от бесконечности до нуля. При $\varepsilon > 0$, т.е. когда заряды одного знака, вращательное движение существует при $\xi \in]\frac{1}{2},1[$, причём, когда ξ изменяется от $\frac{1}{2}$ до 1, радиус $r(\xi)$ изменяется от нуля до бесконечности.

Таким образом, движение скайлов при больших скоростях обладает двумя принципиальными отличиями от классического движения зарядов при малых скоростях. Во-первых, при достаточно высоких скоростях, а именно, при $\beta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ одноименные заряды могут образовывать стационарную вращательную систему, т.е. новую частицу. Причём, если система двух свободных скайлов, имеющих скорости β на бесконечности, обладает энергией $\mathcal{H} = \frac{2m}{\sqrt{1-\beta^2}}$, принимающей значения в интервале $]2m,+\infty[$, то система вращающихся скайлов разноименных зарядов обладает энергией $\mathcal{H} = 2m\sqrt{1-\beta^2}$, принимающей значения в интервале $]m\sqrt{2}, 2m[$, а система вращающихся скайлов одноименных зарядов имеет энергию $\mathcal{H} = 2m\sqrt{1-\beta^2}$, принимающую значения в интервале $]0, m\sqrt{2}[$. Таким образом, в случае одноименных зарядов существует энергетическая щель величиной $(2-\sqrt{2})m$ между свободным и связанным состоянием частиц, в то время как для разноименных зарядов спектр энергий свободного движения непрерывно переходит в спектр энергий вращательного движения.

Второй особенностью движения скайлов является наличие точной нижней грани модуля значений момента, которым может обладать стационарная система двух вращающихся скайлов

$$M_0 = 2m \left| M\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \frac{e_1 e_2}{4\pi}. \qquad (18.4.32)$$

Причём эта величина не зависит от массы частиц, а определяется лишь их зарядами. Таким образом существование наименьшей возможной величины заряда — заряда электрона e влечет существование наименьшей величины момента стационарной системы вращающихся зарядов

$$M_e = \frac{e^2}{4\pi}. \tag{18.4.33}$$

Рассмотрим поведение массы m_s системы как функции скорости. В силу формул (18.4.23),(18.4.29) имеем для нормированного лагранжиана simn

$$m_s = \frac{3\xi - 1}{2\xi - 1}\sqrt{1-\xi}, \tag{18.4.34}$$

или для исходного лагранжиана sim будет

$$m_s = 2m\frac{3\xi - 1}{2\xi - 1}\sqrt{1-\xi}. \tag{18.4.35}$$

Две вращающиеся частицы формируют составную новую спокойную частицу, уже не агвидную, вообще говоря. Однако, по определению 12.2.1 величина (18.4.35) есть масса новой составной частицы. В случае разноименных зарядов составная частица имеет положительную массу при $\xi \in [0,\frac{1}{3}[$,нулевую — при $\xi = \frac{1}{3}$ и отрицательную — при $\xi \in]\frac{1}{3},\frac{1}{2}[$. При $\xi \to \frac{1}{2} - 0$ масса системы стремится к $-\infty$. В случае системы вращающихся зарядов одного знака масса системы положительна и изменяется от $+\infty$ до нуля, когда ξ изменяется от $\frac{1}{2}$ до 1.

Выразим теперь величины радиуса энергии и момента системы в системе СИ, перейдя от нормированных функций Лагранжа к исходным физическим согласно п. 18.3.5. При этом мы фиксируем частный случай когда оба заряда равны по модулю заряду электрона $| e_1 |=| e_2 |= e$, а масса покоя m — масса покоя электрона. Напомним, что классический радиус электрона r_e получается, когда приравниваются величины

$$m = \frac{e^2}{4\pi r_e},$$

т.е.

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi m}. \tag{18.4.36}$$

Отсюда константа ξ вида (18.4.22) равна

$$\xi = \sigma\frac{r_e}{4}, \tag{18.4.37}$$

где $\sigma = \mathrm{sign}(e_1 e_2)$. Формула для радиуса системы (18.4.29) в системе СИ принимает вид

$$r_f = r_e\sigma\frac{2\xi - 1}{4\xi(1-\xi)}, \tag{18.4.38}$$

где классический радиус электрона r_e взят также в системе СИ.

Согласно п. 18.3.5 формула для энергии системы принимает вид в системе СИ

$$\mathcal{H}_f = 2m_f c_f^2\sqrt{1-\xi}. \tag{18.4.39}$$

Для перевода момента в систему СИ мы должны, во-первых, выразить исходную функцию Лагранжа в системе СИ, т.е. перейти к функции Лагранжа

$$2m\mu\,\mathrm{simn}\,(r,\dot{r},\dot{\varphi}).$$

Затем заменить переменную $x_0 = ct$ на время t. Обозначим $r' \equiv \frac{dr}{dt}$, $\varphi' \equiv \frac{d\varphi}{dt}$. Тогда в системе СИ момент

$$M_f = -\frac{\partial}{\partial\varphi'}(2m\mu\,\mathrm{simn}\,(r,\dot r,\dot\varphi)) = 2m\mu\left(-\frac{\partial\,\mathrm{simn}}{\partial\dot\varphi}\right)\frac{\partial\dot\varphi}{\partial\varphi'}.$$

Но $\dot\varphi = \frac{\varphi'}{c_f}$, поэтому $M_f = 2m\mu\frac{1}{c_f}M = 2m\mu\frac{1}{c_f}\left(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{\xi(1-\xi)}}\right) = \mu\frac{1}{c_f}(-\sigma)\frac{e^2}{24\pi}(\xi(1-\xi))^{-\frac{1}{2}}$. По формуле (18.3.24) для перевода заряда в систему СИ получаем

$$M_f = (-\sigma)\frac{e_f^2}{c_f 4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{4\xi(1-\xi)}}.$$

Разделим это равенство на постоянную Планка $\hbar_f$ и заметим, что полученная безразмерная величина не зависит от системы единиц и может быть записана через величины в системе СГС. Обозначая величины в системе СГС добавлением значка c внизу, получим

$$\frac{M_f}{\hbar_f} = (-\sigma)\frac{e_f^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar_f c_f}\frac{1}{\sqrt{4\xi(1-\xi)}} = (-\sigma)\left(\frac{e_f^2}{4\pi\varepsilon_0 r_f}\right)\frac{r_f}{\hbar_f c_f}\frac{1}{\sqrt{4\xi(1-\xi)}} =$$

$$(-\sigma)\left(\frac{e_c^2}{r_c}\right)\frac{r_c}{\hbar_c c_c}\frac{1}{\sqrt{4\xi(1-\xi)}} = (-\sigma)\frac{e_c^2}{\hbar_c c_c}\frac{1}{\sqrt{4\xi(1-\xi)}} = (-\sigma)\alpha\frac{1}{\sqrt{4\xi(1-\xi)}}.$$

где $\alpha = \frac{1}{137{,}04}$ — постоянная тонкой структуры. Получаем следующую формулу для момента системы

$$M_f = (-\sigma)\frac{\alpha\hbar_f}{\sqrt{4\xi(1-\xi)}}. \tag{18.4.40}$$

В частности, в системе СИ точная нижняя грань значений модуля момента системы, даваемая формулой (18.4.33), принимает вид

$$M_{ef} = \alpha\hbar. \tag{18.4.41}$$

§18.5 Классическая динамика зарядов как квадратичное приближение по скоростям к динамике скайлов

18.5.1 Квадратичная аппроксимация по скоростям функции Лагранжа системы скайлов.

Мы построили динамику скайлов с помощью плотности лагранжиана (18.3.3). Динамика скайлов есть математическая модель движения взаимодействующих зарядов без учёте характеристик выше нулевого порядка: спина, дипольного момента, квадрупольного момента и т.д. В предыдущем параграфе мы показали принципиальное отличие динамики скайлов от динамики зарядов взаимодействующих с помощью кулоновского потенциала. В этом параграфе мы покажем, что релятивистская динамика заряженных частиц с законами Кулона , Био-Савара, релятивистским законом взаимодействия, — получается как квадратичная аппроксимация динамики скайлов по скоростям движущихся зарядов при малых скоростях. Перейдем к построению квадратичной аппроксимации функции Лагранжа (18.3.3) системы скайлов по скоростям. Массовый член $m\sqrt{1-\vec{\beta}^2}$ аппроксимируется с ошибкой четвертого порядка по скорости функцией

$$\mathrm{nis}\,(\vec{\beta}) = m\left(1 - \frac{1}{2}\vec{\beta}^2\right). \tag{18.5.1}$$

Функция $\mathrm{vin}\,(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{b})$ согласно формулам (18.2.3),(13.8.49),(13.8.54) аппроксимируется с ошибкой четвертого порядка по скоростям функцией

$$\mathrm{vis}\,(\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_2,\vec{b}) \equiv \frac{1}{4\pi|\vec{b}|}\left(1 - \langle\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2\rangle + \frac{\langle[\vec{\beta}_1,\vec{b}],[\vec{\beta}_2,\vec{b}]\rangle}{2(|\vec{b}|)^2}\right). \tag{18.5.2}$$

В силу векторного тождества $[\vec{b},[\vec{\beta}_1,\vec{b}]] = \vec{\beta}_2(|\vec{b}|)^2 - \vec{b}\langle\vec{b},\vec{\beta}_2\rangle$ функция $\mathrm{vis}\,(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{b})$ может быть записана также в виде

$$\mathrm{vis}\,(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{b}) = \frac{1}{4\pi|\vec{b}|}\left(1 - \frac{1}{2}\langle\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2\rangle - \frac{\langle\vec{\beta}_1,\vec{b}\rangle\langle\vec{\beta}_2,\vec{b}\rangle}{2|\vec{b}|^2}\right). \tag{18.5.3}$$

Определим также функцию

$$\mathrm{vic}\,(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{b}) \equiv \frac{1}{4\pi|\vec{b}|}\left(1 - \langle\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2\rangle\right), \tag{18.5.4}$$

которая в некоторых случаях может заменять функцию vis. Итак, аппроксимация с ошибкой четвертого порядка по скоростям функции Лагранжа взаимодействия системы k скайлов (18.3.3) равна

$$nq \equiv \sum_{i=1}^{k} m_i\left(1 - \frac{1}{2}(\vec{\beta}_i)^2\right) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k} e_i e_j\,\mathrm{vis}\,(\vec{\beta}_i,\vec{\beta}_j,\vec{x}_j - \vec{x}_i). \tag{18.5.5}$$

Отбрасывая постоянное слагаемое $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i$ и умножая на (-1), получим эквивалентную по экстремалям функцию Лагранжа

$$\mathrm{ns} \equiv \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} m_i(\vec{\beta}_i)^2 - \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k} e_i e_j\,\mathrm{vis}\,(\vec{\beta}_i,\vec{\beta}_j,\vec{x}_j - \vec{x}_i). \tag{18.5.6}$$

18.5.2 Закон Кулона и закон Био-Савара.

Выпишем функцию Лагранжа (18.5.6) для случая двух частиц

$$\mathrm{ns} = \frac{1}{2}m_1(\vec{\beta}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{\beta}_2)^2 - \frac{e_1e_2}{4\pi|\vec{b}|}\left(1 - \langle\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2\rangle + \frac{\langle[\vec{\beta}_1,\vec{b}],[\vec{\beta}_2,\vec{b}]\rangle}{2|\vec{b}|^2}\right), \tag{18.5.7}$$

где

$$\vec{b} \equiv \vec{x}_2 - \vec{x}_1, \tag{18.5.8}$$

и убедимся , что функция Лагранжа (18.5.7) содержит закон Кулона взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов и закон Био-Савара взаимодействия стационарных линейных токов.

Введём вектора

$$\vec{A}_i \equiv \frac{e_i}{4\pi|\vec{b}|}\left(\vec{\beta}_i - \frac{[\vec{b},[\vec{\beta}_i,\vec{b}]]}{2|\vec{b}|^2}\right), \quad i \in 1,2 \tag{18.5.9}$$

и запишем уравнения Эйлера для функции Лагранжа (18.5.7) в виде

$$\frac{d}{dx_0}(m_1\vec{\beta}_1 + e_1\vec{A}_2) = -\left(\frac{\partial}{\partial\vec{x}_1}\left(\frac{e_1e_2}{4\pi|\vec{x}_2-\vec{x}_1|}\right)\right)^\top + e_1\left(\frac{\partial}{\partial\vec{x}_1}\langle\vec{\beta}_1,\vec{A}_2\rangle\right)^\top, \tag{18.5.10}$$

$$\frac{d}{dx_0}(m_2\vec{\beta}_2 + e_2\vec{A}_1) = -\left(\frac{\partial}{\partial\vec{x}_2}\left(\frac{e_1e_2}{4\pi|\vec{x}_2-\vec{x}_1|}\right)\right)^\top + e_2\left(\frac{\partial}{\partial\vec{x}_2}\langle\vec{\beta}_2,\vec{A}_1\rangle\right)^\top. \tag{18.5.11}$$

Используя тождество

$$grad\,\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \langle\vec{a},\vec{\nabla}\rangle\vec{b} + \langle\vec{b},\vec{\nabla}\rangle\vec{a} + [\vec{b},\,rot\,\vec{a}] + [\vec{a},\,rot\,\vec{b}],$$

проведём преобразования

$$\left(\frac{\partial}{\partial\vec{x}_1}\left\langle\vec{\beta}_1,\vec{A}_2\right\rangle\right)^\top = \left\langle\vec{\beta}_1,\left(\frac{\partial}{\partial\vec{x}_1}\right)^\top\right\rangle\vec{A}_2 + [\vec{\beta}_1,\,rot\,_1\vec{A}_2],$$

где $rot\,_1\vec{A}_2$ означает взятие ротора по переменной $\vec{x}_1$. Далее будем рассматривать уравнение движения первой частицы (18.5.10), полагая, что движение второй частицы задано, т.е. заданы функции $\vec{x}_2(x_0)$ и $\vec{\beta}_2(x_0)$. Вектор $\vec{A}_2$ будем рассматривать как функцию времени x_0 и вектора $\vec{x}_1$. Понимая $\frac{\partial}{\partial x_0}\vec{A}_2$ в таком смысле, приведём уравнение (18.5.10) к виду

$$\frac{d}{dx_0}(m_1\vec{\beta}_1) = e_1\left(-\frac{\partial\vec{A}_2}{\partial x_0} - grad\,_1\left(\frac{e_2}{4\pi|\vec{x}_2-\vec{x}_1|}\right) + [\vec{\beta}_1,\,rot\,_1\vec{A}_2]\right). \tag{18.5.12}$$

Итак, для движения одной частицы в поле другой мы получили уравнение

$$\frac{d}{dx_0}(m_1\vec{\beta}_1) = e_1\vec{E}_2 + e_1[\vec{\beta}_1,\vec{H}_2], \tag{18.5.13}$$

где

$$\vec{E}_2 \equiv -\frac{\partial\vec{A}_2}{\partial x_0} - grad_1\varphi_2 \tag{18.5.14}$$

$$\vec{H}_2 \equiv rot\,_1\vec{A}_2 \tag{18.5.15}$$

$$\varphi_2 \equiv \frac{e_2}{4\pi|\vec{x}_2-\vec{x}_1|}. \tag{18.5.16}$$

Т.е. φ_2 и $\vec{A}_2$ — скалярные и векторные классические потенциалы поля, создаваемого второй частицей в точке $\vec{x}_1$ нахождения первой частицы. Уравнения движения (18.5.13) дают классическое выражение для силы действия электромагнитного поля на заряд, но выражение (18.5.9) для классического вектор-потенциала отличается от принятого в [65, § 46] выражения

$$\vec{A}_2 = \frac{e_2\vec{\beta}_2}{4\pi|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|}. \tag{18.5.17}$$

Однако,эта разница не влияет на величину магнитного поля $\vec{H}_2$, так как для вектора $\vec{B} \equiv \frac{e_2}{8\pi|\vec{b}|^3}[\vec{b},[\vec{\beta}_2,\vec{b}]]$ выполнено тождество $rot_{\,\vec{b}}\vec{B} = 0$, ибо

$$\vec{B} = grad_{\,\vec{b}}\left(\frac{e_2}{8\pi|\vec{b}|}\langle\vec{\beta}_2,\vec{b}\rangle\right).$$

Чтобы получить закон Кулона, рассмотрим случай, когда вторая частица неподвижна, т.е. $\vec{\beta}_2 = 0$. Тогда согласно уравнению (18.5.3) на первую частицу действует сила

$$\vec{F} = e_1\vec{E}_2 = -e_1\,grad_{\,1}\frac{e_2}{4\pi|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} = \frac{e_1e_2(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{4\pi|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}. \tag{18.5.18}$$

Чтобы получить закон Био-Савара, вернемся к функции Лагранжа (18.5.6) и рассмотрим взаимодействие точечного заряда с линейным стационарным током. Линейный стационарный ток образуем движением внешних точечных зарядов в некотором линейном элементе. При этом сумма всех внешних зарядов равна нулю и полный ток не зависит от времени. Нумеруя внешние заряды индексом i, пробегающим значения от 1 до $k-1$, и снимая нумерацию выделенного точечного заряда, получим функцию Лагранжа

$$\text{ns} = \frac{m}{2}\vec{\beta}^2 - \frac{e}{4\pi}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{e_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|}\left(1 - \langle\vec{\beta},\beta_i\rangle + \frac{\langle[\vec{\beta},\vec{x} - \vec{x}_i],[\vec{\beta}_i,\vec{x} - \vec{x}_i]\rangle}{2|\vec{x} - \vec{x}_i|^2}\right), \tag{18.5.19}$$

в которой мы опустили члены, не зависящие от $\vec{x}$ и $\vec{\beta}$. Предполагая, что все заряды e_i бесконечно близки, т.е. переходя в пределе к равенству $\vec{x}_i = \vec{x}_e$ при всех $i \in \overline{1, k-1}$, с учётом условия $\sum\limits_{i=1}^{k-1} e_i = 0$ из (18.5.9) получим

$$\text{ns} = \frac{m}{2}\vec{\beta}^2 + \frac{e}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_e|}\left\langle\vec{\beta}, \vec{I}_e - \frac{[\vec{x} - \vec{x}_e,[\vec{I}_e,\vec{x} - \vec{x}_e]]}{2|\vec{x} - \vec{x}_e|^2}\right\rangle, \tag{18.5.20}$$

где

$$\vec{I}_e \equiv \sum_{i=1}^{k-1} e_i\vec{\beta}_i \tag{18.5.21}$$

полный ток внешних зарядов в точке $\vec{x}_e$. Полагая $\vec{x}_e = Const$ и $\vec{I}_e = Const$, варьируем функцию Лагранжа (18.5.20) по переменной $\vec{x}(x_0)$. При этом введём вектор–потенциал

$$\vec{A}(\vec{x}) \equiv \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_e|}\left(\vec{I}_e - \frac{[\vec{x} - \vec{x}_e,[\vec{I}_e,\vec{x} - \vec{x}_e]]}{2|\vec{x} - \vec{x}_e|^2}\right). \tag{18.5.22}$$

Уравнение Эйлера для отдельного заряда будет

$$m\dot{\vec{\beta}} = e[\vec{\beta},\vec{H}], \tag{18.5.23}$$

где

$$\vec{H} = rot_{\vec{x}}\vec{A} = rot_{\vec{x}}\left(\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}_e|}\left(\vec{I}_e - \frac{[\vec{x}-\vec{x}_e,[\vec{I}_e,\vec{x}-\vec{x}_e]]}{2|\vec{x}-\vec{x}_e|^2}\right)\right) = \tag{18.5.24}$$

$$rot_{\vec{x}}\frac{\vec{I}_e}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}_e|} = \frac{1}{4\pi}\frac{[\vec{I}_e,\vec{x}-\vec{x}_e]}{|\vec{x}-\vec{x}_e|^3}.$$

Но $\vec{I} = e\vec{\beta}$ — линейный ток, создаваемый отдельным зарядом. Итак, из формул (18.5.22),(18.5.23) получаем, что сила воздействия линейных токов $\vec{I}$ и $\vec{I}_e$ равна

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi}\frac{[\vec{I},[\vec{I}_e,\vec{x}-\vec{x}_e]]}{|\vec{x}-\vec{x}_e|^3}. \tag{18.5.25}$$

Формулы (18.5.24,18.5.25) совпадают с соответствующими формулами (42.2),(43.2) монографии [65] для закона Био-Савара с точностью до принятой нами нормировки переменных.

Замечание 18.5.1 *Вывод законов Кулона и Био-Савара сохранит свою справедливость, если функцию Лагранжа (18.5.6) заменить на функцию Лагранжа*

$$\mathrm{nc} \equiv \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} m_i(\vec{\beta}_i)^2 - \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k} e_i e_j \,\mathrm{vic}\,(\vec{\beta}_i,\vec{\beta}_j,\vec{x}_j-\vec{x}_i), \tag{18.5.26}$$

т.е. функцию vis *заменить на функцию* vic . *При этом не изменится величина магнитного поля, хотя вектор-потенциал изменит свое значение — вместо формулы (18.5.9) будет верна формула*

$$\vec{A}_i \equiv \frac{e_i}{4\pi|\vec{b}|}\vec{\beta}_i, \tag{18.5.27}$$

а вместо формулы (18.5.22)–формула

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\vec{I}_e}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}_e|}. \tag{18.5.28}$$

18.5.3 Движение частицы во внешнем поле.

Рассмотрим внешнее поле, создаваемое непрерывно распределенной системой скайлов s сортов. Каждый сорт скайлов имеет плотность заряда $\rho_i(x_0,\vec{x})$, скорость $\vec{\beta}_i(x_0,\vec{x})$, плотность тока $\vec{j}_i(x_0,\vec{x})$, $i \in \overline{1,s}$. Полная плотность заряда $\rho(x_0,\vec{x}) = \sum\limits_{i=1}^{s}\rho_i(x_0,\vec{x})$, полная плотность тока $\vec{j}(x_0,\vec{x}) = \sum\limits_{i=1}^{s}\vec{j}_i(x_0,\vec{x})$. Для описания движения единичного скайла в этом поле требуется знать потенциал системы скайлов — функцию $f(\vec{\beta},\vec{x},x_0)$, построенную с помощью функции $\mathrm{vin}\,(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{b})$ по формуле (18.3.16). Если мы в формуле (18.3.16) вместо точной функции vin возьмём её аппроксимации — функции vis и vic, то полученные аппроксимации к потенциалу $f(\vec{\beta},\vec{x},x_0)$ будем обозначать $fs\,(\vec{\beta},\vec{x},x_0)$ и $fc\,(\vec{\beta},\vec{x},x_0)$. Функция $fs\,(\vec{\beta},\vec{x},x_0)$ осуществляет аппроксимацию потенциала $f(\vec{\beta},\vec{x},x_0)$ с погрешностью четвертого порядка по скоростям.

Приближенные потенциалы $fs\,(\vec{\beta},\vec{x},x_0)$, $fc\,(\vec{\beta},\vec{x},x_0)$ имеют вид

$$fs\,(\vec{\beta},\vec{x},x_0)=\sum_{i=1}^{s}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{\rho_i(x_0,\vec{y})}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\Big(1-\langle\vec{\beta},\vec{\beta}_i(x_0,\vec{y})\rangle+ \tag{18.5.29}$$

$$\left.\frac{\langle[\vec{\beta},\vec{x}-\vec{y}],[\vec{\beta}_i(x_0,\vec{x}),\vec{x}-\vec{y}]\rangle}{2|\vec{x}-\vec{y}|^2}\right)dy_1dy_2dy_3=$$

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{\rho(x_0,\vec{y})}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\,dy_1dy_2dy_3-\left\langle\vec{\beta},\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{\vec{j}(x_0,\vec{y})}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\,dy_1dy_2dy_3\right\rangle+$$

$$\left\langle\vec{\beta},\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{[\vec{x}-\vec{y},[\vec{j}(x_0,\vec{x}),\vec{x}-\vec{y}]]}{8\pi|\vec{x}-\vec{y}|^3}\,dy_1dy_2dy_3\right\rangle$$

и

$$fc\,(\vec{\beta},\vec{x},x_0)=\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{\rho(x_0,\vec{y})}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\,dy_1dy_2dy_3-\left\langle\vec{\beta},\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{\vec{j}(x_0,\vec{y})}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\,dy_1dy_2dy_3\right\rangle. \tag{18.5.30}$$

Они зависят лишь от полной плотности заряда $\rho(x_0,\vec{x})$ и полной плотности тока $\vec{j}(x_0,\vec{x})$ в отличие от потенциала $f(\vec{\beta},\vec{x},x_0)$.

Сформулируем теперь достаточные условия на распределение зарядов и токов при которых функции fs и fc совпадают.

Лемма 18.5.1 *Если полная плотность тока $\vec{j}(x_0,\vec{x})$ удовлетворяет условиям*

$$div\,\vec{j}(x_0,\vec{x})=0, \tag{18.5.31}$$

$$\vec{j}(x_0,\vec{x})=o\left(\frac{1}{|\vec{x}|^2}\right)\ \text{при}\ |\vec{x}|\to\infty, \tag{18.5.32}$$

то $fs\,(\vec{\beta},\vec{x},x_0)=fc\,(\vec{\beta},\vec{x},x_0)$.

Доказательство. Из формул (18.5.29),(18.5.30) следует, что для совпадения $fs=fc$ достаточно доказать обращение в нуль интеграла

$$J\equiv\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{\langle[\vec{\beta},\vec{x}-\vec{y}],[\vec{j}(x_0,\vec{y}),\vec{x}-\vec{y}]\rangle}{8\pi|\vec{x}-\vec{y}|^3}\,dy_1dy_2dy_3. \tag{18.5.33}$$

Согласно формулам векторной алгебры

$$\langle[\vec{\beta},\vec{x}-\vec{y}],[\vec{j}(x_0,\vec{y}),\vec{x}-\vec{y}]\rangle=\langle\vec{j}(x_0,\vec{y}),[\vec{x}-\vec{y},[\vec{\beta},\vec{x}-\vec{y}]]\rangle$$

и

$$\frac{[\vec{x}-\vec{y},[\vec{\beta},\vec{x}-\vec{y}]]}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}=grad_{\vec{y}}\left(\frac{\langle\vec{\beta},\vec{y}-\vec{x}\rangle}{|\vec{y}-\vec{x}|}\right).$$

Поэтому

$$J=\frac{1}{8\pi}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\left\langle\vec{j}(x_0,\vec{y}),\,grad_{\,\vec{y}}\left(\frac{\langle\vec{\beta},\vec{y}-\vec{x}\rangle}{|\vec{y}-\vec{x}|}\right)\right\rangle dy_1dy_2dy_3=$$

$$\frac{1}{8\pi}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\left(div_{\vec{y}}\left(\vec{j}(x_0,\vec{y})\frac{\langle\vec{\beta},\vec{y}-\vec{x}\rangle}{|\vec{y}-\vec{x}|}\right)-\left(div_{\vec{y}}\vec{j}(\vec{y})\right)\frac{\langle\vec{\beta},\vec{y}-\vec{x}\rangle}{|\vec{y}-\vec{x}|}\right)dy_1dy_2dy_3.$$

Последний интеграл обращается в нуль в силу условий (18.5.31),(18.5.32). ♢

Рассмотрим теперь функцию $fc(\vec{\beta},\vec{x},x_0)$, которая согласно формуле (18.5.30) записывается в виде

$$fc(\vec{\beta},\vec{x},x_0)=w_0(x_0,\vec{x})+\langle\vec{\beta},\vec{w}(x_0,\vec{x})\rangle, \tag{18.5.34}$$

где

$$w_0(x_0,\vec{x})\equiv\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{\rho(x_0,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}dy_1dy_2dy_3, \tag{18.5.35}$$

$$\vec{w}(x_0,\vec{x})\equiv\frac{-1}{4\pi}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{\vec{j}(x_0,\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{y}|}dy_1dy_2dy_3. \tag{18.5.36}$$

Таким образом, в условиях леммы 18.5.1 классическая функция Лагранжа для движения скайла во внешнем поле будет

$$\mathrm{ns}=\frac{1}{2}m\vec{\beta}^2-e(w_0(x_0,\vec{x})+\langle\vec{\beta},\vec{w}(x_0,\vec{x})\rangle). \tag{18.5.37}$$

Остается ещё вопрос: при каких условиях 4-функция $w(x)$ вида (18.5.35,18.5.36) будет функцией состояния внешнего поля? Если в условиях леммы 18.5.1 распределение зарядов и токов стационарно, т.е. функции $\rho(x_0,\vec{x})$ и $\vec{j}(x_0,\vec{x})$ не зависят от времени, $\begin{pmatrix}\rho(x_0,\vec{x})\\ \vec{j}(x_0,\vec{x})\end{pmatrix}=j(\vec{x})$, то при условии, что 4-функция $j(\vec{x})$ ограничена на $\mathbf{R}^3$ и $j(\vec{x})=O\left(\frac{1}{|\vec{x}|^\lambda}\right)$, $\lambda>3$ при $|\vec{x}|\to\infty$ согласно теореме 13.10.1 4-функция $w(\vec{x})$, даваемая формулами (18.5.35,18.5.36), будет 4-функцией состояния доброй частицы. Итак, для стационарного распределения токов и зарядов, создающих внешнее поле, задающего покоящуюся добрую частицу, с точностью до величин четвертого порядка по скоростям для описания движения скайла во внешнем поле можно пользоваться функцией Лагранжа (18.5.37), где 4-функция $w(x)$ задаётся формулами (18.5.35,18.5.36) и является функцией состояния внешнего поля.

Формула (18.5.37) соответствует следующей формуле для плотности лагранжиана nq, аппроксимирующей функцию Лагранжа n системы скайлов

$$nq=m\left(1-\frac{1}{2}\vec{\beta}^2\right)+e(w_0(x)+\langle\vec{\beta},\vec{w}(x)\rangle), \tag{18.5.38}$$

в которой первый член является аппроксимацией массового члена, а второй — аппроксимацией функционала взаимодействия с внешним полем с ошибками четвертого порядка по скоростям. Возникает вопрос: когда целесообразно вместо функции Лагранжа (18.5.38) пользоваться функцией Лагранжа

$$n=m\sqrt{1-\vec{\beta}^2}+e(w_0(x)+\langle\vec{\beta},\vec{w}(x)\rangle), \tag{18.5.39}$$

т.е. брать точное выражение массового члена, а не его квадратичную аппроксимацию? Естественный ответ заключается в том, что это целесообразно, когда величина $e(w_0(x)+\langle\vec{\beta},\vec{w}(x)\rangle)$ равна точному значению функционала взаимодействия, а не просто является его квадратичной аппроксимацией. Последнее требование выполняется в важном частном случае, когда внешнее поле является электростатическим, т.е. создаётся системой покоящихся зарядов. Это видно из того, что при $\vec{\beta}_2 = 0$ верно

$$\mathrm{vin}\,(\vec{\beta}_1, 0, \vec{b}) = \mathrm{vis}\,(\vec{\beta}_1, 0, \vec{b}) = \mathrm{vic}\,(\vec{\beta}_1, 0, \vec{b}). \tag{18.5.40}$$

Этот же вывод мы получили в § 17.2. Итак, если внешнее поле электростатическое, то точная функция Лагранжа для движения скайла в нём равна

$$n = m\sqrt{1 - \vec{\beta}^2} + ew_0(\vec{x}), \tag{18.5.41}$$

где $w_0(\vec{x})$ задаётся формулой (18.5.35).

18.5.4 Перевод плотности лагранжиана в систему СИ.

Переведём плотность лагранжиана (18.5.37) в систему СИ. Умножим равенство (18.5.37) на плотность энергии деформации μ и согласно п. 18.3.5 получим

$$\mathrm{ns}_{\,f} = \frac{1}{2} m_f (\vec{v}_f)^2 - \mu e \left(w_0(x_0, \vec{x}) + \frac{1}{c_f} \langle \vec{v}_f, \vec{w}(x_0, \vec{x}) \rangle \right), \tag{18.5.42}$$

где $\vec{v}_f = c_f \vec{\beta}$ — скорость в системе СИ, а величины w_0 и $\vec{w}$ задаются формулами (18.5.35,18.5.36). Согласно формуле (18.3.24) верно

$$\mu e \rho_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} e_f \rho_{of},$$

$$\mu e \vec{j} = \frac{1}{\varepsilon_0 c_f} e_f \vec{j}_f.$$

Функция Лагранжа (18.5.42) принимает следующий вид

$$\mathrm{ns}_{\,f} = \frac{1}{2} m_f (v_f)^2 - e_f (w_{of}(x_0, \vec{x}) + \frac{1}{c_f} \langle \vec{v}_f, \vec{w}_f(x_0, \vec{x}) \rangle), \tag{18.5.43}$$

где

$$w_{0f}(x_0, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\rho_{of}(x_0, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \, dy_1 dy_2 dy_3, \tag{18.5.44}$$

$$\vec{w}_f(x_0, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\vec{j}_f(x_0, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \, dy_1 dy_2 dy_3. \tag{18.5.45}$$

§18.6 Гладкость экстремалей вариационной задачи. Понижение размерности.

В результате процедуры конденсации мы получили функцию Лагранжа $f(t, x, \dot{x})$, где $x \in \mathbf{R}^n$, $\dot{x} = \frac{d}{dt} x(t)$. Однако, получающаяся функция Лагранжа не является квадратичной формой как функция скорости $\dot{x}$ и условие невырожденности квадратной матрицы вторых производных $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \right)$, $i, j \in \overline{1, n}$ может нарушаться на некотором множестве точек $(t, x, \dot{x})$. Поэтому даже для функции $f(t, x, v)$ класса $C^{(\infty)}$ вариационная задача с функцией Лагранжа f может не иметь экстремалей класса $C^{(2)}$.

Поэтому, как это принято в теории оптимального управления, мы рассмотрим вариационную задачу с интегральным функционалом в классе абсолютно непрерывных траекторий с ограниченной производной и рассмотрим отличия данной вариационной задачи от вариационной задачи с экстремалями из класса $C^{(1)}$.

В п. 18.6.3 мы также рассмотрим вопрос о понижении размерности вариационной задачи при наличии циклической координаты.

Настоящий параграф по теме следует непосредственно за § 12.4 и является подготовкой к § 18.7.

18.6.1 Экстремали лагранжиана.

Пусть функция $f(t,x,v)$ аргументов $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^n$, $v \in \mathbf{R}^n$ определена на открытом подмножестве $G \subset \mathbf{R}^{1+n+n}$ и класса $C^{(m)}(G)$, $m = 1, 2, \ldots, \infty, \omega$. Пусть $I = [a,b]$ — сегмент числовой оси. Через $Cb^{(k)}(I)$, $k \in \mathbf{N}_0$ обозначаем векторное пространство функций, у которых $(k-1)$-тая производная является абсолютно непрерывной функцией с ограниченной производной.

Определение 18.6.1 *Мы говорим, что траектория $x(t)$ класса $Cb^{(1)}(I)$ помещена в G, если замыкание графика $\{(t,x,v) \in \mathbf{R}^{2n+1} \mid t \in [a,b], x = x(t), v = \dot{x}(t)\}$ лежит в G.*

Для помещенной в G траектории её график лежит в некотором компакте в G и поэтому функция $f(t,x(t),\dot{x}(t))$ определена и ограничена на всей траектории и определено значение интегрального функционала

$$L(x) = \int_a^b f(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt. \tag{18.6.1}$$

Через $Cb_0^{(1)}(I)$, обозначим векторное пространство функций x класса $Cb^{(1)}(I)$, удовлетворяющих дополнительному условию $x(a) = x(b) = 0$. Введём первую вариацию интегрального функционала (18.6.1) на помещенной в G траектории

$$\delta L(h) \equiv \int_a^b (f_x h + f_v \dot{h})\,dt, \tag{18.6.2}$$

где $h \in Cb_0^{(1)}(I)$.

Определение 18.6.2 *Функция $x \in Cb^{(1)}(I)$ называется экстремалью интегрального функционала (18.6.1), если линейный функционал $\delta L(h)$ обращается в нуль на векторном пространстве $Cb_0^{(1)}(I)$.*

Итак экстремалью $x(t)$ мы назвали не точку экстремума функционала (18.6.1), и любую его критическую точку.

Назовём ковектор

$$p(t) \equiv \frac{\partial f}{\partial v}(t,x(t),\dot{x}(t)) \in \mathbf{R}^n \tag{18.6.3}$$

импульсом в пунктах 18.6.1 и 18.6.2. Справедлив следующий критерий для нахождения экстремалей.

Теорема 18.6.1 *Пусть $f \in C^{(1)}(G)$ и $x \in Cb^{(1)}([a,b])$ — помещенная в G траектория, тогда x — экстремаль интегрального функционала (18.6.1) иф*

$$p(t) - p(a) = \int_a^t f_x(\tau), x(\tau), \dot{x}(\tau))\, d\tau \qquad (18.6.4)$$

для почти всех $t \in [a,b]$.

Доказательство. В условиях теоремы сложные функции аргумента $t \in [a,b]$ вида $f_x(t,x(t),\dot{x}(t))$ и $f_v(t,x(t),\dot{x}(t))$ измеримы и ограничены на $[a,b]$, так как функции $f_x(t,x,v)$ и $f_v(t,x,v)$ непрерывны на компакте, лежащем в G и содержащем график траектории, а функции $x(t),\dot{x}(t)$ измеримы и ограничены. Интегрированием по частям получаем для $h \in Cb^{(1)}(I)$,

$$\int_a^b f_x(t,x(t),\dot{x}(t))h(t)\, dt = -\int_a^b \int_a^t f_x(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau))\, d\tau \dot{h}(t)\, dt. \qquad (18.6.5)$$

Подставляя (18.6.5) в (18.6.2), получаем для первой вариации выражение

$$\delta L(h) = \int_a^b \left(f_v(t,x(t),\dot{x}(t)) - \int_a^t f_x(\tau,x(\tau),\dot{x}\tau))\, d\tau \right) \dot{h}(t)\, dt. \qquad (18.6.6)$$

В наших обозначениях при каждом $t \in [a,b]$ величина $\dot{h}(t)$ есть n-мерный вектор-столбец, а величины $f_v(t,x(t),\dot{x}(t)$ и $f_x(t,x(t),\dot{x}(t))$ — n-мерные вектор-строки.

Функция $h \in Cb_0^{(1)}([a,b])$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b \dot{h}(t)\, dt = 0. \qquad (18.6.7)$$

Поэтому условие обращения в нуль первой вариации функционала

$$\forall h \in Cb_0^{(1)}([a,b]) \;\Big|\; \delta L(h) = 0 \qquad (18.6.8)$$

в силу представления (18.6.6) и условия (18.6.7) выполнено, если выполнено соотношение (18.6.4).

Наоборот, пусть выполнено(18.6.8). Покажем что тогда выполнено и (18.6.4).

Введём функцию

$$y(t) \equiv f_v(t,x(t),\dot{x}(t)) - \int_a^t f_x(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau))\, d\tau. \qquad (18.6.9)$$

Положим

$$q \equiv \frac{1}{b-a}\int_a^b y(t)\, dt. \qquad (18.6.10)$$

Положим

$$h(t) \equiv \int_a^t (y(\tau) - q)^{\top}\, d\tau. \qquad (18.6.11)$$

Так определенная функция (18.6.11) из класса $Cb_0^{(1)}([a,b])$. Из условия $\delta L(h) = 0$ получаем

$$\int_a^b y(t)(y(t)-q)^\top \, dt = 0. \qquad (18.6.12)$$

Для $h \in C_0^{(1)}([a,b])$ выполнено (18.6.7), поэтому

$$\int_a^b q\,(y(t)-q)^\top \, dt = 0. \qquad (18.6.13)$$

Из (18.6.12,18.6.13) получаем

$$\int_a^b (y(t)-y)(y(t)-q)^\top \, dt = 0.$$

Отсюда $y(t) - q = 0$ при почти всех $t \in [a,b]$ и выполнено (18.6.4). $\diamondsuit$

Следствие 18.6.1 *В условиях теоремы 18.6.1 импульс $p(t) \in Cb^{(1)}([a,b])$ на экстремали.*

Следствие 18.6.2 *В условиях теоремы 18.6.1, если $c \in]a,b[$, то траектория $x \in Cb^{(1)}([a,b])$ есть экстремаль на $[a,b]$ иф её сужения на $[a,c]$ и $[c,b]$ есть экстремали.*

Точку $(t,x,v) \in \mathbf{R}^{2n+1}$ назовём *вырожденной* для функции $f \in C^{(2)}(G)$, если матрица вторых производных $\left(\frac{\partial^2 f(t,x,v)}{\partial v_i \partial v_j}\right)_{i,j\in\overline{1,n}}$, вырождена. Рассмотрим вопрос о гладкости экстремалей при отсутствии на них вырожденных точек.

Лемма 18.6.1 *Пусть функция $f \in C^{(m)}(G)$, $m = 2,3,\ldots\infty$ и $x \in C^{(1)}([a,b])$ — помещенная в G экстремаль, не содержащая вырожденных точек функции f, тогда $x \in C^{(m)}([a,b])$.*

Доказательство. Если точка $(t_0,x_0,v_0) \in G$ невырожденная, то по теореме о неявной функции [81, с. 314] уравнение

$$f(t,x,v) = p$$

имеет в некоторой окрестности точки (t_0,x_0,v_0) единственное непрерывно дифференцируемое решение $v(t,x,p)$ класса $C^{(m-1)}$, удовлетворяющее условию

$$v(t_0,x_0,p_0) = v_0.$$

По теореме 18.6.1 для экстремали выполнено равенство (18.6.4) и функция $f_v(t,x(t),\dot{x}(t)) = p(t)$ есть функция класса $C^{(1)}([a,b])$ по аргументу t. Тогда в окрестности точки $(t_0,x(t_0),\dot{x}(t_0)) \in G$ получаем, что функция

$$\dot{x}(t) = v(t,x(t),p(t))$$

как суперпозиция функций класса $C^{(1)}$ и класса $C^{(m-1)}$ есть функция класса $C(1)$. Получаем, что функция $x \in C^{(2)}([a,b])$.

Проведём теперь рассуждение по индукции. Пусть экстремаль $x(t)$ имеет k-тую непрерывную производную на $[a,b]$, $k \in \mathbf{N}$ и $m \in \mathbf{N}$. Тогда функция $f_x(t,x(t),\dot{x}(t))$ имеет непрерывную производную порядка $\min\{m-1,k-1\}$. Функция $p(t)$ согласно соотношению (18.6.4) для экстремали имеет непрерывную производную порядка $1+\min\{k-1,m-1\} = \min\{k,.m\}$. Функция $\dot{x}(t) = v(t,x(t),p(t))$ имеет непрерывную производную порядка $\min\{m-1,\min\{k,m\}\}$. Итак, функция $x(t)$ имеет непрерывную производную порядка $1+\min\{m-1,\min\{k,m\}\} = \min\{m,1+\min\{k,m\}\}$. Итак, если $k<m$, то из $x \in C^{(k)}([a,b])$ следует, что $x \in C^{(k+1)}([a,b])$. Отсюда следует, что экстремаль $x \in C^{(m)}([a,b])$ при конечном и бесконечном m. $\diamondsuit$

Итак, экстремали с непрерывной первой производной, не содержащие вырожденных точек функции f, имеют тот же порядок гладкости, что и функция f. Покажем теперь, что через каждую невырожденную точку (t,x,v) проходит единственная гладкая экстремаль.

Теорема 18.6.2 *Если функция $f \in C^{(m)}(G)$, $m = 3,4,\ldots\infty,\omega$ и $(t_0,x_0,v_0) \in G$ — невырожденная точка, то существует сегмент, $I=[a,b]$, $a<t_0<b$, что на сегменте I существует единственная в классе $C^{(1)}(I)$ экстремаль x, удовлетворяющая условиям*

$$x(t_0) = x, \dot{x}(t_0) = v_0 \tag{18.6.14}$$

причём $x \in C^{(m)}(I)$.

Доказательство. Рассмотрим систему $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = v, \\ \frac{d}{dt}f_v(t,x,v) = f_x(t,x,v) \end{cases} \tag{18.6.15}$$

для функций $x(t)$ и $v(t)$. Второе уравнение эквивалентно уравнению

$$f_{vv}\dot{v} = (f_x(t,x,v) - f_{vt} - f_{vx}v)^\top.$$

В случае невырожденности матрицы вторых производных $f_{vv} \equiv \left(f_{v_iv_j}\right)_{i,j\in\overrightarrow{1,n}}$ последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$\dot{v} = f_{vv}^{-1} \cdot (f_x(t,x,v) - f_{vt} - f_{vx}v)^\top.$$

Рассмотрим систему $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = & v, \\ \frac{d}{dt}v = & f_{vv}^{-1} \cdot (f_x(t,x,v) - f_{vt} - f_{vx}v)^\top \end{cases}. \tag{18.6.16}$$

В некоторой окрестности точки (t_0,x_0,v_0) правые части системы (18.6.16) — функции класса $C^{(1)}$. По теореме существования для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [82, с. 15]) существуют числа a и b, что $a<t_0<b$ и на $[a,b]$ существует единственное решение системы (18.6.16), удовлетворяющее условию (18.6.14). Но если выполнено (18.6.16), то выполнено и (18.6.15), а следовательно выполнено и соотношение (18.6.4). Итак, существует экстремаль $x \in C^{(2)}([a,b])$, удовлетворяющая условию (18.6.14).

По лемме 18.6.1 построенная экстремаль $x \in C^{(m)}(I)$.

Если теперь $x \in C^{(1)}(I)$ экстремаль, удовлетворяющая условию (18.6.14), то по лемме 18.6.1 она будет класса $C^{(m)}(I)$. Но экстремаль класса $C^{(m)}(I)$ удовлетворяет уравнению (18.6.4), а поэтому и системе обыкновенных дифференциальных уравнений (18.6.16). Следовательно по теореме единственности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений она единственна.

В случае $m = \omega$, т. е. когда функция $f(t,x,v)$ аналитическая в G, правые части системы (18.6.16) являются аналитическими функциями, поэтому и её решение $x(t), v(x)$ будет аналитической функцией (см. [62, с. 394]]). $\diamondsuit$

Итак, для функции $f \in C^{(G)}$, $m \geq 3$ мы можем вне множества вырожденных точек требовать от экстремали гладкости порядка m, что определяет единственную экстремаль, проходящую через данную точку $(t_0, x_0, v_0) \in G$. В точках вырождения мы уже не можем требовать от экстремали ни гладкости класса $C^{(2)}$ ни единственности, как показывает нижеследующий пример 18.6.2.

Рассмотрим три примера, иллюстрирующие доказанные утверждения. Размерность $n = 1$, область $G = \mathbf{R}^3$ в этих примерах.

Пример 18.6.1

$f(t,x,v) = \frac{v^5}{5}$. Согласно теореме 18.6.1 экстремали находятся из уравнения

$$\frac{d}{dt}\dot{x}^4 = 0,$$

т. е. из уравнения

$$\dot{x}^4 = Const.$$

Поэтому всякая экстремаль класса $Cb^{(1)}$ задаётся уравнением

$$|\dot{x}(t)| = Const.$$

Всякая экстремаль класса $C(1)$ задаётся уравнением $\dot{x}(t) = Const$. Через каждую точку $(t_0, x_0, v_0) \in \mathbf{R}^3$ проходит единственная экстремаль класса $C^{(1)}$, а именно экстремаль $x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$, определенная при всех $t \in \mathbf{R}$.

На экстремали класса $Cb^{(1)}$ импульс постоянен. Энергия $\mathcal{H}(t) = \frac{4}{5}\dot{x}^5(t)$ постоянна на экстремали класса $C^{(1)}$, но может быть разрывна на экстремали класса $Cb^{(1)}$. Например, на экстремали $x(t) = |t|$ имеем

$$\mathcal{H}(t) = \begin{cases} -\frac{4}{5} & ,t < 0; \\ \frac{4}{5} & ,t > 0. \end{cases}$$

Вырожденное множество состоит из точек $(t,x,v) \in \mathbf{R}^3$ с $v = 0$, на которых может не выполняться утверждение теоремы 18.6.2 о существовании гладких экстремалей. Тем не менее в данном примере через каждую точку $(t_0, x_0, v_0) \in \mathbf{R}^3$, в том числе и вырожденную, проходит единственная экстремаль класса $C^{(1)}$. Причём эта экстремаль принадлежит классу $C^{(\infty)}$ и определена при всех $t \in \mathbf{R}$.

Усложним пример 18.6.1.

Пример 18.6.2

$f(t,x,v) = \frac{v^5}{5} - x$. Импульс $p = \dot{x}^4$, энергия $\mathcal{H} = \frac{4}{5}\dot{x}^5 + x$. Уравнение для экстремалей класса $Cb^{(1)}$ согласно теореме 18.6.1 есть

$$\dot{x}^4(t) = \dot{x}^4(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t} d\tau = \dot{x}^4(t_0) - t + t_0 = c - t,$$

где $c = \dot{x}^4(t_0) + t_0$. Так как по следствию 18.6.1 импульс $p(t) = \dot{x}^4(t)$ непрерывен на экстремали класса $Cb^{(1)}$, то каждая экстремаль существует лишь при $t \le c$ и кончается в точке $t = c$, в которой $p(c) = 0$ и $\dot{x}(c) = 0$. Мы получаем, что из вырожденной точки $(t_0, x_0, 0)$ не выходит ни одной экстремали класса $Cb^{(1)}$, что доказывает существенность условия невырожденности в теореме 18.6.2 о локальном существовании экстремалей.

Любая экстремаль класса $C^{(1)}$ кончается в некоторый момент времени $t = c$ в точке с $\dot{x}(c) = 0$ и имеет вид

$$x(t) = x(c) + \sigma \frac{4}{5}(c-t)^{\frac{5}{4}},$$

где константа $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$. Итак, каждая экстремаль класса $C^{(1)}$ определена лишь на некоторой полупрямой $]-\infty, c]$ и в точке c не имеет второй производной, что показывает существенность условия невырожденности в лемме 18.6.1 о принадлежности экстремали класса $C^{(1)}$ классу $C^{(m)}$.

Убедимся теперь, что допуская разрыв производной на вырожденном множестве, мы можем построить экстремаль класса $Cb^{(1)}$ в задаче, не имеющей экстремалей из класса $C^{(1)}$.

Пример 18.6.3

Определим функцию

$$k(v) \equiv \begin{cases} \frac{(v+1)^5}{5} & , \quad v \le -1; \\ 0 & , \quad -1 \le v \le 1; \\ \frac{(v-1)^5}{5} & , \quad 1 \le v. \end{cases}$$

Положим $f(t,x,v) = k(v) - x$. Импульс будет равен

$$p = \frac{d}{dv}k(v) \equiv k'(v) = \begin{cases} (v+1)^4 & , \quad v \le -1; \\ 0 & , \quad -1 \le v \le 1; \\ (v-1)^4 & , \quad 1 \le v; \end{cases}$$

и энергия равна

$$\mathcal{H} = vk'(v) - k(v) + x,$$

где $v = \dot{x}(t)$.

Вырожденное множество состоит из точек $(t,x,v) \in \mathbf{R}^3$, у которых $v \in [-1, 1]$.

Если $v_0 < -1$, то через точку (t_0, x_0, v_0) проходит единственная экстремаль класса $C^{(1)}$. На ней

$$(\dot{x}(t)+1)^4 = (\dot{x}(t_0)+1)^4 - \int\limits_{t_0}^{t} d\tau = (\dot{x}(t_0)+1)^4 + t_0 - t \equiv c - t. \qquad (18.6.17)$$

Эта экстремаль кончается при $t = c$ в вырожденной точке с $\dot{x}(c) = -1$. Из точки вида $(t_0, x_0, -1)$ не выходит никакой экстремали класса $C^{(1)}$. Если же мы допустим в вырожденных точках с $v = -1$ и $v = 1$ разрыв первой производной экстремали, то полагая при $t \ge c$

$$(\dot{x}(t)-1)^4 = \int\limits_{c}^{t} d\tau = t - c,$$

получим

$$x(t) = x(c) + \frac{4}{5}(t-c)^{\frac{5}{4}} + t - c,\ t \geq c. \tag{18.6.18}$$

А согласно (18.6.17) при $t \leq c$ верно

$$x(t) = x(c) + \frac{4}{5}(c-t)^{\frac{5}{4}} + (c-t). \tag{18.6.19}$$

Согласно теореме 18.6.1 формулы (18.6.18, 18.6.19) задают экстремаль $x(t) \in Cb^{(1)}(\mathbf{R})$, производная которой имеет разрыв при $t = c$, а во всех остальных точках $t \neq c$ бесконечно дифференцируема.

На построенной экстремали импульс и энергия постоянны при всех $t \in \mathbf{R}$.

Через любую точку (t_0, x_0, v_0) с $|v_0| \geq 1$ проходит единственная экстремаль построенного типа. Из точки (t_0, x_0, x_0) с $|v_0| < 1$ не выходит и в нее не входит ни одна экстремаль класса $C^{(1)}$.

18.6.2 Закон сохранения энергии.

В примере 18.6.1 мы увидели, что если функция $f(t,x,v)$ класса $C^{\infty}(G)$ не зависит от времени t, т. е. $f(t,x,v) = f(x,v)$, то в классе экстремалей класса $Cb^{(1)}$ величина

$$\mathcal{H}(t) = f_v(x(t), \dot{x}(t)\dot{x}(t) - f(x(t), \dot{x}(t)) \tag{18.6.20}$$

может не быть постоянной на траектории. Т. е. закон сохранения энергии на экстремалях класса $Cb^{(1)}$, вообще говоря, не выполняется. Не предполагая отсутствия на экстремали вырожденных точек, дадим достаточное условие на гладкость экстремали, при котором выполняется закон сохранения энергии.

Теорема 18.6.3 *Пусть функция $f(t,x,v)$ класса $C^{(2)}(G)$ и не зависит от t. Пусть $x \in C^{(1)}([a,b])$ — помещенная в G экстремаль, производная которой $\dot{x}(t)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$. Тогда функция $\mathcal{H}(t)$ вида (18.6.20) постоянна на этой экстремали.*

Доказательство. В условиях теоремы для любой скалярной функции $h(t)$ класса $Cb_0^{(1)}([a,b])$ существует интеграл следующего вида

$$\int\limits_a^b \mathcal{H}(t)\dot{h}(t)\,dt \tag{18.6.21}$$

и допустимо следующее интегрирование по частям

$$\int\limits_a^b f(x,\dot{x})\dot{h}\,dt = -\int\limits_a^b h(f_x\dot{x} + f_v\dot{x})\,dt = -\int\limits_a^b hf_x\dot{x}\,dt + \int\limits_a^b \left(\frac{d}{dt}hf_v\right)\dot{x}\,dt. \tag{18.6.22}$$

В силу выражения (18.6.20) для $\mathcal{H}(t)$ из (18.6.22) получаем для интеграла (18.6.21):

$$\int\limits_a^b \mathcal{H}(t)\dot{h}(t)\,dt = \int\limits_a^b \left(f_v\dot{x}\dot{h} + hf_x\dot{x} - h\left(\frac{d}{dt}f_v\right)\dot{x} - \dot{h}f_v\dot{x}\right)\,dt =$$

$$-\int\limits_a^b h\left(\frac{d}{dt}(f_v) - f_x\right)\dot{x}\,dt = 0.$$

Последний интеграл равен нулю на экстремали в силу теоремы 18.6.1.

Мы получаем, что для непрерывной на $[a,b]$ функции $\mathcal{H}(t)$ и любой функции $h \in Cb_0^{(1)}([a,b])$ интеграл (18.6.21) равен нулю. Тогда для числа $\alpha \equiv \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \mathcal{H}(t)\,dt$ получаем

$$\int\limits_a^b (\mathcal{H}(t)-\alpha)(\mathcal{H}(t)-\alpha)\,dt = \int\limits_a^b \mathcal{H}(t)(\mathcal{H}(t)-\alpha)\,dt - \alpha\int\limits_a^b (\mathcal{H}(t)-\alpha)\,dt = 0, \qquad (18.6.23)$$

ибо функция $h(t) = \int\limits_a^b (\mathcal{H}(t)-\alpha)\,d\tau$ из класса $Cb_0^{(1)}([a,b])$. Отсюда следует, что функция $\mathcal{H}(t) = Const$ на $[a,b]$. $\diamondsuit$

18.6.3 Понижение размерности вариационной задачи при наличии циклической координаты.

В этом пункте мы рассматриваем функцию $f(t,x,v)$ класса $C^{(m)}(G)$, $m = 4,5,\ldots\infty,\omega$ и проводим рассмотрения *локально*, чтобы опираться на теорему 18.6.2. Во всех точках $(t,x,v) \in G$ предполагается выполнение следующих условий

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0; \qquad (18.6.24)$$

$$\mathrm{rank}\ (f_{vv}) = n; \qquad (18.6.25)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_n \partial v_n} \neq 0. \qquad (18.6.26)$$

Условие (18.6.24) — условие независимости от координаты x_n, т. е. условие цикличности координаты x_n. Условие (18.6.25) — условие отсутствия вырожденных точек. Условие (18.6.26) гарантирует локальную разрешимость уравнения

$$p_n = -f_{v_n}(t,x_1,x_2,\ldots x_{n-1},v_1,v_2,\ldots v_{n-1},v_n) \qquad (18.6.27)$$

относительно переменной v_n в виде функции

$$v_n = g(t,x_1,x_2,\ldots x_{n-1},v_1,v_2,\ldots v_{n-1},p_n) \qquad (18.6.28)$$

класса $C^{(m-1)}$ (при $m=\infty$, $m-1\equiv\infty$, при $m=\omega$, $m-1\equiv\omega$).

Замечание 18.6.1 *В формуле (18.6.27) и всюду далее в этом пункте мы берём импульс p и энергию $\mathcal{H}$ с противоположном знаком по сравнению с пунктами 18.6.1, 18.6.2 настоящего параграфа, чтобы согласовать их с обозначениями § 12.3, результаты которого мы используем.*

Используя условие цикличности n-ной координаты, перейдем теперь от вариационной задачи размерности n для функции $x(t)$ со значениями в $\mathbf{R}^n$ с функцией Лагранжа $f(t,x,v)$ и соответствующим интегральным действием L, к вариационной задаче размерности $(n-1)$ для функции $\bar{x}(t) \equiv (x_1(t),x_2(t),\ldots x_{n-1}(t))$ со значениями в $\mathbf{R}^{n-1}$ с некоторой функцией Лагранжа $f_1(t,\bar{x},\bar{v})$, $\bar{x}\in\mathbf{R}^{n-1}$, $\bar{v}\in\mathbf{R}^{n-1}$ и интегральным действием L_1.

В силу условия цикличности n-ной координаты (18.6.24) и выполнения на экстремали уравнений Эйлера (18.6.4) имеет место закон сохранения n-ной компоненты импульса на экстремали

$$p_n \equiv -\frac{\partial f}{\partial v_n}(t,x(t),\dot{x}(t)) = Const = \alpha. \qquad (18.6.29)$$

В силу условия (18.6.26) уравнение (18.6.29) разрешимо относительно $\dot{x}_n$, т. е. согласно формуле (18.6.28) из (18.6.29) следует, что

$$\dot{x}_n = g(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}, \alpha). \tag{18.6.30}$$

Мы рассматриваем вариационную задачу с закрепленными концами для искомой функции $x(t)$ с функцией Лагранжа $f(t, x, \dot{x})$, которая согласно § 12.3 сводится к вариационной задаче на безусловный экстремум с функцией Лагранжа

$$f(t, x, \dot{x}) + p\dot{x}. \tag{18.6.31}$$

Если $x(t)$— экстремаль для функции Лагранжа (18.6.31), то выполнено условие (18.6.29) и следовательно $\bar{x}(t)$— экстремаль функционала от $(n-1)$ переменного на безусловный экстремум с функцией Лагранжа

$$f(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}, g(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}, \alpha)) + \bar{p}\dot{\bar{x}} + \alpha g(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}, \alpha).$$

Поэтому $\bar{x}(t)$ — экстремаль функционала L_1 от $(n-1)$-ого переменного с функцией Лагранжа

$$f_1(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}, \alpha) \equiv f(t, x, \dot{\bar{x}}, g(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}, \alpha)) + \alpha g(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}, \alpha) \tag{18.6.32}$$

в задаче с закрепленными концами, где α — числовой параметр.

Наоборот, пусть $\bar{x}(t)$ экстремаль функционала L_1 и $\dot{x}_n(t) \equiv g(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \alpha)$. Тогда уравнение (18.6.29) выполнено по построению. При $i \in \overline{1,(n-1)}$ выполнены уравнения Эйлера для функционала L_1

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial f_1}{\partial x_i}. \tag{18.6.33}$$

Но

$$\frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_n}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_i} + \alpha\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} - \alpha\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_i} + \alpha\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}. \tag{18.6.34}$$

Из (18.6.33, 18.6.34) следует выполнение уравнений Эйлера

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i \in \overline{1,(n-1)}.$$

Итак, для функции $x(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ g(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \alpha) \end{pmatrix}$ выполнены n и уравнений Эйлера для функционала L. Т. е. так построенная функция $x(t)$ — экстремаль функционала L.

Вывод 18.6.1 *В задаче с закрепленными концами, если $x(t)$ экстремаль действия L, то $\bar{x}(t)$ — экстремаль действия L_1 и если $\bar{x}(t)$ — экстремаль действия L_1, то $x(t) = \left(\binom{\bar{x}(t)}{g(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t),\alpha)}\right)$ — экстремаль действия L.*

Мы свели экстремальную задачу в размерности n к экстремальной задаче в размерности $n-1$. Сравним теперь законы сохранения импульса и энергии для лагранжианов L и L_1.

Пусть координата x_{n-1} также циклическая для действия L, тогда выполнен закон сохранения $(n-1)$-ой компоненты импульса

$$p_{n-1} = -\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_{n-1}}(t, x, \dot{x}) = Const. \tag{18.6.35}$$

Тогда переменная x_{n-1} будет циклической и для действия L_1 и выполнен закон сохранения $(n-1)$-ой компоненты импульса

$$p'_{n-1} = -\frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_{n-1}} = -\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_{n-1}} + \frac{\partial f}{\partial v_n}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_{n-1}} + \alpha\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_{n-1}}\right) = -\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_{n-1}} = Const. \quad (18.6.36)$$

(Мы использовали соотношение (18.6.29)). Итак, законы сохранения $(n-1)$-ой компоненты импульса для лагранжианов L и L_1 совпадают.

Аналогичным образом, если функция $f(t,x,v) = f(x,v)$ не зависит от аргумента t, то и функция $f_1(t,\bar{x},\dot{\bar{x}},\alpha)$ не зависит от аргумента t и имеют место закон сохранения энергии для функционала L

$$\mathcal{H} = f(x,\dot{x}) - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x})\dot{x} = Const \quad (18.6.37)$$

и закон сохранения энергии для функционала L_1

$$\mathcal{H}_1 = f_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},\alpha) - \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\bar{x}}}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\alpha)\dot{\bar{x}} = f(x,\dot{x}) + \alpha g(\bar{x},\dot{\bar{x}},\alpha) - \frac{\partial f}{\partial \dot{\bar{x}}}(x,\dot{x})\dot{\bar{x}} - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_n}\frac{\partial g}{\partial \dot{\bar{x}}}\dot{\bar{x}} - \alpha\frac{\partial g}{\partial \dot{\bar{x}}}\dot{\bar{x}} = \quad (18.6.38)$$

$$f(x,\dot{x}) - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x})\dot{x} = Const.$$

(Мы использовали соотношения (18.6.29, 18.6.30) и вывод (18.6.1)). Итак, законы сохранения энергии (18.6.37) и (18.6.38) совпадают также

18.6.4 Частные производные энергии по компонентам скорости.

Для функции Лагранжа $f \in C^{(2)}(G)$ мы ввели импульс

$$p(t,x,v) = -\frac{\partial f(t,x,v)}{\partial v} \quad (18.6.39)$$

и энергию

$$\mathcal{H}(t,x,v) = f(t,x,v) - \frac{\partial f(t,x,v)}{\partial v}v \quad (18.6.40)$$

Частная производная

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t,x,v)}{\partial v_i} = \frac{\partial f(t,x,v)}{\partial v_i} - \frac{\partial f(t,x,v)}{\partial v_i} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(t,x,v)}{\partial v_i \partial v_j}v_j = -\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(t,x,v)}{\partial v_i \partial v_j}v_j$$

или

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v}\right)^{\top}(t,x,v) = \frac{\partial p^{\top}}{\partial v}v. \quad (18.6.41)$$

Здесь p и $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v}$ — вектор-строки, а x и v — вектор-столбцы.

§18.7 Скайл внутри соленоида

В качестве модели движения частицы в однородном магнитном поле с учётом только её заряда и массы мы рассмотрим движение скайла внутри соленоида. В терминологии и обозначениях § 17.6 мы рассматриваем соленоид с декартовой системой координат, ось x_3 которой есть ось соленоида.

В данной задаче имеют место три закона сохранения: импульса по оси x_3, момента по оси x_3 и энергии. Благодаря закону сохранения импульса по оси x_3 общий случай такого движения редуцируется в п. 18.7.2 к случаю плоского движения в плоскости перпендикулярной оси x_3 с измененной константой — массой m. Плоское движение мы рассматриваем в полярных системах координат (r, φ). Оно обладает следующими чертами.

Существуют вращательные движения с постоянной угловой скоростью по окружности с центром на оси x_3. У всех таких движений угловая скорость одинакова и равна $\omega = \frac{eH}{m}$, где e — заряд частицы, m — её масса, H — напряженность магнитного поля.

Существуют решения типа A, когда величины $r, \dot{r}, \dot{\varphi}$ являются периодическими функциями времени.

Существуют решения типа B, когда частица за конечное время достигает скорости света.

Существует вырожденное множество, вне которого координаты частицы являются аналитическими функциями времени, а при попадании траектории на это множество аналитичность может теряться. Более того, в п. 18.7.13 мы предъявим решения, при которых скорости $\dot{r}(x_0), \dot{\varphi}(x_0)$ при попадании на особое множество уже не являются абсолютно непрерывными функциями времени. Мы оставляем открытым вопрос о поведении экстремали после попадания на вырожденное множество, в частности, вопрос о выполнении закона сохранения энергии на такой траектории. Несохранение энергии на такой траектории физически может означать излучение электромагнитных волн.

Мы оставляем также открытым вопрос о том, что происходит с частицей после достижения ей скорости света.

Сравнение наших результатов с классическими мы проведем в следующем параграфе.

18.7.1 Функция Лагранжа, уравнения Эйлера и законы сохранения.

Согласно формуле (17.6.71) функция Лагранжа властайла внутри соленоида равна

$$n = m\sqrt{1-\vec{\beta}^2} + \frac{e}{1+\sqrt{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}} \left\langle \vec{H}, [\vec{x}, \vec{\beta}] \right\rangle. \tag{18.7.1}$$

Здесь m — масса покоя, e — заряд, $\vec{x}$ — вектор положения центра частицы, $\vec{\beta} = \frac{d\vec{x}}{dx_0}$ — вектор скорости центра. Вектор импульса для данной функции Лагранжа равен

$$\vec{p} \equiv -\left(\frac{\partial n}{\partial \vec{\beta}}\right)^\top = \frac{m}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}}\vec{\beta} - \frac{e}{1+\sqrt{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}}[\vec{H}, \vec{x}] - \tag{18.7.2}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} e \left\langle \vec{H}, [\vec{x}, \vec{\beta}] \right\rangle \frac{1}{\left(1+\sqrt{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}\right)^2 \sqrt{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}}.$$

Функция Лагранжа (18.7.1) не зависит от координаты x_3 и от времени x_0 и не изменяется при ортогональном повороте вокруг оси x_3, поэтому имеют место три закона сохранения. Сохраняется компонента импульса по оси x_3

$$p_3 \equiv \frac{m\beta_3}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}}. \tag{18.7.3}$$

Сохраняется энергия

$$\mathcal{H} \equiv n - \frac{\partial n}{\partial \vec{\beta}}\vec{\beta} = \frac{m}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}} - \frac{(\beta_1^2+\beta_2^2)e\left\langle \vec{H}, [\vec{x},\vec{\beta}]\right\rangle}{\left(1+\sqrt{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}\right)^2\sqrt{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}}. \qquad (18.7.4)$$

Сохраняется проекция вектора момента $\vec{M} = [\vec{x},\vec{p}] = \left[\left(\frac{\partial n}{\partial \vec{\beta}}\right)^{\top}, \vec{x}\right]$ на ось x_3

$$M \equiv \frac{m}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}}\left[\vec{x},\vec{\beta}\right]_3 - \qquad (18.7.5)$$

$$\frac{eH}{1+\sqrt{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}}\left((x_1^2+x_2^2) + \frac{[\vec{x},\vec{\beta}]_3^2}{\left(1+\sqrt{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}\right)\sqrt{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}}\right).$$

Уравнения движения, т.е. уравнения Эйлера для функции Лагранжа (18.7.1) есть

$$\frac{d}{dx_0}\vec{p} = -\frac{e}{1+\sqrt{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}}\left[\vec{\beta},\vec{H}\right]. \qquad (18.7.6)$$

Из сохранения проекции импульса на ось x_3 следует, что если $p_3 = 0$, то $\beta_3 = Const = 0$, т.е. в этом случае движение плоское в плоскости $x_3 = Const$. В общем случае $p_3 \neq 0$ движение также редуцируется к плоскому с помощью закона сохранения проекции импульса на ось x_3.

18.7.2 Редукция к плоскому случаю.

Используя цикличность координаты x_3 для функции Лагранжа (18.7.1), проведем редукцию к двумерной вариационной задаче согласно процедуре п. 18.6.3.

Фиксируем значение третьей компоненты импульса $p_3 = \alpha$ и разрешим уравнение

$$\frac{m\beta_3}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}} = \alpha \qquad (18.7.7)$$

относительно β_3. Получим

$$\beta_3 = \frac{\alpha}{m}\left(1+\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-(\beta_1^2+\beta_2^2)\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (18.7.8)$$

Отсюда

$$1-\vec{\beta}^2 = \frac{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}{1+\left(\frac{\beta}{m}\right)^2}. \qquad (18.7.9)$$

Функция Лагранжа от двух переменных x_1, x_2 и их производных $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ согласно п. 18.6.3 будет

$$\text{no} = n + \alpha\beta_3 = m\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}\sqrt{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)} + \frac{eH(x_1\beta_2-\beta_1x_2)}{1+\sqrt{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}}. \qquad (18.7.10)$$

Сравнивая функцию Лагранжа (18.7.10) с функцией Лагранжа (18.7.1), мы получим, что (18.7.10) соответствует плоскому движению с измененной массой $m' = m\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}$.

Предполагая, что $m \neq 0, e \neq 0, H \neq 0$, введём константу

$$\omega \equiv \frac{eH}{m\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}}, \tag{18.7.11}$$

$\omega \neq 0$. Мы получаем следующую нормированную функцию Лагранжа для двумерного случая

$$\text{nom} = \sqrt{1-(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)} + \omega\frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{1+\sqrt{1-(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)}}. \tag{18.7.12}$$

В полярных координатах (r, φ) получаем

$$\text{nom} = \sqrt{1-(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)} + \omega\frac{r^2\dot{\varphi}}{1+\sqrt{1-(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}}. \tag{18.7.13}$$

Обобщенные импульсы $p_r \equiv -\frac{\partial\,\text{nom}}{\partial\dot{r}}$ и $p_\varphi \equiv -\frac{\partial\,\text{nom}}{\partial\dot{\varphi}}$ равны для функции Лагранжа (18.7.13)

$$p_r = \frac{\dot{r}}{\sqrt{1-(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}}\left(1 - \frac{\omega r^2\dot{\varphi}}{\left(1+\sqrt{1-(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}\right)^2}\right), \tag{18.7.14}$$

$$p_\varphi = \frac{r^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1-(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}} - \frac{\omega r^2}{1+\sqrt{1-(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}} \times \tag{18.7.15}$$

$$\left(1 + \frac{r^2\dot{\varphi}^2}{\left(1+\sqrt{1-(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}\right)\sqrt{1-(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}}\right).$$

Обобщенный импульс p_φ соответствует моменту вокруг оси x_3 исходной системы и так как координата φ — циклическая для функции Лагранжа (18.7.13), то верен закон сохранения

$$p_\varphi = Const \equiv M. \tag{18.7.16}$$

Так как функция Лагранжа (18.7.13) не зависит от времени, то вне вырожденного множества имеет место закон сохранения энергии

$$\mathcal{H} \equiv \text{nom} + p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} = Const. \tag{18.7.17}$$

В данном случае

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{1-(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}} - \frac{\omega r^2\dot{\varphi}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}{\left(1+\sqrt{1-(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}\right)^2\sqrt{1-(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}}. \tag{18.7.18}$$

Уравнения Эйлера для функции Лагранжа (18.7.13) есть

$$\dot{p}_r = \frac{r\dot{\varphi}^2}{\sqrt{1-(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}} - \tag{18.7.19}$$

$$\frac{\omega r\dot{\varphi}}{1+\sqrt{1-(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}}\left(2 + \frac{r^2\dot{\varphi}^2}{\left(1+\sqrt{1-(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}\right)\sqrt{1-(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}}\right),$$

$$\dot{p}_\varphi = 0. \tag{18.7.20}$$

В этом параграфе точка сверху означает дифференцирование по времени x_0. Для краткости мы также введём обозначение

$$q \equiv \sqrt{1 - (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}, \tag{18.7.21}$$

$q \in]0, 1]$.

18.7.3 Движение по окружности вокруг оси соленоида.

Найдем частные решения системы уравнений Эйлера (18.7.19,18.7.20) с $r = Const$. В этом случае $\dot{r} = 0$, $p_r = 0$, $q = \sqrt{1 - r^2\dot{\varphi}^2}$ и уравнения (18.7.19,18.7.20) принимают вид

$$0 = r\dot{\varphi}\left(\frac{\dot{\varphi}}{q} - \frac{\omega}{1+q}\left(2 + \frac{r^2\dot{\varphi}^2}{(1+q)q}\right)\right), \tag{18.7.22}$$

$$\frac{d}{dx_0}r^2\left(\frac{\dot{\varphi}}{q} - \frac{\omega}{1+q}\left(1 + \frac{r^2\dot{\varphi}^2}{(1+q)q}\right)\right) = 0. \tag{18.7.23}$$

Из уравнения (18.7.22) следует, что или $r = 0$, что соответствует покоящейся в начале координат точке, или $\dot{\varphi} = 0$, что соответствует покоящейся точке, или верно

$$\frac{\dot{\varphi}}{q} - \frac{\omega}{1+q}\left(2 + \frac{1-q^2}{(1+q)q}\right) = 0.$$

т.е.

$$\dot{\varphi} = \omega. \tag{18.7.24}$$

Нетрудно видеть, что во всех трех случаях уравнение (18.7.23) также выполняется.

Вывод 18.7.1 *Для всех решений с $r = Const$, $r \neq 0$ угловая скорость постоянна и одинакова и равна ω.*

Для вращательного движения с $r = Const$ получаем

$$r = \frac{\sqrt{1-q^2}}{|\omega|}. \tag{18.7.25}$$

В этом случае выражаем момент M и энергию $\mathcal{H}$ через величину q согласно формулам (18.7.15,18.7.18):

$$M = \frac{1-q}{\omega}, \tag{18.7.26}$$

$$\mathcal{H} = 2 - q. \tag{18.7.27}$$

Для величин $u \equiv \mathcal{H} - 1$ и $w \equiv \mathcal{H} - M\omega - 1$, которые мы будем использовать далее, в данном случае получаем

$$u = 1 - q, \tag{18.7.28}$$

$$w = 0. \tag{18.7.29}$$

18.7.4 Множество вырожденных точек.

Определим множество вырожденных точек для функции Лагранжа (18.7.13) согласно определению п. 18.6.1. В данном случае множество вырожденных точек определяется обращением в нуль определителя

$$J \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \operatorname{nom}}{\partial \dot{r} \partial \dot{r}} & \frac{\partial^2 \operatorname{nom}}{\partial \dot{r} \partial \dot{\varphi}} \\ \frac{\partial^2 \operatorname{nom}}{\partial \dot{\varphi} \partial \dot{r}} & \frac{\partial^2 \operatorname{nom}}{\partial \dot{\varphi} \partial \dot{\varphi}} \end{vmatrix}. \tag{18.7.30}$$

Прямое вычисление даёт

$$J = \frac{r^2}{q^4 (1+q)^2} \left(\left(\omega r^2 \dot{\varphi} - (1+q) \right)^2 - \frac{(\omega r)^2 q^2 (1-q)}{1+q} \right). \tag{18.7.31}$$

Вывод 18.7.2 *Множество вырожденных точек для функции Лагранжа (18.7.13) состоит из точек в которых выполнено равенство*

$$r = 0 \tag{18.7.32}$$

или равенство

$$\left(\omega r^2 \dot{\varphi} - (1+q) \right)^2 = \frac{\omega^2 r^2 q^2 (1-q)}{(1+q)}. \tag{18.7.33}$$

18.7.5 Задание экстремали с помощью законов сохранения.

Функция Лагранжа $\operatorname{nom}(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$ вида (18.7.13) класса $C^{(\omega)}$ в своей области определения G и имеет два закона сохранения — момента p_φ и энергии $\mathcal{H}$ вида (18.7.15) и (18.7.18) соответственно, также класса $C^{(\omega)}$ в той же области определения G. Для удобства в этом параграфе будем обозначать $\tau \equiv x_0$.

Если $(\tau_0, r_0, \varphi_0, \dot{r}_0, \dot{\varphi}_0) \in \mathbf{R}^5$ невырожденная точка для функции Лагранжа $\operatorname{nom}(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$, то согласно п. 18.6.1 через неё проходит единственная локальная экстремаль класса $C^{(\omega)}$ вида

$$\tau = \tau,\ r = r(\tau),\ \varphi = \varphi(\tau),\ \dot{r} = \dot{r}(\tau),\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(\tau);\ \tau \in I, \tag{18.7.34}$$

где $I \in \mathbf{R}$ некоторый связный интервал, содержащий τ_0 своей внутренней точкой. Проекция этой кривой на линейное подпространство $\mathbf{R}^3$ переменных $r, \dot{r}, \dot{\varphi}$ параллельно переменным (τ, φ) будет кривой класса $C^{(\omega)}$ в $\mathbf{R}^3$ вида

$$r = r(\tau),\ \dot{r} = \dot{r}(\tau),\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(\tau);\ \tau \in I. \tag{18.7.35}$$

Согласно пп. 18.6.1 и 18.6.2 на экстремали (18.7.34) локально выполнены законы сохранения момента p_φ и энергии $\mathcal{H}$, т.е. кривая (18.7.35) лежит на пересечении двух поверхностей в $\mathbf{R}^3$, задаваемых уравнениями

$$\begin{cases} p_\varphi(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = M, \\ \mathcal{H}(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \mathcal{E}, \end{cases} \tag{18.7.36}$$

где $M \in \mathbf{R}$ и $\mathcal{E} \in \mathbf{R}$ константы. Мы убедились, что всякая экстремаль в некоторой окрестности невырожденной точки даёт в проекции на пространство переменных $(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$ кривую (18.7.35), удовлетворяющую системе уравнений 18.7.36.

Для выяснения структуры решений системы уравнений (18.7.36) рассмотрим определитель

$$D \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{r}} & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{\varphi}} \\ \frac{\partial p_\varphi}{\partial \dot{r}} & \frac{\partial p_\varphi}{\partial \dot{\varphi}} \end{vmatrix}. \tag{18.7.37}$$

Но $p_\varphi = -\frac{\partial \operatorname{nom}}{\partial \dot{\varphi}}$, а для производных функции $\mathcal{H}$ верна формула (18.6.41). Поэтому получаем

$$D = \dot{r} J, \tag{18.7.38}$$

где J — определитель (18.7.30). Итак, $D = 0$ в точках вырожденного множества $J = 0$ и при $\dot{r} = 0$.

Пусть точка $(\tau_0, r_0, \varphi_0, \dot{r}_0, \dot{\varphi}_0) \in \mathbf{R}^5$ невырожденная и $\dot{r}_0 \neq 0$. Тогда $D \neq 0$ и по теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки $(r_0, \dot{r}_0, \dot{\varphi}_0) \in \mathbf{R}^3$ система уравнений (18.7.36) имеет единственное решение вида

$$r = r, \dot{r} = \dot{r}(r), \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(r) \tag{18.7.39}$$

с функциями $\dot{r}(r)$ и $\dot{\varphi}(r)$ класса $C^{(\omega)}$. Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} = \dot{r}(r) \tag{18.7.40}$$

имеет на некотором связном интервале $I \subset \mathbf{R}$, содержащем τ_0 своей внутренней точкой, единственное решение $r(\tau)$ класса $C^{(\omega)}$, удовлетворяющее условию $r(\tau_0) = r_0$. Так как $\dot{r}(\tau_0) = \dot{r}_0 \neq 0$, то локально существует обратная функция $\tau(r)$ класса $C^{(\omega)}$. Мы получаем локально кривую класса $C^{(\omega)}$ в $\mathbf{R}^5$ вида

$$\tau = \tau, r = r(\tau), \varphi = \varphi_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \dot{\varphi}(r(\xi))\, d\xi, \;\; \dot{r} = \dot{r}(r(\tau)), \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(r(\tau)), \tag{18.7.41}$$

проходящую через точку $(\tau_0, r_0, \varphi_0, \dot{r}_0, \dot{\varphi}_0) \in \mathbf{R}^5$. По построению проекция кривой (18.7.41) на линейное пространство $\mathbf{R}^3$ переменных $(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$ совпадает с кривой (18.7.39).

Так как точка $(\tau_0, r_0, \varphi_0, \dot{r}_0, \dot{\varphi}_0) \in \mathbf{R}^5$ невырожденная для функции Лагранжа $\operatorname{nom}(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$, то согласно теореме 18.6.2 через неё локально проходит единственная экстремаль, и эта экстремаль класса $C^{(\omega)}$. Согласно предыдущему, проекция этой экстремали на линейное подпространство $\mathbf{R}^3$ переменных $(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$ удовлетворяет системе уравнений (18.7.39) и локально есть кривая (18.7.39). По кривой (18.7.39) мы можем единственным образом восстановить кривую в $\mathbf{R}^5$, проходящую через точку $(\tau_0, r_0, \varphi_0, \dot{r}_0, \dot{\varphi}_0)$, вида (18.7.41). Итак, кривая (18.7.41) есть экстремаль, а кривая (18.7.39) — её проекция.

Вывод 18.7.3 *Всякая экстремаль с абсолютно непрерывной производной удовлетворяет системе уравнений (18.7.36).*

Вывод 18.7.4 *Если $(\tau_0, r_0, \varphi_0, \dot{r}_0, \dot{\varphi}_0) \in \mathbf{R}^5$ невырожденная точка функции Лагранжа $\operatorname{nom}(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$ и $\dot{r}_0 \neq 0$, тогда в некоторой окрестности этой точки существует единственная экстремаль класса $C^{(1)}$, проходящая через эту точку и кроме того: 1) экстремаль принадлежит классу $C^{(\omega)}$; 2) её проекция на линейное подпространство $\mathbf{R}^3$ переменных $(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$ — кривая класса $C^{(\omega)}$, являющаяся единственным решением системы (18.7.36) и задаваемая в виде (18.7.39); 3) экстремаль однозначно восстанавливается по начальным данным и кривой (18.7.39).*

Итак, разрешая систему (18.7.39) в окрестности невырожденной точки с $\dot{r} \neq 0$ мы получаем локально экстремаль.

18.7.6 Параметрическое задание траектории.

Найдем параметрическое задание траектории, являющейся решением системы (18.7.36) в 3-мерном пространстве переменных $(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$ через параметр q вида (18.7.21). С помощью величины q систему уравнений (18.7.36) запишем в виде двух уравнений

$$\frac{r^2\dot{\varphi}}{q} - \frac{\omega}{1+q}\left(r^2 + \frac{(r^2\dot{\varphi})^2}{(1+q)q}\right) = M, \tag{18.7.42}$$

$$\frac{1}{q} - \frac{\omega r^2\dot{\varphi}(1-q^2)}{(1+q)^2 q} = \mathcal{E}. \tag{18.7.43}$$

Из уравнения (18.7.43) найдем величину $r^2\dot{\varphi}$ и подставим в уравнение (18.7.42). Тогда для величины r^2 найдем

$$r^2 = \frac{1+q}{\omega^2(1-q)^2}\Delta, \tag{18.7.44}$$

где

$$\Delta \equiv (1-\mathcal{E}q)(\mathcal{E}-q) - M\omega(1-q)^2. \tag{18.7.45}$$

Итак,

$$r = \frac{\sqrt{1+q}\sqrt{\Delta}}{|\omega|(1-q)}. \tag{18.7.46}$$

Из (18.7.44) и (18.7.43) получаем

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega(1-q)(1-\mathcal{E}q)}{\Delta}. \tag{18.7.47}$$

Так как $q^2 = 1 - (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$, то из (18.7.44,18.7.47) получаем

$$\dot{r}^2 = \frac{(1+q)f}{\Delta}, \tag{18.7.48}$$

где

$$f \equiv (1-q)\Delta - (1-\mathcal{E}q)^2. \tag{18.7.49}$$

Итак,

$$\dot{r} = \sigma\sqrt{\frac{(1+q)f}{\Delta}}, \tag{18.7.50}$$

где $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$, т.е. знак σ совпадает со знаком $\dot{r}$.

Введём для удобства следующую вспомогательную величину $s \in [0,1[$ вида

$$s \equiv 1 - q. \tag{18.7.51}$$

Введём также следующие константы

$$C \equiv \mathcal{E} - M\omega, \tag{18.7.52}$$

$$w \equiv C - 1 = \mathcal{E} - 1 - M\omega, \tag{18.7.53}$$

$$u \equiv \mathcal{E} - 1. \tag{18.7.54}$$

В этих обозначениях предыдущие формулы запишем в следующем виде. Для Δ верно представление

$$\Delta = Cs^2 - (1-s)u^2. \tag{18.7.55}$$

Для величины f верны представления:

$$f = s\Delta(s) - (1 - (1 + u)(1 - s))^2, \tag{18.7.56}$$

$$f = Cs^3 - (2u - 1)s^2 + u(2 + u)s - u^2, \tag{18.7.57}$$

$$f = ws^3 + (s - 1)(s - u)^2. \tag{18.7.58}$$

Для величин $r, \dot{r}, \dot{\varphi}$ верны представления

$$r = \frac{\sqrt{(2 - s)\Delta}}{|\omega| s}, \tag{18.7.59}$$

$$\dot{r} = \sigma\sqrt{\frac{(2 - s)f}{\Delta}} \tag{18.7.60}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega s((1 + u)s - u)}{\Delta}. \tag{18.7.61}$$

В формуле (18.7.60) $\sigma = +1$ или $\sigma = -1$. Знак σ совпадает со знаком $\dot{r}$. Под корнем квадратным $\sqrt{x}$ в этом параграфе понимается его неотрицательное значение.

В физической области значений величин должно быть $q \in]0, 1]$, $s \in [0, 1[$. Поэтому из равенств (18.7.44) и (18.7.48) следует, что в физической области должны выполняться неравенства

$$\Delta(s) \geq 0, \tag{18.7.62}$$

$$f(s) \geq 0. \tag{18.7.63}$$

Для того, чтобы наша задача допускала решения, не являющиеся состоянием покоя, необходимо, чтобы неравенство (18.7.63) выполнялось при некотором $s \in]0, 1[$. Согласно формуле (18.7.58) это возможно лишь при $w \geq 0$. Если $w = 0$, то $f(s) \geq 0$ лишь в одной возможной точке $s \in [0, 1[$, а именно $s = u$. Что возможно лишь при $u \in [0, 1[$ и соответствует согласно формулам (18.7.59-18.7.61) решению с $\dot{r} = 0$. Итак, в случае $w = 0$ могут существовать лишь вращательные решения, описанные в п. 18.7.3.

Вывод 18.7.5 *Решения, не являющиеся состояниями покоя частицы, существуют лишь при $w \geq 0$, причём в случае $w = 0$ существуют лишь вращательные движения, описанные в п. 18.7.3.*

В физической области должны выполняться оба неравенства (18.7.62) и (18.7.63). Но неравенство (18.7.63) влечет согласно (18.7.56) неравенство

$$s\Delta(s) \geq 0. \tag{18.7.64}$$

И в случае $s \in]0, 1[$ неравенство (18.7.64) влечет неравенство (18.7.62). В случае же $s = 0$ неравенство (18.7.63) влечет $u = 0$ и тогда также $\Delta(s)=0$. Мы убедились, что в физической области значений $s \in [0, 1[$, если выполнено (18.7.63), то выполнено и (18.7.62). Поэтому достаточно рассмотреть условия выполнения неравенства (18.7.63).

Более того, неравенство $f(s) > 0$ влечет согласно (18.7.56) неравенство $s\Delta(s) > 0$, а значит неравенство $\Delta(s) > 0$. Поэтому в физической области, где $f(s) \geq 0$, $s \in [0, 1[$ равенство

$$\Delta(s) = 0 \tag{18.7.65}$$

влечет равенство

$$f(s) = 0. \tag{18.7.66}$$

Но из выполнения равенств (18.7.65) и (18.7.66) одновременно следует

$$s = \frac{u}{1+u}, \tag{18.7.67}$$

и при $u \neq 0$ следует

$$C = 1 + u = \mathcal{E}. \tag{18.7.68}$$

Из (18.7.68) и (18.7.52) следует тогда $M = 0$.

Вывод 18.7.6 *Если $M \neq 0, u \neq 0$, то при $f(s) \geq 0$ верно $\Delta(s) > 0$ в физической области и траектория не проходит через начало координат, т.е. $r > 0$ на траектории.*

18.7.7 Свойства кубического полинома $f(s)$.

В предыдущем пункте мы получим параметрическое представление экстремали, в котором для определения физических значений параметра $s \in [0, 1[$ следует описать множество решений неравенства $f(s) \geq 0$, где $f(s)$ — кубический полином от переменной s, зависящий также от действительных величин u, w, вида (18.7.58).

При значении параметра $w = 0$ полином $f(s)$ согласно формуле (18.7.58) имеет действительный корень $s_1 = u$ кратности 2 и действительный корень $s_2 = 1$ кратности 1. При $w > 0$ верно

Утверждение 18.7.1 *Если $w > 0$, то все действительные корни полинома $f(s)$ лежат на* $[0, 1[$.

Доказательство. Если $s \geq 1$, то $f(s) \geq w > 0$. Если $s < 0$, то $f(s) \leq ws^3 < 0$. $\diamondsuit$

Чтобы применить к кубическому полиному $f(s)$ формулу Кардано для корней, заменой $s = x + \alpha$ приведем его к виду

$$f(s) = (1 + w)(x^3 + px + q). \tag{18.7.69}$$

Здесь $\alpha = \frac{1+2u}{3(1+w)}$ найдено из условия

$$\frac{d^2}{ds^2} f(s)|_{s=\alpha} = 0,$$

а коэффициенты p и q равны

$$q = \frac{f(\alpha)}{1+w}, \quad p = \frac{f'(\alpha)}{1+w}. \tag{18.7.70}$$

Дискриминант D кубического полинома

$$g(x) \equiv x^3 + px + q \tag{18.7.71}$$

равен [48, с.722]

$$D = -108 \left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \right). \tag{18.7.72}$$

Вычисления дают
$$D = \frac{27u^4w}{(1+w)^4}\left(\frac{4(1-u)^3}{27u} - w\right). \qquad (18.7.73)$$

При $u \neq 0, w > 0$ знак дискриминанта равен
$$\operatorname{sign}(D) = \operatorname{sign}\left(\frac{4(1-u)^3}{27u} - w\right).$$

Имея выражение для дискриминанта (18.7.73), мы можем согласно [48, с. 722] следующим образом описать поведение корней.

Утверждение 18.7.2 *При $w = 0$ полином $f(s)$ имеет действительный корень $s_1 = u$ кратности 2 и действительный корень $s_2 = 1$ кратности 1. При $w > 0$:*

1. Если $u \in]-\infty, 0[\cup[1, \infty[$, то полином $f(s)$ имеет лишь один действительный корень s_1 и $s_1 \in]0, 1[$. Причём при $s < s_1$ верно $f(s) < 0$, а при $s > s_1$ верно $f(s) > 0$.

2. Если $u = 0$, то полином $f(s)$ имеет действительный корень $s_1 = 0$ кратности 2 и действительный корень $s_2 = \frac{1}{1+w}$ кратности 1.

3. Если $u \in]0, 1[$, то:

3.1. Если $w < \frac{4(1-u)^3}{27u}$, то полином $f(s)$ имеет три различных действительных корня s_1, s_2, s_3, причём $0 < s_1 < u < s_2 < s_3 < 1$.

3.2 Если $w = \frac{4(1-u)^3}{27u}$, то полином $f(s)$ имеет действительный корень $s_1 \in \,]0, u[$ кратности 1 и действительный корень $s_2 \in \,]u, 1[$ кратности 2.

3.3. Если $w > \frac{4(1-u)^3}{27u}$, то полином $f(s)$ имеет один действительный корень s_1 кратности 1 и $s_1 \in \,]0, u[$.

Доказательство. Случаи $w = 0$ и $u = 0$ непосредственно следуют из вида (18.7.58) полинома $f(s)$.

При $w > 0$ в случае 1 дискриминант $D < 0$, поэтому полином f имеет лишь один действительный корень s_1 и по утверждению 1 получаем $s_1 \in \,]0, 1[$. Знаки полинома $f(s)$ при $s<s_1$ и при $s>s_1$ следуют из его вида (18.7.58).

При $w > 0$ случай 3 рассмотрим следующим образом. Фиксируем значение $u \in \,]0, 1[$ и будем, изменяя w от 0 до $+\infty$ следить за поведением действительных корней. При $w = 0$ мы имеем один действительный корень $s' = u$ кратности 2 и один действительный корень $s'' = u$ кратности 1. При появлении малого положительного w корень s' раздваивается на два корня s_1 и s_2, причём $0 < s_1 < u < s_2$, а корень s'' уменьшается и приходит в корень $s_3 < 1$. Получаем $0 < s_1 < u < s_2 < s_3 < 1$. При возрастании w от 0 до $\frac{4(1-u)^3}{27u}$ корень s_1 монотонно убывает, корень s_2 монотонно возрастает, корень s_3 монотонно убывает. При $w = \frac{4(1-u)^3}{27u}$ корни s_2 и s_3 сливаются в один корень s_2 кратности 2. При дальнейшем возрастании w действительные корни s_2 и s_3 исчезают, а оставшийся единственный действительный корень s_1 продолжает убывать. $\diamondsuit$

Явный вид корней полинома $f(s)$ можно получить, применяя формулу Кардано к полиному $g(x)$. Однако, при малых значениях u и w удобно использовать асимптотические формулы для корней. Для получения оценок корней полинома $f(s)$ мы используем принцип сжатых отображений в следующей форме, следующей из [81, с.108].

Утверждение 18.7.3 *Пусть функция $v(x)$ определена и дифференцируема на $[a,b]$, отображает сегмент $[a,b]$ в себя и число $q \equiv \sup\limits_{x\in[a,b]} |v'(x)|$ меньше 1. Тогда уравнение $x = v(x)$ имеет на $[a,b]$ единственное решение z и для любого начального приближения $x_0 \in [a,b]$ итерации $x_{n+1} = v(x_n)$ образуют последовательность, сходящуюся к точке z, причём справедливо неравенство*

$$|z - x_n| \le \frac{q^n}{1-q}|x_0 - x_1| \tag{18.7.74}$$

при $n \in \mathbf{N}$.

Применим теперь утверждение 18.7.3 в трех случаях: для оценки корней полинома $f(s)$, ближайшего к 1, и для оценки двух корней полинома $f(s)$, ближайших к 0.

Утверждение 18.7.4 *Если $w \ge 0$ и $w + |u| \le \frac{1}{10}$, то полином $f(s)$ имеет действительный корень $s_0 \in [1-2w, 1]$, удовлетворяющий оценке*

$$s_0 = 1 - w + \Delta_0, \tag{18.7.75}$$

где

$$|\Delta_0| \le 4w(w + |u|). \tag{18.7.76}$$

Доказательство. Для применения принципа сжатых отображений, в уравнении $f(s) = 0$ сделаем замену переменных $x = 1 - s$ и перепишем это уравнение в эквивалентном виде

$$x = w\frac{(1-x)^3}{(1-x-u)^2}.$$

Возьмём $[a,b] \equiv [0, 2w]$ и $v(x) \equiv w\frac{(1-x)^3}{(1-x-u)^2}$ и проверим применимость утверждения 18.7.3.

Производная функции $v(x)$ в данном случае равна

$$v'(x) = -w\frac{(1-x)^2(1-x-3u)}{(1-x-u)^3}.$$

В условиях настоящего утверждения при $x \in [0, 2w]$ верно

$$v'(x) < 0, \tag{18.7.77}$$

$$|v'(x)| \le 2w < 1. \tag{18.7.78}$$

В силу (18.7.77) функции $v(x)$ монотонно убывает на $[0, 2w]$ и

$$v(0) = \frac{w}{(1-u)^2} \in [0, 2w]$$

и

$$v(2w) = w\frac{(1-2w)^3}{(1-2w-u)^2} \in [0, 2w],$$

т.е. функция $v(x)$ отображает сегмент $[0, 2w]$ в себя. Итак, выполнены условия применимости принципа сжатых отображений утверждения 18.7.3.

Полагаем $x_0 = w$, тогда

$$x_1 = w\frac{(1-w)^3}{(1-w-u)^2}. \tag{18.7.79}$$

Поэтому

$$x_1 - x_0 = w\left(\frac{(1-w)^3}{(1-w-u)^2} - 1\right).$$

Оценим величину

$$\frac{(1-w)^3}{(1-w-u)^2} - 1 = \frac{((1-w-u)+u)^3}{(1-w-u)^2} - 1 = -w + 2u + u\left(\frac{3u}{1-w-u} + \frac{u^2}{(1-w-u)^2}\right).$$

Но

$$\left|\frac{3u}{1-w-u} + \frac{u^2}{(1-w-u)^2}\right| \le \frac{1}{10}\left(\frac{3}{0{,}9} + \frac{0{,}1}{(0{,}9)^2}\right) < 1.$$

Поэтому

$$\left|\frac{(1-w)^3}{(1-w-u)^2} - 1\right| \le w + 3|u|$$

и следовательно,

$$|x_1 - x_0| \le w(w + 3|u|). \tag{18.7.80}$$

Применяя оценку (18.7.77) утверждения 18.7.3, получаем

$$|z - x_1| \le \frac{2w}{1-2w}|x_1 - x_0| \le \frac{5}{2}|x_1 - x_0|w. \tag{18.7.81}$$

Из (18.7.80,18.7.81) следует

$$|z-w| \le |z-x_1| + |x_1-x_0| \le \left(1 + \frac{5}{2}w\right)|x_0-x_1| \le \frac{5}{4}w(w+3|u|) \le 4w(w+|u|). \tag{18.7.82}$$

Из оценки (18.7.82) следует справедливость утверждения 18.7.4. ♢

Итак, при $w \ge 0$ корень полинома $f(s)$ близкий к единице существует при достаточно малых u и w. Два корня же, близких к нулю, существуют при дополнительном ограничении $w > 0$ и $u > 0$ при достаточно малых u и w.

Утверждение 18.7.5 *Если $u > 0$, $w > 0$ и $u + w \le \frac{1}{10}$, то у полинома f(s) существуют 3 действительных корня s_1, s_2, s_3 на интервале]0,1[, причём $s_1 \in]0, u[$, $s_2 \in]u, 2u[$, $s_3 \in]1-2w, 1[$ и справедливы оценки*

$$s_1 = u - w^{\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}} + \Delta_1, \tag{18.7.83}$$

$$s_2 = u + w^{\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}} + \Delta_1, \tag{18.7.84}$$

$$s_3 = 1 - w + \Delta_3, \tag{18.7.85}$$

где

$$|\Delta_1| \le 5wu^2(1-u)^{-\frac{1}{2}}, \tag{18.7.86}$$

$$|\Delta_2| \le 5wu^2(1-u)^{-\frac{1}{2}}, \tag{18.7.87}$$

$$|\Delta_3| \le 4w(w+u). \tag{18.7.88}$$

Доказательство. Существование корня s_3 и его оценку мы уже доказали в утверждении 18.7.4. Для нахождения корней s_1 и s_2 полинома $f(s)$ с помощью принципа сжатых отображений сделаем замену переменных $s-u \equiv x$ и перепишем уравнение $f(s) = 0$ в эквивалентном виде

$$x = \sigma w^{\frac{1}{2}} \frac{(x+u)^{\frac{3}{2}}}{(1-x-u)^{\frac{1}{2}}} \equiv v_\sigma(x), \tag{18.7.89}$$

где $\sigma = +1$ или $\sigma = -1$. Производная функции $v_\sigma(x)$ равна

$$v'_\sigma(x) = \sigma w^{\frac{1}{2}} \frac{(x+u)^{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}-x-u)}{(1-x-u)^{\frac{3}{2}}}.$$

При $x \in [-u, u]$ верны неравенства

$$0 \le \frac{v'_\sigma(x)}{\sigma w^{\frac{1}{2}}} \le \frac{(2u)^{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}}{(1-\frac{1}{5})^{\frac{3}{2}}} \le 3u^{\frac{1}{2}}. \tag{18.7.90}$$

Поэтому функция $v_-(x)$ монотонно убывает на $[-u, 0]$ и

$$v_-(-u) = 0,$$

$$v_-(0) = -w^{\frac{1}{2}} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{(1-u)^{\frac{1}{2}}} = -u \frac{w^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}}{(1-u)^{\frac{1}{2}}} \in]-u, 0[.$$

Итак, функция $v_-(x)$ отображает сегмент $[-u, 0]$ в себя и

$$\sup_{x\in[-u,0]} |v'_-(x)| \le 3u^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} \le 0{,}3 < 1.$$

Полагаем $x_0 = 0$ и применяем метод последовательных приближений. Получаем

$$x_1 = -w^{\frac{1}{2}} u^{\frac{3}{2}} (1-u)^{\frac{3}{2}}.$$

Применяя теперь утверждение 18.7.3, получаем оценку для корня s_1 вида (18.7.83, 18.7.86).

Функция $v_+(x)$ согласно (18.7.90) монотонно возрастает на $[0, u]$ и

$$v_+(0) = w^{\frac{1}{2}} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{(1-u)^{\frac{3}{2}}} = u \frac{w^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}}{(1-u)^{\frac{1}{2}}} \in]0, u[,$$

$$v_+(u) = w^{\frac{1}{2}} \frac{u^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{3}{2}}}{(1-2u)^{\frac{1}{2}}} = u \frac{2^{\frac{3}{2}} w^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}}{(1-2u)^{\frac{1}{2}}} \in]0, u[.$$

В силу оценки (18.7.90) верно

$$\sup_{x\in[0,u]} |v'_+(x)| \le 3u^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} \le 0{,}3 < 1.$$

К функции $v_+(x)$ на $[0, u]$ применяем теперь метод последовательных приближений с $x_0 = 0$. Получаем

$$x_1 = \frac{w^{\frac{1}{2}} u^{\frac{3}{2}}}{(1-u)^{\frac{1}{2}}}.$$

Применение утверждения 18.7.3 даёт теперь утверждаемую оценку корня s_2. $\diamondsuit$

Пример 18.7.1

Рассмотрим случай $w = u = \frac{1}{4}$. В этом случае полином

$$f(s) = \frac{1}{4}s^3 + (s-1)\left(s - \frac{1}{4}\right)^2.$$

В данном случае верно равенство

$$w = \frac{4(1-u)^3}{27u},$$

ибо

$$\frac{1}{4} = \frac{4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3}{27 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)}.$$

Поэтому согласно утверждению 18.7.2 полином $f(s)$ имеет действительный корень $s_1 \in]0, \frac{1}{4}[$ кратности 1 и действительный корень $s_2 \in]\frac{1}{4}, 1[$ кратности 2. Подстановкой проверяем, что

$$f(s) = \frac{1}{4}s^3 + (s-1)\left(s - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{4}\left(s - \frac{1}{5}\right)\left(s - \frac{1}{2}\right)^2,$$

т.е. $s_1 = \frac{1}{5}, s_2 = \frac{1}{2}$.

18.7.8 Зависимость величины s от времени.

Чтобы получить дифференциальное уравнение для изучения эволюции параметра s во времени продифференцируем по $\tau \equiv x_0$ равенство $r = r(s)$ и получим

$$\frac{dr}{d\tau} = \dot{r} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{d\tau} = \frac{dr(s)}{ds}\dot{s}. \tag{18.7.91}$$

Величина $\frac{dr}{ds}(s)$ получается дифференцированием формулы (18.7.59) для функции $r(s)$ и равна

$$\frac{dr}{ds}(s) = \frac{k(s)}{2|\omega|s^2\sqrt{(2-s)\Delta(s)}}, \tag{18.7.92}$$

где

$$k(s) \equiv -Cs^3 + u^2(4-3s). \tag{18.7.93}$$

Поскольку выражение для $\dot{r}(s)$ известно — формула (18.7.60), то из (18.7.91, 18.7.92, 18.7.60) получаем следующее дифференциальное уравнение для функции $s(\tau)$

$$\dot{s} = \sigma 2|\omega|\frac{s^2(2-s)\sqrt{f(s)}}{k(s)}. \tag{18.7.94}$$

Напомним, что $\sigma = +1$ или $\sigma = -1$, причём знак σ совпадает со знаком $\dot{r}$.

Поведение решения одномерного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (18.7.94) с аналитической правой частью определяется нулями полиномов $f(s)$ и $k(s)$. Нули полинома $k(s)$ есть особые точки дифференциального уравнения (18.7.94). Оказывается, обращение в нуль полинома $k(s)$ означает попадание экстремали в вырожденную точку.

В самом деле, подставим параметрически выраженные формулами (18.7.59-18.7.61) величины $r(s), \dot{r}(s), \dot{\varphi}(s)$ в уравнение (18.7.33), определяющее вырожденные точки. Получим

$$\left(\frac{\omega(2-s)\Delta(s)\omega s((1+u)s-u)}{\omega^2 s^2\Delta(s)} - (2-s)\right)^2 = \frac{\omega^2(2-s)\Delta(s)(1-s)^2}{\omega^2 s^2(2-s)}.$$

Или

$$(2-s)^2\frac{u^2(1-s)^2}{s^2} = \frac{\Delta(s)}{s}(1-s)^2.$$

Что при $s \in]0,1[$ эквивалентно уравнению

$$(2-s)^2 u^2 - s\Delta(s) = 0. \tag{18.7.95}$$

При подстановке в (18.7.95) выражения (18.7.55) для $\Delta(s)$ мы получаем уравнение

$$k(s) = 0.$$

Исходя из вывода 18.7.2, мы приходим к следующему выводу.

Вывод 18.7.7 *Экстремаль попадает на вырожденное множество иф* $\Delta(s) = 0$ *или k(s)=0.*

Имея выражение (18.7.94) для $\frac{ds}{d\tau}$ и выражение (18.7.61) для $\frac{d\varphi}{d\tau}$, получаем для производной функции $\varphi(s)$ по s выражение

$$\frac{d\varphi}{ds}(s) = \frac{\theta\sigma}{2}\frac{((1+u)s-u)k(s)}{s(2-s)\Delta(s)\sqrt{f(s)}}, \tag{18.7.96}$$

где $\theta = \mathrm{sign}(\omega),\ \ \sigma = \mathrm{sign}(\dot{r})$.

Уравнение (18.7.94,18.7.96) мы рассматриваем на множестве значений $s \in [0,1[$, таких, что $f(s) \geq 0$. Уравнение 18.7.94 имеет особыми точками нули кубического полинома $f(s)$ и нули кубического полинома $k(s)$. Поэтому, если на множестве $[a,b[\subset [0,1]$ выполнено неравенство $f(s) > 0$ и полином $k(s)$ не имеет нулей, функции $s(\tau)$ и $\varphi(s)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (18.7.94,18.7.96) с аналитической правой частью и являются поэтому аналитическими функциями своих аргументов. Если $s_0 \in [a,b]$ и $s(\tau_0) = s_0, \varphi(s_0) = \varphi_0$, то функция $s(\tau)$ при $s \in [a,b]$ есть решение уравнения

$$\tau - \tau_0 = \frac{\sigma}{2|\omega|}\int\limits_{s_0}^{s}\frac{k(s)}{s^2(2-s)\sqrt{f(s)}}\,ds, \tag{18.7.97}$$

а функция $\varphi(s)$ при $s \in [a,b]$ равна

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \frac{\theta\sigma}{2}\int\limits_{s_0}^{s}\frac{((1+u)s-u)k(s)}{s(2-s)\Delta(s)\sqrt{f(s)}}\,ds. \tag{18.7.98}$$

Общее решение $s(\tau)$ мы получим сшиванием решений в нулях функции $f(s)$, кроме тех случаев (см. п. 18.7.13), когда нуль s_k полинома $k(s)$ попадает на интервал из [0,1], где $f(s) > 0$.

18.7.9 Свойства полинома $k(s)$.

Рассмотрим кубический полином $k(s)$ вида (18.7.93). Его производная

$$\frac{d}{ds}k(s) \equiv k'(s) = -3(Cs^2 + u^2) \leq 0$$

при всех $s \in \mathbf{R}$, ибо $C \geq 1$. Поэтому функция $k(s)$ монотонно убывает и имеет единственный действительный корень s_k.

Знак полинома $k(s)$ совпадает со знаком полинома

$$kn\,(s) \equiv -s^3 + b(4 - 3s), \tag{18.7.99}$$

где

$$b \equiv \frac{u^2}{c} \geq 0. \tag{18.7.100}$$

Поэтому действительный корень s_k полинома $k(s)$ является функцией от величины b, $s_k = s_k(b) = s_k\left(\frac{u^2}{c}\right)$. Учитывая что $b \geq 0$, заметим, что при $s < 0$ полином $k(s) > 0$ и при $s \geq \frac{4}{3}$ полином $k(s) < 0$. Поэтому действительный корень $s_k(b) \in [0, \frac{4}{3}[$ при $b \in [0, \infty[$.

Если $b_2 > b_1 \geq 0$, то

$$kn\,(s, b_2) - kn\,(s, b_1) = (b_2 - b_1)(4 - 3s)$$

и на участке $[0, \frac{4}{3}[$ верно

$$kn\,(s, b_2) > kn\,(s, b_1).$$

Итак, корень $s_k(b)$ монотонно возрастает как функция b. Подстановкой проверяется, что $s_k = 0$ и $s_k(1) = 1$.

Вывод 18.7.8 *Если $\frac{u^2}{c} = 0$, то полином $k(s)$ имеет один корень $s_k = 0$ кратности 3. Если $0 < \frac{u^2}{c} < 1$, то полином $k(s)$ имеет один действительный корень s_k кратности 1 и $s_k \in]0, 1[$. Если $\frac{u^2}{c} = 1$, то полином $k(s)$ имеет один действительный корень s_k кратности 1 и $s_k = 1$. Если $\frac{u^2}{c} > 1$, то полином $k(s)$ имеет один действительный корень s_k кратности 1 и $s_k \in]1, \frac{4}{3}[$.*

Пользуясь принципом сжатых отображений в форме утверждения 18.7.3, дадим теперь оценку корня $s_k(b)$ при малых b.

Утверждение 18.7.6 *Если $b \in]0, \frac{1}{8}]$, то полином $kn\,(s)$ имеет единственный действительный корень $s_k \in]0, 2^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}}[$ и верны соотношения*

$$s_k = 2^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} + \Delta(b), \tag{18.7.101}$$

где

$$-4b^{\frac{2}{3}} \leq \Delta(b) < 0. \tag{18.7.102}$$

Доказательство. Уравнение $kn\,(x) = 0$ запишем в виде

$$x = b^{\frac{1}{3}}(4 - 3x)^{\frac{1}{3}} \equiv v(x).$$

Возьмём сегмент $[0, 2^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}}]$ и покажем, что применимо утверждение 18.7.3.

Производная $v'(x) = -b^{\frac{1}{3}}(4-3x)^{-\frac{2}{3}}$. Поэтому при $x \in [0, 2^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}]$ верно $v'(x) < 0$, функция $v(x)$ монотонно убывает и

$$v(0) = 2^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}, v(2^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}) = b^{\frac{1}{3}}(4 - 32^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}) \in]0, 2^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}[.$$

Итак, функция $v(x)$ отображает сегмент $[0, 2^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}]$ в себя. Точки $x = 0$ и $x = 2^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$ не являются неподвижными точками отображения v, поэтому $0 < s_k < 2^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$. Для производной $v'(x)$ справедлива оценка

$$\sup_{x \in [0, 2^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}]} |v'(x)| \le b^{\frac{1}{3}} < 1.$$

Применяем метод последовательных приближений с $x_0 = 0$, получаем

$$x_1 = 2^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}.$$

И согласно оценке (18.7.74) из утверждения 18.7.3 верно

$$|s_k - x_1| \le \frac{b^{\frac{1}{3}}}{1 - b^{\frac{1}{3}}} x_1 \le 4b^{\frac{2}{3}},$$

что доказывает утверждение 18.7.6. ♢

Из доказанного утверждения следует

Утверждение 18.7.7 *Если $0 < u \le 3^{-3}$ и $0 < w \le 3^{-3}$, то полином $k(s)$ имеет единственный действительный корень s_k и верны неравенства*

$$2u < s_k < 1 - 2w, \tag{18.7.103}$$

а полином $f(s)$ имеет три действительных корня s_1, s_2, s_3 и справедливы неравенства

$$0 < s_1 < s_2 < s_k < s_3 < 1. \tag{18.7.104}$$

Доказательство. Согласно утверждению 18.7.6 для корня s_k в условиях утверждения 18.7.6 верны неравенства

$$2^{\frac{2}{3}}u^{\frac{2}{3}}(1+w)^{-\frac{1}{3}} - 4u^{\frac{4}{3}}(1+w)^{-\frac{2}{3}} \le s_k < 2^{\frac{2}{3}}u^{\frac{2}{3}}(1+w)^{-\frac{1}{3}}. \tag{18.7.105}$$

Отсюда получаем неравенство

$$s_k < 2^{\frac{2}{3}}3^{-2} < \frac{2}{9} < 1 - 2 \cdot 3^{-3} \le 1 - 2w. \tag{18.7.106}$$

С другой стороны

$$2^{\frac{2}{3}}u^{\frac{2}{3}}(1+w)^{-\frac{1}{3}} - 4u^{\frac{4}{3}}(1+w)^{-\frac{2}{3}} \ge 2u\left(u^{-\frac{1}{3}}(2(1+w))^{-\frac{1}{3}} - 2u^{\frac{1}{3}}\right). \tag{18.7.107}$$

И в наших условиях

$$u^{-\frac{1}{3}}(2(1+w))^{-\frac{1}{3}} - 2u^{\frac{1}{3}} \ge \frac{3}{(2(1+3^{-3}))^{\frac{1}{3}}} - \frac{2}{3} > 1. \tag{18.7.108}$$

Неравенства (18.7.105-18.7.108) доказывают неравенство (18.7.103). Неравенство (18.7.104) следует из утверждения 18.7.5 и неравенства (18.7.103). ♢

Рассмотрим случай, когда полиномы $f(s)$ и $k(s)$ имеют общий корень.

Утверждение 18.7.8 *Пусть $w > 0$, $u \in \mathbf{R}$ и полиномы $f(s)$ и $k(s)$ имеют общий действительный корень x, тогда:*

или 1. $u \in]-1,0[, x = -u, w = -\frac{4(1+u)}{u}$;

или 2. $u = 0, x = 0$ и число x есть корень кратности 3 полинома $k(s)$ и корень кратности 2 полинома $f(s)$;

или 3. $u \in]0,1[, x = \frac{3u}{2u+1}, w = \frac{4(1-u)^3}{27u}$,

причём x — корень кратности 2 полинома $f(s)$ и кратности 1 полинома $k(s)$.

Доказательство. При $w > 0$ полином $f(s)$ имеет действительные корни лишь из $[0,1[$ согласно утверждению 18.7.1, поэтому $x \in [0,1[$.

Если $f(x) = 0$ и $k(x) = 0$, то и $f(x) + k(x) = 0$, т.е. согласно (18.7.57) и (18.7.93) верно равенство

$$-(2u+1)x^2 + u(2+u)x - u^2 + u^2(4-3x) = 0. \tag{18.7.109}$$

Разрешая квадратное уравнение (18.7.109), мы получаем, что либо

$$x = -u, \tag{18.7.110}$$

либо

$$x = \frac{3u}{2u+1}. \tag{18.7.111}$$

Функция $q(x) \equiv -u$ принимает значения из $[0,1[$ иф $u \in]-1,0]$, а функция $p(u) \equiv \frac{3u}{2u+1}$ принимает значения из $[0,1[$ иф $u \in [0,1[$. Итак, в условиях утверждения 18.7.8 верно $u \in]-1,1[$.

Если $u \in]-1,0[$, то согласно предыдущему число $x = -u$ есть корень уравнения $f(x)+k(x) = 0$. Оно будет корнем полиномов $f(s)$ и $k(s)$ иф выполнено также условие $k(x) = 0$, т.е.

$$(1+w)u^3 + u^2(4+3u) = 0$$

или

$$w = \frac{-4(1+u)}{u}.$$

Если $u = 0$, то $f(s) = s^2((1+w)s - 1)$ и $k(s) = -(1+w)s^3$.

Если $u \in]0,1[$, то согласно предыдущему число $x = \frac{3u}{2u+1} > u$ есть общий корень полиномов $f(s)$ и $k(s)$ иф $f(\frac{3u}{2u+1}) = 0$, что даёт соотношение $w = \frac{4(1-u)^3}{27u}$. Из утверждения 18.7.2 следует, что тогда число $x = \frac{3u}{2u+1}$ корень кратности 2 полинома $f(s)$. $\diamondsuit$

Теперь мы можем описать взаимное расположение корней полиномов $f(s)$ и $k(s)$.

Утверждение 18.7.9 *При $w > 0$ положение действительных корней полиномов $f(s)$ и $k(s)$ описывается таблицей 18.7.1.*

Доказательство. Так как $s_k(b)$ монотонная функция параметра $b \in [0,\infty[$ и $s_k(1) = 1$, то случаи 1,2,11,12 непосредственно следуют из утверждения 18.7.2.

Случаи 4,6,8 следуют из утверждения 18.7.8.

Функция $g(u) \equiv \frac{4(1-u)^3}{27u}$ при $u \in]0,1[$ положительна и монотонно убывает, ибо производная $g'(u) = \frac{4}{27}\frac{-3(1-u)^2u-(1-u)^3}{u^2} < 0$. Поэтому, когда величина u пробегает значения от 0 до 1 величина $g(u)$ пробегает значения от $+\infty$ до 0. Уравнение $w = g(u)$ при любом $w > 0$ имеет поэтому единственное решение из $]0,1[$.

Таблица 18.7.1: *Положение действительных корней полиномов $f(s)$ и $k(s)$.*

№	Множество значений параметра u	Кратность действительных корней полинома $f(s)$			Расположение действительных корней полиномов $f(s)$ и $k(s)$
		s_1	s_2	s_3	
1.	$]-\infty, -\sqrt{1+w}[$	1	0	0	$0 < s_1 < 1 < s_k$
2.	$\{-\sqrt{1+w}\}$	1	0	0	$0 < s_1 < 1 = s_k$
3.	$]-\sqrt{1+w}, -\frac{4}{4+w}[$	1	0	0	$0 < s_1 < s_k < 1$
4.	$\{-\frac{4}{4+w}\}$	1	0	0	$0 < s_1 = s_k = -u < 1$
5.	$]-\frac{4}{4+w}, 0[$	1	0	0	$0 < s_k < s_1 < 1$
6.	$\{0\}$	2	1	0	$0 = s_1 = s_k < s_2 = \frac{1}{1+w} < 1$
7.	$\{u \in]0,1] \mid w < \frac{4(1-u)^3}{27u}\}$	1	1	1	$0 < s_1 < u < s_2 < s_k < s_3 < 1$
8.	$\{u \in]0,1] \mid w = \frac{4(1-u)^3}{27u}\}$	1	2	0	$0 < s_1 < u < s_2 = s_k = \frac{3u}{2u+1} < 1$
9.	$\{u \in]0,1] \mid w > \frac{4(1-u)^3}{27u}\}$	1	0	0	$0 < s_1 < s_k < 1$
10.	$[1, \sqrt{1+w}[$	1	0	0	$0 < s_1 < s_k < 1$
11.	$\{\sqrt{1+w}\}$	1	0	0	$0 < s_1 < s_k = 1$
12.	$]\sqrt{1+w}, \infty[$	1	0	0	$0 < s_1 < 1 < s_k$

В случае $0 < u \le 3^{-3}$ и $0 < w \le 3^{-3}$ согласно утверждению 18.7.7 полином $f(s)$ имеет три различных действительных корня и справедливы неравенства

$$0 < s_1 < s_2 < s_k < s_3 < 1. \tag{18.7.112}$$

Пусть теперь точка (u, w) из случая 7, т.е. $u \in]0,1]$ и $w < \frac{4(1-u)^3}{27u}$. Будем следить за корнями s_1, s_2, s_3 и s_k как непрерывными функциями параметров (u, w). Перейдем сначала от точки (u, w) к точке $\left(\frac{u}{27}, w\right)$ по прямой $w = Const$. При этом мы не пересечем кривую $w = g(u)$ в силу монотонного убывания функции $g(u)$. Далее перейдем от точки $(\frac{u}{27}, w)$ к точке $\left(\frac{u}{27}, \min\left\{w, \frac{1}{27}\right\}\right)$ по прямой $u = Const$. Мы снова не пересечем линию $w = g(u)$, ибо было $w < g(\frac{u}{27})$. Мы соединили точку (u, w) с точкой $\left(\frac{u}{27}, \min\left\{w, \frac{1}{27}\right\}\right)$ на плоскости $\mathbf{R}^2$ непрерывной кривой, лежащей в области $w < g(u)$. Тогда в точке (u, w) должно иметь место то же взаимное расположение корней, что и в точке $\left(\frac{u}{27}, \min\left\{w, \frac{1}{27}\right\}\right)$, в которых верно (18.7.112). В противном случае в некоторой точке (u_0, w_0) построенной кривой корень s_k полинома $k(s)$ совпадал бы с одним из корней s_i полинома $f(s)$. Но это согласно утверждению 18.7.8 возможно лишь в случае $w_0 = g(u_0)$, что противоречит построению. Случай 7 доказан.

Пусть теперь (u, w) точка из случая 9. Тогда точка $(u, g(u))$ принадлежит случаю 8 и полином $f(s)$ имеет действительный корень s_1 кратности 1 действительный корень s_2 кратности 2 в этой точке, причём $0 < s_1 < s_2 = s_k < 1$. Непрерывно переходя от точки $(u, g(u))$ к точке (u, w) по прямой $u = Const$, мы получим, что действительный корень s_2 полинома $f(s)$ исчезает при $w > g(u)$ и остаются неравенства

$$0 < s_1 < s_k < 1.$$

На построенном отрезке неравенство $s_1 < s_k$ не может нарушаться, ибо согласно утверждению 18.7.8 равенство $s_1 = s_k$ невозможно при $w > g(u)$. Случай 9 доказан.

Доказанный случай 9 включает и случай $u = 1, w > 0$. Если теперь (u, w) — точка из случая 10, то перейдем от точки $(1, w)$ к точке (u, w) по прямой $w = Const$ и заметим, что по утверждению 18.7.8 на этом отрезке взаимное расположение корней s_1 и s_k не может измениться. Неравенство же $s_k < 1$ следует из вывода 18.7.8. Случай 10 доказан.

При $u = 0$, $w > 0$ полином $f(s)$ имеет действительный корень $s_1 = 0$ кратности 2 и действительный корень $s_2(0, w) = \frac{1}{1+w}$ кратности 1, а полином $k(s)$ имеет действительный корень $s_k = 0$ кратности 3. При фиксированном $w > 0$ при переходе к отрицательным значениям u действительный корень s_1 исчезает, а действительный корень $s_2(u, w)$ — непрерывная функция параметров (u, w) становится единственным действительным корнем полинома $f(s)$. Корень $s_k(u, w)$ полинома $k(s)$ при этом становится положительным. Поэтому при достаточно малых отрицательных u верны неравенства

$$0 < s_k < s_1 < 1.$$

Но пробегая при фиксированном w значения u из интервала $]-\frac{4}{4+w}, 0[$, мы не можем получить изменения расположения корней s_k и s_1, ибо равенство $s_1 = s_k$ при $u \in]-\frac{4}{4+w}, 0[$ невозможно в силу утверждения 18.7.8. Случай 5 доказан.

Точка (u, w) из случая 3 получается из точки $(-\sqrt{1+w}, w)$ переходом по прямой $w = Const$, причём на соединяющем отрезке равенство $s_1 = s_k$ невозможно, ибо влечет в силу утверждения 18.7.8 равенство $u = -\frac{4}{4+w}$. Итак, $s_1 < s_k$ в случае 3. $\diamondsuit$

18.7.10 Классификация решений.

Проведем классификацию экстремалей для функции Лагранжа nom вида (18.7.13) при $w \geq 0$, $u \in \mathbf{R}$. Построение экстремали, т.е. функций $r(\tau), \varphi(\tau)$ мы свели к решению одномерного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (18.7.94) для функции $s(\tau)$ на отрезке $s \in [0, 1]$. По известной функции $s(\tau)$ величины $r, \dot{r}, \dot{\varphi}$ как функции τ определяются формулами (18.7.59-18.7.61) Поведение решений уравнения (18.7.94) определяется расположением нулей полиномов $f(s)$ и $k(s)$. Поэтому мы классифицируем экстремали по расположению действительных корней полиномов $f(s)$ и $k(s)$ на основе таблицы 18.7.1.

Мы будем изображать на [0,1] действительные корни полинома $f(s)$ символом "$\circ$", а действительный корень полинома $k(s)$ — символом "$\times$". Интервалы, где $f(s) > 0$ будем изображать жирной линией. Значения $s \in [0, 1]$, где $f(s) \geq 0$ мы называем *физическими значениями* параметра s.

Полином $k(s)$ при $w \geq 0, u \in \mathbf{R}$ имеет единственный действительный корень s_k и $s_k \in [0, \frac{4}{3}[$. При $s < s_k$ верно $k(s) > 0$, при $s > s_k$ верно $k(s) < 0$. Знак полинома $k(s)$ равен знаку производной $\frac{dr(s)}{ds}$. Если $s_k \in [0, 1]$, то функция $r(s)$ достигает на $[0, 1]$ максимума в точке $s = s_k$, а если $s_k > 1$, то функция $r(s)$ достигает максимума в точке $s = 1$. При $k(s) > 0$ величины $\dot{r}$ и $\dot{s}$ имеют одинаковый знак, при $k(s) < 0$ — противоположный знак.

Перейдем к классификации решений, обозначая первой цифрой индекса число действительных корней полинома $f(s)$ на $[0, 1[$.

Случай 3. Случай трех действительных корней полинома $f(s)$ на $[0,1[$.

Согласно утверждению 18.7.2 этот случай имеет место при следующих значениях параметров: $u \in]0,1[, 0 < w < \frac{4(1-u)^3}{27u}$. Согласно таблице 18.7.1 корни полиномов $f(s)$ и $k(s)$ расположены следующим образом

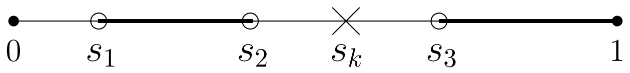

Рис. 18.7.1: Расположение корней при $u \in]0,1[, 0 < w < \frac{4(1-u)^3}{27u}$.

Мы имеем два типа решений: решения типа А, когда точка $s \in [s_1, s_2]$ и типа В, когда точка $s \in [s_2, 1]$. Мы называем их решения классов 3.А и 3.В.

Решениями типа А мы называем в этом параграфе решениями, при которых величины $r, \dot{r}, \dot{\varphi}$ являются периодическими функциями времени и $r \neq Const$, а решениями типа В — решения для которых из любого начального состояния частица за конечное время достигает скорости света.

Случай 2. Случай двух действительных корней полинома $f(s)$ на $[0,1[$.

Данный случай разбивается на два подслучая.

Подслучай 2.1. $u = 0, w > 0$. Согласно строке 6 таблицы 18.7.1 тогда $s_1 = s_k = 0$. Полином $f(s)$ имеет два действительных корня: $s_1 = 0$ и $s_2 = \frac{1}{1+w}$. Корень s_1 имеет кратность 2, корень s_2 — кратность 1. Полином $k(s)$ имеет корень $s_k = 0$ кратности 3. Данному подслучаю соответствует диаграмма

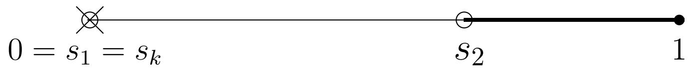

Рис. 18.7.2: Расположение корней при $u = 0,\ 0 < w$.

Решение, соответствующее $s = s_1 = 0$ есть состояние покоя частицы — $r = Const$, $\varphi = Const$.

Решение с $s \in [s_1, 1]$ — решение типа 2.1.В.

Подслучай 2.2. $u \in]0,1[, w = \frac{4(1-u)^3}{27u}$.

Согласно строке 8 таблицы 18.7.1 верна диаграмма

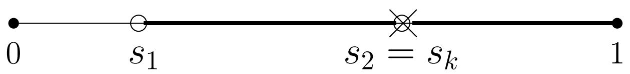

Рис. 18.7.3: Расположение корней при $u \in]0,1[,\ w = \frac{4(1-u)^3}{27u}$.

Здесь s_1 — действительный корень кратности 1 полинома $f(s)$, s_2 — действительный корень кратности 2 полинома $f(s)$.

Случай 1. Случай одного действительного корня $f(s)$ на $[0,1[$ разбивается на 7 подслучаев.

Подслучай 1.1. $u = 0$, $w = 0$.

Полином $f(s)$ имеет два действительных корня: корень s_1 кратности 2 и корень $s_2 = 1$ кратности 1. Полином $k(s)$ имеет один действительный корень $s_k = 0$ кратности 3. Диаграмма для этого случая имеет вид

Решение есть покоящаяся частица с $s = 0, r = Const, \varphi = Const$.

Подслучай 1.2. $u \in]0,1[, w = 0$.

Рис. 18.7.4: Расположение корней при $u = 0,\ w = 0$.

Рис. 18.7.5: Расположение корней при $u = 0,\ w = 0$.

Этот подслучай соответствует вращательному решению пункта 3 с $r = Const$, $\dot{\varphi} = \omega$. Диаграмма данного случая имеет вид

Подслучай 1.3. $w > 0, u \in]-\frac{4}{4+w}, 0[$.

Согласно строке 5 таблицы 18.7.1 верна диаграмма

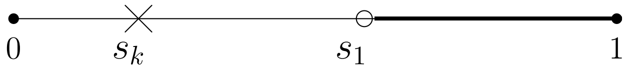

Рис. 18.7.6: Расположение корней при $w > 0,\ u \in]-\frac{4}{4+w}, 0[$.

Решения существуют при $s \in [s_1, 1]$. Это решения типа B.

Подслучай 1.4. $w > 0, u = -\frac{4}{4+w}$.

Согласно строке 4 таблицы 18.7.1 верна диаграмма

Рис. 18.7.7: Расположение корней при $w > 0,\ u = -\frac{4}{4+w}$.

Подслучай 1.5. $w > 0,\ u \in]-\sqrt{1+w}, -\frac{4}{4+w}[\bigcup]u_0(w), \sqrt{1+w}[$, где $u_0(w) \in]0,1[$ есть корень уравнения $w = \frac{4(1-u)^3}{27u}$.

Данный подслучай соответствует строкам 3,9,10 таблицы 18.7.1 и описывается диаграммой

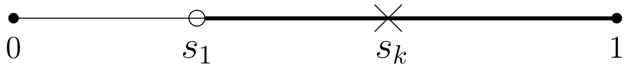

Рис. 18.7.8: Расположение корней при $w > 0, u \in \{]-\sqrt{1+w}, -\frac{4}{4+w}[\bigcup]u_0(w), \sqrt{1+w}[\}$.

Подслучай 1.6. $w > 0, u = \pm\sqrt{1+w}$.

Данный подслучай соответствует строкам 2,11 таблицы 18.7.1 и описывается диаграммой

Рис. 18.7.9: Расположение корней при $w > 0,\ u = \pm\sqrt{1+w}$.

Имеют место решения типа В при $s \in [s_1, 1]$.

Подслучай 1.7. $w > 0, u^2 > 1 + w$.

Данный подслучай соответствует строкам 1,12 таблицы 18.7.1 и описывается диаграммой

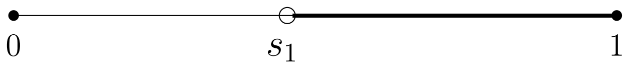

Рис. 18.7.10: Расположение корней при $w > 0,\ u^2 > 1 + w$.

Имеют место решения типа В при $s \in [s_1, 1]$.

Закончив изложение классификации решений, заметим, что правая часть обыкновенного дифференциального уравнения (18.7.94) — аналитическая функция s, всюду кроме нулей полиномов $f(s)$ и $k(s)$, поэтому решение $s(\tau)$ — аналитическая функция времени всюду, кроме нулей полиномов $f(s)$ и $k(s)$, а следовательно, согласно формулам (18.7.59-18.7.61) и экстремаль $(r(\tau), \varphi(\tau))$ аналитическая функция времени. При прохождении решения $s(\tau)$ с отражением через корень s_i полинома $f(s)$ в момент $\tau = \tau_0$, если $s_i \neq s_k$ и $\Delta(s_i) > 0$, то соответствующая точка $(x_0, r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) \in \mathbf{R}^5$ не является вырожденной точкой экстремали согласно выводу 18.7.7, поэтому согласно формулам (18.7.60,18.7.61) функции $\dot{r}(\tau)$ и $\dot{\varphi}(\tau)$ будут непрерывны. Следовательно, в некоторой окрестности точки τ_0 экстремаль $(r(\tau), \varphi(\tau))$ будет класса $C^{(1)}$ и по теореме 18.6.2 она будет и класса $C^{(\omega)}$ в этой окрестности. Итак, неаналитическая зависимость функций $(r(\tau), \varphi(\tau))$ на экстремали от аргумента τ может иметь место лишь в моменты времени τ_0, такие что $s(\tau) = s_k$ или $s(\tau_0) = s_1$ и $\Delta(s_1) = 0$.

Вывод 18.7.9 *Если* $s(\tau_0) \neq 1$ *и* $\Delta(s(\tau_0)) \neq 0$ *и* $k(s(\tau_0)) \neq 0$, *то экстремаль* $(r(\tau), \varphi(\tau))$ *класса* $C^{(\omega)}$ *в некоторой окрестности точки* $\tau_0 \in \mathbf{R}$.

18.7.11 Описание траектории в случае трех действительных корней полинома $f(s)$ на $[0, 1[$.

Рассмотрим решения для случая 3 типа 3.А. В этом случае на сегменте $[s_1, s_2]$ полином $k(s) > 0$ и знаки производных $\dot{s}$ и $\dot{r}$ на этом сегменте совпадают.

Согласно дифференциальному уравнению (18.7.94) величина $s(\tau)$ совершает периодическое движение по сегменту $[s_1, s_2]$. Выходит из точки s_1, доходит до точки s_2, отражается и снова приходит в точку s_1. Отражениям в точках s_1 и s_2 соответствует изменение знака σ в уравнении (18.7.94). Период движения

$$T = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{k(s)}{s^2(2-s)\sqrt{f(s)}}\, ds. \tag{18.7.113}$$

Так как $s(\tau + T) = s(\tau)$ при любом τ, то согласно формулам (18.7.59-18.7.61) и функциями $r(\tau), \dot{r}(\tau), \dot{\varphi}(\tau)$ периодические с тем же периодом T. Однако, величина угла $\varphi(\tau)$ через время T принимает значение

$$\varphi(\tau + T) = \varphi(\tau) + \Phi, \tag{18.7.114}$$

где

$$\Phi \equiv \theta \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{((1+u)s - u)k(s)}{s(2-s)\Delta(s)\sqrt{f(s)}}\, ds \tag{18.7.115}$$

и

$$\theta \equiv \frac{\omega}{|\omega|} = \operatorname{sign}(\omega). \tag{18.7.116}$$

Траектория будет приходить в ту же точку пространства через время T иф

$$\Phi = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \tag{18.7.117}$$

Интеграл (18.7.115) для величины Φ требует особого рассмотрения в случае, когда $\Delta(s_1) = 0$, ибо тогда знаменатель подинтегрального выражения в (18.7.115) имеет в точке $s = s_1$ нуль порядка $\frac{3}{2}$. Но если $\Delta(s_1) = 0$, то согласно выводу 18.7.6 верно $M = 0, u = w$ и $s_1 = \frac{u}{1+u}$. Тогда для полинома $\Delta(s)$ согласно формулам (18.7.55) имеем

$$\Delta(s) = (1+u)s^2 - (1-s)u^2 = (1+u)(s-s_1)(s+u). \tag{18.7.118}$$

При подстановке (18.7.118) в (18.7.115) получаем следующий вид величины

$$\Phi = \theta \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{k(s)}{s(2-s)(s+u)\sqrt{f(s)}}\, ds, \tag{18.7.119}$$

где интеграл в правой части сходится.

Однако, в случае $\Delta(s_1) = 0$ радиус r принимает значение 0, когда величина s принимает значение s_1, т.е. траектория проходит через начало координат. При прохождении начала координат величина угла φ скачком изменяется на $\pm\pi$. Итак, в случае $\Delta s_1 = 0$ или эквивалентно $M = 0$ величина $\varphi(\tau)$ терпит разрыв в момент τ_0, когда $s(\tau_0) = s_1$), и не является в окрестности точки $\tau = \tau_0$ непрерывной функцией.

Мы описали траектории типа 3.A.

Перейдем к описанию траекторий типа 3.B. На сегменте $[s_1, 1]$ полином $k(s) < 0$, поэтому величины $\dot{r}$ и $\dot{s}$ имеют противоположный знак при $s \in [s_3, 1]$. Если в момент $\tau = \tau_0$ величина $s(\tau_0) = s_0 \in [s_3, 1]$ и $\dot{r}(\tau_0) \le 0$, то в момент времени τ_c вида

$$\tau_c = \tau_0 + \frac{1}{2|\omega|} \int\limits_{s_0}^{1} \frac{(-k(s))}{s^2(2-s)\sqrt{f(s)}}\, ds \tag{18.7.120}$$

величина $s(\tau_c) = 1$, т.е. частица достигает скорости света. Если же было $\dot{r}(\tau_0) > 0$, то точка $s(\tau)$ движется сначала к точке s_3, затем отражается и движется к точке $s = 1$. Из точки s_3 величина $s(\tau)$ приходит в точку $s = 1$ за время

$$T_c \equiv \frac{1}{2|\omega|} \int\limits_{s_3}^{1} \frac{(-k(s))}{s^2(2-s)\sqrt{f(s)}}\, ds. \tag{18.7.121}$$

Вывод 18.7.10 *Из любого состояния с $s \in [s_3, 1]$ частица достигает скорости света за время не более $2T_c$.*

При движении от точки с $s = s_3$ к точке с $s = 1$ величина радиуса r убывает и достигает наименьшего значения при $s = 1$. Согласно формуле (18.7.59) это наименьшее значение радиуса равно $r = \frac{\sqrt{C}}{|\omega|}$. Введём предельный радиус

$$R \equiv \frac{1}{|\omega|}, \tag{18.7.122}$$

соответствующий движению по окружности вокруг центра соленоида со скоростью света. Назовем область с $r < R$ *допредельной*, а область с $r > R$ — *запредельной*. Тогда движение типа 3.B осуществляется в запредельной области и скорость света достигается при значении радиуса

$$r_c \equiv \sqrt{C}R. \tag{18.7.123}$$

18.7.12 Описание траектории в случае двух действительных корней полинома $f(s)$ на $[0,1[$.

В **подслучае 2.1** есть два типа решений: решения с $s \equiv 0$ и решения с $s \in [s_2, 1]$. Решение с $s = s_1 = 0$ соответствует неподвижной частице. Решение с $s \in [s_2, 1]$ полностью аналогично решению типа 3.B. Из любого положения с $s \in [s_2, 1[$ частица достигает скорости света за время не более $2T_c$, где

$$T_c = \frac{1}{2|\omega|} \int\limits_{s_2}^{1} \frac{(-k(s))}{s^2(2-s)\sqrt{f(s)}}\, ds. \tag{18.7.124}$$

Подслучай 2.2. В этом подслучае полиномы $f(s)$ и $k(s)$ имеют общий действительный корень $s_2 = s_k = \frac{3u}{2u+1}$, причём это корень кратности 2 полинома $f(s)$ и корень кратности 1 полинома $k(s)$. Зная действительный корень кратности 2 полинома $f(s)$ и вид (18.7.57) полинома $f(s)$, находим корень

$$s_1 = \frac{u^2}{Cs_2^2} = \frac{1}{C}\Big(\frac{2u+1}{3}\Big)^2. \tag{18.7.125}$$

Получаем для полинома $f(s)$ представление

$$f(s) = C(s - s_1)(s - s_2)^2. \tag{18.7.126}$$

Зная один действительный корень кратности 1, находим для полинома $k(s)$ представление

$$k(s) = -k_1(s)(s - s_2), \tag{18.7.127}$$

где

$$k_1(s) \equiv Cs^2 + Cs_2 s + \frac{4u^2}{s_2}. \tag{18.7.128}$$

Отметим, что квадратный полином $k_1(s) > 0$ на [0,1].

Так как s_2 — корень кратности 2 полинома $f(s)$, то величина

$$\sigma\sqrt{f(s)} = \sqrt{C}\sigma_1\sqrt{s - s_1}\sigma_2(s - s_2), \tag{18.7.129}$$

где величины $\sigma_1 = \pm 1$ и $\sigma_2 = \pm 1$ могут изменять знак при достижении значений $s = s_1$ и $s = s_2$ соответственно. Обыкновенное дифференциальное уравнение (18.7.94) для функции $s(\tau)$ принимает в данном случае вид

$$\dot{s} = -2|\omega|\sqrt{C}\frac{s^2(2-s)\sigma_1\sqrt{s - s_1}\,\sigma_2}{k_1(s)}. \tag{18.7.130}$$

При прохождении решения $s(\tau)$ дифференциального уравнения (18.7.130) через точку s_2 возможны следующие три случая: 1) прохождение, 2) отражение, 3) остановка. Покажем, что *остановка* не даёт экстремали. В самом деле, если $s(\tau) = Const = s_2$, то согласно (18.7.60) будет $\dot{r}(s_2) = 0$ и решение есть вращательное движение с центром в нуле. Но согласно п. 18.7.3 это возможно лишь при $w = 0$. Итак, функция $s(\tau) = Const = s_2$ не даёт экстремали исходного лагранжиана.

Решение с прохождением точки s_2 соответствует случаю, когда функция $\sigma_2(s)$ постоянна на $[s_1, 1]$ и равна $+1$ или -1. Уравнение (18.7.130) в случае $\sigma_2(s) \equiv -1$ принимает вид

$$\dot{s} = 2\sqrt{C}|\omega|\frac{s^2(2-s)}{k_1(s)}\sigma\sqrt{s - s_1}, \tag{18.7.131}$$

где величина $\sigma_1 = \sigma_1(s)$ может менять знак при достижении значения $s = s_1$.

Пусть $s(\tau_0) = s_0$. Решения уравнения (18.7.131) аналогичны решениям типа 3.В. А именно, в случаях когда $s_0 < s_2$ и $\dot{r}(\tau) > 0$ или когда $s_0 > s_2$ и $\dot{r}(\tau_0) < 0$ решение $s = s(\tau)$ находится из уравнения

$$\tau - \tau_0 = \frac{1}{2\sqrt{C}|\omega|} \int\limits_{s_0}^{s} \frac{k_1(s)}{s^2(2-s)\sqrt{s-s_1}}\, ds \tag{18.7.132}$$

и в момент времени τ_c вида

$$\tau_c = \tau_0 + \frac{1}{2\sqrt{C}|\omega|} \int\limits_{s_0}^{1} \frac{k_1(s)}{s^2(2-s)\sqrt{s-s_1}}\, ds \tag{18.7.133}$$

частица достигает скорости света. Величина радиуса r_c в момент достижения скорости света τ_c даётся формулой 18.7.123. В случаях, когда $s_0 < s_2$ и $\dot{r}(\tau_0) < 0$ или когда $s_0 > s_2$ и $\dot{r}(\tau_0) > 0$, решение $s(\tau)$ определяется из уравнения

$$\tau - \tau_0 = \frac{-1}{2\sqrt{C}|\omega|} \int\limits_{s_0}^{s} \frac{k_1(s)}{s^2(2-s)\sqrt{s-s_1}}\, ds \tag{18.7.134}$$

пока $s \in [s_1, s_0]$. В момент τ_1, равный

$$\tau_1 = \tau_0 - \frac{-1}{2\sqrt{C}|\omega|} \int\limits_{s_0}^{s_1} \frac{k_1(s)}{s^2(2-s)\sqrt{s-s_1}}\, ds \tag{18.7.135}$$

мы приходим в состояние с $s = s_1$ и далее за время

$$T_c = \frac{-1}{2\sqrt{C}|\omega|} \int\limits_{s_1}^{1} \frac{k_1(s)}{s^2(2-s)\sqrt{s-s_1}}\, ds \tag{18.7.136}$$

частица разгоняется до скорости света.

Осталось рассмотреть случай, когда $s_0 = s_2$. Тогда

$$s_0 = \frac{3u}{2u+1}. \tag{18.7.137}$$

Выразим при $s = s_2$ все основные величины на траектории через параметр u, используя выражение (18.7.137) и формулы (18.7.59-18.7.61). Предварительно заметим, что из равенства $f(s_2) = 0$ следует соотношение

$$\Delta(s_2) = \frac{1}{s_2}\left((1+u)s_2 - u\right)^2 \tag{18.7.138}$$

или, подставляя (18.7.137)

$$\Delta(s_2) = \frac{u(u+2)^2}{3(2u+1)}, \tag{18.7.139}$$

а из соотношения $k(s_2) = 0$ следует соотношение

$$Cs_2^3 = u^2(4 - 3s_2). \tag{18.7.140}$$

С учётом (18.7.139,18.7.140) получаем для значения величин $r, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{s}$ при $s = s_2$, отмечая их нижним индексом 2:

$$r_2 = Ru^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{u+2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{18.7.141}$$

$$\dot{r}_2 = 0, \tag{18.7.142}$$

$$\dot{\varphi}_2 = \omega\frac{9u}{(u+2)(2u+1)}, \tag{18.7.143}$$

$$\dot{s_2} = \sigma_1|\omega|3^{\frac{3}{2}}u(1-u)^{\frac{1}{2}}(2u+1)^{-\frac{5}{2}}. \tag{18.7.144}$$

Так как $k(s_2) = 0$, то согласно выводу 7 точка $(\tau_0, r_2, \varphi_2, \dot{r}_2, \dot{\varphi}_2) \in \mathbf{R}^5$ является вырожденной точкой экстремали, в которой не обязаны выполняться утверждения теоремы 18.6.2 о гладкости, существовании и единственности экстремали. Однако, из уравнения (18.7.131) с аналитической на $]s_1, 1[$ правой частью следует, что функция $s(\tau)$, а поэтому и функции $r(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ согласно формулам (18.7.59,18.7.61) являются аналитическими функциями времени при прохождении точки τ_0, в которой $s(\tau_0) = s_2$. Итак, существует экстремаль класса $C^{(\omega)}$, проходящая через точку $(\tau_0, r_2, \varphi_2, \dot{r}_2, \dot{\varphi}_2) \in \mathbf{R}^5$. Однако, существует две экстремали класса $C^{(\omega)}$, проходящие через данную точку с

$$\dot{s}_2 = +|\omega|3^{\frac{3}{2}}u(1-u)^{\frac{1}{2}}(2u+1)^{-\frac{5}{2}} \tag{18.7.145}$$

и

$$\dot{s}_2 = -|\omega|3^{\frac{3}{2}}u(1-u)^{\frac{1}{2}}(2u+1)^{-\frac{5}{2}}, \tag{18.7.146}$$

ибо $\dot{r}_2 = 0, \frac{dr}{ds}(s_2) = 0$ и величина производной $\dot{s}$ в этой точке не определяется однозначно значениями величины $r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}$ при $\tau = \tau_0$.

Вывод 18.7.11 *В подслучае 2.2 с прохождением точки s_2 частица из любого состояния разгоняется до скорости света за время не более $2T_c$, где T_c даётся формулой (18.7.136).*

В данном случае верно равенство $w = \frac{4(1-u)^3}{27u}$, поэтому, если дополнительно наложить требование $w = u$, то получим, что $u = w = \frac{1}{4}$. Поэтому из вывода 18.7.9 и проведенного изучения траектории в точке с $s = s_2$ следует, что если $u \neq \frac{1}{4}$, то экстремаль $(r(\tau), \varphi(\tau))$ класса $C^{(\omega)}$ всюду кроме, быть может, момента достижения скорости света, т.е. $s = 1$. Случай $w = u = \frac{1}{4}$ соответствует прохождение через начало координат при $s = s_1$, когда угол $\varphi(\tau)$ меняется скачком на $\pm\pi$. Более подробно этот случай мы рассмотрим в п. 18.7.14.

Случай отражения. В случае, если в точке $s = s_2$ происходит отражение, уравнение (18.7.130) описывает периодическое движение точки s на $[s_1, s_2]$ и движение на $[s_2, 1]$, аналогичные соответственно движениям типа A и типа B предыдущего пункта.

Полагая аналогично п. 18.7.11, что при $s = s_1$ время $\tau = 0$, получим, что при $s \in [s_1, s_2]$ решение $s(\tau)$ дифференциального уравнения (18.7.130) находится из уравнения

$$\tau = \frac{1}{2\sqrt{C}|\omega|}\int\limits_{s_1}^{s}\frac{k_1(s)}{s^2(2-s)\sqrt{s-s_1}}\,ds. \tag{18.7.147}$$

В точке $s = s_2$ в момент времени $\tau = \frac{1}{2}T$, где

$$T = \frac{1}{\sqrt{C}|\omega|} \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{k_1(s)}{s^2(2-s)\sqrt{s-s_1}}\, ds, \tag{18.7.148}$$

происходит отражение и при $\tau \in [\frac{T}{2}, T]$ функция $s(\tau)$ определяется как решение уравнения

$$\tau - T = \frac{1}{2\sqrt{C}|\omega|} \int\limits_{s}^{s_2} \frac{k_1(s)}{s^2(2-s)\sqrt{s-s_1}}\, ds \tag{18.7.149}$$

Итак, функция $s(\tau)$ периодична с периодом T, т.е. верно

$$s(\tau + T) = s(\tau) \tag{18.7.150}$$

при любом $\tau \in \mathbf{R}$. Поэтому величины $\tau, \dot{\tau}, \dot{\varphi}$ изменяются как функции времени периодически с периодом T, а величина $\varphi(\tau)$ удовлетворяет при $\tau \in \mathbf{R}$ условию

$$\varphi(\tau + T) = \varphi(\tau) + \Phi, \tag{18.7.151}$$

где

$$\Phi = \frac{\theta}{\sqrt{C}} \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{((1+u)s - u)k_1(s)}{s(2-s)\Delta(s)\sqrt{s-s_1}}\, ds. \tag{18.7.152}$$

При отражении в точке s_2 производная $\frac{d}{d\tau}s(\tau) \equiv \dot{s}(\tau)$ меняет знак со значения (18.7.145) на значение (18.7.146) и следовательно разрывна. Поэтому экстремаль с отражением в точке s_2 при прохождении значения параметра $s = s_2$ будет класса $Cb^{(2)}$ но не класса $C^{(2)}$, ибо имеет разрыв второй производной, т.е. скачок ускорения. Итак, при движении с отражением в точке s_2 мы получаем движение типа А в области значений параметра $s \in [s_1, s_2]$, но экстремаль уже не будет аналитической функцией времени, а при прохождении значения параметра $s = s_2$ испытывает разрыв второй производной.

При движении с отражением в области значений параметра $s \in [s_2, 1]$ мы получаем движения типа В, когда частица из любого начального состояния за конечное время разгоняется до скорости света. Соответствующая экстремаль — аналитическая функция времени во всех точках, кроме соответствующих значению $s = s_2$, где имеет разрыв второй производной. Экстремаль определена лишь до момента достижения частицей скорости света, т.е. до значения $s = 1$.

Пусть при $\tau = \tau_0$ верно $s(\tau_0) = s_0 \in [s_2, 1[$. Тогда при $\dot{r}(\tau_0) < 0$ функция $s(\tau)$ определяется как решение уравнения

$$\tau - \tau_0 = \frac{1}{2\sqrt{C}|\omega|} \int\limits_{s_0}^{s} \frac{k_1(s)}{s^2(2-s)\sqrt{s-s_1}}\, ds \tag{18.7.153}$$

при $s \in [s_0, 1]$. Введём величину

$$T_c \equiv \frac{1}{2\sqrt{C}|\omega|} \int\limits_{s_2}^{1} \frac{k_1(s)}{s^2(2-s)\sqrt{s-s_1}}\, ds. \tag{18.7.154}$$

Из состояния с $s(\tau) = s_2$ частица достигает скорости света, т.е. состояния с $s = 1$ за время T_c. Для случая, когда $s_0 \in]s_2, 1[$ и $\dot{r}(\tau_0) > 0$ решение $s(\tau)$ при $s \in [s_2, s_0]$ задаётся как решение уравнения

$$\tau - \tau_0 = \frac{-1}{2\sqrt{C}|\omega|} \int\limits_{s_0}^{s} \frac{k_1(s)}{s^2(2-s)\sqrt{s-s_1}}\, ds. \qquad (18.7.155)$$

Итак, из любого начального состояния частица достигает скорости света за время не более чем $2T_c$. Движение типа B в данном случае, так же как и в случае 3.B происходит в области с $r \geq \sqrt{C}R$.

18.7.13 Описание траектории в случае одного действительного корня полинома $f(s)$ на $[0, 1[$.

Случай одного действительного корня разбивается на 7 подслучаев 1.1-1.7.

В подслучае 1.1 есть лишь покоящееся решение.

В подслучае 1.2 решение — вращательное движение, описанное в п. 18.7.3.

Подслучай 1.3 полностью аналогичен подслучаю 3.В. Частица из любого состояния за время не более чем $2T_c$, где

$$T_c = \frac{1}{2|\omega|} \int\limits_{s_1}^{1} \frac{-k(s)}{s^2(2-s)\sqrt{f(s)}}\, ds, \qquad (18.7.156)$$

достигает скорости света. При прохождении величины s через значение $s = s_1$ траектория остается аналитической функцией времени в силу вывода 18.7.9, ибо $s_1 \neq s_k$ и $\Delta(s_1) \neq 0$. Движение происходит в области значений радиуса $r \geq \sqrt{C}R$. Радиус принимает наименьшее значение $r = \sqrt{C}R$ при $s = 1$.

Подслучай 1.4 аналогичен подслучаю 1.3 с тем исключением, что при прохождении значения величины $s = s_1$ траектория класса $C^{(1)}$ но не класса $C^{(2)}$.

В подслучаях 1.6 и 1.7 частица из состояния с $s = s_1$ достигает скорости света за время

$$T_c = \frac{1}{2|\omega|} \int\limits_{s_1}^{1} \frac{k(s)}{s^2(2-s)\sqrt{f(s)}}\, ds. \qquad (18.7.157)$$

И из любого начального состояния частица достигает скорости света за время не более $2T_c$.

В подслучае 1.6 при прохождении значения величины $s = s_1$ траектория остается аналитической функцией времени, кроме случая $u = w = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, когда траектория проходит через начало координат и угол φ испытывает скачок на $\pm\pi$.

В подслучае 1.7 при прохождении значения величины $s = s_1$ траектория остается аналитической функцией времени кроме случая $u = w > \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, когда траектория проходит через начало координат и угол φ испытывает скачок на $\pm\pi$.

В подслучаях 1.6 и 1.7 в отличии от подслучаев 1.3 и 1.4 движение происходит в области где радиус $r \leq \sqrt{C}R$ и скорость света достигается при *максимальном* значении радиуса на траектории равном $r = \sqrt{C}R$.

В подслучае 1.5, если точка $s_0 \in [s_1, s_k[$ в момент $\tau = \tau_0$, то при $\dot{r}(\tau_0) \geq 0$ точка $s(\tau)$ движется к точке s_k. При $\dot{r}(\tau_0) < 0$ точка $s(\tau)$ движется к точке s_1, отражается и идет к точке s_k. Из состояния с $s = s_1$ частица приходит в состояние с $s = s_k$ за время

$$T_k = \frac{1}{2|\omega|} \int\limits_{s_1}^{s_k} \frac{k(s)}{s^2(2-s)\sqrt{f(s)}}\, ds. \tag{18.7.158}$$

Из любого состояния с $s < s_k$ частица приходит в состояние с $s = s_k$ за время не более $2T_k$.

Мы *оставляем неисследованным* вопрос о поведении траектории после попадания её на вырожденное множество в момент $\tau = \tau_k$, когда $s(\tau_k) = s_k$.

При прохождении величины s через значение $s = s_1$ траектория остается класса $C^{(\omega)}$ кроме случая $u = w < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, когда траектория проходит через начало координат.

Если же $s_0 \in]s_k, 1[$, то при $\dot{r}(\tau_0) > 0$ она движется к точке s_k, а при $\dot{r}(\tau_0) < 0$ — к точке 1 и достигает их за конечное время.

18.7.14 Траектория с прохождением в случае $u = w = \frac{1}{4}$.

По классификации п. 18.7.10 мы в данном пункте рассматриваем частный случай из подслучая 2.2, рассмотренного в п. 18.7.12 с диаграммой 18.7.3. Согласно п. 18.7.12 в этом частном случае

$$s_2 = s_k = \frac{3u}{2u+1} = \frac{1}{2}, \tag{18.7.159}$$

$$s_1 = \frac{1}{C}\left(\frac{2u+1}{3}\right)^2 = \frac{1}{5}. \tag{18.7.160}$$

Полиномы $f(s), k(s), k_1(s), \Delta(s)$ в данном случае равны:

$$f(s) = \frac{5}{4}\left(s - \frac{1}{5}\right)\left(s - \frac{1}{2}\right)^2, \tag{18.7.161}$$

$$k(s) = -\left(s - \frac{1}{2}\right) k_1(s), \tag{18.7.162}$$

$$k_1(s) = \frac{5}{4}s^2 + \frac{5}{8}s + \frac{1}{2}, \tag{18.7.163}$$

$$\Delta(s) = \frac{5}{4}\left(s - \frac{1}{5}\right)\left(s + \frac{1}{4}\right). \tag{18.7.164}$$

Мы рассмотрим здесь участок траектории с прохождением от значения параметра $s = s_1$ до $s = 1$. Мы полагаем, что при $\tau = 0$ верно $s = s_1, \varphi = 0$, тогда и величина радиуса $r = 0$ в этот момент. При $0 \le \tau \le T_c$ для движения с прохождением согласно п. 18.7.12 выполняется уравнение (18.7.131), т.е. в данном случае

$$\dot{s} = \sqrt{5}|\omega| \frac{s^2(2-s)}{k_1(s)} \sqrt{s - s_1}. \tag{18.7.165}$$

Отсюда при $\tau \in [0, T_c]$ верно $s \in [s_1, 1]$ и функция $s(\tau)$ есть решение уравнения

$$\tau = \frac{1}{|\omega|} J_1(s), \tag{18.7.166}$$

где

$$J_1(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{5}} \int\limits_{s_1}^{s} \frac{k_1(s)(s)}{s^2(2-s)\sqrt{s - \frac{1}{5}}}\, ds. \tag{18.7.167}$$

Для производной $\frac{d\varphi(s)}{ds} = \frac{\dot\varphi}{\dot s}$ согласно (18.7.61) при $s \in [s_1, 1]$ с учётом (18.7.165) получаем

$$\frac{d\varphi}{ds} = \theta\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{k_1(s)(s)}{s(2-s)(s+\frac{1}{4})\sqrt{s-\frac{1}{5}}}.$$

Откуда

$$\varphi(s) = \theta J_2(s), \tag{18.7.168}$$

где $\theta \equiv \frac{\omega}{|\omega|}$ и

$$J_2(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{5}}\int\limits_{s_1}^{s}\frac{k_1(s)}{s(2-s)(s+\frac{1}{4})\sqrt{s-\frac{1}{5}}}\,ds. \tag{18.7.169}$$

Вычисление интегралов (18.7.167) и (18.7.169) даёт, соответственно, выражения

$$J_1(s) = \frac{1}{4}\frac{\xi}{s} + \frac{17}{8}\operatorname{arctg}(\xi) + \frac{9}{16}\ln\left(\frac{1+\frac{\xi}{3}}{1-\frac{\xi}{3}}\right), \tag{18.7.170}$$

$$J_2(s) = 2\operatorname{arctg}(\xi) - \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\xi\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{\xi}{3}}{1-\frac{\xi}{3}}\right), \tag{18.7.171}$$

где введено обозначение

$$\xi \equiv \sqrt{5s-1}. \tag{18.7.172}$$

Введём масштаб времени

$$T_a \equiv \frac{2\pi}{|\omega|}. \tag{18.7.173}$$

Выпишем теперь величины τ, r, φ в трех точках траектории. При $s = \frac{1}{5}$ имеем $\xi = 0$ и

$$\tau = 0, r = 0, \varphi = 0. \tag{18.7.174}$$

При $s = \frac{1}{2}$ имеем $\xi = \sqrt{\frac{3}{2}}$ и

$$\tau = \frac{J_1(\frac{1}{2})}{2\pi}T_a,\ r = R2\sqrt{\frac{3}{2}\frac{5}{4}\left(\frac{3}{10}\right)\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}\sqrt{3}R,\ \varphi = \theta J_2\left(\frac{1}{2}\right), \tag{18.7.175}$$

или, пользуясь калькулятором, получаем приближенно

$$\tau \simeq 0{,}474476T_a,\ r \simeq 1{,}2990R,\ \varphi \simeq \theta 1{,}520942. \tag{18.7.176}$$

В градусах величина угла $\varphi = \theta 87{,}14357^\circ$ При $s = 1$ имеем $\xi = 2$ и

$$\tau = \frac{J_1(1)}{2\pi}T_a,\ r = \frac{\sqrt{5}}{2}R,\ \varphi = \theta J_2(1) \tag{18.7.177}$$

или, пользуясь калькулятором, получаем приближенно

$$\tau \simeq 0{,}58810T_a,\ r \simeq 1{,}1180R,\ \varphi \simeq \theta 12{,}091725. \tag{18.7.178}$$

В градусах величина угла $\varphi \simeq \theta 119{,}847^\circ$

Величина T_c в данном случае равна

$$T_c = \frac{J_1(1)}{2\pi}T_a \simeq 0{,}58810T_a. \tag{18.7.179}$$

Вычислим также величины $\tau, r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}$ в точке траектории с $s = \frac{1}{4}$. Согласно формулам (18.7.59-18.7.61), тогда

$$r = R4\sqrt{\left(2-\frac{1}{4}\right)\frac{5}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)} = \sqrt{\frac{7}{8}}R, \qquad (18.7.180)$$

$$\dot{r} = \sqrt{\left(2-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2 2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{8}}, \qquad (18.7.181)$$

$$\dot{\varphi} = \omega\frac{1}{4}\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\omega. \qquad (18.7.182)$$

Отметим, что в данном случае радиальная и азимутальная составляющие скорости равны по модулю

$$|\dot{r}| = |r\dot{\varphi}| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{8}}. \qquad (18.7.183)$$

Величина ξ в данном случае равна $\xi = \sqrt{5\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{2}$. Поэтому для времени и угла получаем

$$\tau = T_a\frac{1}{2\pi}J_1\left(\frac{1}{4}\right), \qquad (18.7.184)$$

$$\varphi = \theta J_2\left(\frac{1}{4}\right), \qquad (18.7.185)$$

где согласно (18.7.170,18.7.171) имеем

$$J_1\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{17}{8}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{9}{16}\ln\left(\frac{7}{5}\right), \qquad (18.7.186)$$

$$J_2\left(\frac{1}{4}\right) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{5}\right). \qquad (18.7.187)$$

Используя калькулятор, приближенно получаем из (18.7.184,18.7.185)

$$\tau \simeq 0{,}26651T_a, \qquad (18.7.188)$$

$$\varphi \simeq \theta 0{,}77378. \qquad (18.7.189)$$

Для величины угла φ в градусах соответственно получаем

$$\varphi \simeq \theta 44{,}3334^\circ. \qquad (18.7.190)$$

В случае плоского движения собственная кинетическая энергия частицы равна $(\frac{1}{q}-1) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 = (\frac{1}{1-s}-1)$ в нормированной системе, или в системе СИ

$$E = \left(\frac{1}{1-s}-1\right)m_f c_f^2. \qquad (18.7.191)$$

Если заряженная частица — электрон, то

$$\frac{m_f c_f^2}{|e_f|} \simeq 511003 \text{ В} \qquad (18.7.192)$$

и получаем, что значению параметра s соответствует следующая ускоряющая разность потенциалов U в вольтах

$$U = \left(\frac{1}{1-s} - 1\right) 511003 \text{ В}. \tag{18.7.193}$$

Согласно этой формуле значению $s = \frac{1}{5}$ соответствует разность потенциалов $U = \frac{1}{4} \cdot 511003 \text{ В} \simeq 127751$ В, а значению $s = \frac{1}{4}$ — разность потенциалов $U = \frac{1}{3} \cdot 511003 \text{ В} \simeq 170334$ В.

В случае плоского движения величина

$$\omega = \omega_0 = \frac{eH}{m}. \tag{18.7.194}$$

Величины e, H, m выражаем в системе СИ согласно § 18.3, а именно, согласно формулам (18.3.24),(18.3.53),(18.3.54),(18.3.23) имеем

$$e = -e_f \sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon_0}}, \tag{18.7.195}$$

$$H = \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu}} I_f, \tag{18.7.196}$$

$$m = m_f \frac{c_f^2}{\mu}. \tag{18.7.197}$$

Откуда

$$\omega = -\mu_0 \frac{e_f I_f}{m_f c_f}. \tag{18.7.198}$$

Так как для электрона константы μ_0, m_f, c_f положительны, а $e_f < 0$, то в случае электрона

$$\theta = \operatorname{sign}(\omega) = \operatorname{sign}(I_f), \tag{18.7.199}$$

т.е. в данном примере электрон вращается в ту же сторону, куда течет ток по поверхности соленоида.

Величина предельного радиуса $R = \frac{1}{|\omega|}$ для электрона согласно (18.7.198) равна

$$R = \frac{m_f c_f}{\mu_0 |e_f|} \frac{1}{|I_f|} \simeq \frac{1356{,}6417 \text{ А}}{|I_f|}, \tag{18.7.200}$$

где плотность поверхностного тока I_j выражена в амперах на метр. Таким образом для того, чтобы вся траектория электрона с $u = w = \frac{1}{4}$ лежала внутри соленоида, достаточно иметь соленоид с поверхностной плотностью тока $I_f = 2 \cdot 1356{,}417$ А/м. Тогда предельный радиус $R = 0{,}5$ м. Максимальное значение радиуса r_m на траектории достигается при $s = \frac{1}{2}$ и равно

$$r_m = R\ 2\sqrt{\frac{3}{2}\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}\sqrt{3}R \simeq 1{,}299038R \simeq 0{,}649519\text{м}. \tag{18.7.201}$$

Скорость света достигается при значении радиуса

$$r_c = \sqrt{\frac{5}{4}}R \simeq 1{,}118034R \simeq 0{,}559017\text{м}. \tag{18.7.202}$$

18.7.15 Неплоское движение в случае $u = w = \frac{1}{4}$.

В случае неплоского движения с параметрами $u = w = \frac{1}{4}$ дополнительно к предыдущему пункту для описания траектории требуется задать координату x_3 как функцию времени $x_0 \equiv \tau$ или введенного на траектории параметра s. В начальный момент $\tau = 0$ имеем $s = s_1 = \frac{1}{5}$. Обозначаем: величину скорости в момент $\tau = 0$ — через $\eta \equiv \beta(0)$, проекцию скорости на ось x_3 — через $\eta_\| \equiv \beta_3(0)$ и проекцию скорости на плоскость, перпендикулярную оси соленоида, $\eta_\perp \equiv \beta_\perp(0)$. Тогда в данном случае $\eta_\perp = \frac{3}{5}$ и $|\eta_\|| \le \frac{4}{5}$.

Согласно формуле (18.7.8) для скорости β_3 имеем

$$\beta_3 = \frac{dx_3}{d\tau} = \frac{\frac{\alpha}{m}}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}}(1-s). \tag{18.7.203}$$

Поэтому, используя формулу (18.7.165) для $\dot{s}$, получаем

$$\frac{dx_3}{ds} = \frac{\frac{\alpha}{m}}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}} R \frac{(1-s)k_1(s)}{\sqrt{5}s^2(2-s)\sqrt{s-s_1}}. \tag{18.7.204}$$

Откуда, полагая при $\tau = 0$ координату $x_3 = 0$, получаем

$$x_3(s) = gRJ_3(s), \tag{18.7.205}$$

где

$$g \equiv \frac{\frac{\alpha}{m}}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}} = \frac{\eta_\|}{\sqrt{1-\eta_\perp^2}}, \tag{18.7.206}$$

$$J_3(s) = \frac{1}{\sqrt{5}} \int\limits_{s_1}^{s} \frac{(1-s)k_1(s)}{s^2(2-s)\sqrt{s-s_1}}\, ds = \frac{\xi^2}{4\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\frac{\xi}{s} + \frac{13}{8}\operatorname{arctg}(\xi) - \frac{9}{16}\ln\left(\frac{3+\xi}{3-\xi}\right), \tag{18.7.207}$$

и $\xi \equiv \sqrt{5s-1}$. Если мы обозначим

$$R_0 \equiv \frac{1}{|\omega_0|} = \left|\frac{m}{eH}\right|, \tag{18.7.208}$$

то

$$R = \sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2} R_0 = \frac{\sqrt{1-\eta_\perp^2}}{\sqrt{1-\eta^2}} R_0. \tag{18.7.209}$$

По построению $R \ge R_0$ и $R = R_0$ лишь при $\eta_\| = 0$.

Приведем также следующую таблицу приближенных значений функции $J_3(s)$.

Таблица 18.7.2: Значения функции $J_3(s)$

s	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,75	1
$J_3(s)$	0	1,0921	1,623	1,7089	1,7322	1,8308	1,841

18.7.16 Характеристики траектории в точке с $s = 1$.

При $s = 1$ в общем случае согласно формулам (18.7.55,18.7.58) верно

$$\Delta = 1 + w, \;\; f = w. \tag{18.7.210}$$

Тогда

$$\dot{x}_3 = 0, \tag{18.7.211}$$

а по формулам (18.7.59-18.7.61) имеем

$$r = \sqrt{1+w}R, \;\; \dot{r} = \sigma\sqrt{\frac{w}{1+w}}, \;\; \dot{\varphi} = \frac{\omega}{1+w}. \tag{18.7.212}$$

Тангенс угла δ между вектором скорости $\vec{\beta}$ и вектором $\vec{e}_\varphi$ — локальным единичным вектором, соответствующим параметру φ цилиндрической системы координат (r, φ, x_3) в данной точке, равен

$$\mathrm{tg}(\delta) = \frac{\dot{r}}{r\dot{\varphi}} = \sigma\theta\sqrt{w}. \tag{18.7.213}$$

Если $\theta = 1$, то угол δ равен

$$\delta = \sigma \mathrm{arctg}(\sqrt{w}). \tag{18.7.214}$$

18.7.17 Движения с нулевым моментом.

Условие обращения в нуль момента M может быть сформулировано в следующих эквивалентных формах.

Лемма 18.7.1 *При $w > 0$ следующие утверждения эквивалентны:*

I. $M = 0$.

II. $u = w$.

III. Существует траектория, не являющаяся точкой неподвижности, проходящая через начало координат.

IV. Полиномы $\Delta(s)$ и $f(s)$ имеют общий корень из $]0,1[$.

V. $u > 0$ и величина $s_1 = \frac{u}{1+u}$ — корень полинома Δs.

VI. $u > 0$ и величина $s_1 = \frac{u}{1+u}$ — корень полинома $f(s)$.

Доказательство. $I \Leftrightarrow II$. По определению величин u и w — формулы (18.7.53, 18.7.54).

$V \Leftrightarrow VI$. Вытекает из следующей, эквивалентной (18.7.56) записи полинома $f(s)$:

$$f(s) = s\Delta(s) - (1+u)^2\left(s - \frac{u}{1+u}\right)^2. \tag{18.7.215}$$

$(V \bigwedge VI) \Rightarrow IV$. Очевидное следование.

$IV \Rightarrow (V \bigwedge VI)$. Следует из представления (18.7.215).

$III \Leftrightarrow IV$. Следует из п. 18.7.6, так как в физической области $\Delta(s) = 0$ влечет $f(s) = 0$.

$III \Rightarrow I$. Следует из формулы (18.7.15) для момента $M = p_\varphi$.

$II \Rightarrow V$. Проверяется подстановкой. $\diamondsuit$

Далее в этом пункте предполагаем $M = 0$ и $w > 0$. Тогда существует общий корень

$$s_1 = \frac{u}{1+u} \tag{18.7.216}$$

полиномов $\Delta(s)$ и $f(s)$ и для полиномов справедливы представления

$$\Delta(s) = (1+u)(s-s_1)(s+u), \tag{18.7.217}$$

$$f(s) = (1+u)(s-s_1)(s^2-s+u), \tag{18.7.218}$$

или

$$f(s) = (1+u)(s-s_1)f_1(s), \tag{18.7.219}$$

где квадратный полином

$$f_1(s) \equiv s^2-s+u. \tag{18.7.220}$$

Полином $f_1(s)$ имеет при $u \in]0, \frac{1}{4}[$ два действительных корня

$$s_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}-u},\ s_3 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}-u}, \tag{18.7.221}$$

при $u = \frac{1}{4}$ — один действительный корень $s_2 = \frac{1}{2}$ кратности 2, а при $u > \frac{1}{4}$ — не имеет действительных корней.

Полином

$$k_s = -(1+u)s^3 + u^2(4-3s) \tag{18.7.222}$$

имеет при $u > 0$ один действительный корень s_k кратности 1, лежащий на $]0, \frac{4}{3}[$. При $u \in]0, u_b[$, где

$$u_b \equiv \frac{\sqrt{5}+1}{2} \simeq 1{,}618034, \tag{18.7.223}$$

верно $s_k \in]0, 1[$, при $u = u_b$ верно $s_k = 1$, при $u > u_b$ верно $s_k \in]1, \frac{4}{3}[$.

Рассмотрим теперь траекторию с $u > u_b$. Она относится к подслучаю 1.7 согласно классификации п. 18.7.10. Выбираем начальную точку на траектории так, чтобы при $\tau = 0$ было: $s = s_1,\ x_3 = 0\ \varphi = 0$. Тогда время прихода из точки с $s = s_1$ в точку с $s = 1$ по формуле (18.7.157) равно

$$T_c = \frac{1}{2|\omega|}\frac{1}{\sqrt{1+u}}\int\limits_{s_1}^{1} \frac{k(s)}{s^2(2-s)\sqrt{s-s_1}\sqrt{s^2-s+u}}\,ds. \tag{18.7.224}$$

Пусть $\theta = 1$, тогда величина угла φ при $s = 1$ равна согласно формуле (18.7.98)

$$\varphi_c = \frac{1}{2\sqrt{1+u}}\int\limits_{s_1}^{1} \frac{k(s)}{s(2-s)(s+u)\sqrt{s-s_1}\sqrt{s^2-s+u}}\,ds. \tag{18.7.225}$$

А величина координаты $z \equiv x_3$ при $s = 1$ есть

$$z_c = gR\frac{1}{2\sqrt{1+u}}\int\limits_{s_1}^{1} \frac{(1-s)k(s)}{s^2(2-s)\sqrt{s-s_1}\sqrt{s^2-s+u}}\,ds, \tag{18.7.226}$$

где величина g зависит от начальной скорости $\vec{\eta}$ в точке с $s = s_1$ и выражается формулой (18.7.206).

Введём три функции величины u

$$Jc_1(u) \equiv \frac{1}{4\pi\sqrt{1+u}}\int\limits_{s_1}^{1} \frac{u^2(4-3s)-(1+u)s^3}{s^2(2-s)\sqrt{s-s_1}\sqrt{s^2-s+u}}\,ds, \tag{18.7.227}$$

$$Jc_2(u) \equiv \frac{1}{2\sqrt{1+u}} \int\limits_{s_1}^{1} \frac{u^2(4-3s)-(1+u)s^3}{s(2-s)(s+u)\sqrt{s-s_1}\sqrt{s^2-s+u}}\,ds, \tag{18.7.228}$$

$$Jc_3(u) \equiv \frac{1}{2\sqrt{1+u}} \int\limits_{s_1}^{1} \frac{(1-s)\left(u^2(4-3s)-(1+u)s^3\right)}{s^2(2-s)\sqrt{s-s_1}\sqrt{s^2-s+u}}\,ds. \tag{18.7.229}$$

В этих обозначениях

$$T_c = T_a Jc_1(u), \tag{18.7.230}$$

$$\varphi_c = Jc_2(u), \tag{18.7.231}$$

$$z_c = gRJc_3(u). \tag{18.7.232}$$

Проведем в интегралах (18.7.227-18.7.229) замену переменной

$$s = s(t) = \frac{u+t^2}{u+1},\ \ t \in [0,1], \tag{18.7.233}$$

и приведем их к виду

$$Jc_1(u) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+u} \int\limits_{0}^{1} \frac{k(s(t))}{s^2(t)(2-s(t))\sqrt{s^2(t)-s(t)+u}}\,dt, \tag{18.7.234}$$

$$Jc_2(u) = \frac{1}{1+u} \int\limits_{0}^{1} \frac{k(s(t))}{s(t)(2-s(t))(s(t)+u)\sqrt{s^2(t)-s(t)+u}}\,dt, \tag{18.7.235}$$

$$Jc_3(u) = \frac{1}{1+u} \int\limits_{0}^{1} \frac{(1-s(t))k(s(t))}{s^2(t)(2-s(t))\sqrt{s^2(t)-s(t)+u}}\,dt, \tag{18.7.236}$$

обладающему тем преимуществом, что подинтегральные функции — аналитические функции аргумента t в окрестности сегмента $[0,1]$.

Используя представления (18.7.234-18.7.236), выпишем асимптотику функций $Jc_1(u)$, $Jc_2(u)$, $Jc_3(u)$ при $u \to \infty$:

$$Jc_1(u) \sim \frac{\sqrt{u}}{2\pi}, \tag{18.7.237}$$

$$Jc_2(u) \sim \frac{1}{\sqrt{u}}, \tag{18.7.238}$$

$$Jc_3(u) \sim \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{u}}. \tag{18.7.239}$$

§18.8 Движение скайла внутри соленоида при малых скоростях

Сохраняя обозначения и предположения предыдущего параграфа, рассмотрим движение скайла внутри соленоида при положительных значениях параметров u, w много меньших 1 и покажем, что движение частицы в проекции на плоскость, перпендикулярную вектору напряженности магнитного поля $\vec{H}$, в этом случае близко к движению по окружности с постоянным по модулю вектором скорости. Мы также сравним наши результаты с классической моделью движения заряженной частицы в однородном магнитном поле и с релятивистской моделью движения заряженной частицы в одном магнитном поле.

В нашей модели согласно п. 18.7.3 при $w = 0$ существуют плоские вращательные движения заряженной частицы вокруг оси соленоида, имеющие угловую скорость $\omega = \omega_0 \equiv \frac{eH}{m}$. В классической модели существуют совпадающие решения. В релятивистской модели аналогичные вращательные движения вокруг оси соленоида также существуют, но имеют угловую скорость $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\vec{\beta}^2}$.

Мы проведём также сравнение величины периода T для модели типа $3.A$ с периодом вращения в классической модели и с периодом вращения в релятивистской модели.

18.8.1 Движение типа $3.A$ при малых положительных u, w.

Мы рассмотрим в этом пункте движения типа $3.A$ п. 18.7.11 при условии $u > 0, w > 0$ и $u + w \le 0{,}1$. В этом случае согласно утверждению 18.7.5 полином $f(s)$ имеет три действительных корня s_1, s_2, s_3, причём $0 < s_1 < u < s_2 < s_3 < 1$. На множестве $G \equiv \{(u,w) \in \mathbf{R}^2 \mid u > 0, w > 0, u+w \le 0{,}1\}$ эти три корня — аналитические функции параметров u, w, ибо на этом множестве дискриминант полинома $f(s)$ не имеет нулей и полином $f(s)$ не имеет кратных корней. На замыкании $\bar{G} \subset \mathbf{R}^2$ множества G в $\mathbf{R}^2$ корни $s_1(u,w), s_2(u,w), s_3(u,w)$ — непрерывные функции, причём $s_1(0,w) = s_2(0,w) = 0, s_3(0,w) = \frac{1}{1+w}$ и $s_1(u,0) = s_2(u,0) = u, s_3(u,0) = 1$.

При $(u,w) \in G$ мы имеем траекторию типа $3.A$, на которой величины $r(\tau)$, $\dot{r}(\tau)$, $\dot{\varphi}(\tau)$ изменяются периодически с периодом T, даваемым формулой (18.7.113). Величина s на траектории меняется в пределах $s_1(u,w) \le s \le s_2(u,w)$, где согласно утверждению 18.7.5

$$s_1 = u - \gamma u + \Delta_1, \tag{18.8.1}$$

$$s_2 = u + \gamma u + \Delta_2 \tag{18.8.2}$$

и

$$\gamma = \gamma(u,w) \equiv \left(\frac{uw}{1-u}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{18.8.3}$$

$$|\Delta_i| \le 5u^2 w (1-u)^{-\frac{1}{2}}, \qquad i \in \overline{1,2}. \tag{18.8.4}$$

Введём величину проекции скорости на плоскость, перпендикулярную оси соленоида $\eta \equiv \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}$. Тогда по определению величины s из предыдущего параграфа

$$\eta = \sqrt{s(2-s)}. \tag{18.8.5}$$

Так как на траектории величина s изменяется в пределах $[s_1, s_2]$, то величина η изменяется в соответствующих пределах $[\eta_1, \eta_2]$, где $\eta_i \equiv \sqrt{s_i(2-s_i)}, \qquad i \in \overline{1,2}$.

Обозначим

$$\eta_0 \equiv \sqrt{u(2-u)} \tag{18.8.6}$$

и оценим отличие величины η на траектории от постоянного значения η_0. А именно, при $(u,w) \to (0,0)$ верно

$$\frac{\eta_1(u,w)}{\eta_0(u)} - 1 = \sqrt{\frac{s_1(2-s_1)}{u(2-u)}} - 1 = \sqrt{\left(1-\gamma+\frac{\Delta_1}{u}\right)\left(1-\frac{-\gamma u+\Delta_1}{2-u}\right)} - 1 = \tag{18.8.7}$$

$$(1-\gamma+O(\gamma^2))^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{u(-\gamma+O(\gamma^2))}{2-u}\right)^{\frac{1}{2}}-1=-\frac{\gamma}{2}+o(\gamma)$$

и аналогично

$$\frac{\eta_2(u,w)}{\eta_0(u)}-1=\frac{\gamma}{2}+o(\gamma). \tag{18.8.8}$$

Из (18.8.3), (18.8.6-18.8.8) следует, что при $(u,w)\to(0,0)$ верно

$$\frac{\eta-\eta_0}{\eta_0}=o(\gamma_0) \tag{18.8.9}$$

или

$$\eta=\eta_0+o(\eta_0^2). \tag{18.8.10}$$

Итак, отличие величины скорости η от постоянного значения η_0 есть величина порядка $o(\eta_0^2)$ при $(u,w)\to(0,0)$.

Рассмотрим теперь зависимость периода T от параметров (u,w). Согласно формуле (18.7.113) запишем величину T в виде

$$T=T_a\,\mathrm{cud}\,(u,w), \tag{18.8.11}$$

где согласно формуле (18.7.11)

$$T_a\equiv\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}}{|\omega_0|}, \tag{18.8.12}$$

$$\omega_0\equiv\frac{eH}{m}, \tag{18.8.13}$$

$$\mathrm{cud}\,(u,w)\equiv\frac{1}{2\pi}\int\limits_{s_1}^{s_2}\frac{k(s)}{s^2(2-s)\sqrt{f(s)}}\,ds. \tag{18.8.14}$$

Для изучения поведения функции $\mathrm{cud}\,(u,w)$ вида (18.8.14) введём в интеграле (18.8.14) замену переменных

$$s=u+u\gamma h \qquad h\in[h_1,h_2], \tag{18.8.15}$$

где

$$h_i(u,w)\equiv\frac{s_i-u}{u\gamma}, \qquad i\in\overline{1,2}. \tag{18.8.16}$$

Из формул (18.8.1-18.8.4) следует, что

$$\lim_{(u,w)\to(0,0)}h_i(u,w)=(-1)^i \qquad i\in\overline{1,2}, \tag{18.8.17}$$

и верна оценка

$$\forall(u,w)\in G\ \forall i\in\overline{1,2}\ \Big|\ |h_i(u,w)|\le 1{,}5. \tag{18.8.18}$$

Полином $f(s)$ запишем в виде

$$f(s)=(1+w)(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)=(1+w)(u\gamma)^2(h-h_1)(h_2-h)(s_3-u(1+\gamma h)),$$

и получим для величины $\operatorname{cud}(u,w)$ выражение

$$\operatorname{cud}(u,w) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{h_1}^{h_2} \frac{(4-u(1+\gamma h)(3+(1+w)(1+\gamma h)^2))\,dh}{2(1+\gamma h)^2(2-u(1+\gamma h))\sqrt{(t-t_1)(t_2-t)}\sqrt{(1+w)(s_3-u(1+\gamma h))}}. \tag{18.8.19}$$

Введём функцию трёх действительных аргументов вида

$$g(u,w,x) \equiv \frac{4-u(1+x)(3+(1+w)(1+x)^2)}{2(1+x)^2(2-u(1+x))\sqrt{(1+w)(s_3(u,w)-u(1+x))}}, \tag{18.8.20}$$

определенную и аналитическую на множестве $Q \equiv \bar{G}\times[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$. Сделаем в интеграле (18.8.19) замену переменных

$$h = a + b\sin(\psi) \qquad \psi \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \tag{18.8.21}$$

где

$$a = a(u,w) \equiv \frac{h_1(u,w)+h_2(u,w)}{2}, \tag{18.8.22}$$

$$b = b(u,w) \equiv \frac{h_2(u,w)-h_1(u,w)}{2} \tag{18.8.23}$$

и получим для интеграла (18.8.19) представление

$$\operatorname{cud}(u,w) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(u,w,\gamma(a+b\sin(\psi)))\,d\psi. \tag{18.8.24}$$

Теперь мы в состоянии доказать следующую оценку.

Утверждение 18.8.1 *Справедливо утверждение*

$$\exists K \in \mathbf{R}_+\ \forall (u,w)\in G \;\Big|\; |\operatorname{cud}(u,w) - g(u,w,0)| \le Kuw. \tag{18.8.25}$$

Доказательство. Так как функция $g(u,w,x)$ аналитична в замкнутой области Q, то определены положительные константы

$$K_1 \equiv \sup_{(u,w,x)\in Q}\left|\frac{\partial g(u,w,x)}{\partial x}\right|,$$

$$K_2 \equiv \sup_{(u,w,x)\in Q}\left|\frac{\partial^2 g(u,w,x)}{\partial x^2}\right|.$$

Применим формулу Тейлора второго порядка с центром в точке $x=0$ по переменной x для функции $g(u,w,x)$, получим

$$g(u,w,x) = g(u,w,0) + g'(u,w,0)x + r(u,w,x), \tag{18.8.26}$$

где

$$|r(u,w,x)| \le \frac{1}{2}K_2x^2. \tag{18.8.27}$$

Подставим (18.8.26) в (18.8.24) и получим

$$\operatorname{cud}(u,w) = g(u,w,0) + g'(u,w,0)\gamma a + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r(u,w,\gamma(a+b\sin(\psi)))d\psi. \qquad (18.8.28)$$

В силу (18.8.27) справедлива оценка

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r(u,w,\gamma(a+b\sin(\psi)))d\psi\right| \le \frac{1}{2}K_2\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)\gamma^2 \le \frac{3}{4}(1{,}5)^2K_2\frac{uw}{1-u} \le 2K_2uw. \qquad (18.8.29)$$

Для величины a справедлива согласно (18.8.1-18.8.4, 18.8.16, 18.8.22) оценка

$$|a| \le \frac{|\Delta_1|+|\Delta_2|}{2u\gamma} \le 5\frac{uw}{\sqrt{1-u}\cdot\gamma},$$

поэтому

$$|g'(u,w,0)\gamma a| \le K_1 5\frac{uw}{\sqrt{1-u}} \le 6K_1uw. \qquad (18.8.30)$$

Из (18.8.28-18.8.30) получаем

$$|\operatorname{cud}(u,w) - g(u,w,0)| \le (6K_1+2K_2)uw,$$

что доказывает (18.8.25) с $K = 6K_1 + 2K_2$. $\Diamond$

Следствие 18.8.1 *Функция* $\operatorname{cud}(u,w)$ *продолжается по непрерывности со множества* G *на его замыкании* $\bar{G}$ *формулами* $\operatorname{cud}(0,w) \equiv g(0,w,0)$ *и* $\operatorname{cud}(u,0) \equiv g(u,0,0)$.

Рассмотрим теперь поведение функции

$$g(u,w,0) = \frac{4(1-u)-uw}{2(2-u)\sqrt{(1+w)(s_3(u,w)-u)}} \qquad (18.8.31)$$

на множестве $\bar{G}$. При $u=0$ получаем

$$g(0,w,0) = 1, \qquad (18.8.32)$$

а при $w=0$ получаем

$$g(u,0,0) = \frac{\sqrt{1-u}}{1-\frac{1}{2}u}. \qquad (18.8.33)$$

Из последней формулы следует, что при $w=0$, $\quad u \in]0,\frac{1}{10}]$ верно неравенство

$$\operatorname{cud}(u,0) < 1. \qquad (18.8.34)$$

Но согласно п. 18.7.3 случаю $w=0$, $\quad u \in]0,1[$ соответствует равномерное вращательное движение по окружности с периодом T_a. Но в данном случае получаем $T_a \ne T = T_a \operatorname{cud}(u,0)$. Дело в том, что величина T_a в данном случае есть время, за которое угол φ изменяется на $\pm 2\pi$, а величину $T = T_a\operatorname{cud}(u,0)$ мы получили в пределе при $w \to 0$ как время, за которое величина радиуса $r(\tau)$ совершает полное колебание. Таким образом, то что $T_a \ne T$ в данном случае доказывает, что при достаточно малом положительном w угол φ за время T не совершает полного оборота, т.е. величина Φ вида (18.7.115) не равна $\pm 2\pi$.

Из оценки корня $s_3(u,w)$ утверждения 18.7.5 вытекает следующая оценка функции $g(u,w,0)$.

Утверждение 18.8.2 *Справедливо утверждение*

$$\exists N \in \mathbf{R}_+ \quad \forall (u,w) \in \bar{G} \;\Big|\quad |g(u,w,0) - 1| \le N \cdot (u^2 + w^2). \tag{18.8.35}$$

Доказательство. Согласно утверждению 18.7.5

$$((1+w)(s_3(u,w) - u))^{-\frac{1}{2}} = (1-w^2+(1+w)\Delta_3-u-uw)^{-\frac{1}{2}} = \Big(1 - u + O_1(u^2+w^2)\Big)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$1 + \frac{1}{2}u + O_2(u^2+w^2).$$

Используя ряд Тейлора степенной функции, получаем

$$g(u,w,0) = \Big(1 - u + O_3(u^2+w^2)\Big)\Big(1 + \frac{u}{2} + O_4(u^2)\Big)\Big(1 + \frac{1}{2}u + O_2(u^2+w^2\Big) =$$

$$1 + O(u^2+w^2). \quad \diamondsuit$$

Из утверждений 18.8.1 и 18.8.2 получаем следующую оценку функции $\operatorname{cud}(u,w)$.

Лемма 18.8.1 *Справедливо утверждение*

$$\exists M \in \mathbf{R}_+ \quad \forall (u,w) \in \bar{G} \;\Big|\quad |\operatorname{cud}(u,w) - 1| \le M \cdot (u^2 + w^2). \tag{18.8.36}$$

Итак, отличие коэффициента $\operatorname{cud}(u,w)$ от 1 есть в окрестности точки $(0,0)$ величина второго порядка малости по переменным u, w.

Согласно формулам (18.8.11-18.8.14) мы получили период T движения типа $3.A$ как функцию трёх параметров α, u, w, характеризующих три закона сохранения: проекции импульса на ось соленоида, энергии и проекции момента на ось соленоида в следующем виде

$$T = T_0\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}\,\operatorname{cud}(u,w), \tag{18.8.37}$$

где $T_0 \equiv \frac{2\pi}{|\omega_0|}$. Здесь величина $\alpha = p_3$ есть проекция импульса на ось соленоида для исходной функции Лагранжа (18.7.1). Выразим также параметры u и w через величины: третьей компоненты импульса $p_3 = \alpha$, третьей компоненты момента M и энергии $\mathcal{H}$ для исходной функции Лагранжа (18.7.1). (В этом параграфе энергию мы обозначаем калиграфической буквой $\mathcal{H}$ в отличие от величины напряженности магнитного поля H.)

Энергию и проекцию момента на ось соленоида обозначим соответственно: для функции Лагранжа n вида (18.7.1) — через $\mathcal{H}_n, M_n$; для функции Лагранжа no вида (18.7.10) — $\mathcal{H}_{no}, M_{no}$; для функции Лагранжа nom вида (18.7.12) — через $\mathcal{H}_{nom}, M_{nom}$. По построению

$$\begin{array}{rl} u = & \mathcal{H}_{nom} - 1, \\ w = & \mathcal{H}_{nom} - \omega M_{nom} - 1. \end{array} \tag{18.8.38}$$

Так как функция Лагранжа no получается из функции Лагранжа nom умножением на постоянный множитель $m\sqrt{1 + (\frac{\alpha}{m})^2}$, то

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}_{nom} & = & \frac{\mathcal{H}_{no}}{m\sqrt{1+(\frac{\alpha}{m})^2}}, \\ M_{nom} & = & \frac{M_{no}}{m\sqrt{1+(\frac{\alpha}{m})^2}}. \end{array} \tag{18.8.39}$$

Согласно п. 18.6.3 при рассмотрении задачи в цилиндрических координатах мы получаем

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}_n &=& \mathcal{H}_{no}, \\ M_n &=& M_{no}. \end{array} \quad (18.8.40)$$

Из (18.8.38-18.8.40) получаем формулы

$$u = \frac{\mathcal{H}}{m\sqrt{1+(\frac{\alpha}{m})^2}} - 1, \quad (18.8.41)$$

$$w = \frac{\mathcal{H} - \omega M}{m\sqrt{1+(\frac{\alpha}{m})^2}} - 1, \quad (18.8.42)$$

где $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_n, \quad M \equiv M_n$. Мы выразили константы α, u, w через сохраняющиеся величины $p_3, \mathcal{H}, M$ исходной функции Лагранжа (18.7.1).

При $(u, w) \to (0, 0)$ согласно п. 18.8.1 верно $\eta = \sqrt{2u} + o(\sqrt{u})$ и также $\eta \to 0$. В предположении, что $\omega r = O(\beta)$ возьмём в формулах (18.7.3-18.7.5) их приближение полиномами второго порядка по β включительно и согласно формулам (18.8.41,18.8.42) получим следующие приближения

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{p_3}{m} = \beta_3 + O(\beta^3), \quad (18.8.43)$$

$$u = \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2} + O(\beta^3), \quad (18.8.44)$$

$$w = \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2} - \omega_0[\vec{x}, \vec{\beta}]_3 + \frac{\omega_0^2}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + O(\beta^4). \quad (18.8.45)$$

18.8.2 Классическая модель движения заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле. Функция Лагранжа nc для классической модели движения заряженной частицы в однородном и постоянном магнитном поле получается при аппроксимации функции Лагранжа (18.7.1) для движения власкайла внутри соленоида полином Тейлора второго порядка по скорости $\vec{\beta}$ с центром в нуле и равна

$$\mathrm{nc} \equiv m - \frac{m\vec{\beta}^2}{2} + \frac{e}{2}\langle \vec{H}, [\vec{x}, \vec{\beta}]\rangle. \quad (18.8.46)$$

Для функции Лагранжа nc три закона сохранения: проекции импульса на правление вектора напряженности магнитного поля

$$p_3 = m\beta_3 = Const, \quad (18.8.47)$$

проекции момента на направление вектора напряженности магнитного поля

$$M = m[\vec{x}, \vec{\beta}]_3 - \frac{1}{2}eH \cdot (x_1^2 + x_2^2) = const \quad (18.8.48)$$

и энергии

$$\mathcal{H} = m + \frac{1}{2}m\vec{\beta}^2 = Const, \quad (18.8.49)$$

— являются аппроксимациями второго порядка по β соответствующих законов сохранения (18.7.3-18.7.5) для функции Лагранжа n вида (18.7.1) в предположении, что $\omega^2(x_1^2 + x_2^2) = O(\beta^2)$.

В отличие от точного случая § 18.7 в данном случае классическая энергия (18.8.49) не зависит от координат $\vec{x}$ и поэтому величина скорости $\beta \equiv |\vec{\beta}|$ постоянна на траектории. Закон сохранения третьей компоненты импульса (18.8.47) в данном случае сводится к постоянству третьей компоненты скорости β_3. Поэтому сохраняется и величина $\eta \equiv \sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}$ модуля проекции скорости на плоскость перпендикулярную вектору напряженности магнитного поля.

Уравнения Эйлера в данном случае имеют вид

$$\frac{d}{dx_0}(m\vec{\beta}) = +e[\vec{H},\vec{\beta}]. \tag{18.8.50}$$

Решения уравнения (18.8.50) есть движения точки, которые являются суперпозицией равномерного поступательного движения по оси x_3 со скоростью β_3 и равномерного вращательного движения по окружности в плоскости (x_1,x_2) с угловой скоростью

$$\omega_c = \omega_0 \tag{18.8.51}$$

и радиусом окружности

$$r_c = \frac{\eta}{|\omega_0|}. \tag{18.8.52}$$

Сравним теперь классический случай с результатами п. 18.8.1 и предыдущего параграфа. Для движения типа 3.A величины $r, \dot{r}, \dot{\varphi}$ являются периодическими функциями времени с периодом T. Так как движение, вообще говоря, не являются вращательным, то угловая скорость не является, вообще говоря, постоянной величиной на траектории. Поэтому для сравнения точного движения типа 3.A с движением в классической модели мы введём частоту $\nu \equiv \frac{d}{T}$, где d — единица времени в данной системе единиц. В случае $p_3 = 0$ мы имеем в точной модели плоское движение с периодом $T = T_0 \operatorname{cud}(u,w)$, а в классической модели — плоское движение с периодом T_0. Итак, для частот получаем

$$\frac{\nu_c-\nu}{\nu_0} = 1-\frac{T_0}{T} = 1-\operatorname{cud}^{-1}(u,w) = O(u^2+w^2) = O(\beta^4) \tag{18.8.53}$$

в предложении, что $\omega_0 r = O(\beta)$. В случае же $p_3 = \alpha \neq 0$ согласно формуле (18.8.37) получаем с учётом (18.8.43-18.8.45)

$$\frac{\nu_c-\nu}{\nu_0} = 1-\frac{T_0}{T} = 1-\left(1+\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{cud}^{-1}(u,w) = \frac{1}{2}\beta_3^2 + O(\beta^4) \tag{18.8.54}$$

в предположении, что $\omega_0 r = O(\beta)$.

18.8.3 Релятивистская модель движения заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле.

Релятивистской мы называем модель движения заряженной частицы в однородном постоянном поле магнитном поле, задаваемую с помощью функции Лагранжа

$$\mathrm{nr} \equiv m\sqrt{1-\vec{\beta}^2} + \frac{e}{2}\langle\vec{H},[\vec{x},\vec{\beta}]\rangle. \tag{18.8.55}$$

Данная функция Лагранжа с учётом нормировки и выбранной нами системы единиц с точностью до знака совпадает с функцией Лагранжа, описывающей движение заряда в одном постоянном магнитном поле в [41]. Функция Лагранжа (18.8.55) получается из точной функции Лагранжа (18.7.1) для движения скайла внутри соленоида, когда массовый член $m\sqrt{1-\vec{\beta}^2}$ берется точно, а член взаимодействия заменяется его полиномом Тейлора второго порядка по скорости $\vec{\beta}$ при фиксированных остальных параметрах.

Для функции Лагранжа (18.8.55) вектор импульса $\vec{p} = -\left(\frac{\partial\, \mathrm{nr}}{\partial \vec{\beta}}\right)^{\top}$ равен

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\beta}}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}} - \frac{e}{2}[\vec{H}, \vec{x}]. \tag{18.8.56}$$

Его третья компонента

$$p_3 = \frac{m\beta_3}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}}. \tag{18.8.57}$$

Третья компонента момента $M = [\vec{x}, \vec{p}]_3$ равна

$$M = \frac{m}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}}[\vec{x}, \vec{\beta}]_3 - \frac{eH}{2}(x_1^2 + x_2^2). \tag{18.8.58}$$

Энергия равна

$$\mathcal{H} = \frac{m}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}}. \tag{18.8.59}$$

Третья компонента импульса p_3, третья компонента момента M и энергия $\mathcal{H}$ являются сохраняющимися величинами для функции Лагранжа (18.8.55), так как эта функция Лагранжа не зависит от переменной x_3, инвариантна относительно вращений вокруг оси x_3 и не зависит от времени x_0.

Аналогично п. 18.7.2 так как энергия $\mathcal{H}$ не зависит от координат, то величина скорости $\beta = |\vec{\beta}|$ постоянна на траектории. Тогда из закона сохранения компоненты импульса p_3 следует, что третья компонента скорости β_3 постоянна на траектории. Следовательно, и величина $\eta \equiv \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}$ постоянна на траектории.

Уравнения Эйлера для функции Лагранжа (18.8.55) есть

$$\frac{d}{dx_0}\left(m\frac{\vec{\beta}}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}}\right) = e[\vec{H}, \vec{\beta}]. \tag{18.8.60}$$

Решения уравнения (18.8.60) есть движения точки, которые являются суперпозицией равномерного поступательного движения по оси x_3 со скоростью β_3 и равномерного вращательного движения по окружности в плоскости (x_1, x_2) с угловой скоростью

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\vec{\beta}^2} \tag{18.8.61}$$

и радиусом окружности

$$r_r = \frac{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}{|\omega_0|\sqrt{1-(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)}} = \frac{\eta}{|\omega_0|\sqrt{1-\vec{\beta}^2}}. \tag{18.8.62}$$

В данном случае нормированная ошибка в определении частоты ν по сравнению с точным решением равна согласно (18.8.61, 18.8.37, 18.8.43-18.8.45)

$$\frac{\nu_r - \nu}{\nu_0} = \sqrt{1-\vec{\beta}^2} - \left(1 + \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{cud}^{-1}(u,w) = -\frac{1}{2}\vec{\beta}^2 + \frac{1}{2}\beta_3^2 + O(\beta^4),$$

или

$$\frac{\nu_r - \nu}{\nu_0} = -\frac{1}{2}(\beta_1^2 + \beta_2^2) + O(\beta^4). \tag{18.8.63}$$

Сравнивая формулы (18.8.54) и (18.8.63), мы видим, что для определения частоты классическое приближение даёт более точную аппроксимацию, чем релятивистское приближение при $\beta_3^2 < \beta_1^2 + \beta_2^2$ и менее точную, если $\beta_3^2 > \beta_1^2 + \beta_2^2$. В частности, в случае $\beta_3 = 0$, т.е. в случае плоского движения, относительная ошибка в определении частоты для классической модели — $O(\beta^4)$, а для релятивистской модели — $\frac{\beta^2}{2} + O(\beta^4)$. Мы получаем, что плоское движение более точно описывается классической моделью, чем релятивистской.

Мы рассмотрим классическую и релятивистскую аппроксимации к движениям типа 3.A при малых скоростях $\beta \ll 1$. Заметим, что в случае $\beta_3 = 0, w = 0, \quad u \in]0,1[$ точные траектории являются равномерными вращательными движениями по окружности с центром на оси соленоида и совпадает с соответствующим классическими решениями во всем диапазоне скоростей $\beta \in]0,1[$. Угловая скорость на всех этих траекториях равна ω_0, радиус окружности $r = \frac{\beta}{\omega_0}$. При этом релятивистская модель также даёт вращательные решения вокруг оси соленоида, но при заданной величине скорости β угловая скорость уже будет равна $\omega_0\sqrt{1-\vec{\beta}^2}$ и радиус окружности $r_r = \frac{\beta}{\omega_0\sqrt{1-\vec{\beta}^2}}$. Итак, рассматривая вращательные плоские движения вокруг оси соленоида, мы в состоянии различать точную модель и релятивистскую, но не сможем отличить точную модель от классической. Рассмотрим теперь пример плоского движения при скоростях β, сравнимых с единицей, когда точная, классическая и релятивистская модель даёт существенно отличные друг от друга траектории.

18.8.4 Сравнение точной, классической и релятивистской моделей при скоростях движения, сравнимых со скоростью света.

Рассмотрим пример движения с $u = w = \frac{1}{4}$ из п. 18.7.14. Предполагаем, что рассматриваемая частица электрон и плотность тока $I_f > 0$, тогда $\omega = \frac{eH}{m} > 0$ и $\theta = \operatorname{sign}(\omega) = 1$. Мы рассматриваем кусок траектории, соответствующий изменению параметра s от значения $s = \frac{1}{4}$ до $s = \frac{1}{5}$ и снова до $s = \frac{1}{4}$. Рассматриваемый кусок траектории лежит согласно п. 18.7.14 в круге C_a радиуса

$$a = \sqrt{\frac{7}{8}}R, \tag{18.8.64}$$

где $R = \frac{1}{\omega}$ — предельный радиус. Поэтому далее считаем, что наш соленоид имеет радиус a.

Пусть электрон с $s = \frac{1}{4}$, т.е. со скоростью $\beta = \sqrt{\frac{1}{4}(2-\frac{1}{4})} = \frac{\sqrt{7}}{4}$, влетает в круг C_a под углом 45° к радиусу в точку входа и с положительной угловой скоростью. Согласно п. 18.7.14 тогда он при $s = \frac{1}{5}$ проходит через центр круга и далее при $s = \frac{1}{4}$ выходит из круга. Точка выхода согласно п. 18.7.14 лежит на окружности радиуса a на угловом расстоянии

$$\psi = 180^\circ - 2 \cdot 44{,}334^\circ = 91{,}332^\circ \tag{18.8.65}$$

в отрицательном направлении от точки входа. В точке выхода вектор скорости имеет ту же величину, что и в точке входа, направлен под углом 45° к радиусу в точку выхода и имеет положительную угловую скорость.

Согласно классической модели п. 18.7.2 после вхождения в круг C_a электрон двигается по окружности постоянного радиуса

$$r_c = \beta R = \frac{\sqrt{7}}{4} R = \frac{a}{\sqrt{2}}. \tag{18.8.66}$$

с постоянной скоростью β. Классическая траектория проходит через центр круга C_a и выходит на его границу в точке выхода, лежащей на угловом расстоянии

$$\psi_c = 90^\circ \tag{18.8.67}$$

в отрицательном направлении от точки входа. Вектор скорости в точке выхода равен по величине и противоположен по направлению вектору скорости в точке входа. Он также направлен под углом в 45° к радиусу в точку выхода и имеет положительную угловую скорость.

В релятивистской модели после вхождения в круг C_a электрон движется по окружности C_r радиуса

$$r_r = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} R = \frac{\sqrt{7}}{4}\frac{4}{3} R = \frac{\sqrt{7}}{3} R = \frac{2\sqrt{2}}{3} a \tag{18.8.68}$$

с постоянной скоростью β. Расстояние b между центрами круга C_a и окружности C_r равно

$$b = \frac{\sqrt{5}}{3} a. \tag{18.8.69}$$

При этом $b < r_r < a$. Траектория не проходит через центр круга C_a и выходит из круга C_a в точке выхода, расположенной на угловом расстоянии

$$\psi_r = 2 \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \simeq 126{,}87^\circ \tag{18.8.70}$$

в отрицательном направлении от точки входа. Вектор скорости в точке выхода равен по величине вектору скорости в точке входа, направлен под углом 45° к радиусу в точку выхода и имеет положительную угловую скорость.

Мы получим для углового расстояния между точками входа и выхода в трёх моделях неравенства

$$\psi_c < \psi < \psi_r, \tag{18.8.71}$$

или в числах

$$90^\circ < 91{,}332^\circ < 126{,}87^\circ.$$

Таким образом, данный пример даёт критический эксперимент для выбора из описанных трёх моделей модели более близкой к реальности. Впрыскивая электроны с энергией 170334 эВ под углом 45° к радиусу в соленоид радиуса a, обтекаемый по окружности в положительном направлении кольцевым током постоянной плотности I_f, при связи

$$a \simeq \frac{1268{,}812 A}{I_f} \tag{18.8.72}$$

мы реализуем условия данного примера. В частности, при плотности тока $I_f = 2 \cdot 1356{,}417$ А/м получаем

$$a \simeq 0{,}5\sqrt{\frac{7}{8}}\,\text{м} \simeq 0{,}467707\,\text{м}.$$

§18.9 Прохождение скайла через соленоид

Сохраняя обозначения и терминологию § 18.7, рассмотрим следующую плоскую задачу о прохождении скайла через соленоид. Пусть скайл, движущийся в плоскости, перпендикулярной оси соленоида, влетает в соленоид, причём в точке входа вектор скорости скайла перпендикулярен цилиндрической поверхности соленоида и направлен к центру круг радиуса a соответствующего плоского сечения. Угловую полярную координату в точке входа положим $\varphi_0 = 0$. При отсутствии тока в обмотке соленоида скайл будет двигаться по прямой — по диаметру окружности, и выйдет из соленоида в точке с угловой координатой $\varphi_e = \pm\pi$. При наличии тока в обмотке соленоида и отсутствии на траектории точек в которых полином $k(s) = 0$ скайл выходит из соленоида в точке с угловой координатой φ_e. В точке выхода вектор скорости имеет ту же величину, что и в точке входа и перпендикулярен поверхности соленоида. В этом случае в плоскости движения существует единственная окружность, касающаяся траектории в точке входа и в точке выхода. Эту окружность я назову эффективной окружностью, обозначу её радиус R_v и сравню его с радиусом R_r движения скайла по окружности согласно релятивистской модели.

18.9.1 Значения параметров, расположение корней полиномов $\Delta(s), f(s), k(s)$.

Будем обозначать значения величин в точке входа в соленоид добавлением индекса 0, а в точке выхода — индекса e. Итак, в точке входа: скорость скайла $\beta_0 \in]0,1[$; начальное время $\tau_0 = 0$; $\dot{r}_0 = \beta_0$ и $\dot{\varphi}_0 = 0$, ибо скорость в точке входа направлена по радиусу; $r_0 = a$; $\varphi_0 = 0$. Согласно формулам (18.7.42, 18.7.43) энергия и момент равны

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}}, \tag{18.9.1}$$

$$M = -\frac{\omega a^2}{1+\sqrt{1-\beta_0^2}}, \tag{18.9.2}$$

где согласно формуле (18.7.11)

$$\omega = \frac{eH}{m}. \tag{18.9.3}$$

Параметры u, w согласно формулам (18.7.53, 18.7.54) равны

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} - 1, \tag{18.9.4}$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} - 1 + \frac{\omega^2 a^2}{1+\sqrt{1-\beta_0^2}}. \tag{18.9.5}$$

Введём величину

$$\varepsilon \equiv \frac{\omega^2 a^2}{1+\sqrt{1-\beta_0^2}}, \tag{18.9.6}$$

тогда

$$w = u + \varepsilon. \tag{18.9.7}$$

Вывод 18.9.1 *В условиях задачи данного параграфа верны неравенства:*

$$\varepsilon > 0, \tag{18.9.8}$$

$$u > 0, \tag{18.9.9}$$

$$w > u. \tag{18.9.10}$$

В точке входа параметр $s = s_0 = 1 - \sqrt{1-\beta_0^2}$. В точке входа $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$ и по формуле (18.7.61) должно выполняться

$$s_0 = \frac{u}{1+u}. \tag{18.9.11}$$

Рассмотрим зависимость полиномов $\Delta(s), f(s), k(s)$, не только от аргумента s, но и от параметра ε, т.е. обозначим в силу формул (18.7.55, 18.7.56, 18.7.93)

$$\Delta(\varepsilon, s) \equiv (1+u+\varepsilon)s^2 - (1-s)u^2, \tag{18.9.12}$$

$$f(\varepsilon, s) \equiv s\Delta(\varepsilon, s) - (1+u)^2(s-s_0)^2, \tag{18.9.13}$$

$$k(\varepsilon, s) \equiv (2-s)^2u^2 - s\Delta(\varepsilon, s). \tag{18.9.14}$$

Из (18.9.12-18.9.14) следует, что

$$\Delta(\varepsilon, s) = \Delta(0, s) + \varepsilon s^2, \tag{18.9.15}$$

$$f(\varepsilon, s) = f(0, s) + \varepsilon s^3, \tag{18.9.16}$$

$$k(\varepsilon, s) = k(0, s) - \varepsilon s^3. \tag{18.9.17}$$

Полином $\Delta(\varepsilon, 1) = (1+u+\varepsilon)$, $\Delta(\varepsilon, 0) = -u^2$, поэтому при $u > 0$, $\varepsilon \geq 0$ полином $\Delta(\varepsilon, s)$ имеет два действительных корня: корень $s_e(\varepsilon) < 0$ и корень $s_\Delta(\varepsilon) \in]0,1[$. Согласно п. 18.7.6 при $\varepsilon > 0$ верно $s_\Delta(\varepsilon) < s_1(\varepsilon)$, а при $\varepsilon = 0$ верно $s_\Delta(0) = s_1(0) = s_0$, где $s_1(\varepsilon)$ — наименьший действительный корень кубического полинома $f(\varepsilon, s)$. Итак, при $\varepsilon = 0, s = s_0$ верно

$$\Delta(0, s_0) = 0, \tag{18.9.18}$$

$$f(0, s_0) = 0, \tag{18.9.19}$$

$$k(0, s_0) = (2-s_0)^2u^2 = (2+u)^2 s_0^2. \tag{18.9.20}$$

Согласно (18.9.16, 18.9.19) при $\varepsilon > 0$ верно

$$f(\varepsilon, s_0) = \varepsilon s_0^3 > 0.$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon > 0$ верно неравенство

$$s_1(\varepsilon) < s_0. \tag{18.9.21}$$

Согласно утверждению 18.7.9 при $u > 0$ и любом $s \in]s_1, s_0]$ верно $f(s) > 0$. В частности, если существует второй действительный корень s_2 полинома $f(s)$, то верны неравенства

$$s_1(\varepsilon) < s_0 < s_2(\varepsilon) \tag{18.9.22}$$

при $u > 0, \varepsilon > 0$.

Рассмотрим вопрос о принадлежности корня $s_k(\varepsilon)$ полинома $k(\varepsilon, s)$ сегменту $[s_1(\varepsilon), s_0]$. При $u > 0$ согласно (18.9.20) верно $k(0, s_0) > 0$, поэтому в силу утверждения 18.7.8 верно неравенство

$$s_k > s_0. \tag{18.9.23}$$

Если при некотором $\varepsilon > 0$ неравенство (18.9.23) нарушается, то в силу непрерывной зависимости полинома $k(\varepsilon, s)$ от аргумента s и параметров ε, u существует значение $\varepsilon_k > 0$, что

$$k(\varepsilon_k, s_0) = 0. \tag{18.9.24}$$

Из (18.9.24) и (18.9.17, 18.9.20) получаем критическое значение ε_k параметра ε

$$\varepsilon_k = \frac{(2+u)^2}{s_0} \tag{18.9.25}$$

такое, что при $\varepsilon < \varepsilon_k$ верно

$$s_k(\varepsilon) > s_0,$$

при $\varepsilon = \varepsilon_k$

$$s_k(\varepsilon_k) = s_0,$$

при $\varepsilon > \varepsilon_k$

$$s_k(\varepsilon_k) < s_0.$$

Вывод 18.9.2 *На траектории отсутствуют точки, в которых $k(\varepsilon, s) = 0$ иф*

$$\varepsilon < \varepsilon_k = \frac{(2+u)^2}{s_0}. \tag{18.9.26}$$

Учитывая определение величин ε и u, (формулы (18.9.4, 18.9.6)) неравенство (18.9.26) через релятивистский фактор

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \tag{18.9.27}$$

может быть записано в эквивалентном виде

$$|\omega| a < (\gamma+1)\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}. \tag{18.9.28}$$

В системе СИ неравенство (18.9.28) эквивалентно следующему неравенству на индукцию магнитного поля

$$|B_f| < \left|\frac{m_f}{e_f}\right| \cdot \frac{c_f}{a} \cdot (\gamma+1)\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}. \tag{18.9.29}$$

Замечание 18.9.1 *При нарушении условия (18.9.26) на траектории, согласно п. 18.6.2 на траектории может не выполняться закон сохранения энергии, т.е. возможно излучение электромагнитных волн, в частности. Таким образом, условие*

$$|\omega| a > (\gamma+1)\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}. \tag{18.9.30}$$

может быть условием существования излучения.

18.9.2 Разложение на множители полиномов $\Delta(s), f(s)$. Поведение корней при $\varepsilon \to 0$.

Квадратичный полином $\Delta(\varepsilon, s)$ имеет согласно предыдущему пункту при $u > 0, \varepsilon \geq 0$ два действительных корня $s_e(\varepsilon)$ и $s_\Delta(\varepsilon)$, непрерывно зависящих от величины ε, и представим в виде

$$\Delta(\varepsilon, s) = (1 + u + \varepsilon)(s - s_\Delta(\varepsilon))(s - s_e(\varepsilon)), \tag{18.9.31}$$

где

$$s_\Delta(0) = s_0, \quad s_e(0) = -u. \tag{18.9.32}$$

Кубический полином $f(\varepsilon, s)$ имеет при $\varepsilon \geq 0$ наименьший действительный корень $s_1(\varepsilon)$ и представим в виде

$$f(\varepsilon, s) = (1 + u + \varepsilon)(s - s_1(\varepsilon))(s^2 + bs + d), \tag{18.9.33}$$

где

$$b = s_1 - \frac{2u + 1}{1 + u + \varepsilon}, \tag{18.9.34}$$

$$d = \frac{u^2}{(1 + u + \varepsilon)s_1}. \tag{18.9.35}$$

Здесь величины $b = b(\varepsilon)$ и $d = d(\varepsilon)$ непрерывные функции параметра ε при $\varepsilon \geq 0$ и $u > 0$ и

$$b(0) = -1, \quad d(0) = u. \tag{18.9.36}$$

Найдем асимптотику корня $s_1(\varepsilon)$ полинома $f(\varepsilon, s)$ при $\varepsilon \to 0$. Для этого проделаем одну итерацию метода Ньютона, начиная с точки $s = s_0$, т.е. найдем решение линейного относительно s уравнения

$$f(\varepsilon, s_0) + (s - s_0)\left(\frac{d}{ds} f(\varepsilon, s)\Big|_{s=s_0}\right) = 0. \tag{18.9.37}$$

Решение уравнения (18.9.37) есть

$$s = s_0 - \frac{\varepsilon s_0^3}{(3\varepsilon s_0^2 + 2s_0^2(1 + u) + s_0 u^2)}. \tag{18.9.38}$$

Отсюда, учитывая скорость сходимости метода Ньютона, получаем при $\varepsilon \to 0$ асимптотику

$$s_1(\varepsilon) = s_0 - \varepsilon \frac{s_0^2}{u(2 + u)} + O(\varepsilon^2). \tag{18.9.39}$$

Найдем асимптотику корня $s_\Delta(\varepsilon)$ полинома $\Delta(\varepsilon, s)$. Для этого проделаем одну итерацию метода Ньютона, начиная с точки $s = s_1$, т.е. найдем решение относительно s линейного уравнения

$$\Delta(\varepsilon, s_1) + (s - s_1)\left(\frac{d}{ds}\Delta(\varepsilon, s)\Big|_{s=s_1}\right) = 0. \tag{18.9.40}$$

Решение уравнения (18.9.40) есть

$$s = s_1 - \frac{\Delta(\varepsilon, s_1)}{2(1 + u + \varepsilon)s_1 + u^2}. \tag{18.9.41}$$

Но согласно формуле (18.9.13) и определению корня s_1 полинома $f(\varepsilon, s)$ имеем

$$\Delta(\varepsilon, s_1) = \frac{(1+u)^2(s_1-s_0)^2}{s_1}. \qquad (18.9.42)$$

Учитывая асимптотику (18.9.39) корня $s_1(\varepsilon)$ и скорость сходимости метода Ньютона, получим из (18.9.41, 18.9.42) асимптотику корня

$$s_\Delta(\varepsilon) = s_1(\varepsilon) - \varepsilon^2 \frac{s_0}{u(u+2)^3} + O(\varepsilon^3). \qquad (18.9.43)$$

18.9.3 Формула для угловой координаты в точке выхода.

Далее в этом параграфе мы предполагаем выполненным условие (18.9.26) отсутствия нулей полинома $k(s)$ на траектории. Тогда согласно формуле (18.7.98) для величины угловой координаты φ_e в точке выхода справедливо представление

$$\varphi_e = -\theta\varphi_n, \qquad (18.9.44)$$

где

$$\varphi_n = \int\limits_{s_1}^{s_0} \frac{(1+u)\cdot(s_0-s)\cdot k(s)}{s\cdot(2-s)\cdot\Delta(s)\cdot\sqrt{f(s)}}\,ds. \qquad (18.9.45)$$

Подинтегральная функция в (18.9.45) имеет нуль знаменателя в точке $s = s_1$, где $f(s_1) = 0$, кроме того при $\varepsilon \to 0$ корень $s_\Delta(\varepsilon)$ полинома $\Delta(s)$, стоящего в знаменателе, приближается к точке $s_1(s)$ согласно асимптотикам (18.9.39, 18.9.43) быстрее, чем левый конец интервала интегрирования $s_1(\varepsilon)$ приближается к правому концу интервала интегрирования s_0. Чтобы избавиться от этих двух особенностей интеграла проведём его преобразование с заменой переменных.

Введём функции

$$p(s) = (1+u)A\frac{(s_0-s)}{(s-s_\Delta)\sqrt{(s-s_1)}}, \qquad (18.9.46)$$

$$q(s) = A^{-1}\frac{k(s)}{s(2-s)(1+u+\varepsilon)(s-s_1)\sqrt{(1+u+\varepsilon)(s^2+bs+d)}}, \qquad (18.9.47)$$

где

$$A \equiv \frac{\sqrt{s_1-s_\Delta}}{(s_0-s_\Delta)(1+u)}. \qquad (18.9.48)$$

Функцию $p(s)$ представим в виде разности

$$p(s) = p_1(s) - p_2(s), \qquad (18.9.49)$$

где

$$p_1(s) \equiv B\cdot(s_0-s_\Delta)\frac{1}{(s-s_\Delta)\sqrt{(s-s_1)}}, \qquad (18.9.50)$$

$$p_2(s) \equiv B\frac{1}{\sqrt{(s-s_1)}}, \qquad (18.9.51)$$

$$B \equiv (1+u)A = \frac{\sqrt{(s_1-s_\Delta)}}{(s_0-s_\Delta)}. \qquad (18.9.52)$$

С помощью введенных обозначений равенство (18.9.45) записывается в виде

$$\varphi_n = I_1 - I_2, \tag{18.9.53}$$

где

$$I_1 \equiv \int\limits_{s_1}^{s_0} p_1(s)q(s)d(s), \tag{18.9.54}$$

$$I_2 \equiv \int\limits_{s_1}^{s_0} p_2(s)q(s)d(s). \tag{18.9.55}$$

В интеграле I_1 проведём замену переменных

$$z = z(s) \equiv \int\limits_{s_1}^{s} p_1(s)\, ds = 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{s-s_1}{s_1-s_\Delta}}\right), \tag{18.9.56}$$

т.е.

$$s = s_1 + (s_1 - s_\Delta)\operatorname{tg}^2\left(\frac{z}{2}\right). \tag{18.9.57}$$

Получаем для интеграла I_1 представление

$$I_1 = \int\limits_0^{z_0} q(s(z))\, dz, \tag{18.9.58}$$

где

$$z_0 = 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{s_0-s_1}{s_1-s_\Delta}}\right). \tag{18.9.59}$$

В интеграле I_2 проведём замену переменных

$$y = y(s) \equiv \int\limits_{s_1}^{s} p_2(s)\, ds = 2B\sqrt{(s-s_1)}, \tag{18.9.60}$$

т.е.

$$s = s_1 + \left(\frac{y}{2B}\right)^2. \tag{18.9.61}$$

Получаем для интеграла I_2 представление

$$I_2 = \int\limits_0^{y_0} q(s(y))\, dy, \tag{18.9.62}$$

где

$$y_0 = 2B\sqrt{(s_0-s_1)}. \tag{18.9.63}$$

Интегралы (18.9.58) и (18.9.62) уже являются аналитическими функциями своих аргументов z и y соответственно в окрестности сегмента интегрирования и для их вычисления можно применять стандартные программы численного интегрирования.

18.9.4 Асимптотическое значение угла поворота при $\varepsilon \to 0$.

Используя формулы предыдущего пункта, найдём асимптотику угла φ_n при $\varepsilon \to 0$. В силу равенства (18.9.53) для этого достаточно найти асимптотику интегралов I_1 и I_2 при $\varepsilon \to 0$. По теореме о среднем существуют $z' \in [0, z_0]$ и $y'' \in [0, y_0]$, что

$$I_1 = z_0 q(s(z')) = z_0 q(s'), \tag{18.9.64}$$

$$I_2 = y_0 q(s(y'')) = y_0 q(s''), \tag{18.9.65}$$

где $s' \equiv s(z')$, $s'' \equiv s(z'')$ и точки s', s'' лежат на $[s_1, s_0]$. В силу асимптотического представления (18.9.39) корня $s_1(\varepsilon)$ верно

$$q(s') = q(s_0) + O(\varepsilon), \quad q(s'') = q(s_0) + O(\varepsilon). \tag{18.9.66}$$

Используя асимптотики корней $s_1(\varepsilon)$ и $s_\Delta(\varepsilon)$ (формулы (18.9.39) и (18.9.43) соответственно), получаем асимптотику величины

$$z_0(\varepsilon) = 2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{s_0 - s_1}{s_1 - s_\Delta}}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{s_1 - s_\Delta}{s_0 - s_1}}\right)\right)$$

в виде

$$z_0 = \pi - 2\frac{\sqrt{\varepsilon}}{(u+2)\sqrt{s_0}} + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}). \tag{18.9.67}$$

Аналогично асимптотику $y_0(\varepsilon)$ получаем в виде

$$y_0(\varepsilon) = 2\frac{\sqrt{(s_1 - s_\Delta)}\sqrt{(s_0 - s_1)}}{(s_0 - s_\Delta)} = 2\frac{\sqrt{\left(\varepsilon^2 \frac{s_0}{u(u+2)^3} + O(\varepsilon^3)\right)\left(\varepsilon \frac{s_0^2}{u(u+2)} + O(\varepsilon^2)\right)}}{\varepsilon \frac{s_0^2}{u(u+2)} + O(\varepsilon^2)},$$

т.е.

$$y_0(\varepsilon) = 2\frac{\sqrt{\varepsilon}}{(u+2)\sqrt{s_0}} + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}). \tag{18.9.68}$$

Для величины $q(s_0)$ в силу определяющих формул (18.9.47, 18.9.48), используя асимптотику корней $s_1(\varepsilon)$ и $s_\Delta(\varepsilon)$, получаем асимптотику

$$q(s_0) = A^{-1}\left(\frac{k(0, s_0)}{s_0(2 - s_0)(1+u)(s_0+u)\sqrt{(1+u)(s_0^2 - s_0 + u)}} + O(\varepsilon)\right) =$$

$$\frac{(1+u)\left(\varepsilon \frac{s_0^2}{u(2+u)} + O(\varepsilon^2)\right)}{\left(\varepsilon^2 \frac{s_0}{u(2+u)^3} + O(\varepsilon^3)\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{(2 - s_0)^2 u^2 (1+u)\sqrt{1+u}}{s_0(2 - s_0)(1+u)(2+u)u \cdot \sqrt{2+u} \cdot u} + O(\varepsilon)\right).$$

Отсюда

$$q(s_0) = 1 + O(\varepsilon). \tag{18.9.69}$$

Из (18.9.67, 18.9.69) получаем асимптотику

$$I_1 = \pi - 2\frac{\sqrt{\varepsilon}}{(u+2)\sqrt{s_0}} + O(\varepsilon). \tag{18.9.70}$$

Из (18.9.68, 18.9.69) получаем асимптотику

$$I_2 = 2\frac{\sqrt{\varepsilon}}{(u+2)\sqrt{s_0}} + O(\varepsilon). \tag{18.9.71}$$

Что даёт следующую асимптотику угла

$$\varphi_n = \pi - \frac{4}{(u+2)\sqrt{s_0}}\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon). \tag{18.9.72}$$

Итак, при прохождении соленоида вектор скорости поворачивается на угол $\psi = \pi - \varphi_n$,

$$\psi = \frac{4}{(u+2)\sqrt{s_0}}\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon). \tag{18.9.73}$$

Если мы в плоскости движения соленоида введём прямоугольную левую декартову систему координат с центром на оси соленоида и осью x направленной в точку входа, то при малых ε отклонение скайла будет происходить в сторону положительной полуоси y при $\theta < 0$ и отрицательной полуоси y при $\theta > 0$, где $\theta = \operatorname{sign}\left(\frac{eH}{m}\right)$. В системе СИ $\theta = \operatorname{sign}\left(\frac{-e_f B_f}{m_f}\right)$.

Радиус эффективной окружности

$$R = \frac{a}{\operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2}\right)} = \frac{2a}{\psi + O(\psi^3)} = \frac{a(2+u)\sqrt{s_0}}{2}\sqrt{\varepsilon} + O(1). \tag{18.9.74}$$

Через величины β_0 и γ главный член асимптотики (18.9.73) угла ψ равен в силу формул (18.9.6, 18.9.11)

$$\psi_m = \frac{|\omega| a}{\beta_0} \cdot \frac{4}{1+\gamma}, \tag{18.9.75}$$

а главный член асимптотики (18.9.75) радиуса эффективной окружности соответственно

$$R_m = \frac{\beta_0}{|\omega|} \cdot \frac{\gamma + 1}{2}. \tag{18.9.76}$$

В "релятивистской"модели п. 18.8.3 в условиях задачи настоящего параграфа скайл движется по окружности радиуса R_r, равного согласно формуле (18.8.62) величине

$$R_r = \frac{\beta_0}{|\omega|}\gamma. \tag{18.9.77}$$

Соответственно угол отклонения вектора скорости равен

$$\psi_r = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{R_r}\right) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{a|\omega|}{\beta_0 \gamma}\right). \tag{18.9.78}$$

Асимптотика угла ψ_r при $\varepsilon \to 0$ равна

$$\psi_r = \frac{|\omega| a}{\beta_0} \cdot \frac{2}{\gamma} + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}). \tag{18.9.79}$$

В частности, главный член асимптотики величины ψ_r

$$\psi_{rm} = \frac{|\omega| a}{\beta_0} \cdot \frac{2}{\gamma}. \tag{18.9.80}$$

Получаем из (18.9.75, 18.9.80) следующую величину отношения главных членов асимптотики угла отношения

$$\frac{\psi_{rm}}{\psi_m} = \frac{1 + \frac{1}{\gamma}}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 - \beta_0^2}}{2}. \tag{18.9.81}$$

Таким образом, при достаточно малом ε релятивистская модель даёт меньший угол отклонения. Например, при $\gamma = 3$ по формуле (18.9.81) имеем

$$\frac{\psi_{rm}}{\psi_m} = \frac{2}{3}. \tag{18.9.82}$$

§18.10 Скайл вне соленоида

В этом параграфе аналогично § 18.7 мы рассмотрим движение скайла вне соленоида, опираясь на § 17.6 и следуя его обозначениям.

Так же как и в случае движения внутри соленоида имеют место 3 закона сохранения: третьей компоненты импульса, третьей компоненты момента и энергии. Используя закон сохранения третьей компоненты импульса, общий случай трёхмерного движения скайла вне соленоида редуцируется в п. 18.10.2 к двумерному движению, т.е. к плоскому движению с изменённой массой.

В отличие от случая движения внутри соленоида я не провожу здесь подробного исследования различных траекторий движения, а ограничиваюсь рассмотрением винтовых траекторий вокруг оси соленоида. Однако при описании движения заряженной частицы вне соленоида моя модель существенно отличается от классической и релятивистской моделей, в которых для частицы вне соленоида взаимодействие с магнитным полем отсутствует, т.е. частица движется прямолинейно и равномерно. Формула (18.10.43) для индукции магнитного поля в зависимости от радиуса круговой траектории и скорости частицы при малых скоростях движения показывает, что эффект взаимодействия движущейся заряженной частицы с магнитным полем соленоида вне соленоида исчезает при малых скоростях движения частицы.

В примере 18.10.1 рассчитана индукция магнитного поля, требующаяся для удержания позитронов линий внутренней конверсии изотопа висмута ^{207}Bi на круговой траектории радиуса $r = 10$ см при радиусе соленоида $a = 5$ см.

18.10.1 Функция Лагранжа и законы сохранения системы.

Чтобы написать функцию Лагранжа, используем формулу (17.6.104) для функции $\mathrm{nitd}\,(\vec{x})$. Предварительно введём следующие 3 вещественные отображения:

$$q : \mathbf{R}^2 \to [0, +\infty[;\ y_1 : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R};\ y_2 : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R};$$

определённые правилами

$$\forall \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \ \Big|\ q(\beta_1, \beta_2) \equiv \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}; \tag{18.10.1}$$

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \ \Big|\ y_1(x_1, x_2, \beta_1, \beta_2) \equiv x_1\beta_2 - x_2\beta_1;\ y_2(x_1, x_2, \beta_1, \beta_2) \equiv x_1\beta_1 + x_2\beta_2. \tag{18.10.2}$$

Введём вещественную функцию от трёх вещественных аргументов $\mathrm{cylout}\,(q, y_1, y_2)$, определённую на произведении множеств $q \in [0, 1[$, $(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus U_1$, где $U_1 \equiv \{(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 \ \big|\ y_1^2 + y_2^2 \le 1\}$, — формулой

$$\mathrm{cylout}\,(q, y_1, y_2) \equiv \frac{q}{1 + \sqrt{1 - q^2}} Re\left(\frac{1}{z_1\left(\frac{1}{\sqrt{1-q^2}}, (y_1, y_2)\right)}\right), \tag{18.10.3}$$

где $z_1(\tau,(y_1,y_2))$ — корень квадратного уравнения (17.6.24) такой, что $|z_1(\tau,(y_1,y_2))| > 1$ при $|(y_1,y_2)| > 1$. В этих обозначениях функция Лагранжа для скайла вне соленоида равна

$$n(\vec{x},\vec{\beta}) = m\sqrt{1-\vec{\beta}^2} + eHa\cdot \operatorname{cylout}\left(q(\beta_1,\beta_2), \frac{y_1(x_1,x_2,\beta_1,\beta_2)}{aq(\beta_1,\beta_2)}, \frac{y_2(x_1,x_2,\beta_1,\beta_2)}{aq(\beta_1,\beta_2)}\right), \tag{18.10.4}$$

где m — масса покоя скайла, e — его заряд, $\vec{x}\in\mathbf{R}^3$ — вектор положения центра, $\vec{\beta}\equiv\frac{d\vec{x}}{dx_0}$ — вектор скорости центра, H — напряжённость магнитного поля в соленоиде, a — радиус соленоида.

Функции $q(\beta_1,\beta_2), y_1(x_1,x_2,\beta_1,\beta_2), y_2(x_1,x_2,\beta_1,\beta_2)$ инвариантны при ортогональных поворотах вокруг оси x_3, поэтому система с функцией Лагранжа (18.10.4) имеет закон сохранения проекции кинетического момента на ось x_3. Кроме того, функция Лагранжа (18.10.4) не зависит от времени и координаты x_3, т.е. выполняются также законы сохранения энергии и третьей компоненты импульса. Сохраняющиеся величины в данном случае имеют следующий вид: третья компонента импульса

$$p_3 \equiv \frac{m\beta_3}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}}, \tag{18.10.5}$$

третья компонента момента

$$M_3 = [\vec{x},\vec{p}]_3 = \left[\left(\frac{\partial n}{\partial\vec{\beta}}\right)^{\top}, \vec{x}\right]_3, \tag{18.10.6}$$

энергия

$$\mathcal{H} \equiv n - \frac{\partial n}{\partial\vec{\beta}}\vec{\beta}. \tag{18.10.7}$$

18.10.2 Редукция к плоскому случаю.

Аналогично п. 18.7.2 используем сохранение третьей компоненты импульса для редукции задачи к случаю двух пространственных координат (x_1,x_2).

Фиксируем значение третьей компоненты импульса $p_3=\alpha$ и разрешаем уравнение

$$\frac{m\beta_3}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}} = \alpha \tag{18.10.8}$$

относительно β_3. Получим

$$\beta_3 = \frac{\alpha}{m}\left(1+\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-(\beta_1^2+\beta_2^2)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{18.10.9}$$

Отсюда

$$\sqrt{1-\vec{\beta}^2} = \frac{\sqrt{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}}{\left(1+\left(\frac{\beta}{m}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Функция Лагранжа от двух переменных x_1,x_2 и их производных $\dot{x}_1=\beta_1, \dot{x}_2=\beta_2$ согласно п. 18.6.3 будет

$$\operatorname{no}(x_1,x_2,\beta_1,\beta_2) = n + \alpha\beta_3 = m\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}\sqrt{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)} + \tag{18.10.10}$$

$$eHa \cdot \operatorname{cylout}\left(q(\beta_1, \beta_2), \frac{y_1(x_1, x_2, \beta_1, \beta_2)}{aq(\beta_1, \beta_2)}, \frac{y_2(x_1, x_2, \beta_1, \beta_2)}{aq(\beta_1, \beta_2)}\right).$$

Сравнение функций Лагранжа (18.10.4) и (18.10.10) показывает, что функция Лагранжа (18.10.10) соответствует плоскому движению с изменённой массой $m' = m\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}$.

Предполагая, что $m \neq 0, e \neq 0, H \neq 0, a \neq 0$, введём константу

$$\zeta \equiv \frac{eHa}{m\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}}. \tag{18.10.11}$$

Получим следующую нормированную функцию Лагранжа для случая двух переменных

$$\operatorname{nom}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \sqrt{1 - (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)} + \tag{18.10.12}$$

$$\zeta \cdot \operatorname{cylout}\left(q(\dot{x}_1, \beta_2), \frac{y_1(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)}{aq(\dot{x}_1, \dot{x}_2)}, \frac{y_2(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)}{aq(\dot{x}_1, \dot{x}_2)}\right).$$

18.10.3 Переход к полярным координатам.

В полярных координатах (r, φ) верны равенства

$$q(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}; \tag{18.10.13}$$

$$y_1(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = r^2\dot{\varphi}; \tag{18.10.14}$$

$$y_2(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = r\dot{r}. \tag{18.10.15}$$

Поэтому функция Лагранжа (18.10.12) переходит в функцию Лагранжа

$$\operatorname{nomc}(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \sqrt{1 - (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)} + \tag{18.10.16}$$

$$eHa \cdot \operatorname{cylout}\left(\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}, \frac{r^2\dot{\varphi}}{a\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}}, \frac{r\dot{r}}{a\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}}\right).$$

18.10.4 Винтовые траектории вокруг оси соленоида.

Для системы с функцией Лагранжа (18.10.16) будем искать круговые траектории, для которых

$$r = Const, \tag{18.10.17}$$

$$\dot{\varphi} = Const, \tag{18.10.18}$$

$$\dot{r} = 0. \tag{18.10.19}$$

Так как функция Лагранжа (18.10.16) не зависит явно от угловой координаты φ, а зависит лишь от переменных $r, \dot{r}, \dot{\varphi}$, то при выполнении условий (18.10.17–18.10.19) уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dx_0}\frac{\partial\,\operatorname{nomc}}{\partial\dot{r}} = \frac{\partial\,\operatorname{nomc}}{\partial r}, \tag{18.10.20}$$

$$\frac{d}{dx_0}\frac{\partial\,\operatorname{nomc}}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{\partial\,\operatorname{nomc}}{\partial\varphi} \tag{18.10.21}$$

сводятся к одному алгебраическому уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r}\operatorname{nomc}(r, \varphi, 0, \dot{\varphi}) = 0. \tag{18.10.22}$$

Если производная по времени $\dot{r} = 0$, то согласно формуле (18.10.15) $y_2(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = 0$. Но в случае $y_2 = 0$ функция $\mathrm{cylout}\,(q, y_1, y_2)$ вида (18.10.3) допускает более простое явное представление. В самом деле, согласно формуле (17.6.25) в этом случае корни квадратного уравнения (17.6.24)

$$z_{1,2} = \frac{1}{\tau+1}\left(y_1 \pm \sqrt{y_1^2+\tau^2-1}\right)$$

оба вещественны. Больший по модулю корень есть

$$z_{1,2} = \frac{1}{\tau+1}\left(y_1 + \theta\sqrt{y_1^2+\tau^2-1}\right), \tag{18.10.23}$$

где $\theta = \mathrm{sign}(y_1)$. Итак, функция

$$\mathrm{cylout}\,(q, y_1, 0) = \frac{q}{1+\sqrt{1-q^2}} \cdot \frac{1+\sqrt{1-q^2}}{\sqrt{1-q^2}} \cdot \frac{1}{y_1 + \theta\sqrt{y_1^2 + \frac{1}{1-q^2} - 1}} = \tag{18.10.24}$$

$$\frac{q}{y_1\sqrt{1-q^2} + \theta\sqrt{y_1^2(1-q^2)+q^2}}.$$

Поэтому при $\dot{r} = 0$ в силу (18.10.13–18.10.16) получаем

$$\mathrm{nomc}\,(r, \varphi, 0, \dot{\varphi}) = \sqrt{1-r^2\dot{\varphi}^2} + \zeta \cdot \mathrm{cylout}\left(r|\dot{\varphi}|, \frac{r^2\dot{\varphi}}{ar|\dot{\varphi}|}, 0\right) =$$

$$\sqrt{1-r^2\dot{\varphi}^2} + \zeta \cdot \frac{r|\dot{\varphi}|}{\frac{r}{a}\sigma\sqrt{1-r^2\dot{\varphi}^2} + \theta\sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2(1-r^2\dot{\varphi}^2) + r^2\dot{\varphi}^2}} =$$

$$\sqrt{1-r^2\dot{\varphi}^2} + \zeta \cdot \frac{\dot{\varphi}a}{\sqrt{1-r^2\dot{\varphi}^2} + \sqrt{1-r^2\dot{\varphi}^2 + a^2\dot{\varphi}^2}}. \tag{18.10.25}$$

Введём слудующие величины

$$\lambda = \lambda(r, \dot{\varphi}) \equiv \sqrt{1-r^2\dot{\varphi}^2},\ b = b(a, \dot{\varphi}) \equiv a\dot{\varphi} \tag{18.10.26}$$

и запишем функцию (18.10.25) в виде

$$\mathrm{nomc} = \lambda + \zeta\frac{b}{\lambda + \sqrt{\lambda^2+b^2}}. \tag{18.10.27}$$

Тогда частная производная

$$\frac{\partial\,\mathrm{nomc}\,(r, \varphi, 0, \dot{\varphi})}{\partial r} = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda + \zeta\frac{b}{\lambda+\sqrt{\lambda^2+b^2}}\right)\right) \cdot \frac{\frac{1}{2}(-2r\dot{\varphi}^2)}{\sqrt{1-r^2\dot{\varphi}^2}} \tag{18.10.28}$$

и условие её обращения в нуль при $r > a$, $\dot{\varphi} \neq 0$ есть алгебраическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda + \zeta\frac{b}{\lambda+\sqrt{\lambda^2+b^2}}\right) = 0,$$

т.е.

$$1 + \zeta b \cdot \frac{(-1)\cdot\left(1 + \delta\frac{\frac{1}{2}2\lambda}{\sqrt{\lambda^2+b^2}}\right)}{\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2+b^2}\right)^2} = 0. \tag{18.10.29}$$

Или эквивалентно

$$\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + b^2}\right)\sqrt{\lambda^2 + b^2} = \zeta b. \tag{18.10.30}$$

Подставим в уравнение (18.10.30) выражение (18.10.26) и получим уравнение, связывающее радиус r и угловую скорость вращения $\omega \equiv |\dot{\varphi}|$ на круговой траектории. А именно, при условии что

$$\zeta\dot{\varphi} > 0, \tag{18.10.31}$$

верно равенство

$$\left(\sqrt{1 - r^2\omega^2} + \sqrt{1 - (r^2 - a^2)\omega^2}\right)\sqrt{1 - (r^2 - a^2)\omega^2} = |\zeta| a\omega. \tag{18.10.32}$$

При движении по винтовой линии, которое мы здесь рассматриваем, величина $\beta_\perp = r|\dot{\varphi}| = r\omega > 0$ проекции скорости на плоскость, перпендикулярную оси соленоида, постоянна, а следовательно, в силу сохранения третьей компоненты импульса, и величина $\beta_\parallel \equiv \beta_3$ третьей компоненты скорости постоянна. Из формулы (18.10.8) получаем

$$1 + \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 = 1 + \frac{\beta_\parallel^2}{\left(\sqrt{1 - (\beta_\perp^2 + \beta_\parallel^2)}\right)^2} = \frac{1 - \beta_\perp^2}{1 - (\beta_\perp^2 + \beta_\parallel^2)} = \frac{1 - \beta_\perp^2}{1 - \beta^2}.$$

Для параметра ζ вида (18.10.11) получаем выражение

$$\zeta = \frac{eHa\sqrt{1 - \beta^2}}{m\sqrt{1 - \beta_\perp^2}}. \tag{18.10.33}$$

Переходя из нашей системы единиц в систему СИ, согласно формулам (18.7.94–18.7.98) получаем

$$\zeta = -\mu_0 \frac{e_f I_f}{m_f c_f} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta_\perp^2}}. \tag{18.10.34}$$

Здесь e_f — заряд и m_f — масса частицы в системе СИ, I_f — линейная плотность тока в обмотке соленоида в системе СИ, c_f — скорость света в системе СИ. Таким образом, условие (18.10.31) переходит в условие

$$e_f I_f \dot{\varphi} < 0, \tag{18.10.35}$$

связывающее знак заряда $\operatorname{sign}(e_f)$, направление тока в обмотке соленоида, определяемое знаком $\operatorname{sign}(I_f)$ и направление вращения, определяемое знаком $\operatorname{sign}(\dot{\varphi})$. Подставив (18.10.34) в (18.10.32) и разрешая полученное уравнение относительно величины индукции магнитного поля $B_f = \mu_0 I_f$, требующейся для удержания частицы с заданной скоростью на траектории радиуса r, получаем

$$|B_f| = \tag{18.10.36}$$

$$\frac{m_f c_f}{|e_f| a} \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta_\perp^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{a}{r}\right)} \cdot \frac{1}{\beta_\perp} \cdot \sqrt{1 - \left(1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)\beta_\perp^2} \cdot \left(\sqrt{1 - \beta_\perp^2} + \sqrt{1 - \left(1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)\beta_\perp^2}\right).$$

В случае плоского движения по окружности радиуса r верно $\beta_\perp = \beta$ и формула (18.10.36) принимает вид

$$|B_f| = \frac{m_f c_f}{|e_f| a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{a}{r}\right)} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \sqrt{1 - \left(1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)\beta^2} \cdot \left(\sqrt{1 - \beta^2} + \sqrt{1 - \left(1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)\beta^2}\right). \tag{18.10.37}$$

18.10.5 Плоские траектории. Движение по окружности.

Проведём простейший анализ формулы (18.10.37) зависимости величины индукции магнитного поля B_f, необходимой для удержания заряженной частицы на круговой траектории радиуса $r > a$ при заданной скорости β. Введём функцию

$$\mathrm{cylcir}\,(\beta,\rho) \equiv \rho \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \sqrt{1-\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)\beta^2} \cdot \left(\sqrt{1-\beta^2}+\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)\beta^2}\right) \qquad (18.10.38)$$

аргументов $\beta \in]0,1]$, $\rho \in [1,+\infty[$ и перепишем формулу (18.10.37) в виде

$$|B_f| = \frac{m_f c_f}{|e_f| a} \cdot \mathrm{cylcir}\left(\beta, \frac{r}{a}\right). \qquad (18.10.39)$$

При фиксированном значении $\rho \in [1,+\infty[$ функция $f(\beta,\rho)$ является строго монотонно убывающей функцией аргумента β, причём на краях интервала пределы

$$\lim_{\beta\to+0} \mathrm{cylcir}\,(\beta,\rho) = +\infty \qquad (18.10.40)$$

и

$$\lim_{\beta\to1-0} \mathrm{cylcir}\,(\beta,\rho) = \mathrm{cylcir}\,(1,\rho) = \frac{1}{\rho}. \qquad (18.10.41)$$

Т.е. чтобы получить как можно меньшее значение индукции магнитного поля $|B_f|$ при фиксированном радиусе окружности r мы должны брать скорость частицы β как можно ближе к 1. С другой стороны, из формулы (18.10.38) следует, что при $\beta \to +0$ верно

$$\mathrm{cylcir}\,(\beta,\rho) = \rho\frac{1}{\beta}\left(1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)\beta^2+O(\beta^4)\right)\left(1-\frac{\beta^2}{2}+O(\beta^4)+1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)\beta^2+ O(\beta^4)\right),$$

т.е.

$$\mathrm{cylcir}\,(\beta,\rho) = \rho\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\left(2-\beta^2\cdot\left(1-\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\right)+O(\beta^4)\right) = \qquad (18.10.42)$$

$$\rho\cdot\left(\frac{2}{\beta}-\left(2-\frac{3}{2}\frac{1}{\rho^2}\right)\beta+O(\beta^3)\right).$$

Отсюда при $\beta \ll 1$ формула (18.10.39) даёт асимптотическое равенство

$$|B_f| = \frac{m_f c_f}{|e_f| a}\cdot\frac{2\cdot\left(\frac{r}{a}\right)}{\beta} \qquad (18.10.43)$$

Таким образом, при уменьшении величины скорости требуемая индукция магнитного поля возрастает при малых скоростях обратно пропорционально скорости.

При $\beta \to 1$ согласно (18.10.38,18.10.39,18.10.41) существует предел

$$\lim_{\beta\to1}|B_f| = \frac{m_f c_f}{|e_f| r},$$

т.е. при значениях скорости β близких к 1, справедливо асимптотическое равенство

$$|B_f| = \frac{m_f c_f}{|e_f| r}. \qquad (18.10.44)$$

Пример 18.10.1

Для позитронов внутренней конверсии линий изотопа висмута ^{207}Bi с кинетическими энергиями 481,665 кэВ и 975,615 кэВ при радиусе обмотки соленоида $a = 5$ см и радиусе окружности $r = 10$ см рассчитаем два соответствующих значения индукции магнитного поля в системе СИ, опуская индекс f в обозначениях.

Для энергии $E_1 = 481{,}665$ кэВ релятивистский фактор $\gamma_1 = 1 + \frac{E}{mc^2} = 1 + \frac{481{,}665}{511{,}003} = 1{,}942587$, скорость $\beta_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_1^2}} = 0{,}857324$. Для энергии $E_2 = 975{,}615$ кэВ релятивистский фактор $\gamma_2 = 1 + \frac{975{,}615}{511{,}003} = 2{,}909215$, скорость $\beta_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_2^2}} = 0{,}939066$. Величина $\rho = \frac{r}{a} = 2$. Поэтому величина

$$\frac{mc}{|e|a} = \frac{0{,}9109534 \cdot 10^{-30} \cdot 2{,}99792458 \cdot 10^{8}}{1{,}6021892 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \text{ Т} = 340,905 \cdot 10^{-4} \text{ Т}. \tag{18.10.45}$$

В первом случае получаем для индукции магнитного поля

$$B_1 = 340{,}905 \cdot 10^{-4} \text{ Т} \cdot \operatorname{cylcir}(0{,}857324; 2) = 631{,}1 \cdot 10^{-4} \text{ Т}. \tag{18.10.46}$$

Во втором случае —

$$B_2 = 340{,}905 \cdot 10^{-4} \text{ Т} \cdot \operatorname{cylcir}(0{,}939066; 2) = 391{,}1 \cdot 10^{-4} \text{ Т}. \tag{18.10.47}$$

§18.11 Четыре компоненты связности группы Лоренца и квартеты частиц

Как мы установили в п. 3.6.10 наличие четырёх компонент связности группы Лоренца приводит к тому, что каждая частица может включаться в квартет частиц с симметричными свойствами. Если мы имеем агвид с функцией псевдотока $jsf(\vec{x})$, вектором скорости $\vec{l} \in \mathbf{R}^3$ и массой

$$m = \frac{m_0}{|\langle \xi, l \rangle|} = \frac{m_0}{|\xi_0 + \langle \vec{\xi}, \vec{l} \rangle|}, \tag{18.11.1}$$

то выбирая четыре матрицы $G_{\sigma\varepsilon}$ вида (3.6.94) как представителей четырёх компонент связности группы Лоренца и применяя преобразование $\tilde{T}_p$ функции тока, мы получим, что соответствующие функции псевдотока преобразуются по правилам (3.6.100). Согласно формуле (3.6.96) при этом вектор скорости преобразуется по правилу

$$\tilde{\vec{l}} = \sigma\varepsilon\vec{l}. \tag{18.11.2}$$

Согласно формуле (12.2.12) новая масса будет

$$\tilde{m} = \frac{m_0}{|\langle G_{\sigma\varepsilon}\xi, l \rangle|} = \frac{m_0}{|\langle \xi, \tilde{l} \rangle|}. \tag{18.11.3}$$

Новые характеристики до второго порядка включительно согласно формулам (13.11.139-13.11.143) будут

$$\tilde{e} = \sigma e, \tag{18.11.4}$$

$$\tilde{\vec{d}} = \sigma\varepsilon\vec{d}, \tag{18.11.5}$$

$$\widetilde{Qv} = \sigma\ Qv, \tag{18.11.6}$$

$$\tilde{\vec{S}} = \vec{S}, \tag{18.11.7}$$

$$\tilde{F} = \varepsilon F. \tag{18.11.8}$$

Заметим, что массы всех четырех частиц как функции скорости $\tilde{\vec{l}}$ нового стандартного состояния и элемента $p \in P_e$ из связной компоненты единицы группы Пуанкаре одинаковы. Различным могут быть лишь их характеристики согласно формулам (18.11.4-18.11.8). Т.е. отличия между частицами будут проявляться во взаимодействиях.

Рассмотрим теперь 3 случая: досветовой, световой и сверхсветовой.

1. Досветовой случай. В этом случае за стандартное состояние агвида удобно взять состояние покоя с $\vec{l} = 0$. Согласно (18.11.2) тогда будет и $\tilde{\vec{l}} = 0$.

Если заряд частицы $e \neq 0$, то согласно п. 3.7.3 можно выбрать центр частицы так, чтобы дипольный момент $\vec{d} = 0$. Тогда согласно (18.11.5) и $\tilde{\vec{d}} = 0$ и ненулевые характеристики частицы до второго порядка включительно есть: заряд e, квадр Qv, спин $\vec{S}$, квин F. В данном случае в терминологии п. 13.5.6 мейн всех четырех частиц равен нулю и, если мы будем учитывать лишь главные взаимодействия, то увидим два рода частиц: с зарядом $+e$ и с зарядом $-e$, т.е. увидим лишь пару частиц, а не квартет. С учётом взаимодействия следующего порядка, т.е. с учётом спина $\vec{S}$ мы также в силу (18.11.7) увидим лишь два типа частиц с одинаковым спином и противоположными зарядами $+e$ и $-e$. Только с учётом взаимодействия следующего порядка, соответствующего невырожденной матрице квина F мы сможем различать четыре частицы квартета, соответствующие четырем значениям пары (σ, ε).

В случае нейтральной частицы $e = 0$ дипольный момент уже неустраним выбором центра. В главном порядке мы должны тогда учитывать дипольный момент $\vec{d}$ и спин $\vec{S}$. Согласно формулам (18.11.5) и (18.11.7) величины дипольного момента и спина могут принять значения $\vec{d}, \vec{S}$ и $-\vec{d}, \vec{S}$. Но остается ещё вопрос: не соответствует ли эти характеристики разным состояниям покоя одной частицы? Согласно правилам преобразования дипольного момента и спина из леммы 13.11.3 этот вопрос можно сформулировать следующим образом: существуют ли ортогональная матрица $Q \in SO(3)$, что верны равенства

$$-\vec{d} = Q^{-1}\vec{d},$$
$$\vec{S} = Q^{\top}\vec{S}?$$

Если $\langle\vec{S}, \vec{d}\rangle = 0$, то такая ортогональная матрица $Q \in SO(3)$ существует — это поворот вокруг оси $\vec{S}$ на угол π. Если же $\langle\vec{S}, \vec{d}\rangle \neq 0$, то не существует.

Итак, в случае $\langle\vec{S}, \vec{d}\rangle = 0$ мы увидим в главном порядке взаимодействия квартет как одну частицу, а если $\langle\vec{S}, \vec{d}\rangle \neq 0$, то как пару частиц. С учётом же следующего порядка взаимодействия при невырожденных матрицах квадра Qv и квина F мы увидим четыре различные частицы.

2. Световой случай. В этом случае $|\vec{l}| = |\tilde{\vec{l}}| = 1$. Согласно § 14.7 в этом случае $e = 0, \vec{S} = 0$. Если $\vec{d} \neq 0$, то в главном порядке мы получаем агвид со скоростью $\vec{l}$ и дипольным моментом $\vec{d}$ и новый агвид со скоростью $\tilde{\vec{l}} = \sigma\varepsilon\vec{l}$ и дипольным моментом $\tilde{\vec{d}} = \sigma\varepsilon\vec{d}$, причём $\langle\vec{S}, \vec{d}\rangle = \langle\tilde{\vec{S}}, \tilde{\vec{d}}\rangle = 0$.

Пусть $\sigma\varepsilon = -1$ и пусть $Q \in SO(3)$ — матрица ортогонального повтора на угол π вокруг оси, перпендикулярной векторам $\vec{d}$ и $\vec{l}$. Тогда соответствующее преобразование агвида имеет матрицу $R = Q$ согласно формуле (3.6.3) и переводит вектор скорости $\vec{l}$ в вектор скорости $\tilde{\vec{l}} = -\vec{l}$ согласно формуле (3.6.4) и вектор дипольного момента $\vec{d}$ в вектор дипольного момента $\tilde{\vec{d}} = -\vec{d}$ согласно формуле (13.11.88). Итак, пары $\vec{d}, \vec{l}$ и $-\vec{d}, -\vec{l}$ соответствуют разным состояниям одной частицы, т.е. в главном порядке взаимодействия квартет будет проявлять себя как одна частица.

Если же матрицы квадра Qv и квина F невырождены, то в следующем порядке взаимодействия мы увидим уже 4 различные частицы.

3. Сверхсветовой случай. В этом случае $|\vec{l}| > 1, |\tilde{\vec{l}}| > 1$. Согласно § 14.8 в этом случае $e = 0, \vec{d} = 0, \vec{S} = 0$, а матрицы квадра Qv и квина F выражаются с помощью числовой характеристики c — сквадра и вектора $\vec{h} \in \mathbf{R}^3$ — веквина по формулам из вывода 14.8.2, т.е.

$$F = \operatorname{Sw}(\vec{h}) \operatorname{Ks}(\vec{l}), \tag{18.11.9}$$

$$Qv = \frac{1}{2}(\vec{l}\vec{h}^\top + \vec{h}\vec{l}^\top) + \left(c + \frac{\langle \vec{l}, \vec{h} \rangle}{|\vec{l}|^2 - 1}\right) \operatorname{Ks}(\vec{l}). \tag{18.11.10}$$

Так как $\operatorname{Ks}(\vec{l}) = E - \vec{l}\vec{l}^\top$, то в силу (18.11.2) в данном случае $\operatorname{Ks}(\tilde{\vec{l}}) = \operatorname{Ks}(\vec{l})$ и из (18.11.8) следует, что

$$\tilde{\vec{h}} = \varepsilon \vec{h}. \tag{18.11.11}$$

Но тогда из (18.11.10) следует закон преобразования сквадра

$$\tilde{c} = \sigma c. \tag{18.11.12}$$

Возьмём теперь $G_{+-} = G_{\sigma\varepsilon}$, тогда

$$\tilde{c} = c,$$

$$\tilde{\vec{h}} = -\vec{h},$$

$$\tilde{\vec{l}} = -\vec{l}.$$

Пусть $Q \in SO(3)$ матрица ортогонального поворота на угол π вокруг оси, перпендикулярной векторам $\vec{h}$ и $\vec{l}$. Тогда для соответствующего преобразования агвида будет согласно формуле (3.6.3) $R = Q$ и согласно формуле (3.6.4) преобразования скорости новая скорость $\tilde{\vec{l}} = -\vec{l}$. А по формуле преобразования веквина (14.8.73) будет $\tilde{\vec{h}} = -\vec{h}$. Мы показали, что пары $\vec{h}, \vec{l}$ и $-\vec{h}, -\vec{l}$ соответствуют разным состояниям одной частицы.

Получаем, что в главном порядке взаимодействия вместо квартета мы увидим в главном порядке пару частиц, соответствующих $G_{\sigma\varepsilon} = G_{++}$ и $G_{\sigma\varepsilon} = G_{-+}$ со значениями сквадра $+c$ и $-c$.

Глава 19

Заключение

§ 19.1. Экспериментальная проверка модели
§ 19.2. Принципиальные и технологические следствия модели

В предыдущей главе я закончил построение математического формализма для рассмотрения динамики частиц. Главная магистраль построена и теперь открылось множество интересных дорог для решения конкретных задач и расчёта конкретных технических устройств. Здесь я решил остановиться и пригласить других учёных и инженеров к исследованию открывшихся перспектив. В заключение в этой главе я предложу критический эксперимент, отделяющий мою модель от предыдущих моделей электродинамики (§ 19.1), и скажу несколько слов о возможном теоретическом и практическом использовании построенной модели (§ 19.2).

§19.1 Экспериментальная проверка модели

19.1.1 Отличия от предшествующих моделей и выбор критического эксперимента.

Все обсуждавшиеся физические выводы теории конденсации были получены математическими средствами. Остается вопрос о соответствии модели и физической реальности. Построенная модель согласуется с существующими опытными данными, поскольку она даёт, во-первых, основные известные законы и формулы электродинамики: уравнения Максвелла, законы Кулона и Био-Савара, уравнения движения быстрого заряда в электростатическом поле. Поэтому для выбора критического эксперимента, отделяющего построенную модель электродинамики от предшествующих моделей, представленных, например, в [67, 41, 65, 66], следует выбирать или новые эксперименты, не объясняемые предшествующими моделями, или эксперименты, при расчёте которых новая модель даёт существенно отличные результаты от предшествующих моделей.

Моя модель обладает следующими существенными отличиями от предшествующих моделей:

1) в ней допускается существование сверхсветовых частиц;

2) масса системы взаимодействующих частиц может изменяться как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения и может принимать отрицательные значения;

3) движение быстрой заряженной частицы рассчитывается по модифицированным уравнениям движения.

Любое из этих трёх отличий может быть основой критического эксперимента. Первое естественное желание — использовать уже проведённый и описанный в литературе эксперимент, в котором бы проявились эти отличия.

В настоящее время известны четыре класса явлений, противоречащих релятивистской электродинамике и объясняемые моей моделью.

Первый класс — эксперименты А. Эндерса и Д. Нимца ([86], библиографию дальнейших экспериментов этого типа смотрите в [23]) по распространению света в волноводах со скоростью, большей скорости света в вакууме.

Следующие два класса экспериментов берут своё начало с работы Н.А. Козырева [36], предложившего схему их проведения, исходя из своей теории времени, и впервые выполнившего их. Это эксперименты по изменению веса вращающихся тел и эксперименты по регистрации сигналов от удалённых звёзд, распространяющихся со скоростью, много большей скорости света. Первоначальные варианты экспериментов по изменению веса вращающихся тел самого Н.А. Козырева [36] не были вполне воспроизводимыми, однако, последующий эксперимент Е.Е. Подклетнова [92] зафиксировал изменение веса тел, связанное с вращением. Эксперименты по регистрации сигналов от удалённых звёзд, распространяющихся со скоростью, много большей скорости света, вслед за Н.А. Козыревым [37] повторяются рядом исследователей (см., [39, 40]).

Четвёртый класс явлений — эксперименты по искривлению траектории электрона, пролетающего вне соленоида с магнитным полем, (см. [55, стр. 121] и монографию [91]).

Однако, эксперименты первых трёх классов до сих пор не признаются значительным кругом исследователей, поэтому в качестве критического я предложил в статье [22] эксперимент по точному измерению параметров траектории электрона, быстро движущегося в однородном магнитном поле соленоида. Предлагаемая схема критического эксперимента обладает тем преимуществом, что движение электрона в однородном магнитном поле соленоида рассчитывается как по старой так и по новой модели. Однако результаты такого расчёта существенно различны, как мы покажем в пунктах 19.1.2–19.1.6.

Как мы уже установили в § 18.10, движение электрона вне соленоида описывается принципиально по разному в моей модели и в предшествующих классической и релятивистской моделях. В предшествующих моделях взаимодействие электрона с магнитным полем соленоида вне соленоида отсутствует и электрон движется прямолинейно и равномерно. В моей модели взаимодействие присутствует и существуют при определённых значениях параметров круговые траектории вне соленоида. Однако, как показывает формула (18.10.43) взаимодействие становится существенным при скоростях, сравнимых со скоростью света, и исчезает при малых скоростях. Само явление, таким образом, является не квантовым эффектом, а эффектом больших скоростей. Моё объяснение эффекта искривления траектории электрона вне соленоида отличается от квантового объяснения, в частности, предсказанием и расчётом круговых траекторий. Поэтому в п. 19.1.7 я предлагаю схему эксперимента с движением позитронов по круговой траектории вне соленоида.

19.1.2 О движении электрона в соленоиде.

В § 17.6 мы вычислили конденсированный функционал взаимодействия власкайла с соленоидом при движении заряженной частицы внутри соленоида (формула 17.6.71) и получили функцию Лагранжа (18.7.1) этой системы, которую выпишем здесь ещё раз

$$n = m\sqrt{1-\vec{\beta}^2} + \frac{e}{1+\sqrt{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}}\langle \vec{H}, [\vec{x}, \vec{\beta}]\rangle. \tag{19.1.1}$$

Соответствующая релятивистская модель движения заряженной частицы внутри соленоида согласно формуле (17.6.72) задаётся функцией Лагранжа

$$n = m\sqrt{1-\vec{\beta}^2} + \frac{e}{2}\langle \vec{H}, [\vec{x}, \vec{\beta}]\rangle. \tag{19.1.2}$$

В §§ 18.7, 18.8 мы изучили движение заряженной частицы внутри соленоида в нашей модели, задаваемой функцией Лагранжа (19.1.1), и установили следующие его принципиальные отличия от движения, описываемого релятивистской моделью с функцией Лагранжа (19.1.2). Во-первых, проекции траекторий нашей модели на плоскость, перпендикулярную оси соленоида, в общем случае не есть окружности. Во-вторых, связь между величинами β, r, H, где β — скорость частицы, r — радиус кривизны траектории, H — напряжённость магнитного поля, — в нашей модели и в релятивистской модели различна. Например, в простейшем случае плоского движения в нашей модели также существуют траектории в виде окружностей с центром на оси соленоида, но для значения радиуса этой окружности мы имеем в нашей модели формулу

$$r = \frac{\beta m}{eH}, \tag{19.1.3}$$

а в релятивистской модели — формулу

$$r_r = \frac{\beta m}{eH\sqrt{1-\beta^2}} \tag{19.1.4}$$

(см. п. 18.8.3). Таким образом, при движении электрона с релятивистским фактором

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{19.1.5}$$

заметно отличным от единицы, отличия в значении радиуса должны проявляться. Поэтому я начал с поиска и анализа уже проведенных экспериментов с движением быстрого (величина нормированной скорости β сравнима с 1) электрона в магнитном поле соленоида. К своему удивлению я обнаружил, что прямой эксперимент с независимым измерением трёх величин β, r, H, входящих в формулу (19.1.4) никогда не проводился, а в известных экспериментов близкого плана обнаружился ряд странных неточностей.

19.1.3 Анализ известных экспериментов с движением электрона в магнитном поле соленоида.

В этом пункте и далее до конца параграфа мы вместо тройки величин β, r, H будем использовать эквивалентную тройку величин E, R, B, где $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — кинетическая энергия электрона, R — радиус траектории, B — индукция магнитного поля. В международной системе единиц СИ в этих обозначениях формула (19.1.4) для радиуса окружности в релятивистской теории принимает вид

$$R_r = \frac{mc}{eB}\sqrt{\gamma^2 - 1}, \tag{19.1.6}$$

где релятивистский фактор γ может быть выражен через кинетическую энергию электрона

$$\gamma = 1 + \frac{E}{mc^2}. \tag{19.1.7}$$

19.1.3.1 Эксперимент К. Ирвина и др. Первый эксперимент, на который я обратил внимание, описан в статье [88]. В этом эксперименте пучок электронов двигался по винтовой траектории в магнитном поле соленоида. Энергия электронов была $E = 560$ кэВ, магнитное поле $B = 370$ Гс. Отношение $\alpha = \frac{v_\perp}{v_\parallel}$ принималось авторами как $\alpha = 2{,}01$. Радиус винтовой линии при этих значениях параметров должен быть $R = R_r = 7{,}6$ см в релятивистской модели и $R = 4{,}7$ см в моей модели. В статье [88] не указано значение радиуса R, имевшее место в эксперименте, но на странице 631 сделано следующее замечание: "Существенные отклонения от первоначально рассчитанных значений параметров потребовались для успешной работы прибора. Первоначальный вариант ни когда не был полностью реализован ... " Моё письмо к авторам с запросом об экспериментальных значениях величин E, R, B, α осталось без ответа.

19.1.3.2 Эксперимент Дж.Л. Руллера и др. Электронный пучок двигался по винтовой линии в магнитном поле соленоида также в установке, описанной в [93]. Параметры эксперимента были: $E = 580$ кэВ, $B = 6420$ Гс, $\alpha = 0.7$. В эксперименте было обнаружено расхождение между рассчитанным по релятивистской модели значением $\alpha = 0.35$ и экспериментально полученным значением $\alpha = 0.7$. В статье [93] не даётся объяснения этому расхождению.

19.1.3.3 Эксперименты группы В.П. Саранцева. Группа В.П. Саранцева в Объединенном институте ядерных исследований в городе Дубна под Москвой проводила эксперименты с электронными пучками, вращающимися в магнитном поле, (см. [59]) в рамках программы разработки коллективных методов ускорения тяжелых ионов. Предполагаемая энергия электронов была 2–3 МэВ, радиус траектории 35–40 см. Я побывал в августе 1992 года в группе В.П.Саранцева и попросил ознакомить меня с данными по параметрам кольцевых магнитных пучков в магнитных полях. Выяснилось, что при известном радиусе электронных колец и напряженности магнитного поля исследователями не проводилось независимого измерения энергии электронов, ибо энергия определялась по отклонению электронов магнитным полем.

19.1.3.4 Эксперимент В. Кауфмана. Классическим экспериментом по проверке релятивистских уравнений движения в статических электрическом и магнитном полях является эксперимент В. Кауфмана [89]. Этот эксперимент цитируется как базовый эксперимент для специальной теории относительности в физических учебниках до сегодняшнего дня (см., например, [96]). А. Эйнштейн описывает и анализирует опыт Кауфмана в работе [85].

В этом эксперименте источником электронов является крупинка радия. Электроны, испускаемые радием, отклоняются при своём движении статическими электрическим и магнитном полями, вектора напряжённости которых параллельны друг другу и ортогональны исходному вектору скорости электрона. Регистрирующая фотопластинка размещена в плоскости, перпендикулярной исходному вектору скорости электронов. На фотопластинке регистрируется кривая, которую образуют электроны с различной величиной начальной скорости после отклонения электромагнитным полем. А. Эйнштейн, проанализировав опыт Кауфмана, сделал следующий вывод: "...наблюдаемые отклонения являются систематическими и значительно превосходят экспериментальные ошибки измерений Кауфмана. ...Вопрос о том, являются ли причинами систематических отклонений ещё не учтённые источники ошибок или несоответствие основ теории относительности экспериментальным фактам, можно с уверенностью решить лишь тогда, когда будут получены более разнообразные экспериментальные данные."(См. [85, с. 91].)

Эксперименты подобного рода проводились впоследствии различными исследователями (см. [96]). В. Паули в первом издании 1921 года своей книги (см. [90, § 29]) объявил точность измерений Кауфмана завышенной.

Кроме сомнений в точности проведения следующие особенности эксперимента Кауфмана делают его не пригодным для проверки моей модели:

1) неизвестна величина скорости электронов;

2) в эксперименте электроны *проходили* область с электромагнитным полем, а не двигались по стационарной траектории в магнитном поле;

3) магнитное поле в эксперименте создавалось постоянным магнитом, а не соленоидом.

19.1.3.5 Эксперименты К. Зигбана. Известной классической работой по основам β-спектроскопии является работа К. Зигбана [95]. Эта статья описывает приборы и эксперименты для измерения энергии электрона посредством измерения отклонения движущегося электрона однородным магнитным полем.

Основная формула для первого метода К. Зигбана — так называемого "полукругового метода", есть релятивистская формула (19.1.6) для радиуса R как функции релятивистского фактора γ и индукции магнитного поля B. Со стандартной метрологической точки зрения естественно предположить, что при калибровке β-спектрометра автор использовал независимые измерения трёх величин E, R, B. Однако, оказалось, что К. Зигбан не только не измерял энергию E независимым методом, но и не измерял вообще индукцию магнитного поля B. На странице 29 своей работы он говорит следующее: "Чтобы определить энергию β-линии нужно измерить H и ρ. Из этих двух измерений измерение H наиболее трудно выполнимо и представляет большие возможности для ошибки. ...Результаты, полученные различными методами, однако, показывают значительные расхождения между собой, которые лежат далеко за границами предполагаемой ошибки измерений." (Здесь H — напряжённость магнитного поля, $\rho = R$ в наших обозначениях.) Таким образом, К. Зигбан отказался от прямого измерения магнитного поля в полукруговом методе.

Мы видим, что базовая работа по β-спектроскопии содержит странный методический дефект, что делает её не применимой для проверки формулы (19.1.6) для радиуса.

19.1.3.6 Эксперимент группы П.С. Стрелкова. Летом 1992 года группа научных сотрудников лаборатории плазменной электроники Института общей физики Российской академии наук в Москве под руководством П.С. Стрелкова, изучив условия критического эксперимента, сделала вывод о необходимости проведения специального эксперимента и предложила реализовать его на своем сильноточном электронном ускорительном комплексе "Терек-2". В реализованной схеме опыта измерялся ток в обмотке соленоида, необходимый для отклонения электронного пучка, проходящего через соленоид в плоскости перпендикулярной его оси, на заданный угол. К сожалению, особенности ускорителя и геометрии эксперимента не позволили достигнуть уровня точности, достаточного для различения старой и новой теорий (см. [21]).

19.1.3.7 Магнитные поля в ускорителях. На сегодня наиболее распространенными устройствами, в которых под действием магнитного поля заряженные частицы высоких энергий двигаются по окружности, являются циклические ускорители заряженных частиц. Возникает вопрос: почему в них не замечены отклонения в движении частиц в магнитном поле, предсказываемые теорией конденсации? Ответ заключается, во-первых, в том, что в больших современных ускорителях вообще нет соленоида с магнитным полем, а вся кольцевая траектория разбита на участки линейного ускорения, на которых нет постоянного магнитного поля, и участки поворота, где локальное магнитное поле поворачивает частицу на определенный угол. Однако, остается вопрос: а почему достаточно хорошо рассчитывается работа этих поворачивающих магнитных катушек?

Последний вопрос возник у меня при знакомстве с работой электронного ускорителя Научно-исследовательского института ядерной физики Московского государственного университета, в котором пучок электронов с энергией 20 миллионов электронвольт поворачивался магнитными катушками на угол 45 градусов. В случае соленоида отличие в величине токов, нужных для создания такого магнитного поля, было бы 40-кратным. И хотя устройство поворотных катушек далеко от соленоида, тем не менее отличие должно было бы проявиться при их проектировании. Проведенные для решения этого парадокса расчеты (см. § 18.9) показали, что с точки зрения теории конденсации существуют две принципиально разные математические задачи: задача о стационарной траектории заряженной частицы в соленоиде и задача о прохождении заряженной частицей соленоида. И если в первой задаче для быстрых частиц радиусы траекторий в классической и новой теориях могут отличаться в десятки и сотни раз, то в задаче о прохождении области с магнитным полем эффективные радиусы кривизны траекторий могут отличаться лишь в масштабах десятков процентов и близким образом зависят от энергии. Что позволяет объяснить удовлетворительное конструирование системы без учёте поправок теории конденсации.

19.1.3.8 Проведённый анализ существующих экспериментов с движением быстрого электрона в магнитном поле, показал необходимость проведения точного эксперимента с независимым измерением трёх параметров движения E, R, H быстрого электрона в магнитном поле соленоида. Используя анализ движения скайла в соленоиде из §§ 18.7,18.8, я рассчитал в пункте 19.1.4 схему эксперимента по прохождению электрона (позитрона) через соленоид с фиксацией точки входа пучка заряженных частиц в соленоид и точки выхода пучка заряженных частиц из соленоида. В качестве источника электронов (позитронов) может быть использован ускоритель электронов или радиоактивный материал. В пункте 19.1.5 уточняется схема эксперимента для случая использования в качестве источника быстрых заряженных частиц позитронов внутренней конверсии линий изотопа висмута ^{207}Bi. Использование в качестве источника быстрых заряженных частиц крупинки радиоактивного материала позволяет разместить источник внутри соленоида. Воспользовавшись этим обстоятельством, я рассчитал также в пункте 19.1.6 схему эксперимента с движением позитрона по окружности вокруг оси соленоида. Последняя схема эксперимента обладает преимуществом в точности, (использование полукругового метода) наглядности и простоте интерпретации.

19.1.4 План эксперимента по прохождению электроном (позитроном) соленоида.

Предлагается эксперимент по изучению движения релятивистского электрона (позитрона) в магнитном поле соленоида. Для проведения эксперимента требуется пучок электронов (позитронов) с энергией от 300 до 2000 кэВ и постоянное магнитное поле с индукцией до 1500 Гс. Независимо измеряются три параметра, определяющие движение электрона: энергия электрона E, радиус кривизны траектории R и индукция магнитного поля B. Результат эксперимента — проверка вида функциональной зависимости (19.1.6) между величинами E, R, B.

Сечение соленоида срединной плоскостью, перпендикулярной его оси, изображено на рисунке 19.1.1. В точке S, в зависимости от источника заряженных частиц, или

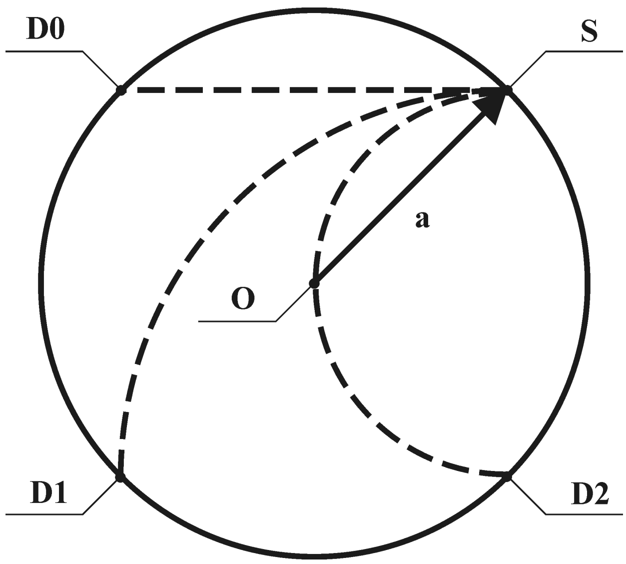

Рис. 19.1.1: Первая схема эксперимента.

пучок электронов от внешнего ускорителя входит во внутреннее пространство соленоида или размещён источник излучения в виде частицы радиоактивного материала. В точках $D0, D1, D2$ расположены детекторы, регистрирующие силу тока или интенсивность потока частиц. Пучок электронов (позитронов) движется внутри соленоида в однородном магнитном поле индукции B, создаваемом обмотками соленоида, от точки S до точек $D0, D1, D2$. Точка S и точки $D0, D1, D2$ расположены на одной окружности радиуса a в плоскости, перпендикулярной оси соленоида, центр которой O лежит на оси соленоида в его среднем сечении. Угол между вектором скорости частицы в точке S и радиусом из центра окружности O в точку S равен 45°. Вся система помещена в вакуумную камеру.

Электрон (позитрон), начинающий движение в точке S, приходит в точки $D0, D1, D2$, если значение индукции магнитного поля $B = 0, B = B_1, B = B_2$ соответственно. Пунктирные линии показывают траекторию электрона в этих трёх случаях. При отсутствии магнитного поля электроны (позитроны) попадают на детектор $D0$, служащий для контроля интенсивности источника. Электрон (позитрон) попадает на детекторы $D1$ или $D2$ согласно релятивистской модели, когда индукция B магнитного поля такова, что $R = \sqrt{2}a$ или $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$, соответственно. Электрон (позитрон) попадает на детекторы $D1$ или $D2$ согласно моей модели, когда индукция B магнитного поля имеет величину, указанную в таблицах 19.1.1 или 19.1.2.

Для каждого значения энергии электрона (позитрона) путём изменения силы тока в обмотке соленоида находится такое значение индукции магнитного поля $B = B_1$, что детектор $D1$ показывает максимальные поток частиц и такое значение индукции магнитного поля $B = B_2$, что детектор $D2$ показывает максимальные поток частиц.

Таблицы 19.1.1 и 19.1.2 рассчитаны для значения угла ввода пучка в 45°, и значения радиуса — $a = 5$ см.

Обозначения:
E — энергия электрона (позитрона) в килоэлектронвольтах,
γ — релятивистский фактор позитрона,
B_r — требуемая индукция магнитного поля в гауссах по релятивистской модели,
B — требуемая индукция магнитного поля в гауссах по моей модели.

Таблица 19.1.1 показывает значения индукций магнитного поля B_r и B, такие что электрон (позитрон) попадает на датчик $D1$.

Таблица 19.1.1: Показания датчика D1. (Дуга между точками ввода и вывода — 180°.)

E	γ	B	B_r	$B_r - B$	$\frac{B_r-B}{B} \cdot 100\%$	$\frac{B_r-B}{B_r} \cdot 100\%$
50	1,098	102	109	7	7	6
100	1,196	139	158	19	14	12
150	1,294	164	198	34	21	17
200	1,391	183	233	50	27	21
250	1,489	199	265	66	33	25
300	1,587	212	297	85	40	29
700	2,370	277	518	241	87	46
1000	2,957	305	670	365	120	54
1500	3,935	337	917	580	172	63

Таблица 19.1.2 показывает значения тех же параметров в случае, когда электрон (позитрон) попадает на датчик $D2$.

Таблица 19.1.2: Показания датчика D2. (Кратчайшая дуга между точками ввода и вывода — 90°.)

E	γ	B	B_r	$B_r - B$	$\frac{B_r-B}{B} \cdot 100\%$	$\frac{B_r-B}{B_r} \cdot 100\%$
50	1,098	200	218	18	9	8
100	1,196	266	316	50	19	16
150	1,294	311	396	85	27	21
200	1,391	340	466	126	37	27
250	1,489	362	530	168	46	32
300	1,587	383	594	211	55	36
700	2,370	453	1036	583	129	56
1000	2,957	473	1340	867	183	65
1500	3,935	487	1834	1347	277	73

Случай проведения измерений с датчиком $D2$ имеет преимущество в точности (использование полукругового метода), но требует большей индукции магнитного поля.

19.1.5 План эксперимента по прохождению позитроном соленоида при использовании изотопа висмута как источника позитронов.

Источником заряженных частиц в эксперименте может быть ускоритель или радиоактивный материал. В случае использования в качестве источника заряженных частиц радиоактивного материала, испускающего электроны (позитроны) внутренней конверсии, источник размещается во внутреннем объёме соленоида вместе с коллиматором, вырезающим электроны (позитроны) с требуемым вектором скорости, а в качестве детекторов $D0, D1, D2$ используются диффузинно-дрейфовые детекторы. Проведём более детальный расчет этого случая с целью демонстрации возможности детектирования пучка данной интенсивности и обеспечения необходимого уровня точности при использовании в качестве источника позитронов конверсионных линий энергий $E = 481{,}665$ кэВ и $E = 975{,}615$ кэВ изотопа висмута ^{207}Bi. Рассчётные значения индукции магнитного поля для этих двух значений энергии приведены в таблицах 19.1.3 и 19.1.4, аналогичных таблицам 19.1.1 и 19.1.2.

Таблица 19.1.3: Показания датчика D1. (Дуга между точками ввода и вывода — 180°.)

E	γ	B	B_r	$B_r - B$	$\frac{B_r-B}{B} \cdot 100\%$	$\frac{B_r-B}{B_r} \cdot 100\%$
481,7	1,904	248	401	153	62	38
975,6	2,910	303	659	356	117	54

Таблица 19.1.4: Показания датчика D2. (Кратчайшая дуга между точками ввода и вывода — 90°.)

E	γ	B	B_r	$B_r - B$	$\frac{B_r-B}{B} \cdot 100\%$	$\frac{B_r-B}{B_r} \cdot 100\%$
481,7	1,904	426	803	377	88	47
975,6	2,910	472	1317	845	179	64

Источник представляет собой тонкий слой вещества, содержащего изотоп ^{207}Bi, расположенного на дне тефлонового стакана с внутренним диаметром d и высотой L (см. рисунок 19.1.2). Интенсивность источника N — полное число позитронов, испускаемых в единицу времени с единицы площади источника. При этом максимальный угол отклонения θ вектора скорости от оси стакана будет равен $\theta = \frac{d}{L}$ в отсутствии магнитного поля.

Детектор представляет собой цилиндрический полупроводниковый диффузионно-дрейфовый датчик диаметром 15 мм, помещённый в защитный стакан со входной поверхностью, ориентированной перпендикулярно пучку позитронов. Каждый детектор обслуживается своим спектрометрическим каналом. Чувствительная поверхность детектора — круг диаметром 12 мм, энергетическое разрешение — на уровне 0,1% в диапазоне от 500 кэВ до 1000 кэВ. Максимальная скорость счёта — порядка 1000 (1/с).

Оценка интенсивности пучка. Источник с предполагаемой интенсивностью 100000 $(1/(\text{с} \cdot \text{мм}^2))$ будет давать на выходе из стакана

$$N_{\theta,S} = \frac{\theta^2}{4} N\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

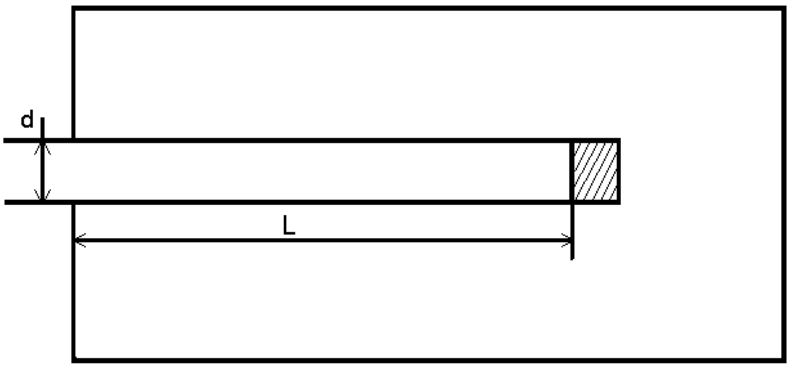

Рис. 19.1.2: Источник.

импульсов в секунду. Учитывая зависимость $\theta = \frac{d}{L}$, следующую из геометрии источника, получаем

$$N_{\theta,S} = \frac{\theta^4}{16}\pi L^2 N. \tag{19.1.8}$$

Поскольку в магнитном поле траектории позитронов искривляются, то для выхода позитронов из стакана требуется выполнение условия

$$L \le 8\theta R, \tag{19.1.9}$$

где R — радиус орбиты позитрона.

Выбирая $d = 1$ мм, $L = 10$ мм, получаем $\theta = 0{,}1$, что соответствует $5{,}7°$. В этом случае согласно (19.1.8) $N_{\theta,S} = 200(1/\text{с})$. Требования ограничения (19.1.9) принимают вид $10 \le 60$ при $R = 7{,}5$ см, а при $R = 3{,}75$ см — вид $10 \le 30$, т.е. выполняются.

При подходе к детектору $D1$ пучок имеет радиус конуса расхождения

$$r_i = \theta R. \tag{19.1.10}$$

При $R = 7{,}5$ см получаем $r_i = 7{,}5$ мм. Учитывая, что радиус чувствительной области детектора r_d, получаем интенсивность, регистрируемую детектором

$$N_d = \frac{\pi r_d^2}{\pi r_i^2} N_{\theta,S}. \tag{19.1.11}$$

В нашем случае для детектора $D1$, подставляя в (19.1.11) $r_i = 7{,}5$ мм, $r_d = 6$ мм, получаем $N_d = 160$ (1/с). Что является достаточной интенсивностью для выполнения планируемых измерений.

Предполагаемые результаты.

При двух значениях энергии позитрона $E = 481{,}665$ кэВ и $E = 975{,}615$ кэВ предполагается измерение углового положения φ точки пересечения траектории позитрона с базовой окружностью, на которой расположены источник и детекторы, и величины соответствующей индукции магнитного поля B. Независимое измерение трёх параметров: 1) энергии позитрона E, 2) угла φ, 3) индукции B — позволит проверить выполнение формулы (19.1.6) для ларморовского радиуса орбиты релятивистского позитрона.

Основной источник погрешностей связан с расходимостью пучка и при $\theta = 0,1$ даёт 6% ошибки в определении угловой величины. Для повышения точности возможно: 1) увеличить интенсивность источника, 2) уменьшить расходимость пучка, 3) проводить измерения по центру тяжести кривой зависимости интенсивности счёта детектора от индукции магнитного поля. Следует заметить, что при измерении детектором $D2$ радиуса окружности позитрона влияние угла расходимости θ уменьшается до относительной ошибки величины θ^2, что приводит к точности 1–2%.

19.1.6 План эксперимента с движением позитрона по окружности вокруг оси соленоида с изотопом висмута как источником позитронов.

В случае использования изотопного источника заряженных частиц возможно прямое измерение радиуса окружности движения позитрона внутри соленоида с использованием преимуществ полукругового метода. Напомним, что в моей модели также существуют траектории в виде окружностей с центром на оси соленоида, но согласно формулам (19.1.3), (19.1.4) отношение окружности радиуса в релятивистской модели R_r к радиусу R окружности в моей модели равно

$$\frac{R}{R_r} = \gamma. \tag{19.1.12}$$

Для выбранных конверсионных линий изотопа висмута ^{207}Bi с энергией позитронов $E = 481{,}665$ кэВ и $E = 975{,}615$ кэВ релятивистский фактор равен $\gamma = 1{,}942587$ и $\gamma = 2{,}909215$ соответственно. Таким образом, если мы зафиксируем радиус окружности $R = 5$ см, то требуемые значения индукции магнитного поля для удержания позитрона на этой окружности относятся как

$$\frac{B_r}{B} = \gamma. \tag{19.1.13}$$

На рисунке 19.1.3 изображено срединное сечение соленоида, в котором поддерживается вакуум. Окружность $C1$ есть сечение внутренней стенки цилиндра соленоида плоскостью разреза, S — источник позитронов, D — диффузионно-дрейфовый детектор. Пунктирная полуокружность C изображает траекторию позитронов. Точка O есть общий центр окружности $C1$ и полуокружности C.

Таблица 19.1.5 показывает значения индукции магнитного поля в моей модели B и в релятивистской модели B_r, требуемые для удержания позитрона на данной полуокружности.

Таблица 19.1.5: Круговое движение. $R = 5$ см.

E	γ	B	B_r	$B_r - B$	$\frac{B_r-B}{B}\cdot 100\%$	$\frac{B_r-B}{B_r}\cdot 100\%$
481,7	1,943	290	552	262	90	48
975,6	2,909	320	932	612	191	66

19.1.7 План эксперимента с движением позитрона по окружности вне соленоида.

Как было показано в § 18.10, позитрон может двигаться по окружности, лежащей вне соленоида, центр которой лежит на оси соленоида. Что позволяет предложить

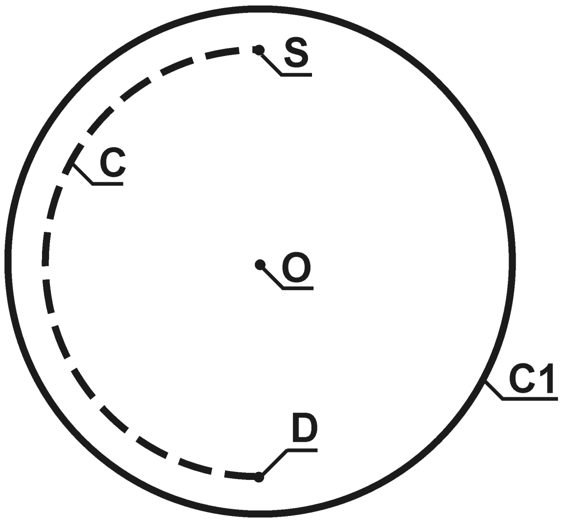

Рис. 19.1.3: Круговое движение. $R = 5$ см.

простую модификацию эксперимента предыдущего пункта. А именно, расположим полуокружность движения C вне объёма соленоида, сохранив в остальном схему эксперимента (см. рисунок 19.1.4). Если $a = 5$ см — радиус соленоида и $R = 10$ см

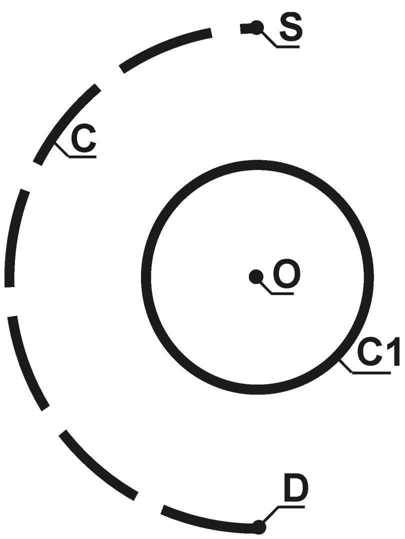

Рис. 19.1.4: Круговое движение вне соленоида. $R = 10$ см.

— радиус круговой траектории позитрона, то требуемая для удержания на круговой траектории индукция магнитного поля B рассчитана в примере 18.10.1 и даётся таблицей 19.1.6.

Напомню, что как в классической модели, так и в релятивистской модели взаимодействие позитрона с магнитным полем соленоида вне соленоида отсутствует и позитрон должен двигаться прямолинейно и равномерно. Кроме того, в § 18.10 я показал,

Таблица 19.1.6: Круговое движение вне соленоида. $R = 10$ см.

E	γ	B
481,7	1,943	631,1
975,6	2,909	391,1

что взаимодействие движущейся заряженной частицы с магнитным полем соленоида вне соленоида проявляется наиболее сильно при больших скоростях и исчезает при малых скоростях, т.е. является эффектом больших скоростей, а не квантовым эффектом.

Таблицы 19.1.1–19.1.6 показывают, что предлагаемый эксперимент может быть выполнен в современной физической лаборатории без чрезвычайных требований к точности измерений.

Замечание 19.1.1 *Отмечу, что и при использовании позитронов внутренней конверсии, имеющих строго фиксированное значение кинетической энергии, требуется независимое измерение кинетической энергии или скорости электронов, так как в подпункте 19.1.3.5 мы уже убедились, что общепринятая, начиная с работ К. Зигбана, методика измерения энергии электронов и позитронов базируется на релятивистской формуле (19.1.6). Так как для случая движения заряженных частиц в электростатическом поле моя модель и релятивистская дают совпадающие уравнения движения, то измерение скорости позитрона следует проводить электростатическим методом, например, по отклонению пучка в электрическом поле.*

§19.2 Принципиальные и технологические следствия модели

19.2.1 Применения построенной схемы к другим средам.

Изложенная схема извлечения электродинамики точечных частиц из свойств идеальной среды допускает обобщение для построения динамики точечных частиц из свойств произвольной сплошной среды на многообразии в виде следующей последовательности операций:

1. Исходный функционал действия в окрестности опорного решения аппроксимируется квадратичным функционалом действия.
2. Проводится линейная операторная замена переменных.
3. Находится группа G инвариантных преобразований квадратичного действия в новых переменных.
4. Путём интегрирования по пространственным переменным получается функция Лагранжа, зависящая от времени t и элемента g группы G.
5. Для аппроксимативного вычисления интеграла по пространственным переменным используется аппроксимация функции тока частицы обобщённой функцией с точечным носителем.

Пользуясь языком лагранжевой механики, я научился по данной сплошной среде строить частицы и изучать свойства их полей и их взаимодействий, из динамики сплошной среды извлекать динамику частиц, как некоторое приближенное асимптотическое описание сплошной среды. Итак, проблема извлечения дальнодействия частиц из близкодействия сплошной среды мной решена как конкретно для электродинамики, так и в смысле построения общей схемы.

19.2.2 Теория конденсации и другие физические теории.

Математическая модель физического мира на основе сплошной среды с простыми свойствами, кроме построения электродинамики, может быть применена к объяснению явлений из других областей физики. А именно, более сложные законы взаимодействия движущихся заряженных частиц в теории конденсации таковы, что при больших скоростях движения две частицы одинакового заряда могут образовать связанную стационарную систему. Поэтому одних электромагнитных сил может быть достаточно для объяснения сил, удерживающих протоны в ядрах атомов.

В модели теории конденсации мы пока ограничились рассмотрением квадратичного приближения к точному действию идеальной среды и получили структуру частицы на больших расстояниях от её центра. Для получения информации о структуре частицы в области её ядра и для определения значений характеристических констант — массы, заряда, спина — требуется рассмотрение аппроксимаций действия более высоких порядков — третьего, четвертого или использование точного действия идеальной среды. На этом пути возможно получение уравнений, аналогичных уравнениям квантовой механики, из условия устойчивости решений нелинейных уравнений для сплошной среды. Отметим, что есть значительная близость понятий теории конденсации и квантовой механики — в обеих теориях частица есть распределенный объект и рассматриваются частицы-волны.

Поскольку в теории конденсации дана явная формула для массы частицы через её сплошную структуру, то возможно развитие модели до получения гравитационного взаимодействия частиц. Для этого требуется уже аппроксимация действия не ниже четвертого порядка. Но это — предмет дальнейших исследований.

19.2.3 Принципиальные следствия новой модели.

Строгое определение основных физических понятий на базе математической модели позволяет глубоко проанализировать возможности целенаправленного изменения таких величин как масса, энергия, скорость системы для использования их в технологических и научных приложениях. Первым принципиальным следствием новой модели является открытие процессов электродинамического взаимодействия заряженных частиц, при которых освобождается энергия порядка суммы масс взаимодействующих частиц, отличных от процессов аннигиляции частиц и античастиц. Выделение энергии на единицу массы в таких электродинамических реакциях в тысячу раз больше, чем в ядерных реакциях деления или синтеза. Таким образом, электродинамические реакторы нового типа могут изменить энергетику человечества XXI века.

Анализ явной формулы, выражающей массу системы через её сплошную структуру, т.е. через смещения и скорости точек сплошной среды, позволяет указать физические процессы, в которых масса системы частиц может становиться нулевой или отрицательной. С точки зрения динамики возможность управления величиной и знаком массы означает принципиально новый механизм ускорения тел и их перемещения в гравитационных полях. Таким образом, предлагается новый способ перемещения тел в пространстве через нейтрализацию массы.

Частицы и, в частности, агвидные частицы в теории конденсации, с точки зрения математического формализма, распадаются на три группы, выделяемые по скорости движения: досветовые, световые и сверхсветовые. Это связано с тем, что преобразования Пуанкаре, применённые к досветовой частице, оставляют её досветовой, световую

— световой и сверхсветовую — сверхсветовой. Таким образом, в рамках квадратичного приближения по действию или, эквивалентно, в рамках линейных уравнений динамики среды, невозможно ускорение досветовой частицы в световую и сверхсветовую. Для описания ускорения досветовой частицы до скорости света и выше следует использовать исходное действие идеальной среды и соответствующие нелинейные уравнения динамики. При этом, хотя в теории конденсации существуют частицы, движущиеся быстрее скорости света, их характеристики существенно отличны от характеристик досветовых частиц. У световой частицы должны быть равны нулю заряд и спин, а дипольный момент ортогонален вектору скорости движения. У сверхсветовой частицы должны быть равны нулю заряд, спин и дипольный момент, а моменты более высокого порядка от плотности заряда и тока выражается некоторым специальным образом. Так, у сверхсветовых частиц нет заряда в обычном смысле, но существует некоторая числовая характеристика — «скводр», одинаковая во всех состояниях частицы и ведущая себя аналогично заряду при объединении частиц в систему. Это означает, что уже аппроксимация, основанная на квадратичном действии, даёт конструктивные рецепты о перестройке конфигурации и изменении структуры тела при его прохождении через скорость света.

19.2.4 Технологические следствия новой модели.

Научные модели строятся не только для того, чтобы объяснять мир, но и как инструмент его преобразования, использования для утилитарных целей. Один из первых вопросов к новым теориям: а зачем это нужно? Что даёт теория конденсации для практики, для технологии?

Укажу простейшие технологические приложения, основанные на использовании уточненной модели движения заряженных частиц в магнитных полях. А именно, расчеты по новой модели позволяют предложить конструкции ускорителей заряженных частиц в сотни и тысячи раз меньшие по размерам и стоимости гигантских ускорительных комплексов. Более того, останавливается тенденция неограниченного увеличения размеров ускорителей в связи с увеличением выходной энергии частиц, так как нелинейность новой модели позволила указать конструкцию фиксированных размеров, в которой может быть получено ускорение частиц до любой выходной энергии.

Наиболее очевидные технологические перспективы у компактного ускорителя электронов произвольной выходной энергии. Он является портативным источником мощного электромагнитного излучения ультрафиолетового и гамма диапазонов простой конструкции. Такой источник может использоваться в полупроводниковой промышленности для производства интегральных схем высокого уровня интеграции, будучи во много раз дешевле используемых ныне синхротронных источников. Он может использоваться как резак в процессах обработки вместо механических устройств, т.е. занять место бластера научно-фантастических романов. С технической точки зрения наиболее удобно его использование в космосе, где он может служить, в частности, орудием для уничтожения баллистических ракет, простым и дешевым, а потому доступным и странам среднего уровня развития.

О принципиальных технологических следствиях теории конденсации я уже кратко говорил, но ещё раз напомню, что это: 1) электродинамические источники энергии, 2) новые принципы перемещения тел на основе управления массой, 3) сверхсветовые движения. Указанные три следствия теории конденсации, по моему мнению, — принципиальные основы технологий XXI века, которые сделают его быт и производство непохожими на любые представления фантастов и футурологов. В частности, уже сегодня, с точки зрения теории конденсации, летающая тарелка, индивидуальное лучевое оружие — бластер, нейтрализатор массы и сверхсветовые звездолеты — предметы реального расчета и конструирования.

Я полагаю, что применение теории конденсации способно решить стоящие перед человеческим обществом проблемы: энергетическую, экологическую и недостаточность географического пространства.

XXI век, по моему убеждению, преодолеет грубые механические технологии XX века. С лица земли исчезнут шрамы автострад и железных дорог. Останутся лишь прогулочные дорожки вокруг жилых зданий. Основными инструментами станут нейтрализатор массы, бластер и летающая тарелка. Все передвижения будут производиться с помощью нейтрализатора массы. Исчезнет механическая обработка материалов на громоздких станках — все будет делать бластер.

Я не могу принимать всерьез всевозможные популярные ныне прогнозы конца света на экологической, энергетической и сырьевой основе. В истории человечества ответ на неоднократно возникавшие вызовы такого рода давался вовсе не на том понятийном аппарате и не в той технологической плоскости, в которой они возникали.

Литература

[1] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1971.

[2] Буслаев В.С. Вариационное исчисление. — Л.: Издательство ЛГУ, 1980.

[3] Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Релятивистская квантовая теория. Ч.1. — М.: Наука, 1968.

[4] Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. — М.: Мир, 1972.

[5] Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. — М.: Наука, 1969.

[6] Бурбаки Н. Алгебра. Многочлены и поля, упорядоченные группы. — М.: Наука, 1965.

[7] Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. — М.: Наука, 1968.

[8] Бурбаки Н. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. — М.: Наука, 1975.

[9] Бурбаки Н. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. — М.: Физматгиз, 1962.

[10] Бурбаки Н. Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свёртка и представления. — М.: Наука, 1970.

[11] Берже М. Геометрия. Т.2. — М.: Мир, 1984.

[12] Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. — М.: Наука, 1979.

[13] Винокуров В.А. Очерк теории конденсации. — М.: Издательство "Союз", 1993.

[14] Винокуров В.А. Логарифм решения линейного дифференциального уравнения, формула Хаусдорфа и законы сохранения. Доклады АН СССР. 1991. Т.319. № 4. С. 792–797.

[15] Винокуров В.А. Замена переменных и умножение обобщённых функций. Доклады АН СССР. 1991. Т.319. № 5. С. 1057–1064.

[16] Винокуров В.А. Метод численного решения линейных дифференциальных уравнений. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1982. Т.22. № 5. С. 1080–1093.

[17] Винокуров В.А. О дифференцируемости функций из пространства Соболева. Доклады АН СССР. 1976. Т.227. № 1. С. 15–18.

[18] Винокуров В.А. Интерполяция локально выпуклых топологий. Доклады АН СССР. 1977. Т.232. № 3. С. 513–516.

[19] Винокуров В.А. Отображения полных структур, сохраняющие грани. Доклады АН СССР. 1977. Т.234. № 5. С. 1004–1007.

[20] Винокуров В.А. Интерполяция в категориях топологического типа. Доклады АН СССР. 1977. Т.235. № 1. С. 19–22.

[21] Винокуров В.А. и др. Научный отчет по проекту "Критический эксперимент по проверке закона взаимодействия движущихся зарядов"в Министерство науки, высшей школы и технической политики РФ. М.: 1992.

[22] Винокуров В.А. Закон взаимодействия движущихся зарядов. Гипотеза. 1993. № 1. С. 24-36.

[23] Винокуров В.А. Эксперименты со сверхсветовыми сигналами. Библиография. Адрес в Интернете "http://vinokur.narod.ru/superluminal.htm".

[24] Владимиров В.С. Обобщённые функции в математической физике. — М.: Наука, 1976.

[25] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984.

[26] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967.

[27] Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. — М.: Физматгиз, 1962.

[28] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщённые функции и действия над ними. — М.: Физматгиз, 1959.

[29] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений. — М.: Наука, 1971.

[30] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.

[31] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т.2. — М.: Мир, 1965.

[32] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. — М.: Наука, 1979.

[33] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — М.: Мир, 1971.

[34] Келли Дж.Л. Общая топология. — М.: Наука, 1968.

[35] Кириллов А.А. Элементы теории представлений. — М.: Наука, 1972.

[36] Козырев Н.А. Причинная или несимметричная механика в линейном приближении. — Пулково: 1958. (Цитируется по книге: "Козырев Н.А. Избранные труды. — Ленинград: Издательство Ленинградского университета. 1981.", с. 232–287.)

[37] Козырев Н.А. Астрономические наблюдения посредством физических свойств времени// Вспыхивающие звёзды: Труды симпозиума, приуроченного к открытию 2,6-м телескопа Бюроканской астрофизической обсерватории, Бюрокан, 5–8 октября 1976 года. Ереван. 1977. С. 209–227. (Цитируется по книге: "Козырев Н.А. Избранные труды. — Ленинград: Издательство Ленинградского университета. 1981.", с. 232–287.)

[38] Куратовский К. Топология. Т.II. — М.: Мир, 1969.

[39] Лаврентьев М.М, Еганова И.А., Луцет М.К., Фоминых С.Ф. О дистанционном воздействии звезд на резистор. Доклады АН СССР. 1990. Т.314. № 2. С.368-370.

[40] Лаврентьев М.М., Еганова И.А., Медведев В.Г., Олейник В.К., Фоминых С.Ф. О сканировании звездного неба датчиком Козырева. Доклады АН СССР. 1992. Т.323. № 4. С.649-652.

[41] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. — М.: Наука, 1967.

[42] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. — М.: Наука, 1973.

[43] Лаппо-Данилевский И.А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1957.

[44] Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968.

[45] Лукреций К. О природе вещей. — М.: Изд-во АН СССР, 1958.

[46] Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. — М.–Л.: Огиз, 1948.

[47] Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. — М.: Наука, 1972.

[48] Математическая энциклопедия. Т.2. — М.: Издательство "Советская энциклопедия", 1979.

[49] Ньютон И. Математические начала натуральной философии. — Лондон: 1687. (Русский перевод в книге "Собрания трудов академика А.Н.Крылова. Т.VII, М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1936").

[50] Новацкий В. Теория упругости. — М.: Мир, 1975.

[51] Пирс Р. Ассоциативные алгебры. — М.: Мир, 1986.

[52] Постников М.М. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1986.

[53] Постников М.М. Группы и алгебры Ли. — М.: Наука, 1982.

[54] Пуанкаре А. Избранные труды. Т.II. — М.: Наука, 1972.

[55] Райдер Л. Квантовая теория поля. — М.: Мир, 1987.

[56] Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. — М.: Издательство ИЛ, 1963.

[57] Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.

[58] Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1967.

[59] Саранцев В.П. и др. Первый этап наладки прототипа коллективного ускорителя тяжелых ионов. Сообщения ОИЯИ. Р9-10053. Дубна: 1976.

[60] Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974.

[61] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974.

[62] Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.

[63] Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1982.

[64] Таблицы физических величин. Справочник. — М.: Атомиздат, 1976.

[65] Тамм И.Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1976.

[66] Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика. — М.: "Высшая школа", 1990.

[67] Тоннела М.А. Основы электромагнетизма и теории относительности. — М.: Издательство иностранной литературы, 1962.

[68] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972.

[69] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.II. — М.: Физматгиз, 1959.

[70] Фрёлихер А., Бухер В. Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы. — М.: Мир, 1970.

[71] Функциональный анализ. (Под редакцией С.Г.Крейна) — М.: Наука, 1972.

[72] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.

[73] Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. — М.: Мир, 1981.

[74] Хир К. Статистическая механика, кинетическая теория и статистические процессы. — М.: Мир, 1976.

[75] Чертов А.Г. Единицы физических величин. — М.: Высшая школа, 1977.

[76] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.II. — М.: Наука, 1976.

[77] Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. — М.: Мир, 1981.

[78] Шефер Х. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971.

[79] Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. — М.: Наука, 1972.

[80] Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная. — М.: Наука, 1967.

[81] Шварц Л. Анализ. Т.1. — М.: Мир, 1972.

[82] Шварц Л. Анализ. Т.II. — М.: Мир, 1972.

[83] Эдвардс Р. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1969.

[84] Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.

[85] Einstein A. Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. Jahrb. d. Radioaktivität u. Eletronik. 1907. 4. 411–462. (Русский перевод статьи в книге "А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т.1. — М.: Наука, 1965 с. 65 – 114.)

[86] Enders A. and Nimtz G., J. Phys. France. I 2. 1693(1992).

[87] Horváth J. Topological Vector Spaces and Distributions. V.1. — USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

[88] Irwin K. et al. Second generation, high-power, fundamental mode large-orbit gyrotron experiments. J. Appl. Phys. 69(2). 1991. P.627–631.

[89] Kaufmann W. Ann. Phis. 1906. 19. P.487.

[90] Pauli W. Theory of Relativity. Pergamon Press, 1958.

[91] Peshkin M., Tonomura A. The Aharonov–Bohm Effect. (Lecture Notes in Physics. V. 340) — Berlin: Springer–Verlag. 1989.

[92] Podkletnov E.E. Weak gravitation shielding properties of composite bulk $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ superconductor below 70 K under e.m. field. Адрес в Интернете "http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/?9701074".

[93] Rullier J.L. et al. High-power CARM and harmonic gyro-amplifier experiments. Nuclear Instr. and Method. Section A. 341(1994). P.93–97.

[94] Schwartz L. Sur le théorème du graphe fermé. C.R. Acad. Sc. Paris. 1966. T.263. № 18. A602–605.

[95] Siegbahn K. Studies in Beta-Spectroscopy. Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik. 1944. Band 30A. № 20. P.1.

[96] Tonnelat M.-A. Les Principles de la Theorie Électromagnétique et de la Relativité. — Paris: 1959.