Доклады Академии наук СССР
1985. Том 281, № 2

УДК 513.881 МАТЕМАТИКА

В.А. ВИНОКУРОВ

СТРОГАЯ РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТЬ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 15 II 1984)

Бэром [1] была поставлена проблема характеризации класса функций, являющихся поточечным пределом последовательности непрерывных функций. При решении этой проблемы введены классы борелевских и точечно-разрывных функций. В моей работе [2] дана характеристика этого класса через регуляризуемость. В данной работе вводится класс строго регуляризуемых функций и для его описания вводятся и изучаются новые классы разрывных функций, более узкие, чем первый бэровский.

Начнем с описания задачи приближенного вычисления функции с неточно заданным аргументом, следуя [3]. Пусть f — функция с областью определения $D(f)$ в топологическом пространстве X и со множеством значений $E(f)$ в топологическом пространстве Y. Нас интересует значение $f(x)$ функции в точке $x \in D(f)$, но точка $x \in X$ не задана, а задано лишь некоторое множество приближенных значений аргумента $A \subset X$, содержащее точку x. В таком случае, вообще говоря, мы не можем определить точного значения $f(x)$, поэтому сопоставляем множеству приближенных значений аргумента $A \subset X$ некоторое множество приближенных значений функции $B \subset Y$. Требование сходимости метода будет заключаться в том, что если множества $A_\alpha \subset X$ содержат точку $x \in D(f)$ и сходятся к ней, то соответствующие множества $B_\alpha \subset Y$ сходятся к точке $f(x)$. Мы приходим к понятиям алгоритма приближенного вычисления и регуляризатора, введенным в настоящей форме в работе [4].

Предварительно договоримся о следующих обозначениях: 2^X — множество всех подмножеств множества X; S — некоторое множество подмножеств множества X; $\mathcal{T}(X)$ — множество всех открытых множеств топологического пространства X; X, Y, Z — топологические пространства.

Любое отображение $R: S \to 2^Y$ мы называем *алгоритмом* приближенного вычисления функции f по системе S. Отображение $R: S \to 2^Y$, определенное правилом $R(A) \rightrightarrows f(A)$ для любого множества $A \in S$, называем *тривиальным* алгоритмом приближенного вычисления функции f.

Определение 1. Отображение $R: S \to 2^Y$ называется *регуляризатором* функции f по системе S, если:

$$\forall x \in D(f)\ \forall L \in \mathcal{T}(Y), \quad L \in f(x)\, \exists G \in \mathcal{T}(X), \ G \ni x, \tag{1}$$
$$\forall A \in S, \quad x \in A \subset G \,|\, \phi \neq R(A) \subset L.$$

Функция f, для которой существует хоть один регуляризатор по системе S, называется *регуляризуемой по системе* S. В случае $S = 2^X$ мы говорим просто "регуляризатор", "регуляризируемая функция". Множество всех регуляризируемых отображений $f: X \to Y$ обозначим через $R(X, Y)$.

Если функция f непрерывна, то тривиальный алгоритм является ее регуляризатором и обладает следующим важным свойством: если $x \in A$, то $f(x) \in R(A)$

при любом множестве $A \subset X$. В общем случае от регуляризатора в определении 1 этого свойства не требуется. Более того, как показано в [3, 4], если в определении 1 дополнительно потребовать, чтобы из включения $x \in A$ следовало включение $f(x) \in R(A)$, то класс регуляризуемых в этом смысле функций будет совпадать с классом непрерывных функций. Однако если требование $((x \in A) \Rightarrow (f(x) \in \in R(A)))$ ввести для "достаточно малых" множеств, то оно будет выполняться для существенно более широкого класса функций, чем непрерывные.

Определение 2. Отображение $R\colon S \to 2^Y$ называется *строгим регуляризатором функции f по системе S*, если:

$$\forall x \in D(f) \forall L \in \mathscr{T}(Y),\ L \in f(x) \exists G \in \mathscr{T}(X),\ G \in x,$$
$$\forall A \in S,\ x \in A \subset G | f(x) \in R(A) \subset L. \tag{2}$$

Функция f, для которой существует хоть один строгий регуляризатор по системе S, называется *строго регуляризуемой по системе S*. В случае $S = 2^X$ мы говорим просто "строгий регуляризатор", "строго регуляризуемая функция". Множество всех строго регуляризуемых отображений $f\colon X \to Y$ обозначаем $SR(X, Y)$.

В работах [2, 5] для случая метрических пространств X, Y описан класс $R(X, Y)$ регуляризуемых отображений. Здесь мы опишем класс строго регуляризуемых отображений $SR(X, Y)$.

1. В этом пункте X, Y – метрические пространства. Введем следующие классы отображений $f\colon X \to Y$.

Первый бэровский клас $1\,\mathrm{Baire}(X, Y)$ состоит из отображений f таких, что существует последовательность непрерывных отображений $f_n\colon X \to Y$, $n \in \mathbf{N}$, что в каждой точке $x \in X$ выполняется соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f(x), f_n(x)) = 0$.

Первый борелевский класс $1\,\mathrm{Borel}(X, Y)$ состоит из отображений $f\colon X \to Y$ таких, что для любого открытого множества $L \subset Y$ множество $f^{-1}(L)$ типа F_σ в X.

Класс $PD(X, Y)$ состоит из отображений f таких, что для любого замкнутого подмножества $\mathscr{F} \subset X$ сужение $f|\mathscr{F}$ имеет на $\mathscr{F}$ множество точек разрыва первой категории.

Объединяя результаты Лебега, Бэра, Хаусдорфа (см. [1, 6]) с результатами моих работ [2, 5], получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Если X – полное метрическое пространство, Y – сепарабельное линейное нормированное пространство, то следующие классы отображений совпадают*:

$$1\,\mathrm{Baire}(X, Y) = 1\,\mathrm{Borel}(X, Y) = PD(X, Y) = R(X, Y).$$

2. В теории функции действительной переменной известна теорема Лузина, утверждающая, что измеримая на отрезке $[0, 1]$ действительная функция на "сколь угодно большом" в смысле меры замкнутом подмножестве отрезка совпадает с непрерывной функцией. Однако в теореме Лузина участвует дополнительная нетопологическая конструкция – мера. Используя лишь топологические термины, мы введем класс функций, которые на "сколь угодно большом" замкнутом подмножестве совпадают с непрерывной функцией.

Определение 3. Отображение $f\colon X \to Y$ назовем *преднепрерывным*, если существует возрастающая последовательность замкнутых подмножеств $\{\mathscr{F}_n\}$, $\mathscr{F}_n \subset X$, такая, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_n = X$ и каждое сужение $f|\mathscr{F}_n$ непрерывно.

Класс преднепрерывных отображений топологического пространства X в топологическое пространство Y обозначаем $UC(X, Y)$.

В данном определении от последовательности множеств $\{\mathcal{F}_n\}$, такой, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n = X$, требуется выполнение двух условий:

1) монотонность: $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$;

2) замкнутость каждого множества $\mathcal{F}_n$.

Любое из этих требований по отдельности может быть отброшено без изменения смысла понятия.

Т е о р е м а 2. *Если для отображения $f\colon X \to Y$ существует счетная последовательность замкнутых подмножеств $\{M_n\}$ пространства X такая, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n = X$ и каждое сужение $f|_{M_n}$ непрерывно, то отображение f преднепрерывно.*

Топологическое пространство называется р е г у л я р н ы м [7], если каждое одноточечное множество замкнуто и точка и замкнутое множество, ее не содержащее, имеют непересекающиеся окрестности.

Т е о р е м а 3. *Если топологическое пространство Y регулярно и существует монотонно возрастающая последовательность множеств $\{M_n\}$ таких, что каждое сужение $f|_{M_n}$ непрерывно и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n = X$, то отображение f преднепрерывно.*

3. В этом пункте X – метрическое пространство, Y – топологическое пространство. Множества одновременно типа F_σ и G_δ в метрическом пространстве X мы назовем п р о с т ы м и. Совокупность простых множеств $\Pi(X)$ образует алгебру множеств.

О п р е д е л е н и е 4. Отображение $f\colon X \to Y$ назовем п р о с т ы м, если для любого открытого множества L топологического пространства Y прообраз $f^{-1}(L)$ – простое множество метрического пространства X.

К л а с с п р о с т ы х о т о б р а ж е н и й $f\colon X \to Y$ обозначим $S(X, Y)$. Далее в этом пункте X, Y, Z – метрические пространства.

По определению всякое непрерывное отображение является простым. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ обладает тем свойством, что операция взятия прообраза сохраняет класс борелевских множеств, т.е. прообраз открытого множества есть множество открытое и прообраз замкнутого множества – множество закнутое. Отсюда следует, что и для любого порядкового числа α прообраз множества $B \subset Y$ из класса F_α или G_α есть множество $f^{-1}(B) \subset X$ класса F_α или G_α соответственно. Борелевские отображения первого класса уже таким свойством сохранения класса не обладают, операция взятия прообраза в этом случае может переводить в следующий борелевский класс. Если $f\colon X \to Y$ – простое отображение, то прообраз открытого множества – множества борелевского класса 0 уже не будет, вообще говоря, множеством борелевского класса 0. Однако уже первый борелевский класс в этом случае операция взятия прообраза оставляет инвариантным.

Т е о р е м а 4. *Если $f\colon X \to Y$ – простое отображение, то для порядкового числа $\alpha \geqslant 1$ прообраз любого множества класса F_α или G_α будет множеством того же класса.*

На основании теоремы 4 определение простой функции можно сформулировать в более симметричной форме как требование принадлежности прообраза простого множества к классу простых множеств.

Т е о р е м а 5. *Для отображения $f\colon X \to Y$ следующие условия эквивалентны*:

1) $\forall L \in \mathcal{T}(Y) |\ f^{-1}(L) \in \Pi(X)$,

2) $\forall L \in \Pi(Y) |\ f^{-1}(L) \in \Pi(X)$.

С л е д с т в и е 1. *Если отображения $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ простые, то суперпозиция $gf\colon X \to Z$ – простое отображение.*

Известно (см. [6], стр. 335), что суперпозиция борелевских отображений классов α и β будет, вообще говоря, борелевское отображение класса $\alpha + \beta$. В частности, суперпозиция борелевского отображения с непрерывным в любом порядке не меняет класса борелевского отображения. Однако применение борелевского отображения класса α к простому отображению дает борелевское отображение класса α, хотя в обратном порядке это не так – применение простого отображения к борелевскому отображению первого класса может давать борелевское отображение второго класса.

Т е о р е м а 6. *Если отображение $f\colon X \to Y$ простое, а отображение $g\colon Y \to Z$ борелевского класса $\alpha \geqslant 1$, то суперпозиция $gf\colon X \to Z$ – отображение борелевского класса α.*

4. Напомним (см. [6], § 12) определение следующего класса множеств. Множество $A \subset X$ в топологическом пространстве X называется р а з л о ж и м ы м, если существует трансфинитная монотонно убывающая последовательность замкнутых множеств $\{\mathscr{F}_\xi\}$ такая, что $A = (\mathscr{F}_1 \setminus \mathscr{F}_2) \cup (\mathscr{F}_3 \setminus \mathscr{F}_4) \cup \ldots \cup (\mathscr{F}_\xi \setminus \mathscr{F}_{\xi+1}) \cup \ldots$

Введем следующий класс отображений.

О п р е д е л е н и е 5. Отображение $f\colon X \to Y$ называется р а з л о ж и м ы м, если для любого открытого множества $L \subset Y$ прообраз $f^{-1}(L) \subset X$ – разложимое множество.

К л а с с р а з л о ж и м ы х о т о б р а ж е н и й $f\colon X \to Y$ обозначим $D(X, Y)$.

Так как разложимость множества – наследственное свойство, то для разложимого отображения $f\colon X \to Y$ его сужение $f|_B$ на любое подмножество $B \subset X$ – разложимое отображение.

5. Введем следующий класс отображений, характеризуемый множеством точек разрыва.

О п р е д е л е н и е 6. Отображение $f\colon X \to Y$ с л а б о р а з р ы в н о, если для любого множества $A \subset X$ сужение $f|_A$ имеет нигде не плотное в топологическом пространстве A множество точек разрыва.

К л а с с с л а б о р а з р ы в н ы х о т о б р а ж е н и й $f\colon X \to Y$ обозначим $WD(X, Y)$.

Из определения вытекает, что сужение слаборазрывного отображения на любое подмножество есть слаборазрывное отображение. Отметим также, что если в определении 6 заменить слова "для любого множества $A \subset X$" на "для любого замкнутого множества $A \subset X$", то получим эквивалентное определение.

Суперпозиция и топологическое произведение конечного числа слаборазрывных отображений – слаборазрывное отображение.

6. Для функции f с областью определения в топологическом пространстве X и с множеством значений в топологическом пространстве Y мы ввели определением 2 понятие строгой регуляризуемости.

Непосредственно из определения 2 вытекает строгая регуляризуемость суперпозиций строго регуляризуемых функций.

Т е о р е м а 7. *Если функция f, действующая из топологического пространства X в топологическое пространство Y, и функция g, действующая из топологического пространства Y в топологическое пространство Z, строго регуляризуемы, то и суперпозиция gf есть строго регуляризуемая функция.*

Из строгой регуляризуемости непрерывной функции и теоремы 7 вытекает, что строгая регуляризуемость не зависит от вложений области определения и множества значений в объемлющие топологические пространства, поэтому при изучении регуляризуемости функции f из X в Y достаточно изучить регуляризуемость отображения $f|_{D(f)}\colon D(f) \to Y$.

Отметим также, что если $Y = \prod\limits_{i=1}^{n} Y_i$, $n \in \mathbf{N}$, где $p_i\colon Y \to Y_i$ – проекторы, то функция f строго регуляризуема тогда и только тогда, когда строго регуляризуема каждая функция $f_i \equiv p_i f$.

В случае метрических пространств X, Y строгая регуляризуемость функции f эквивалентно существованию апостериорных оценок погрешности приближенного вычисления функции f в смысле [8], т.е. существованию двух однопараметрических семейств отображений $g_\delta: X \to Y$, $\chi_\delta: X \to [0, \infty[$ таких, что для всех $x \in D(f)$ $\lim_{\delta \to 0} \chi_\delta(x) = 0$; для всех $x \in D(f)$ существует $\delta_0 \in]0, \infty[$ такое, что для всех $\delta \in]0, \delta_0]$ и всех $x' \in X$, $\rho(x, x') < \delta$

$$\rho(f(x), g_\delta(x')) \leqslant \chi_\delta(x').$$

7. Введенные классы функций связаны следующим образом.

Теорема 8. *Если X – метрическое пространство, Y – регулярное топологическое пространство, то*

$$S(X, Y) \supset UC(X, Y) = SR(X, Y) \supset WD(X, Y) = D(X, Y),$$

а если, кроме того, пространство X полно, то

$$S(X, Y) = UC(X, Y) = SR(X, Y) = WD(X, Y) = D(X, Y).$$

Теорема 8 позволяет перенести свойства, установленные для одного класса отображений, на другие классы.

Пример 1. $X = [0,1]$, $Y = \mathbf{R}$, f: $X \to Y$ – функция Римана. Известно, что $f \in 1\mathrm{Borel}(X, Y)$. Множество точек разрыва функции Римана всюду плотно на $[0, 1]$, поэтому функция Римана не слаборазрывна. Итак, $f \in 1\mathrm{Borel}(X, Y) \setminus WD(X, Y)$. По теоремам 1 и 8 тогда $f \in R(X, Y) \setminus SR(X, Y)$.

Пример 2. Пусть $\mathbf{Q} \subset [0, 1]$ – множество рациональных чисел, $N \subset [0, 1]$ – счетное всюду плотное подмножество иррациональных чисел. Положим $X = \mathbf{Q} \cup N$ – метрическое пространство с естественной метрикой. Определим отображение α: $X \to \mathbf{R}$ правилом

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in N, \\ 1, & \text{если } x \in \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Отображение α преднепрерывное, так как все пространство X есть объединение счетного семейства одноэлементных множеств, но отображение α не слаборазрывно, так как множество его точек разрыва всюду плотно, т.е. $\alpha \in UC(X, Y) \setminus WD(X, Y)$ и включение $SR(X, Y) \supset WD(X, Y)$ в теореме 8, вообще говоря, строгое.

Вопрос о строгости включения $S(X, Y) \supset UC(X, Y)$ остается открытым даже для случая $X \subset [0, 1]$, $Y = \mathbf{R}$.

Московский авиационный технологический институт им. К.Э. Циолковского

Поступило 27 II 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baire R.* – Ann. Math., 1899, vol. 3, p. 1–123. 2. *Винокуров В.А.* – ЖВМиМФ, 1971, т. 11, № 5, с. 1097–1112. 3. *Винокуров В.А.* Приближенное вычисление функции с неточно заданным аргументом. Докт. дис. М.: МГУ, 1980. 289 с. 4. *Винокуров В.А.* – ДАН, 1979, т. 246, № 5, с. 1033–1037. 5. *Винокуров В.А.* – ДАН, 1975, т. 220, № 2, с. 269–272. 6. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1966, т. 1. 594 с. 7. *Тихонов А.Н.* – Math. Ann., 1929, vol. 102, p. 544–562. 8. *Винокуров В.А., Гапоненко Ю.А.* – ДАН, 1982, т. 263, № 2, с. 277–280.